Vorwort.

In der Voraussetzung, daß es für manchen meiner Fachgenossen nicht ohne Interesse sein dürfte, zu erfahren, in welchem Umfange und in welcher Weise sein Unterrichtsgegenstand an einer anderen Anstalt getrieben wird, lege ich hiermit das Pensum unserer Prima in der Mathematik vor. Ich habe mich bemüht, nicht blos die mathematische, sondern auch die pädagogische Methode anzudeuten, und bin deshalb an manchen Stellen wohl etwas breiter geworden, als es sonst nöthig gewesen wäre.

Zur Sache selbst muß ich vorausschicken, daß die Vertheilung des Unterrichtsstoffes zum Theil dadurch bedingt ist, daß sowohl in die Unter- wie Ober-Prima halbjährlich neue Schüler eintreten.

Die ebene Trigonometrie, die wir früher erst, nachdem die Stereometrie in der Secunda behandelt worden, in der Prima vortrugen, muß jetzt zu Folge des neuen Reglements auch schon in der Secunda gelehrt werden. Weil aber dadurch der Unterrichtsstoff in dieser Klasse so angewachsen ist, daß er nicht genügend verarbeitet werden kann, so ist es nöthig, das Pensum der Secunda in der Prima gründlich zu repetiren, zu erweitern und durch Aufgaben einzuüben.

Daher werden in der Unter-Prima 3 Stunden der Trigonometrie und der Rechnung mit Logarithmen gewidmet; die 4te Stunde wird, und zwar nicht blos im Sommer, sondern auch im Winter, darauf verwendet, die 5 bis 6 geometrischen Constructionsaufgaben, welche die Schüler wöchentlich zur häuslichen Bearbeitung erhalten, durchzunehmen. Im Winterhalbjahre werden in den übrigen 3 Stunden die mathematische und geometrische Reihe, die Zinseszinsrechnung, die quadratischen

Gleichungen mit mehreren Unbekannten durchgenommen, practische Aufgaben für Gleichungen des ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten gerechnet, Reductionen geübt, endlich die Stereometrie repetirt und erweitert.

In Ober-Prima wird eine Stunde das ganze Jahr hindurch auf den mündlichen Vortrag der zur häuslichen Uebung gegebenen Aufgaben aus der Planimetrie, Stereometrie, Trigonometrie, Zinseszinsrechnung u. s. w. verwendet. In den übrigen 3 Stunden werden die cubischen Gleichungen, die incommensurabeln Größen und irrationalen Zahlen, der binomische Lehrsatz, und wenn es die Zeit gestattet, die Kettenbrüche vorgetragen. Im Winter sind der Mathematik 5 Stunden eingeräumt, von denen eine, wie schon erwähnt, auf Aufgaben aus früheren Theilen der Mathematik verwendet, vier der analytischen Geometrie und der Berechnung der Logarithmen gewidmet werden.

Obwohl von den Logarithmen schon in der Secunda so viel gegeben wird, als zum Verständniß des Gebrauchs der Logarithmentafeln erforderlich ist, so habe ich doch der besseren Uebersicht wegen auch diesen Theil mit aufgenommen. In der analytischen Geometrie ist der Unterrichtsstoff deshalb bis auf das Minimum beschnitten, weil diejenigen Schüler, welche zu Ostern in die Ober-Prima eintreten, oft schon nach kaum 4 Monaten, nachdem sie die analytische Geometrie begonnen haben, die Abiturienten-Arbeiten schreiben, und daher, wenn auch nur ganz leichte Aufgaben daraus müssen lösen können. Es ist deshalb nothwendig, viel Zeit auf Einübung des Gelernten durch Aufgaben zu verwenden. Aus demselben Grunde kann auch in die Methode weniger Mannigfaltigkeit gebracht werden, als sonst wohl wünschenswerth wäre.

Trappe.

Das Pensum der Prima in der Mathematik.

Die Logarithmen.

Wenn man eine ganze positive Zahl (außer Eins) in die 2., 3. u. s. w. Potenz erhebt, so erhält man eine größere und größere Zahl, weil dadurch, daß der Exponent um Eins größer wird, ein Factor hinzutritt, welcher größer als Eins ist. Eine solche Zahl wird aber auch dadurch größer, daß man ihren Potenz-Exponenten um einen echten Bruch vergrößert, so daß also z. B. $3^{4+\frac{2}{5}} > 3^4$ ist.

Beweis. $3^{4+\frac{2}{5}} = 3^4 . 3^{\frac{2}{5}} = 3^4\sqrt[5]{3^2}$. Nun ist $\sqrt[5]{3^2}$ einer von den 5 gleichen Factoren, deren Product $= 3^2$, d. i. 9 ist. 5 Factoren, deren jeder Eins ist, geben aber Eins; sollen also die 5 gleichen Factoren 9 geben, so muß jeder derselben größer als Eins sein, also $\sqrt[5]{3^2} > 1$ und folglich $3^4\sqrt[5]{3^2}$, d. i. $3^{4+\frac{2}{5}} > 3^4$. Ebenso wird nun der allgemeine Beweis geführt, daß $a^{b+\frac{c}{d}} > a^b$, wenn a, c und d ganze positive Zahlen sind. — Warum sollen diese Zahlen ganze positive sein, und nicht auch b? — Es ist somit der Satz bewiesen: Die Potenz einer ganzen positiven Zahl wird größer, wenn man den Exponenten vergrößert.

Hieraus folgt, daß man alle positiven Zahlen von der Zahl 3 aufwärts als Potenzen von 3 ausdrücken kann; denn denkt man sich in der Größe 3^1 den Exponent 1 um unendlich wenig vergrößert, dann wieder um unendlich wenig vergrößert und so fort, bis aus dem Exponent 1 der Exponent 2 geworden ist, so haben diese Potenzen von 3 unendlich viele Zahlen durchlaufen, deren Werthe von 3 bis 9 fortschreiten und von denen, weil es unendlich viele Zahlen sind, die aufeinanderfolgenden sich auch nur um unendlich wenig von einander unterscheiden können; es müssen also unter ihnen auch die Zahlen 4, 5, 6, 7, 8 sein oder doch Zahlen, die sich von diesen unendlich wenig unterscheiden. Eine unendlich kleine Differenz kann aber ohne Fehler gleich Null gesetzt werden. In derselben Weise ergiebt sich, daß die Zahlen 10, 11.... bis 26 als Potenzen von 3 ausgedrückt werden können und so fort.

Aus dem Satze: Wenn man den Potenz-Exponenten einer ganzen positiven Zahl vergrößert, so erhält man als Potenz eine größere Zahl, folgt von selbst: Wenn man den Potenz-Exponenten verkleinert, so erhält man eine kleinere Zahl. Wenn man daher in 3^1 den Exponenten 1 kleiner und kleiner werden läßt, so erhält man immer kleinere Zahlen; ist er $= 0$, so erhält man 1, und läßt man ihn nun von 0 an negativ immer größer werden, so daß man unter den Potenzen auch 3^{-1}, 3^{-2}, 3^{-3}..... erhält, so sind dies die echten Brüche von 0 abwärts; denn $3^{-1} = \frac{1}{3}$, $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$..... Der Exponent des Nenners wird immer größer, also der Bruch immer kleiner.

Da offenbar die Folgerungen, die wir hier für die Zahl 3 gemacht, auch für jede andere ganze positive Zahl Geltung haben, so ist der Satz bewiesen: Alle Zahlen lassen sich als Potenzen ein und derselben ganzen positiven Zahl darstellen (nur die negativen nicht).

In diesem Falle nennt man die Potenz-Exponenten Logarithmen und die Zahl, als deren Potenzen man die übrigen Zahlen darstellt, Grundzahl des Logarithmensystems. (Kann die Grundzahl auch eine negative oder ein Bruch sein? Die Logarithmen der negativen Zahlen für eine positive Grundzahl sind unmöglich.)

Man nennt daher z. B. 2 den Logarithmus von 9 für die Grundzahl 3 und schreibt das: $2 = \overset{3}{\log} 9$., ferner ist $\overset{4}{\log} 64 = 3$ und $\overset{2}{\log} 64 = 6$. Im Allgemeinen: $\overset{b}{\log} a$ ist der Potenz-Exponent, den man zu b setzen muß, um die Zahl a zu erhalten.

Da die Logarithmen Potenz-Exponenten ein und derselben Grundzahl sind, so gelten für sie auch dieselben Gesetze wie für diese. Nämlich Erstens: Potenzen von gleicher Grundzahl werden multiplicirt, wenn man ihre Exponenten addirt, d. i. in mathematischen Zeichen ausgedrückt: $a^m a^n = a^{m+n}$.

Es ist also a^{m+n} ein Product und a^m und a^n seine Factoren. Sobald man also die Factoren irgend eines Productes als Potenzen ein und derselben Grundzahl ausdrückt, so ist der Exponent des Productes gleich der Summe der Exponenten seiner Factoren, oder wenn man für Exponent das Wort Logarithmus gebraucht: der Logarithmus eines Productes ist gleich der Summe der Logarithmen seiner Factoren, d. i. in mathematischen Zeichen ausgedrückt:

$$\overset{c}{\log} ab = \overset{c}{\log} a + \overset{c}{\log} b,$$

$$\text{also z. B. } \overset{2}{\log} 8.16 = \overset{2}{\log} 8 + \overset{2}{\log} 16 = 3 + 4.$$

Zweitens: Potenzen von gleicher Grundzahl werden dividirt, wenn man den Exponenten des Divisors von dem des Dividendus abzieht, d. i. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. a^{m-n} ist also ein Bruch, dessen Zähler a^m und dessen Nenner a^n ist. Hieraus folgt: wenn man den Zähler und Nenner eines Bruches als Potenzen derselben Grundzahl ausdrückt, so ist der Potenz-Exponent des Bruches gleich dem des Zählers minus dem des Nenners, oder: der Logarithmus eines Bruches ist gleich dem Logarithmus des Zählers minus dem Logarithmus des Nenners, d. i.

$\overset{c}{\log}\frac{a}{b} = \overset{c}{\log} a - \overset{c}{\log} b$. In derselben Weise werden die Gesetze bewiesen $\overset{b}{\log} a^m = m \overset{c}{\log} a$ und $\overset{c}{\log} \sqrt[m]{a} = \frac{1}{m} \overset{c}{\log} a$.

Zur Uebung lasse ich von den Schülern die vier vorstehenden Gesetze auch noch auf folgende Art entwickeln. Aufgabe: Es soll $\overset{c}{\log} ab$ durch die Logarithmen von a und b für die Grundzahl c ausgedrückt werden. Auflösung: Die Aufgabe enthält die Forderung: Es soll für c der Potenz-Exponent gesucht werden, welcher die Zahl ab giebt, also in der Gleichung $c^x = ab$ die Größe x gesucht werden. Die Gleichung zeigt, daß ab als Potenz von c ausgedrückt werden soll. Stelle a und b als Potenz von c dar. Da a, b und c unbestimmte Zahlen sind, so können auch die Potenz-Exponenten von c nur unbestimmte Zahlen sein. Es sei daher $a = c^m$ und also $m = \overset{c}{\log} a$ und $b = c^n$, also $n = \overset{c}{\log} b$; folglich $ab = c^{m+n}$, demnach $\overset{c}{\log} ab = m + n = \overset{c}{\log} a + \overset{c}{\log} b$. In derselben Weise werden die anderen 3 Formeln entwickelt.

Bemerkung. Folgenden Satz füge ich bei Gelegenheit einer allgemeinen Repetition an, wenn die Schüler schon mit dem Gebrauche der Logarithmentafeln vertraut sind.

Setzt man in die Formel $\overset{c}{\log} a^b = b.\overset{c}{\log} a$ $a^b = m$, so daß $b = \overset{a}{\log} m$, so erhält man $\overset{c}{\log} m = \overset{a}{\log} m \overset{c}{\log} a$, d. i. $\overset{a}{\log} m = \frac{\overset{c}{\log} m}{\overset{c}{\log} a}$. Vermittelst dieser Formel lassen sich, wenn die Logarithmen für eine Grundzahl berechnet sind, die Logarithmen für jede andere Grundzahl finden, z. B. $\overset{17}{\log} 8 = \frac{\overset{10}{\log} 8}{\overset{10}{\log} 17}$ oder $\overset{16}{\log} 8 = \frac{\overset{10}{\log} 8}{\overset{10}{\log} 16} = \frac{\overset{3}{\log} 8}{\overset{3}{\log} 16} = \frac{\overset{2}{\log} 8}{\overset{2}{\log} 16} = \frac{3}{4}$.

Unsere Logarithmentafeln sind eine tabellarische Zusammenstellung der Logarithmen der ganzen positiven Zahlen von 1 bis 100000 und darüber für die Grundzahl 10, aus denen man dann auch leicht die Logarithmen der 6-, 7- und 8stelligen Zahlen finden kann. Diese Logarithmen heißen Briggische. Zum Verständniß derselben ist die Kenntniß einiger Eigenschaften derselben erforderlich, die wir hier angeben wollen.

Es ist $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, $10^4 = 10000$ u. s. w. Hieraus ergiebt sich Erstens: $\overset{10}{\log} 1 = 0$ und $\overset{10}{\log} 10 = 1$. Es ist aber auch für jede andere Grundzahl $\log 1 = 0$ und log. der Grundzahl = 1. Warum?

Zweitens: Die Logarithmen aller Zahlen, welche mit 1 und angehängten Nullen geschrieben werden, sind ganze Zahlen und zwar von so viel Einheiten, als Nullen hinter der Eins stehen, und umgekehrt: Jede ganze Zahl ist Logarithmus von Eins mit so viel Nullen, als die Zahl Einheiten hat.

Drittens: Die Logarithmen aller Zahlen zwischen 1 und 10, also der einstelligen Zahlen, sind größer als 0 und kleiner als 1, also 0 mit Decimalstellen. Die Logarithmen der Zahlen wischen 10 und 100, d. i. aller zweistelligen Zahlen = 1 mit Decimalstellen u. s. w. Im Allgemeinen: der Logarithmus jeder Zahl besteht aus so viel ganzen Einheiten, als die Zahl Stellen hat weniger 1 und Decimalstellen. Die ganze Zahl des Logarithmus heißt Charakteristik (warum?), die Decimalstellen Mantisse (d. i. Zugabe). Es wird später gezeigt werden, daß die Mantissen der Logarithmen aller ganzen Zahlen unendliche nicht periodische Decimalbrüche (oder 0) sind.

Viertens: Da es 9 einstellige, 90 zweistellige, 900 dreistellige, 9000 vierstellige ꝛc. ganze Zahlen giebt und die Logarithmen der einstelligen um Eins fortschreiten ($\log 1 = 0$ und $\log 10 = 1$), ebenso die Logarithmen der zweistelligen, ebenso die der dreistelligen ꝛc. um je Eins fortschreiten, so müssen die Logarithmen der zweistelligen Zahlen langsamer wachsen, als die Logarithmen der einstelligen, die der dreistelligen langsamer als die der vierstelligen u. s. w. Daher stimmen, wie ein Blick in die Logarithmen-Tafeln lehrt, immer eine ganze Menge von aufeinanderfolgenden Logarithmen der vierstelligen Zahlen in den ersten 3 Decimalstellen überein. Es stimmt aber auch eine desto größere Menge überein, d. h. die Logarithmen wachsen desto langsamer, je größer die Zahlen werden. Denn z. B. $\log 2729 = 3{,}436$, $\log 2736 = 3{,}437$; also $10^{3.436} = 2729$ und $10^{3.437} = 2736$, d. i. $10^{3.436} . 10^{0.001} = 2729 + 7$. Dadurch also, daß zu der Zahl $10^{3.436}$ der Factor $10^{0.001}$ gekommen ist, ist die Zahl um 7 größer geworden. Setzt man aber zu einer größeren Zahl, etwa zu $10^{3.853}$, welches $= 7129$ ist, denselben Factor $10^{0.001}$, so erhält man 7145, d. i. $7129 + 16$, also eine um 16 größere Zahl; also stimmen hier die Logarithmen von 16 Zahlen in ihren 3 ersten Decimalstellen überein, während im vorigen Beispiele nur 7 Logarithmen in diesen Stellen übereinstimmen.

Der Grund, warum immer mehr Logarithmen von aufeinanderfolgenden Zahlen in den 3 ersten Decimalstellen übereinstimmen, ist also der, daß, wenn man zu 2 verschiedenen Zahlen ein und denselben Factor setzt, die größere Zahl dadurch mehr wächst, als die kleinere.

Es folgt nun die Unterweisung der Schüler im Gebrauche der Logarithmentafeln und Uebung durch Beispiele. Dabei wird noch nachgewiesen, warum sich die Mantisse des Logarithmus einer vierstelligen Zahl nur in den 4 letzten Stellen ändert, wenn man eine 5. Stelle anhängt, obwohl die entstandene Zahl ihrer Größe nach von der ursprünglichen so weit entfernt ist. Z. B. $\log 1395 = 3{,}1445742$ und $\log 13956 = 4{,}1447610$. Es ändert sich nämlich durch Anhängung einer Null die Mantisse gar nicht, und setzt man dann statt der Null eine andere Zahl, so ist diese von den vorigen höchstens um 9 verschieden, daher $\log 13950 = \log (1395 . 10) = 4{,}1445742$. Die Zahl 13956 unterscheidet sich aber von 13950 nur um 6 Einheiten, also kann auch $\log 13956$ von $\log 13950$ nur wenig unterschieden sein. In derselben Weise ergiebt sich, daß durch Anhängung einer 6. Stelle an eine fünfstellige Zahl die Mantisse des Logarithmus sich nur wenig vergrößert, und zwar um noch weniger, als wenn man an eine vierstellige Zahl eine fünfte Stelle anfügt.

Berechnung der Logarithmen-Tafeln.

Bemerkung. Dies Kapitel wird erst in Oberprima vorgetragen, wo die Schüler mit den Reihen und der Zinseszinsrechnung bekannt sind.

Es ist bekannt, daß, so oft man viele Rechnungs-Aufgaben einerlei Art zu lösen hat, man am schnellsten zum Ziele kommt, wenn man eine solche Aufgabe in unbestimmten Zahlen löst und dann in den gefundenen Ausdruck für die Buchstaben die bestimmten Zahlen einsetzt. So haben wir für die Aufgaben der Zinseszinsrechnung die Formel gefunden $x = c\left(\frac{100+p}{100}\right)^a$, wo x die Summe bedeutet, zu welcher ein Kapital von c Thlr. in a Jahren anwächst, wenn es zu p Procent verzinst wird und jährlich die Zinsen dazu geschlagen werden. Oder für die Summe jeder arithmetischen Reihe $S = \left(\frac{a+u}{2}\right)n$, wo S die Summe, a das erste, u das letzte Glied und n die Anzahl der Glieder bedeutet.

Man sieht hieraus, daß das Resultat solcher Aufgaben (wie aller Rechnungs-Aufgaben) eine Zusammensetzung, d. i. eine Function der gegebenen Größen ist. Und das ist nothwendig; warum? Es ist ferner einleuchtend, daß wenn man ein und dieselbe Rechenaufgabe nach verschiedenen Methoden löst, man auch als Resultate Functionen von verschiedener Form erhalten kann.

Sollen nun die Logarithmen der ganzen Zahlen für eine bestimmte Grundzahl, etwa für 10, berechnet werden; so sind das Aufgaben derselben Art, und man wird daher $\overset{b}{\log} x$ oder $\overset{b}{\log}(1+x)$ zu berechnen haben. Das Resultat muß nach dem Obigen eine Function von b und x sein, und es soll versucht werden, das Resultat als eine Reihe von ganzen positiven Potenzen von x darzustellen. Da diese Potenzen nicht alle den Coefficient 1 haben werden, so sei $\overset{b}{\log}(1+x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots\ldots$, und es kommt nun darauf an, die Größen $A, B, C, D \ldots$ zu bestimmen.

Bemerkung. In dieser Gleichung ist x nicht die zu findende Größe, sondern die unbestimmte, für welche beliebige Werthe (1, 2, 3...) gesetzt werden sollen. In einem solchen Falle heißt x eine veränderliche Größe.

Wenn $x = 0$ gesetzt wird, so erhält man $\overset{b}{\log} 1 = A$, d. i. $0 = A$. A ist aber auch $= 0$, wenn x nicht $= 0$ gesetzt wird, weil nach Voraussetzung A eine von x unabhängige Größe, d. h. eine Größe ist, in welcher x nicht vorkommt. Nun ist

$$\overset{b}{\log}(1+x)^2 = 2\overset{b}{\log}(1+x) = 2Bx + 2Cx^2 + 2Dx^3 \ldots\ldots$$

Es ist aber auch $\overset{b}{\log}((1+x)^2) = \log(1+x(2+x)) = Bx(2+x) + Cx^2(2+x)^2 + Dx^3(2+x)^3 \ldots\ldots$

$$\text{Folglich } 2Bx + 2Cx^2 + 2Dx^3 \ldots\ldots = Bx(2+x) + Cx^2(2+x)^2 \ldots\ldots$$

$$\text{d. i. } = 2Bx + (B+4C)x^2 + (4C+8D)x^3 + (C+12D+16E)x^4 \ldots\ldots$$

Diese Gleichung ist für jeden Werth von x richtig, weil die ersten beiden Gleichungen für jeden Werth von x gelten; sie ist also eine identische Gleichung.

Dividirt man durch x, so erhält man $2B + 2Cx + 2Dx^2 + 2Ex^3 \ldots\ldots = 2B + (B+4C)x + (4C+8D)x^2 + (C+12D+16E)x^3 \ldots\ldots$ Setze, da dem x jeder beliebige Werth gegeben werden kann, $x=0$, so erhält man $B=B$. Subtrahire auf beiden Seiten $2B$, dividire durch x und setze wieder $x=0$, so erhält man $C=-\frac{B}{2}$. Subtrahire die gleichen Größen $2C$ und $B+4C$, dividire durch x und setze $x=0$, so erhält man $D=\frac{1}{3}B$ u. s. w.

Hiermit ist zugleich das allgemeine Gesetz bewiesen: In jeder identischen Gleichung, deren Seiten nach den Potenzen von x fortschreiten, sind die Coefficienten der gleichen Potenzen von x einander gleich. — Beweise dies Gesetz selbstständig. — Demnach ist (I) $\overset{b}{\log}(1+x)=B(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\ldots.)$ und es bleibt nur noch B zu bestimmen übrig, welches nothwendig eine Function von b sein muß; warum? Man erreicht dies, wenn man dem x einen solchen Werth giebt, daß $\overset{b}{\log}(1+x)$ einen bekannten Werth erhält, etwa $x=b-1$; dann ist $\overset{b}{\log} b$, d. i. $1=B(b-1-\frac{1}{2}(b-1)^2+\frac{1}{3}(b-1)^3\ldots.$, also $B=\dfrac{1}{b-1-\frac{1}{2}(b-1)^2+\ldots.}$ und setzt man nun $b=10$, so ist $B=\dfrac{1}{9-\frac{1}{2}9^2+\frac{1}{3}9^3\ldots.}$. Der Nenner ist nun aber eine divergirende Reihe, deren Summe sich auch nicht einmal annähernd berechnen läßt. Erkläre, was eine divergirende und convergirende Reihe ist. Für die Grundzahl 10 ist also der obige Ausdruck nicht brauchbar; aber für welche Werthe von b würde er brauchbar sein und für welche würde die Reihe sehr schnell convergiren?

Setzt man in die Gleichung (I) statt x, $-x$, so erhält man $\overset{b}{\log}(1-x)=B(-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\ldots.)$; dann ist $\overset{b}{\log}(1+x)-\overset{b}{\log}(1-x)$, d. i.: $\overset{b}{\log}\dfrac{1+x}{1-x}=2B(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\ldots.)$ und $\dfrac{1+x}{1-x}=y$ gesetzt, so daß $x=\dfrac{y-1}{y+1}$, giebt (II) $\overset{b}{\log} y=2B\left(\dfrac{y-1}{y+1}+\frac{1}{3}\left(\dfrac{y-1}{y+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\dfrac{y-1}{y+1}\right)^5\ldots.\right)$. Setze $y=b$, so ist $\overset{b}{\log} b$, d. i.: $1=2B\left(\dfrac{b-1}{b+1}+\frac{1}{3}\left(\dfrac{b-1}{b-1}\right)^3\ldots.\right)$ und $B=\dfrac{1}{2\left(\dfrac{b-1}{b+1}+\frac{1}{3}\left(\dfrac{b-1}{b+1}\right)^3\ldots\right)}$

Wird hierein $b=10$ gesetzt, so erhält man $B=\dfrac{1}{2\left(\dfrac{9}{11}+\frac{1}{3}\left(\dfrac{9}{11}\right)^3\ldots.\right)}$. Diese Reihe des Nenners convergirt und zwar so schnell, daß man B leicht bis auf 7 Decimalstellen richtig berechnen kann. Wie viel Glieder des Nenner sind dazu ungefähr zu berechnen? Man erhält dann $B=0{,}4342944..$ B heißt Modulus des Logarithmensystems. Warum?

Es ist demnach $\overset{10}{\log}(1+x)=0{,}4342944\ (x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\ldots.)$. Hieraus scheinen nun die Logarithmen aller Zahlen berechnet werden zu können, indem man $x=1, 2, 3\ldots.$ setzt. Wenn man aber $x=1$ einsetzt, so erhält man $\overset{10}{\log}2=0{,}4342\ldots\ (1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ldots.)$, eine Reihe, welche zwar convergirt, aber so langsam, daß man 10 Millionen Glieder berechnen müßte, um 7 Decimalstellen richtig zu erhalten; und für $x=2, 3\ldots$ würde man gar eine divergirende Reihe erhalten. Setzt man aber in Gleichung (II) $y=2$, so ist $\overset{10}{\log}2=2.0{,}4342\ldots\ (\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(\frac{1}{3})^3+\frac{1}{5}(\frac{1}{3})^5\ldots.)$ und diese Reihe convergirt hinreichend schnell; auch für $y=3$ erhält man noch eine genügend convergirende Reihe. Je größere Werthe man aber dem y giebt, eine desto langsamer convergirende Reihe erhält man, weil dadurch die Größe $\frac{y-1}{y+1}$ sich immer mehr der Zahl 1 nähert. Es muß also noch ein anderer Weg eingeschlagen werden. Man würde für größere Zahlen eine convergirende Reihe bekommen, wenn die veränderliche Größe in den Nenner der einzelnen Glieder zu stehen käme. Setze daher in Gleichung (I) $x = \frac{1}{z}$, so ist: $\overset{b}{\log}\left(1 + \frac{1}{z}\right)$, d. i. $\log\left(\frac{z+1}{z}\right)$, d. i. $\overset{b}{\log}(z+1) - \overset{b}{\log} z$ $= B\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z}\right)^3 \ldots\right)$.

Wenn man hierein $z = 4$ und $b = 10$ setzt, so ist $\overset{10}{\log} 5 = \overset{10}{\log} 4 + 0{,}4342\ldots\ (\frac{1}{4} - \frac{1}{2}(\frac{1}{4})^2 + \frac{1}{3}(\frac{1}{4})^3 \ldots)$.

Hieraus läßt sich $\overset{10}{\log} 5$ berechnen, da die Reihe schnell genug convergirt und $\overset{10}{\log} 4$ sich aus $\overset{10}{\log} 2$ ergiebt.

Eine je größere Zahl man für z setzt, desto weniger Glieder braucht man zu berechnen, und für die größeren vierstelligen Zahlen ist schon das 2. Glied nicht mehr von Einfluß auf die 7 ersten Decimalstellen.

Aus den Logarithmen der fünfstelligen Zahlen lassen sich leicht die der sechsstelligen berechnen, nämlich: Setzt man in Gleichung (I) $x = \frac{d}{z}$, so ist

$$\log\left(1 + \frac{d}{z}\right),\ \text{d. i. } \log(z+d) - \log z = B\left(\frac{d}{z} - \frac{1}{2}\frac{d^2}{z^2} + \frac{1}{3}\frac{d^3}{z^3} \ldots\right).$$

Ist nun z eine sechsstellige und d eine ein- oder zweistellige Zahl, so ist schon das 2. Glied ohne Einfluß auf die ersten 7 Decimalstellen; also kann man setzen $\overset{b}{\log}(z+d) - \overset{b}{\log} z = B\frac{d}{z}$. Unter denselben Bedingungen für z und δ ist $\overset{b}{\log}(z+\delta) - \log z = B\frac{\delta}{z}$, folglich $\frac{\overset{b}{\log}(z+d) - \log z}{\overset{b}{\log}(z+\delta) - \log z} = \frac{d}{\delta}$, d. h. in Worten?

Ist daher $z = 568950$, $d = 10$ und $\delta = 1$, so ist $\frac{\overset{10}{\log} 568960 - \log 568950}{\overset{10}{\log} 568951 - \log 568950} = \frac{10}{1}$.

Der Zähler des ersten Bruches ist die Zahl, um welche log 568960 größer ist, als log 568950, d. i. um welche log 56896, größer ist, als log 56895 und diese kann man durch Subtraction leicht finden (d. i. die herrschende Differenz suchen). Der Nenner ist die Zahl, welche man zu log 56895 addiren muß, um log 568951 zu erhalten, d. i. Proportionaltheil für die Zahl 1. Dieser ist also, wie die Gleichung ausdrückt, der 10. Theil der herrschenden Differenz. Hätte man anstatt 568951 die Zahl 568952 genommen, so hätte man als rechte Seite die Gleichung $\frac{10}{2}$ erhalten, d. h. der Proportionaltheil für 2 ist $\frac{2}{10}$ der herrschenden Differenz, also zweimal so groß als der für 1 u. s. w. Auf dieselbe Weise wird nachgewiesen, daß für jede Einheit der 7. Stelle $\frac{1}{100}$ der herrschenden Differenz oder $\frac{1}{10}$ der Proportionaltheile für 1 zum Logarithmus der ersten 5 Stellen zu addiren sind.

Aus dem Vorgetragenen ergiebt sich, daß die Berechnung der Logarithmen-Tafeln zwar eine große, aber doch nicht eine so umfangreiche Arbeit ist, als es auf den ersten Blick erscheinen mag, zumal wenn man berücksichtigt, daß durch die Formeln nur die Logarithmen der Primzahlen zu berechnen sind, die der übrigen Zahlen aber durch einfache Addition der Logarithmen der Primzahlen erhalten werden.

Erklärung. Diejenigen Logarithmen, deren Modulus $= 1$ ist, heißen natürliche Logarithmen; man erhält sie aus den Briggischen (wie sich aus Gleichung $\overset{b}{\log}(1+x) = B(x - \frac{1}{2}x^2 \ldots.)$ ergiebt), indem man diese durch den Modulus 0,4342... dividirt. Ihre Grundzahl läßt sich auf folgende Weise finden. Es war $\overset{c}{\log} a = \frac{\overset{b}{\log} a}{\overset{b}{\log} c}$. Setzt man hierein $a =$ irgend einer Zahl, etwa $= 10$, $b = 10$ und $c =$ der Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems $= x$, so ist $\log.\text{nat}.\,10 = \frac{1}{\overset{10}{\log} x}$, d. i. $\frac{1}{0{,}4342\ldots} = \frac{1}{\overset{10}{\log} x}$ und hieraus $x = \text{num}.\,\overset{10}{\log} 0{,}4342\ldots = 2{,}7182818$.

Die arithmetische Reihe.

Erklärungen. Eine Reihe von Zahlen, von denen jede folgende um ein und dieselbe Zahl größer ist, als die vorangehende, heißt eine arithmetische Reihe oder arithmetische Progression. Die einzelnen Größen der Reihe heißen Glieder der Reihe; die Zahl, um welche jedes folgende Glied größer ist, als das vorangehende, die Differenz. Ist die Differenz eine positive Zahl, so heißt die Reihe eine steigende, ist sie eine negative, eine fallende. — Beispiele in bestimmten Zahlen. —

Es ist klar, daß man aus irgend einem Gliede das folgende erhält, wenn man zu diesem Gliede die Differenz addirt, und daß man, wenn zwei aufeinanderfolgende Glieder gegeben sind, die Differenz erhält, wenn man das vorangehende von dem nachfolgenden subtrahirt. Wie heißt das 98. Glied der Reihe 4, 7, 10, 13.....? Die Lösung wird leicht, wenn man die Aufgabe in unbestimmten Zahlen löst. Es soll daher das 98. Glied der Reihe gesucht werden, deren 1. Glied a und deren Differenz d ist, also der Reihe a, $a + d$, $a + 2d$, $a + 3d\ldots..$, durch diese Reihe sind alle arithmetischen Reihen dargestellt, d. h. man erhält jede beliebige Reihe, wenn man für a und d die betreffenden Zahlen einsetzt. Sie ist daher die allgemeine Form der arithmetischen Reihe. Man erkennt aus obigen ersten Gliedern, daß jedes Glied zusammengesetzt ist aus dem ersten Gliede und dem so Vielfachen der Differenz, als die Stellenzahl angiebt, weniger Eins. Dies Gesetz läßt sich in Zeichen so schreiben: $u = a + (n - 1)d$ (I), wo u das $n$te Glied, d. i. ein aliquotes Glied, a das erste und d die Differenz bezeichnet. Das 98. Glied der obigen Reihe ist daher $4 + 97.3 = 295$.

Aufgabe. Die Summe der arithmetischen Reihe zu finden.

Es sei z. B. die Reihe 4, 7, 10.....295 zu summiren. Schreibt man dann unter diese dieselbe Reihe, aber in umgekehrter Ordnung, also

$$S = 4 + 7 + 10 \ldots\ldots + 295$$
$$S = 295 + 292 + 289 \ldots\ldots + \quad 4$$

und addirt die untereinanderstehenden Glieder, so erhält man $2S = 299 + 299 + 299 \ldots\ldots + 299$, d. h. die doppelte Summe der Reihe ist gleich der Summe des ersten und letzten Gliedes so oftmal, als die Reihe Glieder hat. Dies Gesetz gilt nicht blos für diese specielle, sondern für jede arithmetische Reihe, denn für jede müssen die Summen der untereinanderstehenden Glieder alle dieselbe Größe, nämlich gleich der Summe des ersten und letzten Gliedes sein, weil in der einen Reihe jedes folgende Glied um ebenso viel Einheiten wächst, als es in der anderen kleiner wird. Das obige Gesetz in mathematischen Zeichen dargestellt: $2S = (a + u)n$, also $S = \frac{(a + u)n}{2}$ (II). Beweise dies Gesetz durch Summirung der Reihe a, $a + d$, $a + 2d, \ldots + u$ und nenne die Gliederzahl n. Das vorletzte Glied ist $u - d$, das vorangehende $u - 2d$ und so fort.

Die zwei Gleichungen (I) und (II) enthalten 5 unbestimmte Größen; so oft also 3 von ihnen gegeben sind, lassen sich die beiden anderen durch Auflösung dieser Gleichungen finden. Wie viel und welche einfache Aufgaben lassen sich demnach für die arithmetische Reihe stellen? Antwort: Es können unbekannt sein: a und d, a und u, a und n u. s. w. Zähle sie vollständig auf und löse sie. Löse auch einige für bestimmte Zahlen. Hierbei ergiebt sich, daß wenn n eine der Unbekannten ist, für die gegebenen Größen nicht beliebige bestimmte Zahlen genommen werden können, weil sich für n eine ganze positive Zahl ergeben muß.

Die geometrische Reihe.

Eine Reihe von Zahlen, von denen jede folgende immer dasselbe Vielfache der vorangehenden ist, wird eine geometrische Reihe oder geometrische Progression genannt. Die Zahl, welche angiebt, wie viel mal so groß jedes folgende Glied ist, als das vorangehende, heißt Reihen-Exponent. Ist dieser größer als Eins, so ist die Reihe eine steigende, ist er kleiner, eine fallende; der Reihen-Exponent kann auch eine negative Zahl sein. — Beispiel in bestimmten Zahlen. — Man erhält demnach aus jedem Gliede das folgende, wenn man dasselbe mit dem Reihen-Exponent multiplicirt, aus 2 aufeinanderfolgenden den Reihen-Exponenten, wenn man das nachfolgende durch das vorangehende dividirt. Wie heißt das 98. Glied der Reihe 5, 15, 45......? die allgemeine Form der geometrischen Reihe ist: a, ae, ae^2, ae^3.....; irgend ein Glied (das nte) (I) $u = ae^{n-1}$ (entwickelt wie bei der arithmetischen Reihe), d. h. in Worten? Besteht die Reihe aus n Gliedern, so heißt sie a, ae, ae^2, $ae^3 \ldots\ldots ae^{n-1}$. Demnach ist das oben verlangte 98. Glied $= 5 . 3^{97}$.

Aufgabe. Die geometrische Reihe zu summiren.

Es sei $a + ae + ae^2 + ae^3 \ldots . ae^{n-1} = S$, so ist, wenn man mit e multiplicirt, $ae + ae^2 + ae^3 \ldots . + ae^n = eS$. Folglich $eS - S$, d. i. $(e - 1)\ S = ae^n - a$, also $S = \frac{ae^n - a}{e - 1}$ (II), d. h. in Worten? Summire die Reihe $5 + 15 + 45 \ldots . + 5 . 3^{97}$.

Die beiden Gleichungen (I) und (II) enthalten 5 unbestimmte Größen; sind daher 3 von ihnen gegeben, so lassen sich die beiden anderen finden. Zähle die möglichen Aufgaben wie bei der arithmetischen Reihe auf und löse sie. Dabei ergiebt sich daß, wenn n eine der Unbekannten ist, für die 3 gegebenen Größen nicht beliebige bestimmte Zahlen genommen werden dürfen, und ferner, daß, wenn e eine der Unbekannten ist, die Aufgabe sich nicht immer lösen läßt.

Auch die unendliche Reihe $a, ae, ae^2, ae^3 \ldots .$ in inf. läßt sich summiren, und zwar in derselben Weise, wie die entsprechende endliche. — Führe dies aus. — Man erhält $S = \frac{a}{1 - e}$ (III).

Daß dieser Ausdruck die Reihe darstellt, ergiebt sich, wenn man die durch den Bruch $\frac{a}{1 - e}$ angedeutete Division ausführt. Setzt man einmal für a eine beliebige bestimmte Zahl und für e einen echten Bruch, etwa $a = 3$ und $e = \frac{1}{2}$, so daß die Reihe heißt: $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8} \ldots .$ in inf., so erhält man als deren Summe $S = \frac{3}{1 - \frac{1}{2}} = 6$.

Addire die einzelnen Glieder der Reihe, so ergiebt sich, daß das Resultat sich immer mehr der durch die Formel gefundenen Zahl 6 nähert, je mehr Glieder man addirt. Und dies ist so oft der Fall, als man für e einen echten Bruch setzt.

Erklärung. Eine unendlich große Zahl ist eine Zahl, welche größer, eine unendlich kleine eine solche, welche kleiner als jede denkbare Zahl ist. Das Zeichen für erstere ist ∞, für letztere 0.

Setzt man in die allgemeine geometrische Reihe $e = 1$ und $a = 3$, so daß die Reihe heißt: $3, 3, 3 \ldots$ in inf., so giebt die Formel (III) $S = \frac{3}{0}$. Es fragt sich, was man unter diesem Ausdrucke zu verstehen hat? Setzt man unter die Zahl 3 oder unter irgend eine andere Zahl einen immer kleineren und kleineren Nenner, so wird der Bruch immer größer. — Beispiel. —

Also wenn man als Nenner eine unendlich kleine Zahl setzt, so erhält man eine unendlich große Zahl. Da aber eine unendlich kleine Zahl sich unendlich wenig von 0 unterscheidet, so macht man einen unendlich kleinen Fehler, wenn man statt der unendlich kleinen Zahl 0 setzt, also $\frac{3}{0} = \infty$.

Setzt man für e eine Zahl, welche größer als 1 ist, so erhält man durch Formel (III) eine negative Summe, und doch sollte das Resultat $= \infty$ sein, da die Reihe aus unendlich vielen immer größer werdenden positiven Zahlen besteht. Z. B. für $a = 3$ und $e = 2$ ist $S = 3 + 6 + 12 + 24 \ldots .$ in inf. $= \frac{3}{1 - 2} = - 3$. Der Widerspruch läßt sich dadurch erklären, daß die Aufgabe, eine unendliche Menge von immer größer werdenden Zahlen zu summiren, etwas Unausführbares fordert. Aber dennoch stellt der Ausdruck $\frac{3}{1-2}$ die Reihe $3+6+12+24 \ldots$ in inf. dar; denn wenn man $1-2$ in 3 dividirt und wie bei Buchstaben verfährt, so erhält man diese Reihe. Es könnte scheinen, als ob auch die Reihe 3, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8} \ldots$ in inf. eine unendlich große Summe geben müßte, da man doch auch hier unendlich viele Größen addirt. Da aber die Glieder immer kleiner werden, so werden sie endlich verschwindend klein. Wenn man für a eine beliebige bestimmte Zahl und für e einen echten Bruch setzt, dann diesen immer größer annimmt, so erhält man aus Formel (III) für S eine immer größere Zahl, weil $1-e$ immer kleiner wird. Wenn sich dann e nur um unendlich wenig von Eins unterscheidet, so erhält man $S=\infty$, und sobald man e um unendlich wenig größer als Eins annimmt, $S=-\infty$. Den Fall, daß eine Größe unmittelbar aus $+\infty$ in $-\infty$ übergeht, haben wir auch in der Trigonometrie gehabt. Es ist nämlich $\operatorname{tg} 90^0=\infty$. Wird der Winkel unendlich wenig größer als 90^0, so ist seine $\operatorname{tg}=-\infty$. Ferner, wenn vor einem Kugelhohlspiegel ein leuchtender Punkt im Brennpunkte liegt, so ist sein Bild unendlich weit vor dem Spiegel; rückt der leuchtende Punkt unendlich wenig auf den Spiegel zu, so liegt sein Bild unendlich weit hinter dem Spiegel. Ebenso ist es bei der Convex-Linse.

Zinseszinsrechnung.

Die einfachste Aufgabe der Zinseszinsrechnung ist die, die Summe zu finden, zu welcher ein Kapital in einer gegebenen Zeit anwächst, wenn es zu gegebenen Procenten verzinst wird und jährlich die Zinsen dazu gelegt werden, z. B. zu welcher Summe wächst ein Kapital von 3500 Thlr. in 30 Jahren an, wenn es zu 5% verzinst wird und man die Zinsen jährlich dazulegt?

Nach der gewöhnlichen Methode der Zifferrechnung würde die Aufgabe die Lösung von 30 Regeldetri-Exempeln erfordern. Wir nehmen daher wieder Buchstaben, also für 3500 Thlr C Thlr., für 5% p% und für 30 Jahre n Jahre. Nun wachsen 100 Thlr. in einem Jahre zu $(100+p)$ Thlr., also 1 Thlr. zu $\frac{100+p}{100}$ und C Thlr. zu $\left(\frac{100+p}{100}\right)$ C Thlr. an. So groß ist das Kapital nach einem Jahre; im zweiten Jahre wächst wieder 1 Thlr. zu $\frac{100+p}{100}$, also wird aus $\left(\frac{100+p}{100}\right)$ C die Summe $\left(\frac{100+p}{100}\right)^2$ C Thlr. Ebenso erhält man als Summe nach 3 Jahren $\left(\frac{100+p}{100}\right)^3$ C u. s. w., also nach n Jahren $\left(\frac{100+p}{100}\right)^n$ C Thlr. Nennen wir das Kapital mit den Zinseszinsen K, so ist $K=\left(\frac{100+p}{100}\right)^n C$ (I), d. h. in Worten? Da die Formel 4 unbestimmte Größen enthält, K, p, n und C, so lassen sich 4 verschiedene Aufgaben vermittelst derselben lösen, indem jede derselben die Unbekannte sein kann. Z. B.: Wie viel Jahre sind erforderlich, damit ein Kapital von 3000 Thlr., zu 4% verzinst, mit seinen Zinseszinsen zu einer Summe von 5800 Thlr. anwachse? Bilde Beispiele, in welchen p oder C unbekannt ist. Löse auch die Aufgaben in Buchstaben.

Die Formel (I) erhält aber eine noch umfassendere Bedeutung, wenn dem C und n eine allgemeinere Bedeutung gegeben und die Aufgabe etwa so gestellt wird: Zu welcher Summe wachsen C Einheiten beliebiger Art in n Zeit-Abschnitten an, wenn sie sich in jedem solchen Zeit-Abschnitte um p% vermehren und der Zuwachs sich wieder in derselben Weise vergrößert? Es lassen sich demnach vermittelst der Formel (I) auch Aufgaben folgender Art lösen: Ein Wald enthält 2000 Klaftern Holz und dieses nimmt nach der Erfahrung jährlich um 3% zu. Wie viel Klaftern wird der Wald nach 20 Jahren haben? Oder: Die Volksmenge einer Stadt beträgt 20,000 Einwohner und wächst jährlich um 2%. Wie groß wird sie nach 100 Jahren sein?

Die zweite Gruppe Aufgaben der Zinseszinsrechnung wird durch die Fälle gebildet, in welchen außer den Zinsen jährlich noch eine gewisse Summe zum Kapitale gelegt wird.

Auflösung. Die jährlich zugelegte Summe sei c Thlr. Nun wachsen die C Thlr., zu p% verzinst, in n Jahren an zu: $C\left(\frac{100+p}{100}\right)^n$, die c Thlr., welche nach dem ersten Jahre dazukommen, zu $c\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n-1}$; die nach dem zweiten Jahre zukommenden c Thlr. zu $c\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n-2}$ an und so fort. Es ist demnach die Gesammtsumme

$$K^1 = C\left(\frac{100+p}{100}\right)^n + c\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n-1} + c\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n-2} \ldots + c.$$

Die letzten Glieder vom zweiten an bilden eine geometrische Reihe, also

$$K^1 = C\left(\frac{100+p}{100}\right)^n + \frac{c\left(\frac{100+p}{100}\right)^n - c}{\frac{100+p}{100} - 1} \quad \text{(II)}$$

Diese Formel ließe sich zwar noch vereinfachen, aber es ist zweckmäßiger, sie unverändert zu lassen und bei Anwendung auf bestimmte Zahlen die Vereinfachung erst nach Einsetzung der bestimmten Zahlen zu bewirken. Dabei ist darauf zu achten, sie so umzuwandeln, daß sie für die Logarithmen-Rechnung bequem wird.

Die Formel (II) enthält 5 unbestimmte Größen; es lassen sich also 5 Aufgaben vermittelst derselben lösen, indem jede der Unbestimmten die Unbekannte sein kann. Zähle die Aufgaben wie bei Formel (I) auf und gieb Beispiele in bestimmten Zahlen. Ist aber p die Unbekannte, so läßt sich die Aufgabe in unbestimmten Zahlen gar nicht lösen und in bestimmten Zahlen nur in wenig Fällen.

Aus diesem und dem vorigen Kapitel ist ersichtlich, welche Vortheile die Buchstaben-Rechnung gewährt, nämlich Erstens: das Resultat ist oft leichter zu finden, als in Ziffern. Zweitens: Das Resultat ist das Resultat für alle Aufgaben derselben Art. Drittens: Aus dem Resultate erkennt man, wie viel Aufgaben sich zwischen den in der Rechnung vorkommenden Größen stellen und wie sich diese lösen lassen. Viertens: Wenn aus mehreren gegebenen Größen eine Unbekannte zu finden ist, so ist es oft vortheilhaft, eine der gegebenen Größen als Unbekannte und die Unbekannte als gegeben zu betrachten und so eine Formel für diese Größen zu entwickeln, aus welcher sich dann die eigentliche Unbekannte leicht finden läßt.

Nun werden die Beispiele aus Meier Hirsch's Aufgaben-Sammlung gerechnet, außerdem Exempel folgender Art.

1. Ein Haus bringt jährlich 2000 Thlr. Miethe; die Steuern und Reparaturen betragen jährlich 150 Thlr. und voraussichtlich wird dasselbe nur noch 30 Jahre stehen. Dann ist aber der Bauplatz nebst den alten Baumaterialien noch 4000 Thlr. werth. Wie viel kann man dafür jetzt bezahlen, wenn sich das Kapital zu 5% verzinsen soll?

2. Von einer Actiengesellschaft ist eine Brücke gebaut; es ist ihr von der Regierung erlaubt, von den die Brücke Passirenden einen Zoll zu erheben und mit der Einnahme das Anlage-Kapital zu 4% zu verzinsen, ihr aber zur Pflicht gemacht, mit dem jährlichen Ueberschusse dasselbe zu amortisiren und nach gänzlicher Amortisation dem Staate die Brücke als Eigenthum zu überlassen. Wenn nun die Baukosten 24,000 Thlr. betrugen, und der Pächter des Brückenzolles an die Gesellschaft jährlich 2000 Thlr. zahlt, nach wie viel Jahren wird die Brücke dem Staate zufallen?

3. Es soll untersucht werden, ob ein Stück Ackerland sich besser verwerthet, wenn es zu einer Baumschule oder als Getreidefeld benutzt wird. Die Anlage der Baumschule kostet 150 Thlr. und die jährliche Bearbeitung 60 Thlr. Nach 8 Jahren aber wird sie einen Gewinn von 1200 Thlr. geben. Als Getreidefeld benutzt, wird aber der Acker einen jährlichen Netto-Ertrag von 60 Thlr. liefern. Die Zinsen mögen zu 5% angenommen werden.

4. Eine Stadtgemeinde ist bisher verpflichtet gewesen, eine Brücke zu unterhalten; der Staat will jetzt diese Verpflichtung der Stadt gegen Entschädigung übernehmen. Wenn nun die Brücke bei der Uebernahme so baufällig ist, daß sie einen Neubau erfordert, welcher 20,000 Thlr. kostet, die jährlichen Reparaturen aber durchschnittlich 200 Thlr. betragen, und voraussichtlich alle 40 Jahre ein Neubau erforderlich ist; ein wie großes Kapital wird die Stadt an den Staat zu zahlen haben, d. h. ein wie großes Kapital ist erforderlich, um die Brücke für alle Zeiten zu unterhalten?

5. Einem Knaben von 8 Jahren ist von seinen Eltern ein Kapital von 3000 Thlr. hinterlassen. Der Vormund will ihn von den Zinsen und weil diese nicht reichen, von dem Kapitale bis zum 24. Jahre unterhalten und ausbilden. Wie viel darf er höchstens jährlich verwenden, wenn es bis zur genannten Zeit reichen soll?

6. Ein Gutspächter will eine Brennerei anlegen, um den Ertrag des Gutes besser verwerthen zu können. Der Besitzer gestattet dies aber nur unter der Bedingung, daß ihm nach

Ablauf der zwanzigjährigen Pachtzeit die Brennerei nebst Zubehör ohne Entschädigung überlassen wird. Wenn nun die Anlage 10,000 Thlr. kostet, einen wie großen jährlichen Ertrag muß der Pächter erwarten können, wenn ihm sein Kapital nicht nur nicht verloren gehen, sondern sich auch zu 5% verzinsen soll?

Incommensurable Größen und irrationale Zahlen.

Die Beweise der beiden Lehrsätze: Erstens: „Der Inhalt eines Rechtsecks ist gleich dem Producte aus Grundlinie und Höhe," und Zweitens: „Eine zu einer Dreiecksseite parallele Linie theilt die beiden anderen Seiten in proportionale Theile" setzen gewöhnlich voraus, daß man zwei beliebige begrenzte Linien so in gleiche Theile theilen kann, daß die Theile der einen gleich den Theilen der anderen sind, d. h. daß man für je 2 begrenzte Linien ein gemeinschaftliches Maß finden kann. Aber

Lehrsatz. Es lassen sich auch Linien denken, für welche es kein gemeinschaftliches Maß giebt.

Beweis. Ein Maß für eine begrenzte Linie ist ein aliquoter Theil derselben. Der Satz läßt sich daher auch so aussprechen: Es lassen sich 2 Linien von solcher Länge denken, daß kein einziger aliquoter Theil der einen zugleich ein aliquoter Theil der anderen ist, in ihr aufgeht. Hat man nämlich 2 beliebig lange Linien **AB** und **CD** und trägt auf der größeren **AB** die Linie **CD** von **A** aus so oft auf, als es angeht, und merkt den Punkt an, bis zu welchem die Linie **CD** zuletzt gereicht hat, macht dann dasselbe mit der Hälfte von **CD**, dann mit dem Drittheil, Viertheil u. s. w. Denkt man sich dies Verfahren bis in's Unendliche fortgesetzt, so gehen vielleicht eine Menge von aliquoten Theilen der CD in AB auf, von den anderen erhält man in der Nähe von B unendlich viele Punkte, bis zu welchen je ein aliquoter Theil von CD gereicht hat. Alle Stücke der Linie AB, vom Punkte A bis einem solchen Punkte haben mit CD ein gemeinschaftliches Maß. Da aber ein Punkt keine Ausdehnung hat, so bleiben auf AB zwischen jenen unendlich vielen Punkten Stücke von Linien, auf denen man noch einen Punkt annehmen kann, und jede Länge der Linie AB vom Punkte A bis zu einem solchen Zwischenpunkte hat kein gemeinschaftliches Maß mit BC.

Erklärung. Linien, für welche es ein gemeinschaftliches Maß giebt, heißen commensurabel, solche, für welche es keines giebt, incommensurabel.

Will man untersuchen, wie viel mal so groß die eine von 2 incommensurabeln Linien (A) ist als die andere B, und verfährt auf die gewöhnliche Weise, indem man A erst mit B mißt, das übrig bleibende Stück mit einem aliquoten Theile von B, das nun wieder übrig bleibende Stück mit einem kleineren aliquoten Theile von B und so fort, so daß man etwa erhält: $A = 2B + \frac{1}{4}B + \frac{2}{9}B$ u. s. w., so muß man eine unendliche Menge solcher Brüche erhalten. Denn erhielte man eine endliche Menge, so könnte man diese addiren und erhielte ein Resultat von der Form $A = \frac{m}{n}B$, d. i. $A = m.\frac{1}{n}B$, und das hieße: $\frac{1}{n}B$ ist in A genau m mal enthalten; dann wäre $\frac{1}{n}B$ ein gemeinschaftliches Maß für A und B. Nimmt man bei der angeführten Operation als aliquote Theile von B Decimaltheile von B, so muß die Summe der unendlich vielen Brüche ein unendlicher unperiodischer Decimalbruch sein. Denn wäre es ein endlicher oder ein periodischer, so ließe sich dieser in einen gewöhnlichen Bruch verwandeln und man erhielte wieder ein Resultat von der Form $A = \frac{m}{n} B$, und das wäre ein Widerspruch gegen die Voraussetzung.

Die Zahl, welche ausdrückt, wie viel mal so groß die eine von 2 incommensurabelen Größen ist, als die andere, läßt sich demnach zwar annäherungsweise so weit man will, aber nie vollständig genau berechnen und ist, als Decimalbruch ausgedrückt, ein unendlicher unperiodischer Decimalbruch. Eine solche Zahl nennt man eine irrationale Zahl.

Auch die Umkehrung von dem oben bewiesenen Satze ist richtig: Wenn eine von 2 Größen eine incommensurabele Zahl mal so groß ist, als die andere, so sind die beiden Größen incommensurabel.

Beweis. Es sei $A = 3{,}2647\ldots B$, wo $3{,}2647\ldots$ irrational. Wären A und B commensurabel, so müßte entweder B selbst oder ein aliquoter Theil von B zugleich ein aliquoter Theil von A sein, also entweder $A = mB$ oder $A = m . \frac{1}{n} B = \frac{m}{n} B$ sein. Dann müßte die ganze Zahl $m =$ dem Bruche $3{,}2647\ldots$ sein, was nicht möglich ist, oder es müßte der gewöhnliche Bruch $\frac{m}{n} = 3{,}2647\ldots$ sein. Wenn man dann den Bruch $\frac{m}{n}$ in einen Decimalbruch verwandelte, so erhielte man bekanntlich entweder einen endlichen oder einen periodischen Decimalbruch und dieser könnte mit dem irrationalen nicht übereinstimmen. Sobald aber von 2 Decimalbrüchen auch nur eine Stelle des einen auch nur um Eins größer ist, als die entsprechende des anderen, so ist er größer als dieser, weil alle folgenden Stellen des letzteren, auch wenn sie alle $= 9$ wären, noch nicht so groß sind, als eine Einheit der vorangehenden Stelle, also die fehlende Einheit nicht ersetzen können.

Nennen wir im gleichschenkligen, rechtwinkeligen Dreiecke die Hypotenuse x, die Kathete a, so ist $x^2 = 2a^2$, also $x = \sqrt{2} . a$. Es ist aber $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl, denn $\sqrt{2}$ muß eine Zahl sein, welche größer als Eins und kleiner als 2 ist, weil $1^2 = 1$ und $2^2 = 4$ ist. Es kann aber auch nicht 1 + einem gewöhnlichen Bruche, d. i. ein unechter Bruch sein; denn das Quadrat eines Bruches kann nie eine ganze Zahl sein, weil sich durch die Potenzerhebung nur die Factoren des Zählers und Nenners wiederholen, der Bruch sich also auch nach der Potenzerhebung nicht zu einer ganzen Zahl kürzen läßt. Folglich muß $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl sein.

Folglich ist in allen gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecken die Hypotenuse mit den Katheten incommensurabel.

Der Beweis, daß $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist, läßt sich durch geringe Abänderung zu dem Beweise des Satzes erweitern: Jede Wurzel aus einer ganzen Zahl ist, wenn sie nicht eine ganze Zahl ist, irrational. Ebenso sind alle Wurzeln aus Brüchen, wenn nicht die Wurzeln aus Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, irrational. Da man nun, wenn in rechtwinkeligen Dreiecken zwei Seiten durch bestimmte Zahlen gegeben sind, und man aus ihnen die dritte Seite berechnet, nur in sehr wenig Fällen eine rationale Zahl erhält, (wenn die Kathete $= 3$ und 4 oder $3m$ und $4m$, wo m eine beliebige bestimmte Zahl ist), so sind in den meisten rechtwinkeligen Dreiecken die Hypotenuse und wenigstens eine Kathete incommensurabel. Die trigonometrischen Functionen sind aber Verhältniß-Exponenten zwischen je 2 Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks, folglich sind die meisten trigonometrischen Functionen irrational.

Auch alle Briggischen Logarithmen von solchen ganzen Zahlen, welche nicht ganze Potenzen von 10 sind, sind irrational.

Beweis für einen bestimmten Fall. Es soll bewiesen werden, daß $\overset{10}{\log} 62$ irrational ist. $\overset{10}{\log} 62$ muß zwischen 1 und 2 liegen, kann also nur $= 1 +$ einem gewöhnlichen Bruche oder $= 1 +$ einer irrationalen Zahl sein. Gesetzt, es wäre $\overset{10}{\log} 62 = 1 + \frac{4}{7} = \frac{11}{7}$, so müßte $10^{\frac{11}{7}}$, d. i. $\sqrt[7]{10^{11}} = 62$ sein, und das ist nicht möglich; denn $\sqrt[7]{10^{11}}$ ist die Zahl, welche, in die 7. Potenz erhoben, 10^{11}, d. i. Eins mit 11 Nullen giebt. Die Zahl 62 kann aber, in eine ganze Potenz erhoben, nicht eine Zahl aus Eins mit angehängten Nullen geben. Ebenso wenig kann $\overset{10}{\log} 62$ ein anderer gewöhnlicher Bruch, muß also eine irrationale Zahl sein.

Allgemeiner Beweis. Da die Logarithmen der ganzen Potenzen von 10 alle ganzen Zahlen 1, 2, 3.... durchlaufen, so kann $\overset{10}{\log} a$, wenn a nicht eine ganze Potenz von 10 ist, nur ein (echter oder unechter gewöhnlicher) Bruch oder eine irrationale Zahl sein. Wäre $\overset{10}{\log} a$ ein gewöhnlicher Bruch, also etwa $= \frac{m}{n}$, so müßte $10^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{10^m} = a$ sein u. s. w., wie der Beweis für $\overset{10}{\log} 62$. Da der Umfang eines Kreises $= 2\pi$ und π eine irrationale Zahl ist, so ist der Umfang incommensurabel mit dem Radius, ebenso der Flächeninhalt mit dem Quadrat des Radius.

Es bleibt nun noch übrig, die beiden im Anfange dieses Kapitels angeführten geometrischen Sätze für den Fall zu beweisen, daß die in Betracht kommenden Linien incommensurabel sind.

1. Es ist zu beweisen, daß der Flächeninhalt des Rechtecks $abcd$ (Fig. 1) $= ab.bc$ ist, wenn ab und bc incommensurabel sind. Der Flächeninhalt ist $= ab.bc$ heißt: das Rechteck enthält so viel Quadrat-Einheiten, als das Product der Zahlen angiebt, welche man erhält, wenn man ab und bc mit einerlei Maße (etwa Zoll) mißt, wo Quadrat-Einheit das Quadrat bedeutet, dessen Seite das genannte Maß, (Quadratzoll) ist. Die Zahlen für ab und bc sind in unserem Falle irrational oder doch eine von ihnen. Gesetzt nun, es wäre Rechteck $abcd$ größer als $ab.bc$, so könnte man ab um so viel verkürzen, etwa um bg, daß, wenn man fg ‡ bc zöge, Rechteck $adfg = ab.bc$. Dann könnte man einen aliquoten Theil von bc auf ab von a aus so oft abtragen, bis der Endpunkt des letzten dieser Theile zwischen g und b, etwa auf Punkt k fiele; zöge man dann kl ‡ bc, so wäre $adlk$ ein Rechteck, dessen Seiten commensurabel wären, und folglich wäre $adlk = ak.kl = ak.bc$. Es sollte aber $adfg = ab.bc$ sein, folglich müßte, da Factor $ab >$ Factor ak, also Product $ab.bc > ak.bc$, auch $adfg > adlk$ sein, und das ist nicht möglich. Ebenso läßt sich beweisen, daß $abcd$ nicht

kleiner als ab.bc sein kann; folglich muß es = ab.bc sein. In ganz analoger Weise ist in der Stereometrie der Satz zu beweisen: Der Inhalt eines senkrechten rechtwinkeligen Parallelepipeds ist gleich Grundfläche mal Höhe, wenn die Kanten incommensurabel sind.

2. Eine Linie, welche in einem Dreiecke parallel zur Grundlinie gezogen wird, theilt die beiden Seiten in proportionale Stücke, auch wenn die beiden Theile der einen Seite incommensurabel sind.

Beweis. bd und da (Fig. 2) seien incommensurabel. Ziehe ag und dc. Da $\triangle$ abg und $\triangle$ cbd einen gleichen Winkel haben, so verhalten sich ihre Flächenräume, wie die Producte der einschließenden Seiten, also $\frac{abg}{bcd} = \frac{ab.bg}{bd.bc}$. Es ist aber $\triangle$ abg = $\triangle$ cbd, also ab.bg = bd.bc, d. i. $\frac{ab}{bd} = \frac{bc}{bg}$, also $\frac{ab}{bd} - 1 = \frac{bc}{bg} - 1$, d. i. $\frac{ab - bd}{bd} = \frac{bc - bg}{bg}$, d. i. $\frac{ad}{bd} = \frac{cg}{bg}$.

Kubische Gleichungen.

Hilfssatz. Nicht blos die Differenz zweier Quadrate $(a^2 - b^2)$, sondern auch die Differenz je zweier gleicher ganzer Potenzen $(a^n - b^n)$ läßt sich durch die Differenz der ersten Potenzen $(a - b)$ ohne Rest dividiren.

Beweis. Führt man die Division $(a^n - b^n) : (a - b)$ bis auf etwa 3 Glieder des Quotienten aus, so erhält man als ersten Rest $a^{n-1}b - b^n$, als zweiten $a^{n-2}b^2 - b^n$, als dritten $a^{n-3}b^3 - b^n$ u. s. w. Da in dem ersten Gliede dieser Reste der Potenz-Exponent von a immer um Eins kleiner und der von b um Eins größer wird, so daß der Exponent von b immer gleich der subtrahirten Zahl des Exponenten von a ist, so muß man nothwendig einmal auf den Rest $a^{n-(n-1)}b^{n-1} - b^n$, d. i. $ab^{n-1} - b^n$ kommen und in diesem geht $a - b$ auf. Man erhält demnach $(a^n - b^n) : (a - b) = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 \ldots\ldots + b^{n-1}$.

Die rein kubische Gleichung.

Jede rein kubische Gleichung läßt sich auf die Form bringen: $x^3 - a^3 = 0$; denn, erhält man $x^3 - b = 0$, so kann man schreiben $x^3 - (\sqrt[3]{b})^3 = 0$. — Worin bestehen die Eigenthümlichkeiten dieser Form? — Die Lösung dieser Gleichung ist daher zugleich die Lösung jeder rein kubischen Gleichung. Die Gleichung läßt sich nach dem vorangeschickten Satze auch so schreiben: $(x - a)(x^2 + ax + a^2) = 0$. Diese Gleichung lösen heißt: Von den unendlich vielen Werthen, welche man dem x beilegen kann, denjenigen oder diejenigen suchen, welche die linke Seite der Gleichung zu Null machen. Da diese aber ein Product ist, so wird sie zu Null, sowohl wenn $x - a = 0$, als wenn $x^2 + ax + a^2 = 0$ wird, d. i., wenn $x = a$ oder $x = a\frac{(-1 \pm \sqrt{-3})}{2}$. Die Gleichung hat also 3 Wurzeln, von denen eine reell, die beiden anderen imaginär sind.

Die gemischte kubische Gleichung

Jede gemischte oder vollständige kubische Gleichung läßt sich auf die Form bringen: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (I), (wo manche der Größen a, b, c auch $= 0$ sein kann). Worin besteht das Eigenthümliche dieser Form?

Auflösung. Diese Gleichung läßt sich so umwandeln, daß das Quadrat der Unbekannten wegfällt. Setzt man nämlich $x = y + m$, so geht die Gleichung über in: $y^3 + (3m + a)y^2 + (3m^2 + 2am + b)y + \ldots. = 0$ (II). Obgleich nun x nicht jeden beliebigen Werth, sondern nur einen oder einige bestimmte Werthe hat, weil es ja die Bedingung erfüllen soll, daß $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, so kann man doch für y oder m einen ganz willkürlichen Werth annehmen, weil man für x zwei unbestimmte Größen $y + m$ gesetzt hat. Man kann daher dem m einen solchen Werth geben, daß der Coefficient von $y^2 = 0$ wird, also $m = -\frac{a}{3}$ setzen. Dann erhält die Gleichung (II) die Form $y^3 + py + q = 0$ (III), wo p und q bekannte Größen sind. Setzt man in diese Gleichung $y = z + r$, so ist $z^3 + 3z^2r + 3zr^2 + r^3 + p(z + r) + q = 0$, d. i. $z^3 + (3zr + p)(z + r) + r^3 + q = 0$. Nun kann man dem r einen solchen Werth beilegen, daß $(3zr + p)(z + r) = 0$ wird. Einen solchen, der $z + r$ zu Null macht, darf man ihm nicht geben, weil man damit $y = 0$ setzt und der Werth von y schon durch die Gleichung III festgestellt ist; wohl aber kann man $3zr + p = 0$, also $r = -\frac{p}{3z}$ setzen. Dadurch geht die letzte Gleichung über in: $z^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q = 0$ und hieraus ist $z^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$. Das sind zwei rein kubische Gleichungen, deren Wurzeln, wenn wir $\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = u$ und $\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = w$ setzen, sind: $z^{I} = u$, $z^{II} = u\left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right)$, $z^{III} = u\left(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\right)$, $z^{IV} = w$, $z^{V} = w\left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right)$ und $z^{VI} = w\left(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\right)$. Setzt man diese 6 Werthe in die Gleichung $y = z + r = z - \frac{p}{3z}$, so erhält man Erstens:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{p^3}{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}}$$

der Bruch unter der zweiten Kubikwurzel mit $-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ erweitert, giebt:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$ (d. i. die Cardanische Formel);

Zweitens: $y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\ldots}}\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right) - \frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\ldots}}} \cdot \frac{1}{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}}$.

Die zweite Größe besteht aus 2 Factoren, von denen der erste so eben vereinfacht, und der zweite verwandelt sich durch Erweiterung mit $-1-\sqrt{-3}$ in $\frac{-1-\sqrt{-3}^1}{2}$, so daß man erhält $y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\ldots}}\ \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right) + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\ldots}}\ \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$.
Durch Einsetzung der übrigen 4 Werthe von z erhält man nur noch folgenden neuen Werth von y. $y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\ldots}}\ \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right) + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\ldots}}\ \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$.
— Gieb Exempel in bestimmten Zahlen zu rechnen. —

Wenn die Größe $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ positiv ist, so erhält man eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln, ist sie aber negativ, d. i. wenn p negativ und $\frac{p^3}{27} > \frac{{}^2}{4}$ ist, so erscheinen alle drei Wurzeln imaginär; in diesem Falle hat aber die Gleichung 3 reelle Wurzeln. In letzterem Falle heißt die Gleichung irreductibel und muß, will man die unmögliche Form der Wurzeln vermeiden, auf andere Weise gelöst werden. $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ heißt die charakteristische Größe, warum?

Die irreductibele kubische Gleichung.

Voraussetzung: in Gleichung $y^3 + py + q = 0$ ist p negativ und $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$. Setze $y = z \sin\alpha$, so ist $z^3 \sin\alpha^3 + pz \sin\alpha + q = 0$ (I). Nun läßt sich $\sin\alpha^3$ durch $\sin 3\alpha$ und $\sin\alpha$ ausdrücken; denn $\sin 3\alpha = \sin 2\alpha \cos\alpha + \cos 2\alpha . \sin\alpha$. Drückt man nun $\sin 2\alpha$ und $\cos 2\alpha$ durch $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ aus und dann $\cos\alpha$ durch $\sin\alpha$ aus, so erhält man $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin\alpha^3$, also $\sin\alpha^3 = \frac{3}{4}\sin\alpha - \frac{1}{4}\sin 3\alpha$. Dies in Gleichung (I) gesetzt, giebt:

$$\frac{3}{4}z^3 \sin\alpha - \frac{1}{4}z^3 \sin 3\alpha + pz \sin\alpha + q = 0,$$

$$\text{d. i. } z\sin\alpha\left(\frac{3}{4}z^2 + p\right) - \frac{1}{4}z^3 \sin 3\alpha + q = 0 \text{ (II).}$$

Da für y zwei unbestimmte Größen gesetzt sind, so kann man einer derselben einen beliebigen Werth, al o auch einen solchen geben, daß $z \sin\alpha \left(\frac{3}{4}z^2 + \quad\right) = 0$ wird. Diese Größe wird aber dadurch zu Null, daß man entweder z, $\sin\alpha$ oder $\frac{3}{4}z^2 + p = 0$ setzt. Man darf aber weder z noch $\sin\alpha = 0$ setzen, weil dadurch y den bestimmten Werth 0 erhielte; es kann daher nur $\frac{3}{4}z^2 + p = 0$ gesetzt werden, also $z = \pm 2\sqrt{-\frac{p}{3}}$. Dies in Gleichung II gesetzt, giebt $\mp \frac{8}{4}\sqrt{-\frac{p^3}{27}} \sin 3\alpha + q = 0$, also $\sin 3\alpha = \pm \frac{q}{2\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}$ (III). Aus dieser Gleichung ergiebt sich $\angle 3\alpha$, also auch $\angle \alpha$, und da z schon gefunden, so ist auch y bekannt. Es fragt sich nur Erstens: ob es für bestimmte Zahlenwerthe von p und q auch immer einen Winkel giebt, dessen sinus den obigen Werth hat. Das ist der Fall, wenn dieser Werth ein reeller und kleiner als Eins ist. Da p nach Voraussetzung negativ ist, so ist $-p^3$ positiv, deshalb ist auch z reell. Ferner ist $\frac{q}{2\sqrt{-\frac{p^3}{27}}} = \frac{\frac{q}{2}}{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}} = \sqrt{\frac{\frac{q^2}{4}}{-\frac{p^3}{27}}}$. Da nach Voraussetzung aber $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$ ist, so ist diese Wurzelgröße kleiner als Eins. Zweitens muß untersucht werden, ob für bestimmte Zahlenwerthe von p und q beide Vorzeichen $\pm$ brauchbare Werthe für $\sin 3\alpha$ geben, oder ob in manchen $+$, in anderen $-$ genommen werden muß. Zunächst ist klar, daß, wenn man in der Gleichung $z = \pm 2\sqrt{-\frac{p}{3}}$ das Zeichen $+$ nimmt, man es auch in $\sin 3\alpha$ nehmen muß, weil das Doppelzeichen $\pm$ aus z in $\sin 3\alpha$ übertragen ist. Ist nun q positiv und man nimmt das Zeichen $+$, so findet man aus Gleichung (III) in den trigonometrischen Logarithmen-Tafeln für 3α einen spitzen Winkel. Gesetzt, die zu lösende Gleichung sei: $y^3 - 3y + 1 = 0$, also $p = -3$ und $q = 1$; dann ist $\sin 3\alpha = \frac{1}{2}$, also $3\alpha = 30^0$. Es ist aber auch $\sin(2\mathfrak{R} - 30) = \frac{1}{2}$ und auch $\sin(4\mathfrak{R} + 30) = \frac{1}{2}$, $\sin(6\mathfrak{R} - 30) = \frac{1}{2}$ u. s. w. Folglich erhält man aus der Gleichung $\sin 3\alpha = \frac{1}{2}$ unendlich viele Werthe für den Winkel 3α, nämlich 30^0, $2\mathfrak{R} - 30^0$, $4\mathfrak{R} + 30^0$, $6\mathfrak{R} - 30^0$, $8\mathfrak{R} + 30^0$, $10\mathfrak{R} - 30^0$, $12\mathfrak{R} + 30^0$ u. s. w., also für α die Werthe 10^0, $\frac{2}{3}\mathfrak{R} - 10^0$, $1\mathfrak{R} + \frac{1}{3}\mathfrak{R} + 10$, $2\mathfrak{R} - 10$, $2\mathfrak{R} + \frac{2}{3}\mathfrak{R} + 10$, $3\mathfrak{R} + \frac{1}{3}\mathfrak{R} - 10$ u. s. w. Die folgenden Werthe unterscheiden sich von diesen dadurch, daß sie immer um $4\mathfrak{R}$ größer sind. Demnach erhält $\sin\alpha$ die Werthe: $\sin 10^0$, $\sin(\frac{2}{3}\mathfrak{R} - 10)$, $\sin(1\mathfrak{R} + \frac{1}{3}\mathfrak{R} + 10)$, d. i. $\cos(\frac{1}{3}\mathfrak{R} + 10)$, d. i. $\sin(\frac{2}{3}\mathfrak{R} - 10)$, $\sin(2\mathfrak{R} - 10) = \sin 10^0$, $\sin(2\mathfrak{R} + \frac{2}{3}\mathfrak{R} + 10) = -\sin(\frac{2}{3}\mathfrak{R} + 10)$, $\sin(3\mathfrak{R} + \frac{1}{3}\mathfrak{R} - 10) = -\cos(\frac{1}{3}\mathfrak{R} - 10) = -\sin(\frac{2}{3}\mathfrak{R} + 10)$. Die sinus der folgenden Winkel sind diesem gleich, weil die Winkel immer um $4\mathfrak{R}$ größer sind. Man hat demnach für $\sin\alpha$ nur die 3 Werthe gefunden: $\sin\alpha = \sin 10^0$, $\sin(2\mathfrak{R} - 10)$ und $-\sin(\frac{2}{3}\mathfrak{R} + 10)$, also $y = 2\sin 10^0$, $y = 2\sin(\frac{2}{3}\mathfrak{R} - 10)$ und $y = -2\sin(\frac{2}{3}\mathfrak{R} + 10)$. Wenn p und q nicht die Werthe -3 und $+1$, sondern irgend welche andere Werthe haben, so erhält man für 3α anstatt 30^0 irgend einen anderen spitzen Winkel. Wir wollen ihn β nennen; dann erhält man (überall für 10^0 $\frac{\beta}{3}$ gesetzt) für y folgende Werthe: $y = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}.\sin\beta$, $y^r = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}.\sin\left(60 - \frac{\beta}{3}\right)$ und $y = -2\sqrt{-\frac{p}{3}}.\sin\left(60 + \frac{\beta}{3}\right)$.

Wenn q positiv ist und man nimmt in Gleichung (III) das Zeichen —, so ist in der obigen bestimmten Gleichung $\sin 3\alpha = -\frac{1}{2}$, also $3\alpha = 2\mathfrak{R} + 30$ oder $= 4\mathfrak{R} - 30$ u. s. w. wie oben, oder für 30 lieber die allgemeine Größe β^0 gesetzt, $3\alpha = 2\mathfrak{R} + \beta$ oder $= 4\mathfrak{R} - \beta$, oder $= 6\mathfrak{R} + \beta$ u. s. w.; führt man die Entwickelung so fort wie oben, so erhält man für $\sin\alpha$ die 3 Werthe: $\sin\alpha = \sin\left(60 + \frac{\beta}{3}\right)$ oder $- \sin\left(60 - \frac{\beta}{3}\right)$ oder $- \sin\frac{\beta}{3}$. Da man nun auch in dem Werthe für z das Zeichen — nehmen muß, so erhält man $y^I = -2\sqrt{-\frac{p}{3}} \sin\left(60 + \frac{\beta}{3}\right)$, $y^{II} = +2\sqrt{-\frac{p}{3}}.\sin\left(60 - \frac{\beta}{3}\right)$ und $y = +2\sqrt{-\frac{p}{3}} \sin\frac{\beta}{3}$. Man erhält also, wenn man in Gleichung III das Zeichen — nimmt, für den Fall, daß q positiv ist, dieselben Werthe, als wenn man das Zeichen + nimmt. Ist q negativ, so erhält man, wie sich nun leicht übersehen läßt, die Werthe $y^I = -2\sqrt{-\frac{p}{3}} \sin\frac{\beta}{3}$, $y^I = -2\sqrt{-\frac{p}{3}} \sin\left(60 - \frac{\beta}{3}\right)$ $y = +2\sqrt{-\frac{p}{3}}.\sin\left(60 + \frac{\beta}{3}\right)$, mag man in dem Werthe für z und $\sin 3\alpha$ das Zeichen + oder — nehmen. Um zu vermeiden, daß man als ersten Werth für 3α einen Winkel von der Form $(2\mathfrak{R} + \beta)$ nehmen muß, hat man nur nöthig das Zeichen +, wenn q positiv, und Zeichen —, wenn q negativ ist, zu wählen, und dann als ersten Werth von 3α den spitzen Winkel zu nehmen, welcher sich aus Formel (III) in den Tafeln ergiebt.

Alle kubischen Gleichungen haben hiernach 3 Wurzeln, die quadratischen, wie bekannt, zwei und die des ersten eine. Es soll nun nachgewiesen werden, daß jede Gleichung so viel Wurzeln haben muß, als der Exponent der höchsten Potenz von x Einheiten hat.

Wenn eine Gleichung auf Null gebracht ist, so sind die Wurzeln derselben diejenigen Werthe von x, welche die die eine Seite der Gleichung bildende Function von x zu Null machen. Eine Function von x, welche den Factor $x - m$ hat, wird zu Null, wenn man $x = m$ setzt; aber auch das Umgekehrte ist richtig: Jede Function von x, welche dadurch zu Null wird, daß man $x = m$ setzt, hat den Factor $x - m$.

Beweis. Gesetzt, die Funktion $ax^k + bx^n + cx^r + dx^s \ldots\ldots + g$ (F) werde dadurch zu Null, daß man $x = m$ setzt, so daß $am^k + bm^n + cm^r + dm^s \ldots\ldots + g = 0$, so ist $g = -am^k - bm^n - cm^r - dm^s \ldots\ldots$, also ist die Function F (den Werth von g eingesetzt und die gemeinschaftlichen Factoren außer Klammern geschrieben):

$$a(x^k - m^k) + b(x^n - m^n) + c(x^r - m^r) + d(x^s - m^s) \ldots\ldots$$

Da nun jeder Posten nach einem früher bewiesenen Satze den Factor $x - m$ hat, so hat die ganze Function diesen Factor.

Ist nun eine Wurzel irgend einer quadratischen Gleichung $= m$, so muß die Gleichung, auf 0 gebracht, den Factor $x - m$ und außerdem noch einen zweiten Factor haben, welcher x^1 enthält, weil ja das Product eine Function von x^2 ist. Setzt man diesen zweiten Factor $= 0$, so erhält man daraus noch einen zweiten Werth für x, welcher die Gleichung zu Null macht.

Ist eine kubische Gleichung auf 0 gebracht und ist eine ihrer Wurzeln $= m$, so muß sie den Factor $x = m$ haben und der zweite Factor muß eine Function von x^2 sein. Setzt man diesen $= 0$, so erhält man eine quadratische Gleichung und aus dieser noch 2 Werthe für x, welche die ursprüngliche kubische Gleichung zu 0 machen. Auf dieselbe Weise ergiebt sich, daß die Gleichung vom 4. Grade 4, die vom 5. Grade 5 u. s. w. Wurzeln haben muß.

Die allgemeine Form der kubischen Gleichung war $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Nennt man die Wurzeln dieser Gleichung m, n und r, so muß nach dem Obigen $x^3 + ax^2 + bx + c = (x - m)(x - n)(x - r)$ sein. Einen anderen Factor kann die Größe nicht haben; denn hätte sie noch einen Factor, in welchem x vorkäme, so würde man bei Ausführung der Multiplication nicht x^3, sondern x^4 als höchste Potenz erhalten, und hätte sie noch einen Factor, der x nicht enthielte, so würde man als Coefficient von x^3 nicht 1 erhalten. Es ist also $x^3 + ax^2 + bx + c = (x - m)(x - n)(x - r) = x^3 - (m + n + r)x^2 + (mn + mr + nr)x - mnr$. Dies ist eine identische Gleichung (warum?); folglich muß $a = -(m + n + r)$, $b = (mn + mr + nr)$ und $c = -mnr$ sein. Man ersieht hieraus, daß die Coefficienten von x in der kubischen Gleichung Zusammensetzungen ihrer Wurzeln sind, und da dies Resultat sich aus Gesetzen ergeben hat, welche für die Gleichungen aller Grade gelten, so muß es auch für Gleichungen aller Grade gelten. Wir wollen nun untersuchen, *wie* die Coefficienten aus den Wurzeln zusammengesetzt sind.

Die Gleichung des nten Grades, deren Wurzeln $a^I, a^{II}, a^{III} \ldots a^{(n)}$ sind, hat die Form $(x-a^I)(x-a^{II})(x-a^{III})\ldots(x-a^{(n)}) = 0$. Wenn man zunächst die Multiplication der beiden ersten Factoren ausführt, so muß man jeden Posten des einen Factors mit jedem des anderen multipliciren, d. h. man muß alle möglichen Zusammensetzungen (Combinationen) bilden, welche sich aus je einem Posten des einen mit je einem des anderen Factors bilden lassen. Multiplicirt man dies Resultat mit dem 3. Factor, so muß man jeden Posten desselben mit x und auch jeden mit a^{II} multipliciren, d. h. alle möglichen Combinationen zu je 3 Größen (Combinationen der 3. Ordnung) bilden, indem man immer aus je einem Factor einen Posten nimmt u. s. f.

Hiernach wird das Product der obigen n Factoren aus der Summe der Größen bestehen, welche man erhält, wenn man alle möglichen Combinationen der nten Ordnung dadurch bildet, daß man immer aus jedem Factor einen Posten nimmt. Nun kann man Erstens aus jedem Factor den Posten x nehmen; dadurch erhält man x^n. Zweitens kann man aus einem Factor den Posten a und aus allen übrigen x nehmen, und zwar einmal aus dem ersten Factor den Posten a und aus den übrigen x, dann aus dem zweiten Factor a und aus den übrigen x; dann aus dem dritten a und aus den übrigen x und so weiter. Dadurch erhält man, da alle Größen a das Zeichen — haben,

$-(a^{I} + a^{II} + a^{III} + a^{IV} \ldots\ldots a^{(n)})x^{n-1}$. Drittens kann man aus je 2 Factoren die Größe a und aus den übrigen die Größe x nehmen, und zwar aus dem ersten und zweiten a und aus den übrigen x, aus dem ersten und dritten a und aus den übrigen x und so fort, dann aus dem zweiten und dritten a, dann aus dem zweiten und vierten u. s. w. Dadurch erhält man $(a^{I}a^{II} + a^{I}a^{III} + a^{I}a^{IV} \ldots a^{I}a^{(n)}. + a^{II}a^{III} + a^{II}a^{IV} \ldots\ldots)x^{n-2}$, d. i. die Summe der Combinationen der zweiten Ordnung aus den Größen a.mal x^{n-2} mit dem Vorzeichen +, weil die negativen Größen a zu je zwei mit einander multiplicirt sind u. s. w. Man erhält also, wenn man die Summe der Combinationen der ersten, zweiten, dritten u. s. w. Ordnung durch C_1^{na}, C_2^{na}, $C_3^{na} \ldots$ bezeichnet: $(x - a^{I})(x - a^{II})(x - a^{III}) \ldots\ldots (x - a^{(n)}) = x^n - C_1^{na}x^{n-1} + C_2^{na}x^{n-2} - C_3^{na}x^{n-3} \ldots\ldots \pm a^{I}a^{II}a^{III} \ldots\ldots a^{(n)}$.

Somit ist bewiesen, daß in jeder Gleichung, welche auf Null gebracht ist und in welcher der Coefficient der höchsten Potenz von x gleich 1 ist, der Coefficient der nächsten kleineren Potenz von x = minus der Summe der Wurzeln, der Coefficient der nächsten kleineren Potenz von x = + der Summe der Combinationen der Wurzeln zu je zweien ist u. s. w.

Hieraus ergiebt sich ein Mittel, die rationalen Wurzeln der numerischen Gleichungen höherer Grade durch Probiren zu finden. Man zerlegt nämlich das absolute Glied in seine einfachen Factoren, wobei der Factor 1 nicht zu übersehen ist, und versucht, ob einer von ihnen eine Wurzel ist. Ist das nicht der Fall, so bildet man aus je zwei der einfachen Factoren alle möglichen Producte und untersucht dann, ob eines derselben eine Wurzel ist und so fort. Hat man auf diese Weise eine der Wurzeln gefunden, sie sei = m, so dividirt man die Gleichung durch x — m, wodurch man eine Gleichung von einem um Eins niedrigeren Grade erhält, aus welcher man dann auf dieselbe Weise eine Wurzel sucht, oder die man, wenn sie vom dritten oder zweiten Grade ist, direct löst.

Gesetzt, die Wurzeln einer Gleichung sind 2, 9, 17, 28 und 34, so daß die Gleichung heißt $(x - 2)(x - 9)(x - 17)(x - 28)(x - 34) = 0$. Setzt man hierin für x eine kleinere Zahl, als die kleinste Wurzel, also eine Zahl, welche kleiner als 2, so werden alle Factoren negativ, und da die Anzahl derselben ungerade ist, so erhält man als Resultat eine negative Zahl. Setzt man dann für x größere und größere Zahlen, so wird das Resultat immer kleiner negativ — warum? — für x = 2, Null. Setzt man dann für x eine Zahl, welche größer als 2, aber kleiner als die nächste Wurzel, 9, so wird der erste Factor positiv, die vier übrigen negativ, also das Resultat eine positive Zahl. Setzt man für x eine Zahl, welche größer als 9 und kleiner als 17, so werden die 2 ersten Factoren positiv, die drei letzten negativ, also das Resultat negativ u. s. f. Hieraus geht hervor, daß, wenn man dem x immer größere Werthe giebt, man so oft einen Zeichenwechsel erhält, so oft man eine Wurzel der Gleichung überschreitet, und daß, wenn man für einen Werth von x ein positives, für einen anderen ein negatives Resultat erhält, zwischen diesen beiden Werthen von x eine Wurzel der Gleichung liegen muß. Es ist leicht einzusehen, daß dieses Gesetz für jede Gleichung gilt, auch wenn unter den Wurzeln negative sind.

Daraus ergiebt sich eine Methode, die irrationalen Wurzeln einer Gleichung annähernd zu finden. Man setzt für x beliebige Werthe ein, bis man zwei solche gefunden hat, von welchen der eine ein positives, der andere ein negatives Resultat giebt; setzt dann für x eine Zahl, welche zwischen diesen beiden liegt u. s. w.

Der binomische Lehrsatz.

Die Formeln $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ und $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ geben an, wie die zweite und dritte Potenz, der binomische Lehrsatz giebt an, wie jede Potenz (die $n$te) aus den beiden Theilen des Binomiums zusammengesetzt ist. Wir wollen anstatt $(a + b)^n$ $(1 + x)^n$ bilden, wo n eine ganze positive Zahl ist.

Die gesuchte Größe muß offenbar eine Function von x und n sein, wir wollen sie F nennen, so daß $(1 + x)^n = F$. F muß die Eigenschaft haben, daß es $= 1$ wird, wenn man $x = 0$ setzt, also $F = 1$ und $F - 1 = 0$. Da nun auch $F - 1$ eine Function von x ist und diese zu Null wird, wenn man $x = 0$ setzt, so muß $F - 1$ den Factor $x - 0$, d. i. x haben, also $F - 1 = xF^{I}$, d. i. $F = xF^{I} + 1$ sein, wo F^{I} wieder eine Function von x und n bedeutet, also $(1 + x)^n = 1 + xF^{I}$ (I). Setzt man hierein $n = 0$, so muß $1 + xF^{I} = 1$ werden, weil $(1 + x)^0 = 1$ ist, also $xF^{I} = 0$, d. i. $F^{I} = 0$ sein. Da F^{I} zu Null wird, wenn man $n = 0$ setzt, so muß F^{I} den Factor $n - 0$, d. i. n haben; also muß $F^{I} = nF^{II}$ sein, wo F^{II} wieder eine Function von n (und auch von x) ist. Dies in Gleichung (I) gesetzt, giebt $(1 + x)^n = 1 + nxF^{II}$ (II). Setzt man hierein $n = 1$, so muß $1 + xF^{II}$ zu $1 + x$, also $F^{II} = 1$, d. i. $F^{II} - 1$ zu Null werden; also muß $F^{II} - 1$ den Factor $n - 1$ haben, also $F^{II} - 1 = (n - 1)F^{III}$, d. i. $F^{II} = 1 + (n - 1)F^{III}$ sein. Dies in Gleichung (II) gesetzt, giebt $(1 + x)^n = 1 + nx + n(n - 1)xF^{III}$ (III). Setzt man hierein $n = 2$, so muß $1 + 2x + 2.1xF^{III} = 1 + 2x + x^2$ werden, d. i. $x^2 = 2.1xF^{III}$, d. i. $x = 2.1F^{III}$ oder $2.1F^{III} - x = 0$ werden. Folglich muß $2.1F^{III} - x$ den Factor $(n - 2)$ haben, also $2.1F^{III} - x = (n - 2)F^{IV}$, d. i. $F^{III} = \frac{x}{1.2} + \frac{n-2}{1.2}F^{IV}$ sein Diesen Werth für F^{III} in Gleichung (III) gesetzt, giebt: $(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}xF^{IV}$. Fährt man so fort, indem man nun $n = 3$, $n = 4$ setzt, so erhält man als erste Glieder:

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n.(n-1)}{1.2}x^2 + \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3 + \frac{n(n-1(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}x^4 \ldots.$$

Wenn diese Reihe in derselben Weise fortschreitet, als die ersten Glieder, so ist das $k$te Glied $= \frac{n.(n-1)(n-2)\ldots.(n-(k-1))}{1.2.3\ldots.k}x^k$, d. h. in Worten: Ein beliebiges Glied, d. i.: jedes Glied ist zusammengesetzt aus einem Bruche, dessen Zähler aus Factoren besteht, welche mit dem Potenz-Exponenten anfangen, immer um eins kleiner werden und bis zu dem fortschreiten, dessen negativer Theil um eins kleiner ist, als die Stellenzahl des Gliedes, und dessen Nenner das Product 1.2.3... bis zur Stellenzahl ist und aus x mit der Stellenzahl als Potenz-Exponenten.

Wenn die Reihe wirklich so fortschreitet, so muß sie, wenn n eine ganze positive Zahl ist, einmal abbrechen, weil der negative Theil der Factoren des Zählers einmal $= n$, also dieser Factor $= 0$ werden muß. Dann ist das letzte Glied $\frac{n.(n-1)\ldots 1}{1.2.3\ldots.n}x^n$, d. i. x^n, so daß

(I) $(1 + x^n) = 1 + nx + \frac{n.(n-1)}{1.2}x^2 \ldots . \frac{n.(n-1)\ldots(n-(k-1))}{1.2\ldots k}x^k \ldots . + x^n$ ist.

Ob aber diese Reihe vollständig richtig ist, ist noch nicht bewiesen; denn wir haben oben nur die ersten 4 Glieder entwickelt und dann ohne Beweis angenommen, daß alle folgenden ebenso zusammengesetzt sind wie diese. Daß die Formel richtig ist, wenn $n = 1, 2, 3$ oder 4 ist, davon kann man sich sogleich überzeugen, wenn man diese Werthe für n einsetzt. Es fragt sich aber, ob sie für jeden ganzen positiven Werth von n gilt.

Wenn man die Reihe (I) mit $(1 + x)$ multiplicirt, also $(1 + x)^{n+1}$ bildet, so erhält man wieder eine Reihe von derselben Form. — Führe dies aus. — Nämlich: $(1 + x)^{n+1} = 1 + (n + 1)x + \frac{(n+1)n}{1.2}x^2 \ldots . \frac{(n+1)n\ldots(n-(k-2))}{1.2.3\ldots k}x^k + x^{n+1}$.

Hiermit ist bewiesen, daß, wenn die Reihe für die $n$te, d. i. für irgend eine Potenz diese Form hat, sie dieselbe auch für die nächstfolgende Potenz haben muß. Da sie nun für die 4. Potenz diese Form hat, so muß sie diese auch für die 5. haben, also auch für die 6. u. s. w. Die Coefficienten von x in der Formel (I) nennt man Binomial-Coefficienten der $n$ten Potenz und zwar n den ersten, $\frac{n.(n-1)}{1.2}$ den zweiten u. s. w. Bezeichnen wir den $k$ten Binomial-Coefficienten der $n$ten Potenz mit p_n^k, so ist (II) $(1 + x)^n = 1 + p_n'x + p_n^2x^2 \ldots + p_n^kx^k \ldots . + p_n^nx^n$. Setzt man hierein $x = \frac{b}{a}$, so ist $\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n$, d. i. $\left(\frac{a+b}{a}\right)^n = 1 + p_n^1\frac{b}{a} + p_n^2\frac{b^2}{a^2} \ldots .$ oder $(a + b)^n = a^n + p_n^1a^{n-1}b + p_n^2a^{n-2}b^2 \ldots . + p_n^ka^{n-k}b^k \ldots + b^n$. Bilde hieraus die 4., 5. und 6. Potenz von $(a + b)^n$, so sieht man, daß überall die erste und letzte Größe, die zweite und vorletzte, die dritte und drittletzte ꝛc. Größe denselben Coefficient haben. Dies Gesetz gilt für alle Potenzen von $(a + b)$, denn es läßt sich beweisen, daß $p_n^k = p_n^{n-k}$ ist.

Beweis. $p_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{1.2.3\ldots.k}$ und $p_n^{n-k} = \frac{n.(n-1)\ldots.(n-(n-k-1))}{1.2\ldots..n-k}$ $= \frac{n.(n-1)\ldots(k+1)}{1.2\ldots.n-k}$. Bringt man die beiden Brüche auf gleichen Nenner, indem man jeden derselben mit dem Nenner des anderen erweitert und diesen Nenner in umgekehrter Ordnung schreibt, so erhält man als Zähler des ersten Bruches $n.(n-1)\ldots.(n-(k-1))(n-k)\ldots.3.2.1$, und als Zähler des anderen $n(n-1)\ldots(k+1)k\ldots3.2.1$, welche beide Größen mit einander übereinstimmen.

Setzt man in die Formel (II) $x = 1$, so erhält man: $2^n - 1 = p_n^1 + p_n^2 + p_n^3 \ldots . p_n^n$, d. h. in Worten? Setzt man in Formel (II) für x, $-x$ und addirt die so erhaltene Formel zu Formel (II), und setzt dann $x = 1$, so erhält man die Summe der geradstelligen Binomial-Coefficienten, subtrahirt man, die Summe der ungeradstelligen.

Es war in dem Kapitel über die kubischen Gleichungen bewiesen, daß $(x + a^{I})(x + a^{II})(x + a^{III})\ldots(x + a^{n}) = x^{n} + C_{1}^{na}x^{n-1} + C_{2}^{na}x^{n-2}\ldots + C_{n}^{na}$ (dort hatten die Größen a das Zeichen — und darum wechselten die Vorzeichen; hier nicht).

Setzt man hierein für jedes a die Zahl 1, so erhält man $(x + 1)^{n}$ und anstatt der Summen der Combinationen bekommt man die Zahlen, welche angeben, wie viele Combinationen der 1., 2., 3.... Ordnung sich aus n Größen bilden lassen, so daß, wenn wir mit S_{n}^{k} die Anzahl der Combinationen der kten Ordnung bezeichnen, welche sich aus n Größen bilden lassen $(x + 1)^{n} = x^{n} + S_{n}^{1}x^{n-1} + S_{n}^{2}x^{n-2} + S_{n}^{3}x^{n-3}\ldots + S_{n}^{n}$. Nun war aber auch $(1 + x)^{n} = 1 + p_{n}^{1}x + p_{n}^{2}x^{2} + \ldots + p_{n}^{n}x^{n}$ oder weil $p_{n}^{k} = p_{n}^{n-k}$ ist, $(1 + x)^{n} = x^{n} + p_{n}^{1}x^{n-1} + p_{n}^{2}x^{n-2}\ldots + p_{n}^{n}$. Folglich $x^{n} + S_{n}^{1}x^{n-1} + S_{n}^{2}x^{n-2} + S_{n}^{3}x^{n-3} = x^{n} + p_{n}^{1}x^{n-1} + p_{n}^{2}x^{n-2}\ldots$ und also $p_{n}^{1} = S_{n}^{1}$, $p_{n}^{2} = S_{n}^{2}\ldots p_{n}^{k} = S_{n}^{k}$, d. h. die Binomial-Coefficienten der nten Potenz geben an, wie viel Combinationen sich aus n Größen bilden lassen, und zwar der 1., 2., 3....kte, wie viel Combinationen der 1., 2., 3.....kten Ordnung sich aus n Größen bilden lassen. — Erläuterung durch Beispiele in bestimmten Zahlen und einige leichte Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeits-Rechnung.

Analytische Geometrie.

Bemerkung. Die Lösung planimetrischer Aufgaben vermittelst Rechnung und Construction der gefundenen algebraischen Größen wird in Unter-Prima und zwar in der nur für Aufgaben bestimmten Stunde gelehrt.

Die analytische Geometrie ist die Anwendung der Algebra auf geometrische Größen. Sie lehrt, durch Rechnung geometrische Aufgaben lösen und die Eigenschaften geometrischer Größen finden. Wir beschäftigen uns nur mit geometrischen Größen, welche in einer gegebenen Ebene liegen.

Bestimmung der Lage eines Punktes.

Bekanntlich wird die Lage eines Punktes (Ortes) auf der Erdkugel dadurch bestimmt, daß man angiebt, wie weit er von zwei senkrecht sich schneidenden größten Kugelkreisen (dem Aequator und einem bekannten Meridiane) entfernt ist. Und so besteht die einfachste Bestimmung der Lage eines Punktes in einer gegebenen Ebene darin, daß man angiebt, wie weit der Punkt von zwei der Lage nach bekannten sich senkrecht schneidenden Linien entfernt ist. Man nennt diese Linien Coordinaten-Achsen, die eine von ihnen (welche, ist willkürlich) die Absciffen-Achse (x Achse), die andere die Ordinaten-Achse (y Achse); der Durchschnittspunkt der Achsen heißt ihr Anfangspunkt, die Entfernung eines Punktes von der x Achse, seine Ordinate, die Entfernung von der y Achse seine Absciffe. Beide Entfernungen heißen seine Coordinaten. Indem man nun die Länge dieser Coordinaten durch ein bekanntes Maß mißt, werden sie und damit die Lage des Punktes durch Zahlen dargestellt und dies ist nothwendig, da alle Größen, welche in eine Rechnung eingeführt werden sollen, durch Zahlen ausgedrückt werden müssen. Durch die absolute Entfernung eines Punktes von den Achsen ist jedoch seine Lage noch nicht vollständig bestimmt, ebenso wie ein Ort auf der Erdkugel durch bloße Angabe seiner Entfernungen vom Aequator und dem ersten Meridiane noch nicht genau bestimmt ist; es muß für diesen noch angegeben werden, ob er südlich oder nördlich vom Aequator, östlich oder westlich von dem genannten Meridiane, d. h. auf welcher Seite jeder der beiden Kreise er liegt. So muß auch hier noch die Bestimmung hinzutreten, auf welcher Seite der beiden Achsen der Punkt liegt; und auch diese Bestimmung muß arithmetisch ausgedrückt werden, wenn eine Rechnung mit seinen Coordinaten ausgeführt werden soll.

Die Länge einer geraden Linie ist die Entfernung ihrer Endpunkte von einander. Ist daher die Länge einer geraden Linie AB durch eine bestimmte Zahl ausgedrückt; ist sie etwa = 10 Zoll, und rückt Punkt B in der Richtung A ⟶ B noch 3, 4 oder 9 Zoll fort, so wird die Entfernung der Punkte A und B um 3, 4 oder 9 Zoll größer; also muß man zur ursprünglichen Zahl für AB diese Zahlen addiren, um die Zahl für die neue Entfernung zu erhalten, also ist die Zahl für die Länge jetzt = 10 + 3, 10 + 4, 10 + 9. Rückt der Punkt B aber in der Richtung B ⟶ A fort, so muß die Zahl der durch ihn beschriebenen Längen von der ursprünglichen Zahl subtrahirt werden, d. h. die Zahlen für diese Längen müssen mit dem Minuszeichen zur Zahl 10 gesetzt werden, so daß man erhält: 10 — 3, 10 — 4, 10 — 9. Da, wie hieraus hervorgeht, diese Bezeichnungsweise von der Menge der durchlaufenen Längen-Einheiten unabhängig ist, so muß sie auch beibehalten werden, wenn der vom Punkte B in der Richtung B ⟶ A durchlaufene Weg größer ist, als die ursprüngliche Länge von AB, so daß, wenn B etwa 15 Einheiten in der Richtung B ⟶ A fortgegangen ist, für die so entstandene Entfernung der beiden Punkte die Zahl 10 — 15, d. i. 0 — 5, d. i. — 5 gesetzt werden muß.

Jede gerade Linie wird nun dadurch beschrieben, daß sich ein Punkt in gerader Richtung fortbewegt. Seine ursprüngliche Entfernung von dem Ausgangspunkte ist = 0. Rückt er nun in gerader Richtung fort und man drückt die nach und nach entstehenden Längen (Entfernung von dem ursprünglichen Orte) durch Zahlen aus, so müssen diese nach der obigen Betrachtung zu der ursprünglichen Länge, d. i. zu 0 addirt werden, d. h. das Zeichen + erhalten, und rückt derselbe Punkt in der entgegengesetzten Richtung fort, so müssen die Zahlen für die beschriebenen Längen das Zeichen — erhalten. Die Richtung, in welcher der Punkt zuerst sich bewegt hat, nennt man die positive Richtung der Linie, die entgegengesetzte die negative.

Wird nun nach der Entfernung eines Punktes von einer geraden Linie gefragt, so heißt es: Wie weit muß man von dieser geraden Linie in senkrechter Richtung fortschreiten, um bis zu dem genannten Punkte zu gelangen? Man nimmt damit als den Anfangspunkt der Entfernung des Punktes den Endpunkt des Lothes, welcher in der geraden Linie liegt. Hieraus und aus der obigen Betrachtung geht hervor, daß, wenn 2 Punkte auf verschiedenen Seiten einer geraden Linie liegen, die Zahlen für ihre Entfernungen von derselben entgegengesetzte Vorzeichen erhalten müssen (positive, negative Richtung). Hiernach sind die Abscissen von Punkten, welche auf der einen Seite der y Achse liegen positiv, von Punkten auf der anderen Seite negativ. Dasselbe gilt von den Ordinaten in Beziehung auf die x Achse. Welche Abscissen und Ordinaten man als die positiven betrachten will, ist willkürlich.

Es sei (Fig. 3) AB die x Achse, CD die y Achse. Sind dann die Coordinaten für P = a und d, so müssen die Coordinaten für die Punkte Q, R, S die in Fig. 3 angegebenen Vorzeichen erhalten. Die positiven Richtungen der Achsen sind dann A ⟶ B und C ⟶ D und diese wollen wir auch für die folgenden Figuren beibehalten.

Die gerade Linie.

Die Lage einer geraden Linie wird am einfachsten dadurch bestimmt, daß man ihre Einschnittspunkte in die Coordinaten-Achsen (deren Coordinaten) oder den Einschnittspunkt in die eine der Achsen und den Winkel angiebt, den sie mit einer der Achsen bildet. Z. B. die Lage der Linie FG (Fig. 4) ist bestimmt, wenn $Ok = a$ und $OL = b$ gegeben, oder wenn b und $\angle \alpha$ gegeben ist.

In allen geraden Linien, welche nicht parallel einer der Achsen sind, hat jeder Punkt eine andere Abscisse und jeder eine andere Ordinate. (Beide Coordinaten durchlaufen die Werthe 0 bis ∞ und 0 bis $-\infty$.) Ist daher die Lage einer geraden Linie bestimmt und kennt man von einem ihrer Punkte eine Coordinate, so ist damit der Punkt, also auch seine andere Coordinate bestimmt, (weil es nur einen Punkt in der Linie giebt, welcher die gegebene Coordinate hat). Die eine (nicht gegebene) Coordinate ist also von der Lage der Linie, d. i. von a und b und der anderen Coordinate abhängig. Diese Abhängigkeit läßt sich durch eine Gleichung ausdrücken. Es ist nämlich, wenn die Coordinaten des beliebigen Punktes E (Fig. 4) x und y heißen $\frac{y}{a-x} = \frac{b}{a}$, d. i. $y = -\frac{b}{a}x + b$. D. h. in Worten? Es ist aber $-\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\alpha$, also kann die Gleichung auch geschrieben werden: $y = \operatorname{tg}\alpha . x + b$. Wenn man die Bedeutung dieser Gleichung in Worten aussprechen will, so fragt es sich, wie man den $\angle \alpha$ näher bezeichnen soll, da die Linie FG auch den Winkel β mit der x Achse bildet. Wir wollen von jeder geraden Linie diejenige Richtung, nach welcher hin die positiven Ordinaten ihrer Punkte größer werden, als ihre positive Richtung annehmen, also von FG die Richtung KF; dann ist α der Winkel, welchen die positive Richtung der Linie mit der positiven Richtung der x Achse bildet (indem man die Richtung vom Durchschnittspunkte aus bestimmt), und wollen ihn kurz den Winkel nennen, welchen die Linie mit der x Achse bildet. Dann bedeutet die obige Gleichung: Die Ordinate jedes Punktes der Linie ist gleich dem Producte aus seiner Abscisse und der Tangente des Winkels, welchen die Linie mit der x Achse bildet plus der Ordinate des Einschnittspunktes in die y Achse. Da a und b unbestimmte Größen sind, so gilt diese Gleichung für jede gerade Linie; man schreibt sie der Kürze wegen gewöhnlich: $y = mx + n$ und nennt sie Gleichung der geraden Linie. Hieraus geht hervor, daß jede bestimmte gerade Linie bestimmte Werthe für m und n hat und daß sich mit der Lage der Linie diese Werthe ändern; ferner, daß, sobald die Lage einer Linie auf die oben genannte Art gegeben, auch die Gleichung der Linie bestimmt ist. Z. B. die Gleichung der geraden Linie, welche die x Achse in + 3 Zoll und die y Achse in + 4 Zoll Entfernung vom Anfangspunkte schneidet, ist $y = -\frac{4}{3}x + 4$. Umgekehrt: Wenn die Gleichung einer Linie gegeben ist, so kann man ihre Einschnittspunkte in die Achsen bestimmen. Gesetzt, die Gleichung einer Linie ist $y = \frac{3}{7}x - 8$, so ist für den Einschnittspunkt in die x Achse $y = 0$, also $x = \frac{56}{3}$ und für den in die y Achse $x = 0$, also $y = -8$.

Aufgabe. Die Gleichung der Linie zu suchen, welche parallel der x Achse ist, und derjenigen, welche parallel der y Achse ist.

Die Gleichung jeder geraden Linie war $y = -\frac{b}{a}x + b$, für die zur x Achse parallelen ist $a = \infty$; dann ist $\frac{b}{a} = \frac{b}{\infty} = 0$, denn je größer der Nenner eines Bruches wird, desto kleiner wird der Bruch; ist also der Nenner $= \infty$, so ist der Bruch unendlich klein oder $= 0$; also ist unsere Gleichung: $y = b$, d. h. die Ordinate jedes Punktes ist $= b$ und y ist nicht von x abhängig, denn x kommt nicht in der Gleichung vor. b ist die Entfernung von der x Achse. Ist nun $b = 0$, so erhält man $y = 0$ und dies ist die Gleichung der x Achse. Für die Linie, welche parallel der y Achse, ist $b = \infty$, also ist ihre Gleichung $y = -\infty + \infty$. Der Ausdruck $+\infty - \infty$ ist aber nicht $= 0$, sondern kann jede willkürliche Zahl sein. Denn wenn man zu einer unendlich großen Zahl, die wir mit b bezeichnen, eine andere endliche Zahl, etwa 3 oder 12 addirt, so erhält man wieder eine unendlich große Zahl; wenn also $b = \infty$, so ist auch $b + 3 = \infty$, $b + 12 = \infty$. (Wir bezeichnen also mit ∞ ganz verschiedene Zahlen.) Nun ist $(b + 3) - b = 3$, d. i. $\infty - \infty = 3$. Ebenso ist $(b + 12) - b = 12$, d. i. $\infty - \infty = 12$. Wir wollen hier zugleich untersuchen, was man unter $\frac{\infty}{\infty}$ und $\frac{0}{0}$ zu verstehen hat. Wenn man eine unendlich große Zahl mit einer endlichen multiplicirt, so erhält man wieder eine unendlich große Zahl. Ist also $b = \infty$, so ist auch $nb = \infty$. Nun ist $\frac{nb}{b} = n$, d. i. $\frac{\infty}{\infty} = n$, d. i. jede willkürliche Zahl. Wenn man eine endliche Zahl mit einer anderen Zahl multiplicirt, so ist das Product desto kleiner, je kleiner diese zweite Zahl ist; wenn diese also unendlich klein, so ist auch das Product unendlich klein. Ist also n eine beliebige Zahl und b eine unendlich kleine Zahl, so ist auch nb unendlich klein, und setzen wir dafür 0, so machen wir nur einen unendlich kleinen Fehler; nun ist $\frac{nb}{b} = n$, d. i $\frac{0}{0} = n$, also $\frac{0}{0} =$ jeder beliebigen Zahl. Daß $\frac{n}{0} = \infty$ und $\frac{n}{\infty} = 0$ ist, ist schon früher gezeigt.

Wir erhielten oben als Gleichung der geraden Linie, welche parallel der y Achse ist, $y = -\infty + \infty$, d. h. also die Ordinate eines Punktes der Linie ist jede willkürliche Zahl; und das ist richtig. Wenn man aber die Gleichung $y = -\frac{b}{a}x + b$ durch b dividirt, so erhält man $\frac{y}{b} = -\frac{x}{a} + 1$, und setzt man nun $b = \infty$, so ist die gesuchte Gleichung für die Linie, welche parallel der yAchse: $x = a$, d. h. die Abscisse jedes Punktes der Linie ist $= a$. Wenn $a = 0$, so ist $x = 0$, und das ist die Gleichung der yAchse.

Aufgabe. Die Gleichung der geraden Linie zu finden, welche durch zwei gegebene Punkte geht.

Bemerkung. Die Aufgabe wird zuerst so gelöst, daß für die Coordinaten der gegebenen Punkte bestimmte Zahlen genommen werden. Dann erst allgemein.

Die Punkte sind gegeben, heißt: ihre Coordinaten sind gegeben; sie seien η, ξ, η^1 und ξ^1. Für jede gerade Linie gilt die Gleichung $y = mx + n$. Jede besondere Linie hat ihre besonderen Werthe für m und n, und diese zu finden ist unsere Aufgabe; und zwar müssen sie aus der Bedingung gefunden werden, daß die Linie durch die zwei gegebenen Punkte geht. Wir wollen diese besonderen Werthe für m und n m^1 und n^1 nennen, so daß die gesuchte Gleichung ist (I) $y = m^1x + n^1$. Da die beiden Punkte Punkte der Linie sind, so muß für ihre Coordinaten die Gleichung (I) gelten, also (II) $\eta = m^1\xi + n^1$ und (III) $\eta^1 = m^1\xi^1 + n^1$ sein. Aus diesen beiden Gleichungen lassen sich nun m^1 und n^1 finden und in die Gleichung (I) einsetzen. Das ist aber nichts anderes, als aus den 3 Gleichungen m' und n' eliminiren. Diesen Zweck erreicht man aber am leichtesten, wenn man (II) von (I) subtrahirt, dann (III) von (I) subtrahirt und die erste der erhaltenen Gleichungen durch die zweite dividirt. Dann erhält man $\frac{y - \eta}{y - \eta^1} = \frac{x - \xi}{x - \xi^1}$, d. i. die gesuchte Gleichung; sie ist die Formel für jede gerade Linie, welche durch zwei gegebene Punkte geht. Ist blos ein Punkt gegeben, so läßt sich nur eine der constanten eliminiren und man erhält: $y - \eta = m(x - \xi)$, wo m unbestimmt bleibt. Warum? Ist dieser eine Punkt der Anfangspunkt, so daß $\eta = \xi = 0$, so heißt die Gleichung $y = mx$. Die Gleichung einer Linie, welche durch den Anfangspunkt geht, hat also kein absolutes Glied. — Aufgaben in bestimmten Zahlen. —

Aufgabe. Den Winkel zu bestimmen, unter welchem 2 gegebene Linien sich schneiden.

Auflösung. Als den Winkel, unter welchem 2 Linien sich schneiden, nehmen wir immer denjenigen, welchen die positiven Richtungen derselben (von ihrem Durchschnittspunkte aus bestimmt) mit einander bilden, d. i. in Fig. 5 $\angle\, \alpha$. Die Linien sind gegeben, heißt: die Constanten ihrer Gleichungen sind gegeben. Es sei die Gleichung von **FG**: $y = mx + n$, die von **LK**: $y = m^1x + n^1$. Nun ist $\alpha = \beta - \gamma$, also $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\beta - \gamma) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\gamma}{1 + \operatorname{tg}\beta . \operatorname{tg}\gamma} = \frac{m - m^1}{1 + mm^1}$

Warum kommen in dem Ausdrucke n und n^I nicht vor? — Beispiele von Linien in bestimmten Zahlen, deren Durchschnittspunkt in den anderen der 4 Regionen liegt, in welche die Ebene durch die Achsen getheilt wird. — Vermittelst der letzten Gleichung läßt sich auch das eine m bestimmen, wenn das andere m und $\angle\,\alpha$ gegeben sind. Gesetzt $\alpha = 0$, also die Linien parallel, so muß $\frac{m - m^I}{1 + mm^I} = 0$ sein. Das ist nur der Fall, wenn $m - m^I = 0$, also $m = m^I$, d. h. in der Gleichung paralleler Linien sind die Coefficienten von x einander gleich. Wollte man $1 + mm^I = \infty$ setzen, so erhielte man nicht $\operatorname{tg}\alpha = 0$, sondern $= \frac{\infty}{\infty}$. Ist $\alpha = 90^0$, so muß $\frac{m - m^I}{1 + mm^I} = \infty$ sein, und das ist nur der Fall, wenn $1 + mm^I = 0$, d. i. $m^I = -\frac{1}{m}$, d. h. In den Gleichungen senkrecht sich schneidender Linien ist der Coefficient von x in der einen gleich dem negativen Umgekehrten des Coefficienten von x in der Gleichung der anderen. Wollte man $m - m^I - \infty$ setzen, so erhielte man nicht $\operatorname{tg}\alpha = \infty$, sondern $= \frac{\infty}{\infty}$.

Aufgabe. Den Durchschnittspunkt zweier gegebenen geraden Linien zu finden.

Auflösung. Die Gleichungen der gegebenen Linien seien $y = mx + n$ und $y = m^Ix + n^I$ und die Coordinaten des gesuchten Durchschnittspunktes η und ξ, dann muß, weil der Punkt in beiden Linien liegt $\eta = m\xi + n$ und auch $\eta = m^I\xi + n^I$ sein. Aus diesen beiden Gleichungen werden η und ξ berechnet. Es ist klar, daß man dasselbe Resultat erhalten muß, wenn man nicht erst η und ξ für y und x einsetzt, sondern gleich x und y aus den Gleichungen der Linien berechnet. Man erhält also die Coordinaten des Durchschnittspunktes zweier Linien, wenn man aus ihren Gleichungen x und y berechnet.

Aufgabe. Die Entfernung zweier gegebenen Punkte von einander zu bestimmen.

Auflösung. Es seien die Coordinaten der Punkte A und B, η und ξ, η, ξ^I, so ist, wenn man diese Coordinaten construirt und von dem Endpunkt der kleineren Ordinate auf die andere ein Loth fällt $AB = \sqrt{(\eta - \eta^I)^2 + (\xi - \xi^I)^2}$.

Es werden nun Aufgaben über das bisher Vorgetragene als häusliche Arbeit gegeben, etwa folgender Art: 1) Die Gleichung der Linie zu suchen, welche durch einen gegebenen Punkt geht und mit einer gegebenen Linie einen gegebenen Winkel bildet oder mit ihr parallel ist, und wo schneidet diese Linie in die Achsen ein? 2) Ein Dreieck liegt mit dem einen Eckpunkte im Anfangspunkte und eine Seite auf der x Achse; es sind die Coordinaten der beiden anderen Eckpunkte gegeben; wie findet man seine Winkel? wie die Coordinaten des Mittelpunktes vom eingeschriebenen oder umschriebenen Kreise? 3) Es sind zwei Punkte gegeben; man soll die Gleichung der Linie finden, welche in der Mitte der Verbindungslinie senkrecht auf dieser steht. 4) Es sind die Gleichungen zweier Linien gegeben; man soll in der einen den Punkt suchen, welcher von der anderen gegebenen Linie eine gegebene Entfernung hat.

XXXIV

Der Kreis.

Aufgabe. Es sind zwei Punkte A und B gegeben; es soll der Durchschnittspunkt der 2 Linien gesucht werden, welche durch diese Punkte gehen und sich senkrecht schneiden.

Auflösung. Da die beiden Punkte A und B (Fig. 6) gegeben sind, so ist auch die Lage der Linie AB bekannt; folglich kann man diese als x Achse annehmen, der Mittelpunkt 0 von AB sei Anfangspunkt, CD die y Achse. Für Punkt B sei $x = a$, so ist für A $x = -a$, y ist für beide Punkte $= 0$. F sei der gesuchte Punkt. Nun müssen die Gleichungen der Linien AF und BF gesucht und aus ihnen x und y berechnet werden, dann ist x die Abscisse, y die Ordinate von F.

Die Gleichung von BF ist $y - 0 = m(x - a)$ und die von AF: $y - 0 = m^{I}(x + a)$, wo m und m^{I} noch unbekannt sind. Da aber BF $\perp$ AF sein soll, so ist $m^{I} = -\frac{1}{m}$. Die Gleichungen der Linien BF und AF sind also $y = m(x - a)$ und $y = -\frac{1}{m}(x + a)$. Aus ihnen lassen sich aber die Größen x und y nicht berechnen, weil noch die Unbekannte m vorkommt, und eine dritte Gleichung läßt sich nicht finden, weil schon alle in der Aufgabe gestellten Bedingungen berücksichtigt sind. Daraus folgt, daß die Aufgabe keine bestimmte ist, sondern daß es unendlich viele Punkte der verlangten Art giebt. Wohl aber kann man eine Gleichung zwischen x und y finden, indem man m eliminirt, nämlich $y^2 = -(x^2 - a^2)$, d. i. $x^2 + y^2 = a^2$ und diese gilt für alle gesuchten Punkte, d. i. für den geometrischen Ort derselben. Construirt man für den beliebigen Punkt F (Fig. 6) die Coordinaten und zieht OF, so ist $x^2 + y^2 = OF^2$. Es ist aber auch $x^2 + y^2 = a^2$, also $OF^2 = a^2$, also $OF = a$, d. h. die Entfernung eines beliebigen, also jeden Punktes, der die Aufgabe erfüllt, hat von dem Anfangspunkte einerlei Entfernung (a), folglich ist der genannte geometrische Ort ein Kreis, und weil a eine beliebige Größe ist, so ist $x^2 + y^2 = a^2$ die Gleichung jedes Kreises, dessen Mittelpunkt im Anfangspunkte liegt; a ist der Radius.

Es soll jetzt die Gleichung des Kreises gesucht werden, wenn der Mittelpunkt nicht im Anfangspunkte liegt.

Die Coordinaten des Mittelpunktes (Fig. 7) seien $MN = b$ und $ON = a$, die des beliebigen Punktes F, $FG = y$ und $OG = x$. Ziehe MF und MK $\perp$ FG, so ist $MF^2 = MK^2 + FK^2$, d. i. $r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$, d. h. in Worten? Diese Gleichung läßt sich auch auf folgende Weise finden. Wenn von einem beliebigen Punkte F (Fig. 8) für die Coordinatenachsen AB und CD die Ordinate $FG = y$ und die Abscisse $GO = x$ ist und wir verlegen das Coordinatensystem so, daß O^{I} der Anfangspunkt wird, die Achsen aber dieselbe Richtung behalten, so daß $A^{I}B^{I}$ die x Achse und $C^{I}D^{I}$ die y Achse ist, und es ist die Ordinate von O^{I} d. i. $O^{I}M = b$ und die Abscisse d. i. $OM = a$, so ist in Beziehung auf das neue Coordinatensystem für Punkt F $x^{I} = x - a$ und $y^{I} = y - b$, und da F ein beliebiger Punkt ist, so gilt das für jeden Punkt der Ebene.

Ist nun (Fig. 7) M der Anfangspunkt, so ist die Gleichung des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$. Verlegen wir den Anfangspunkt jetzt nach O und ist für diesen Punkt in Beziehung auf das erste System die Ordinate d. i. $MN = -b$ und die Abscisse $ON = -a$, so ist nach dem Obigen für jeden Punkt in Beziehung auf das neue System $x^{I} = x + a$ und $y^{I} = y + b$, also $x = x^{I} - a$ und $y = y^{I} - b$. Dies in die ursprüngliche Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ eingesetzt, giebt $(x^{I} - a)^2 + (y^{I} - b)^2 = r^2$.

Aufgaben folgender Art: 1) Es sind zwei Punkte gegeben; es soll der geometr. Ort der Durchschnittspunkte der geraden Linien gefunden werden, welche durch diese Punkte gehen und einen Winkel von 45^0 einschließen. 2) Den geometr. Ort der Punkte zu suchen, deren Entfernungen von 2 gegebenen Punkten ein gegebenes Verhältniß haben oder von denen die Quadrate der Entfernungen eine gegebene Summe oder eine gegebene Differenz oder ein gegebenes Verhältniß haben. 3) Den geometr. Ort der Punkte zu suchen, von denen aus die Tangenten an zwei gegebene Kreise einander gleich sind. 4) Die Gleichung der Tangente an einen gegebenen Punkt eines gegebenen Kreises zu suchen (aus der Eigenschaft, daß sie senkrecht auf dem Radius steht). 5) Die Gleichung der Tangente an einen gegebenen Kreis zu suchen, welche durch einen gegebenen Punkt außerhalb des Kreises geht. 6) Ein Dreieck liegt so in einem Halbkreise, daß der Durchmesser Grundlinie des Dreiecks ist und die Spitze in der Peripherie liegt; welche Linie beschreibt der Mittelpunkt des in das Dreieck eingeschriebenen Kreises, wenn sich die Spitze des Dreiecks in dem Halbkreise herumbewegt?

Die Ellipse.

Aufgabe. Den geometrischen Ort der Punkte zu suchen, deren Entfernungen von zwei gegebenen Punkten eine gegebene Summe (2a) haben.

Auflösung. A und B (Fig. 9) seien die gegebenen Punkte und F einer der gesuchten. Da A und B gegeben, so ist auch die Richtung von AB gegeben, also kann man AB als x Achse annehmen. Der Mittelpunkt O sei der Anfangspunkt. Bezeichnet man nun die Abscisse von B mit e, so ist die von $A = -e$. Nennt man ferner die Coordinaten von F x und y, so soll nach der Aufgabe AF + BF, d. i.: $\sqrt{y^2 + (x + e)^2} + \sqrt{y^2 + (x - e)^2} = 2a$ sein. Dies ist die gesuchte Gleichung des geometrischen Ortes, welche sich in folgender Weise vereinfachen läßt: Erhebe beide Seiten in's Quadrat, dividire durch 2 und bringe die noch bleibende Wurzel auf eine Seite allein, so erhält man $y^2 + x^2 + e^2 - 2a^2 = \sqrt{(y^2 + x^2 + e^2 + 2ex)(y^2 + x^2 + e^2 - 2ex)}$ $= \sqrt{(y^2 + x^2 + e^2)^2 - 4e^2x^2}$. Erhebt man beide Seiten in's Quadrat, indem man $y^2 + x^2 + e^2$ als eine Größe betrachtet und dividirt durch 4, so ist $a^4 - (y^2 + x^2 + e^2)a^2 = -e^2x^2$, d. i. $(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2)$. Da nun $AF + BF > AB$, d. i. $2a > 2e$, also $a^2 > e^2$, also $a^2 - e^2$ positiv ist, so ist, wenn man $a^2 - e^2 = b^2$ setzt, b eine mögliche Größe und

$e = \sqrt{a^2 - b^2}$. Dann heißt unsere Gleichung $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, d. i. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ oder $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

Wie sich aus der Gleichung einer geraden Linie deren Richtung und Lage finden läßt, so lassen sich auch aus dieser Gleichung die Gestalt und die Eigenschaften der Linie finden, für deren Punkte sie gilt (das Folgende ist durch eine Figur anschaulich zu machen). Denken wir uns die ganze Ebene mit unendlich vielen nahe aneinanderliegenden Linien bedeckt, welche parallel der y Achse sind, und suchen die Einschnittspunkte der in Rede stehenden Linie in diese Parallelen. Die Gleichung für alle diese Parallelen ist $x = c$, wo c die Werthe von 0 bis ∞ und 0 bis $-\infty$ durchläuft. Für die y Achse ist $c = 0$ und also für ihren Durchschnittspunkt $y = \pm b$, d. h. unsere Linie schneidet zweimal in die y Achse ein und zwar in gleicher Entfernung von der x Achse auf der positiven und der negativen Seite. Für die Parallelen wird c größer und größer, je weiter dieselben von der y Achse sich entfernen, also y, d. i. $\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2}$ immer kleiner, d. h. unsere Linie schneidet in die folgenden Parallelen immer näher an der x Achse ein, und da y das Zeichen $\pm$ hat, so hat unsere Linie auf der negativen Seite der x Achse dieselbe Gestalt wie auf der positiven. Ist endlich $c = a$, so ist $y = 0$, d. h. die Linie schneidet in der Entfernung a die x Achse. Wird c größer als a, so ist y imaginär; also schneidet die Linie in die Parallelen, welche weiter von der y Achse liegen als a, nicht mehr ein, d. h. es liegt dort kein Punkt der Linie. Die Gleichung aller Parallelen, welche auf der negativen Seite der y Achse liegen, ist $y = -c$. Da nun in der Gleichung unserer Linie nur x^2 vorkommt, so erhält man für y dieselben Werthe wie vorher, wo $x = +c$ war. Daraus folgt, daß die Linie auf der negativen Seite der y Achse dieselbe Gestalt hat, wie auf der positiven.

Wir haben hier den ungefähren Lauf der Linie bestimmt, aber wir wissen noch nicht, ob die Linie concav oder convex gegen die x Achse ist. Wir erhalten darüber Aufschluß, wenn wir die auf den positiven Seiten liegenden Einschnittspunkte in die Coordinaten-Achsen D und H (Fig. 10) durch eine gerade Linie DH verbinden, deren Gleichung bestimmen und nun untersuchen, ob diese in die Parallele FG näher der x Achse oder ferner einschneidet, als unsere Linie. Die Gleichung von DH ist $y = -\frac{b}{a}x + b$, d. i. $y = \frac{b}{a}(a - x)$, die von FG: $x = c$, wo $c < a$ ist. Nun ist $FG^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - c^2)$ und $KG^2 = \frac{b^2}{a^2}(a - c)^2$. Es ist aber $\frac{b^2}{a^2}(a^2 - c^2) = \frac{b^2}{a^2}(a + c)(a - c)$ und $\frac{b^2}{a^2}(a - c)^2 = \frac{b^2}{a^2}(a - c)(a - c)$. Diese beiden Größen stimmen aber bis auf den einen Factor $a + c$ und $a - c$ überein; es ist aber $a + c > a - c$, also $FG > KG$, also die Linie concav gegen die x Achse.

Die krumme Linie, für deren Punkte die obige Gleichung gilt, heißt Ellipse. Die Ellipse ist also eine geschlossene krumme Linie, welche die Eigenschaft hat, daß die Summe der Entfernungen jeder ihrer Punkte von zwei bestimmten Punkten eine constante Größe ist. — Erklärung von Brennpunkt, große, kleine Axe, Mittelpunkt, Radiusvector, Excentricität.

Construction der Ellipse. 1) Wenn man einen Faden in 2 Punkten auf Papier befestigt, das dazwischen liegende Stück mit einem Schreibstifte spannt und diesen auf dem Papiere herumführt, so erhält man eine Ellipse. 2) Die Gleichung der Ellipse kann man auch als Proportion schreiben: $\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} = \frac{y}{b}$ (I). Zieht man nun (Fig. 11) $MF = a$ und $FG \perp AB$ und $MG \parallel AB$, so ist $\frac{FG}{FM} = \frac{FK}{FR}$ (II). Es ist aber MG die Abscisse für F, also $FG = \sqrt{a^2 - x^2}$ und FK die Ordinate von $F = y$. Dies in Gleichung (II) gesetzt, giebt $\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} = \frac{y}{FR}$. Hieraus und aus Gleichung I ergiebt sich, daß $FR = b$ ist; also $MR = a - b$. Hieraus folgt, daß, wenn man auf einer Linie, deren Länge $= a$ ist, b abträgt und den einen Endpunkt des Stückes $a - b$ auf OB, den anderen auf OC legt, der andere Endpunkt der ganzen Linie die Peripherie der Ellipse trifft. Daraus ergiebt sich die Construction eines Ellipsographen. Ist nämlich MF ein Stäbchen, welches 3 senkrechte Stifte in M, R und F trägt, von denen der in F ein Schreibstift ist, COB aber ein Winkelmaß, so kann man damit eine Ellipse beschreiben, indem man zuerst Stift R in O und Stift M in OC einsetzt, dann R auf OB und und M auf CO fortschiebt. Sind die Stifte verschiebbar, so lassen sich damit verschiedene Ellipsen beschreiben.

Aus der Construction der Ellipse vermittelst eines Fadens ist leicht ersichtlich, daß die Ellipse desto mehr einem Kreise ähnlich wird, je näher die Befestigungspunkte aneinanderliegen, d. h. je kleiner die Excentricität wird, und daß sie ein Kreis ist, wenn diese $= 0$, d. i. $a = b$ ist. In diesem Falle geht auch ihre Gleichung in die des Kreises über. Da hiernach der Kreis eine besondere Art der Ellipse ist, so muß auch jede Eigenschaft des Kreises die besondere Form einer allgemeinen Eigenschaft der Ellipse sein. Wir wollen einige dieser allgemeinen Eigenschaften aufsuchen.

1. Im Kreise sind alle Radien gleich groß, in der Ellipse: die Radienvectoren haben eine constante Summe. Beim Kreise fallen die Brennpunkte mit dem Mittelpunkte zusammen.

2. Im Kreise wird jede durch den Mittelpunkt gezogene gerade Linie durch diesen halbirt. In der Ellipse: die Gleichung irgend einer durch den Mittelpunkt (hier Anfangspunkt), gehenden Linie ist: $y = mx$. Bestimmt man die Durchschnittspunkte dieser Linie und der Ellipse, so erhält man für die Abscisse $x = \pm \sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2m^2 + b^2}}$, d. h. die Abscissen der Durchschnittspunkte sind gleich, aber entgegengesetzt, also (Fig. 12) $OH = OG$ und also $\triangle OFH \cong OGF^1$ also $OF = OF^1$ wie beim Kreise.

3. Der Peripheriewinkel im Halbkreise ist $= 90^0$. Welches ist das entsprechende Gesetz in der Ellipse?

Die Coordinaten des beliebigen Punktes F (Fig. 13) seien η und ξ. Der Winkel F ergiebt sich aus den Winkeln α und β und die Tangenten dieser Winkel sind die Coefficienten von x in den Gleichungen der Linien AF und BF, also müssen diese gesucht werden. Für Linie BF ist, weil sie durch Punkt F geht, $y - \eta = m(x - \xi)$, und da Punkt B in ihr liegt, so ist $-\eta = m(a - \xi)$, also $m = \frac{-\eta}{a - \xi}$. Da sich Linie AF von BF nur dadurch unterscheidet, daß sie anstatt durch Punkt B durch A geht, und da dessen Coordinaten sich nur dadurch von denen des Punktes B unterscheiden, daß, wo dort $+ a$, hier $- a$ steht, so muß der Coefficient von x in der Gleichung für AF $m^I = \frac{-\eta}{-a - \xi} = \frac{\eta}{a + \xi}$ sein. Demnach ist $mm^I = \frac{-\eta^2}{a^2 - \xi^2}$. Es ist aber, weil F in der Ellipse liegt, $\eta^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - \xi^2)$, also $mm^I = -\frac{b^2}{a^2}$. (Warum muß der Werth für η in mm^I eingesetzt werden?) d. i. $\operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\beta = -\frac{b^2}{a^2}$, also gleich einer constanten von η und ξ unabhängigen Größe. Daß dies Gesetz das allgemeine, von dem unter Nr. 3 angeführten besonderen ist, ergiebt sich, wenn man die Bedingung einführt, daß die Ellipse ein Kreis, also $b = a$ ist. Dann ist nämlich $\operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\beta = -1$, also $\operatorname{tg}\beta = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ $= -\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{cotg}\gamma = \operatorname{tg}(90 - \gamma)$, also $\beta = 90 - \gamma$, also $\angle F = 90$.

4. Im Kreise steht der Radius senkrecht auf der Tangente.

Dem Radius im Kreise sind in der Ellipse die Radienvectoren entsprechend. Um die Winkel zu finden, welche die Radienvectoren mit der Tangente bilden, muß erst die Gleichung der Tangente an die Ellipse und die Gleichungen der Radienvectoren gesucht werden; dann ergeben sich die Winkel aus der Formel $\operatorname{tg}\alpha = \frac{m - m^I}{1 + mm^I}$. Es sei N (Fig. 14) der Berührungspunkt, η und ξ seine Coordinaten. Da die Tangente durch den Punkt N geht, so muß ihre Gleichung $y - \eta = m(x - \xi)$ (I) sein, wo m noch unbekannt ist. Von den unendlich vielen Linien, welche sich durch N legen lassen, schneiden alle außer der Tangente die Ellipse in 2 Punkten, sind also Secanten, und auch die Tangente kann als eine Secante betrachtet werden, deren Einschnittspunkte in die Ellipse aufeinanderfallen. Wir werden daher die Gleichung einer Secante bilden und dann die Bedingung einführen, daß die Einschnittspunkte aufeinanderfallen. Die Coordinaten des zweiten Einschnittspunktes seien η^I und ξ^I; dann muß, da er in unserer Linie liegt, $\eta^I - \eta = m(\xi^I - \xi)$ (II) sein. Wollte man hieraus m bestimmen und in die Gleichung (I) einsetzen, so würde man nur die allgemeine Gleichung einer Linie erhalten, welche durch 2 gegebene Punkte geht. Es muß noch die Bedingung eingeführt werden, daß die beiden Punkte in der Ellipse liegen, daß also $\eta^{I2} = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - \xi^{I2})$ (III) und

$\eta^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - \xi^2)$ (IV) ist. Dies geschieht dadurch, daß man diese beiden Gleichungen mit den Gleichungen (I) und (II) verbindet. Es ist $\frac{III - IV}{II} = \eta^I + \eta = -\frac{b^2}{a^2 m}(\xi^I + \xi)$. Setzt man hierein $\eta^I = \eta$ und $\xi^I - \xi$, so erhält man $m = -\frac{b^2 \xi}{a^2 \eta}$. Dies in Gleichung (I) gesetzt, giebt: $y - \eta = -\frac{b^2 \xi}{a^2 \eta}(x - \xi)$, d. i. da $\xi^2 b^2 + \eta^2 a^2 = a^2 b^2$, $\frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2} = 1$, das ist die gesuchte Tangentengleichung, welche sich von der Ellipsengleichung dadurch unterscheidet, daß für das eine x, ξ und für das eine y, η steht.

Die Gleichung des Radiusvector FN ist, da er durch F geht, $y = m(x - e)$, wo e die Abscisse von F bedeutet, und weil der Punkt N in ihm liegt, $\eta = m(\xi - e)$, also $m = \frac{\eta}{\xi - e}$. Der Winkel, welchen FN und LN miteinander bilden, ist $GNK = \beta - \gamma$, also $\operatorname{tg} GNK = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\gamma}{1 + \operatorname{tg}\beta . \operatorname{tg}\gamma}$. Es ist aber aus der Tangentengleichung $\operatorname{tg}\beta = -\frac{b^2 \xi}{a^2 \eta}$ und aus der Gleichung des Radiusvector $\operatorname{tg}\gamma = \frac{\eta}{\xi - e}$, also $\operatorname{tg} GNK$ nach gehöriger Vereinfachung $= \frac{-b^2\xi^2 + b^2\xi e - a^2\eta^2}{a^2\eta\xi - a^2\eta e - b^2\xi\eta}$ und weil $a^2\eta^2 + b^2\xi^2 = a^2 b^2$ und $a^2 - b^2 = e^2$, $\operatorname{tg} GNK = \frac{b^2\xi e - a^2 b^2}{\eta\xi e^2 - a^2\eta e} = \frac{b^2}{\eta e}$. Die Gleichung der Linie $F^I N$ kann sich von der für FN nur dadurch unterscheiden, daß statt $+ e$, $- e$ steht. — Warum? — Also muß $\operatorname{tg} GNK^I = -\frac{b^2}{\eta e}$ sein, folgl. $\operatorname{tg} GNK^I = -\operatorname{tg} GNK$, also $GNK^I + GNK = 180^0$. Es ist aber auch $GNK^I + K^I NL = 180$, also $GNK = K^I NL$ oder $F^I NG = FNL$, d. h. die Tangente bildet mit den Radienvectoren an entgegengesetzten Seiten gleiche Winkel. (Beim Kreise fallen die Radienvectoren zusammen, bilden also rechte Winkel.)

Hieraus ergiebt sich eine Methode: Erstens an einen gegebenen Ellipsenpunkt und Zweitens von einem gegebenen Punkte außerhalb der Ellipse eine Tangente an dieselbe zu construiren, nämlich: 1) Ziehe die Radienvectoren nach dem gegebenen Ellipsenpunkt, halbire den Winkel, welchen sie bilden, und errichte ein Loth auf dieser Halbirungslinie; 2) G sei der gegebene Punkt (Fig. 14). Macht man $NK^I = NF$, so ist $F^I K^I = 2a$; ziehe FK^I, so ist FNK^I gleichschenkelig und $GL \perp FK^I$, weil der Winkel an der Spitze halbirt wird. Ziehe GF und GK^I, so ist $\triangle GFK^I$ gleichschenkelig. Der Punkt K^I liegt daher in dem Kreise, welchen man mit GF um G, und dem, welchen man um F^I mit 2a schlägt, also K^I bestimmt, also auch FK^I, also auch GL, da sie durch den Mittelpunkt von FK^I geht.

Aus der Gleichheit der Winkel, welche die Tangente mit den Radienvectoren bildet, folgt auch, daß von einem elliptischen Gewölbe oder Spiegel alle Licht-, Wärme- oder Schallstrahlen, welche von dem einen Brennpunkte ausgehen, so zurückgeworfen werden, daß sie sich in dem anderen Brennpunkte schneiden.

Bestimmung des Winkels, welchen die von dem **Mittelpunkte** der Ellipse nach dem Berührungspunkte der Tangente gezogene Gerade mit dieser bildet. Die Gleichung dieser Linie ist $y = \frac{\eta}{\xi}x$. Der Coefficient von x in der Tangentengleichung war $-\frac{b^2\xi}{a^2\eta} = m$; nennen wir nun $\frac{\eta}{\xi} = m^I$, so ist $mm^I = -\frac{b^2}{a^2}$. Es war aber für die Ergänzungssehnen ebenfalls $mm^I = -\frac{b^2}{a^2}$. Zieht man also (Fig. 15) $AN^I \mp ON$, so ist N^IB parallel der durch N gehenden Tangente NL. Hieraus ergiebt sich wieder eine Methode, eine Tangente an die Ellipse zu construiren. Zieht man $ON^{II} \mp BN^I$, so muß die Tangente an N^{II}, d. i. $N^{II}L^I \mp ON$ sein. ON und ON^{II} nennt man conjugirte Halbmesser. Wenn $b = a$, also die Ellipse ein Kreis ist, so ergiebt sich, wie bei den Ergänzungssehnen, daß $\angle$ ONL = 1R ist.

Bestimmt man den Einschnittspunkt der Tangente in die xAchse, so erhält man $x = \frac{a^2}{\xi}$, d. i. die vierte Proportionale zu ξ, a und a. Da der Ausdruck von b unabhängig ist, so schneiden, wenn man über derselben großen Achse verschiedene Ellipsen und auch einen Kreis construirt, die Tangenten an diese Ellipsen, deren Berührungspunkte dieselbe Abscisse haben, in denselben Punkt der xAchse ein. Erläutere dies durch eine Figur.

Die Länge des Radiusvector nach einem Punkte der Ellipse, dessen Coordinaten ξ und η sind, ist $\sqrt{\eta^2 + (\xi - e)^2} = r$. Drückt man η durch ξ aus, bringt dann die Größen auf gleichen Nenner und setzt $a^2 - b^2 = e^2$, so erhält man $r = \frac{e\xi - a^2}{a}$, r läßt sich also rational durch a, e und ξ ausdrücken. Beschreibt man um eine Ellipse einen Kreis so, daß die große Achse der Ellipse sein Durchmesser ist, so ist seine Gleichung, wenn die der Ellipse $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ ist, $y^{I2} = a^2 - x^2$. Für Punkte von gleichem x ist daher $\frac{y^2}{y^{I2}} = \frac{b^2}{a^2}$, d. i. $\frac{y}{y^I} = \frac{b}{a}$. D. h. in Worten? Erläuterung durch eine Figur. —

Hieraus ergiebt sich Erstens die Construction einzelner Punkte der Ellipse, nämlich: beschreibe (Fig. 16) zwei concentrische Kreise, deren Radien die große und die kleine halbe Achse der Ellipse a und b sind; ziehe einen beliebigen Durchmesser, dann einen beliebigen Radius cd, dh $\perp$ ch und fg $\mp$ ch, so ist g ein Ellipsenpunkt. Wenn man auf diese Weise eine Menge Punkte bestimmt, so läßt sich mit Hilfe derselben aus freier Hand eine Ellipse zeichnen, deren Genauigkeit in der Technik in vielen Fällen ausreicht.

Zweitens die Berechnung des Flächen-Inhaltes der Ellipse. Nämlich: Beschreibe über der großen Achse der Ellipse einen Kreis, in diesen ein beliebiges Polygon. Ziehe die Ordinaten der Eckpunkte, verbinde die Einschnittspunkte derselben in die Ellipse durch gerade Linien, so daß in der Ellipse ein entsprechendes Polygon entsteht. Berechne je ein Dreieck oder Trapez aus dem halben Kreise und der halben Ellipse durch die Ordinaten der Eckpunkte, so ergiebt sich, daß das Dreieck oder Trapez der Ellipse $\frac{b}{a}$ mal so groß ist, als die entsprechende Figur im Kreise. Also auch das ganze Polygon der Ellipse $= \frac{b}{a}$ mal dem Kreispolygone. Haben nun die Polygone unendlich viele Seiten, so fallen sie mit Ellipse und dem Kreise zusammen. Es ist daher der Ellipsen-Inhalt $= \frac{b}{a}$ Kreisinhalt, d. i. $\frac{b}{a}\pi a^2 = \pi ab$. — Erklärung von Tangente, Subtangente, Normale, Subnormale, Parameter. Berechnung dieser Größen. Der Parameter $= \frac{2b^2}{a} = 2p$. Entwickelung der Ellipsengleichung, wenn der eine Scheitelpunkt Anfangspunkt des Coordinatensystems ist. $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2) = 2px - \frac{px^2}{a}$.

Das hier Gegebene wird genügen, die Art und Weise erkennen zu lassen, in welcher die analytische Geometrie an unserer Anstalt vorgetragen wird; ich kann mich also, um den Umfang des Stoffes zu bezeichnen, darauf beschränken, die noch übrigen Sätze, welche durchgenommen werden, anzuführen.

Die Hyperbel.

1. Entwickelung der Gleichung der Hyperbel als des geometrischen Ortes der Punkte, deren Entfernungen von zwei gegebenen Punkten eine gegebene Differenz haben. 2. Bestimmung der ungefähren Form dieser Linie. 3. Die Gleichung der Tangente. 4. Alle Punkte der Tangente haben eine größere Ordinate, als die entsprechende der Hyperbel, also ist sie concav gegen die x Achse. 4. Construction der Hyperbel durch Bestimmung einzelner Punkte und durch eine einzige Bewegung. 5. Jede durch den Mittelpunkt gezogene gerade Linie, welche die Hyperbel schneidet, wird in jenem Punkte halbirt. 6. Für die Ergänzungssehnen ist $\operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\beta = \frac{b^2}{a^2}$. 7. Für eine Berührungslinie und die aus dem Mittelpunkte nach dem Berührungspunkte gezogene Gerade ist ebenfalls $\operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\beta = \frac{b^2}{a^2}$. 8. Die Tangente bildet mit den Radienvectoren gleiche Winkel. 9. Construction einer Tangente an einen gegebenen Punkt der Hyperbel und von einem gegebenen Punkte aus. 10. Für den Einschnittspunkt der Tangente in der x Achse ist $x = \frac{a^2}{\xi}$. 11. Die Gleichung der Asymptoten. 12. Diese nähern sich der Hyperbel immer mehr, treffen sie aber erst im Unendlichen. 13. Der Radiusrector läßt sich rational durch a, e und ξ ausdrücken. 14. Berechnung der Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale. 15. Gleichung der Hyperbel, wenn der Anfangspunkt in einem Scheitelpunkte liegt.

Die Parabel.

1. Entwickelung der Gleichung der Parabel als des geometrischen Ortes der Punkte, welche von einem gegebenen Punkte und einer gegebenen Linie gleiche Entfernung haben. 2. Bestimmung der Form der Parabel. 3. Construction der Parabel. 4. Die Parabel kann als eine Ellipse mit unendlich großer Hauptachse angesehen werden. 5. Berechnung des Radiusvector. 6. Gleichung der Tangente. 7. Parabolische Spiegel werfen die vom Brennpunkte ausgehenden Lichtstrahlen parallel der Achse zurück. 8. Construction einer Tangente an einen gegebenen Punkt und von einem gegebenen Punkte aus. 9. Gleichung der Normale, Berechnung der Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale. 10. Gleichung für die Bahn eines horizontal mit der Geschwindigkeit c geworfenen Körpers. 11. Gleichung der Bahn eines mit c^1 Geschwindigkeit unter einem Winkel von α^0 geworfenen Körpers. Daraus Bestimmung der Wurfhöhe und Wurfweite. Für welchen Winkel erreichen diese ihr Maximum? 12. Beweis, daß Ellipse, Hyperbel und Parabel Kegelschnitte sind.

Fig. 1.

Fig. 2.

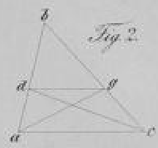

Fig. 3.

Fig. 4.

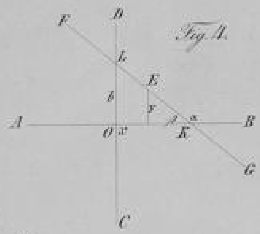

Fig. 5.

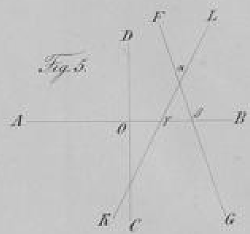

Fig. 6.

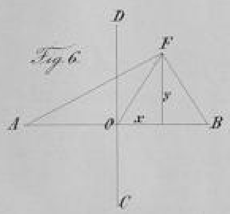

Fig. 7.

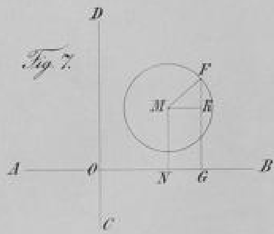

Fig. 8.

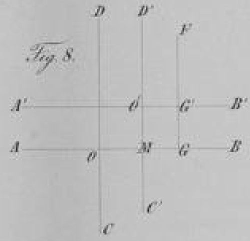

Fig. 9.

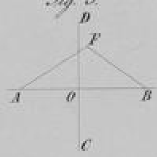

Fig. 10.

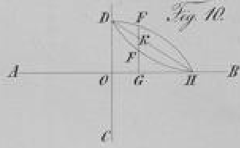

Fig. 11.

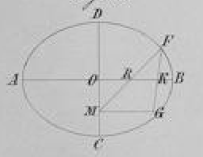

Fig. 12.

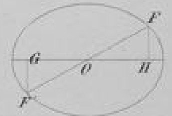

Fig. 13.

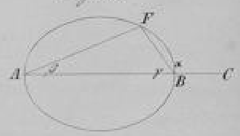

Fig. 14.

Fig. 15.

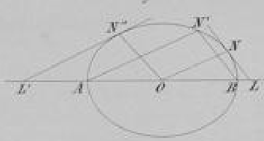

Fig. 16.