Zweiter Abschnitt.

Von den Gleichungen.

38.

Wenn zwei Zahlen oder Größen überhaupt von einerlei Größe sind, so setzt man bekanntlich das Zeichen der Gleichheit (=) zwischen beiden; und eben so verfährt man auch, wenn die beiden Grössen aus verschiedenen Theilen bestehen. So ist $ax + b = mx - n$. Die Theile, aus welchen die Größen einer Gleichung bestehen, lassen sich durch den Namen der Glieder ausdrücken. Jede Gleichung besteht demnach aus bekannten und unbekannten Gliedern, wovon die letztern gewöhnlich durch die letzten Buchstaben des Alphabets, als x, y, z; die erstern aber, durch die ersten Buchstaben a, b, c u. s. w. angedeutet oder bezeichnet werden. Eine Gleichung wird reducirt, wenn man die unbekannten Größen, von den bekannten absondert, oder wie man sich auch auszudrücken pflegt, wenn die unbekannten alle auf eine Seite gebracht werden. Dann ist es leicht, so eine Gleichung aufzulösen, oder die unbekannte Größe, durch bekannte, anzugeben.

39.

39.

Diejenige Wissenschaft, die sich mit den Gleichungen beschäftiget, und die unbekannten Größen, durch bekannte zu finden lehrt, heißt die Algebra. Um das unbekannte zu finden, bedienet sie sich der arithmetischen Arbeiten, d. i. des Addirens, Subtrahirens, Multipliciren, Dividiren und der Ausziehung der Wurzeln. Die Zeichen, welche zwischen den Gliedern der Gleichungen stehen, deuten diese verschiedenen Arbeiten schon an.

40.

Es giebt der Gleichungen viele in de Algebra. Diejenigen, welche nur eine unbekannte Größe, und zwar in der ersten Potenz, haben, heissen Gleichungen vom ersten Grade. Dahin gehören auch Gleichungen, wo zwei, drei und mehr unbekannte Größen, aber alle in der ersten Potenz, vorkommen. Von diesen Gleichungen will ich hier zuerst handeln, und sodann zu den Gleichungen vom zweiten, dritten und vierten Grade, übergehen.

41.

Um eine Gleichung vom ersten Grade aufzulösen, so nehme man folgendes Beispiel an. Ich habe eine Zahl, wenn ich diese mit 5 multiplicire, und zu dem Producte 8 addire, so kommt eben so viel heraus, als wenn ich dieselbe Zahl mit 7 multiplicire und von dem Producte 8 abnehme. Was ist das für eine Zahl?

Diese Zahl sehe man als bekannt oder gegeben an, (eben dadurch unterscheidet sich die Algebra von der gewöhnlichen Arithmetik) und bezeichne sie mit dem Buchstaben x. Nach den Bedingungen der Aufgabe, soll diese mit 5 multipliciret, und zu dem Producte 8 addiret werden, um eben so viel heraus zu bringen, als wenn dieselbe Zahl mit 7 multipliciret, und von dem Producte 8 abgezogen wird. Demnach ist

$$5x + 8 = 7x - 8.$$

Diese Gleichung reducire man, welches geschieht, indem x allein auf die eine Seite gebracht wird. Zu dem Ende addire man auf beiden Seiten 8, so fällt 8 auf der einen Seite weg, und auf der andern wird es zugesetzt, und die Gleichung ist

$$5x + 16 = 7x$$

Jetzt nehme man von beiden Seiten $5x$ weg, so ist $16 = 2x$; theilt man hierauf 16 mit 2, so ist $x = 8 =$ der gesuchten Zahl. Denn wenn man 8 mit 5 multiplicirt und 8 addirt, so ist die Summe $= 7 \times 8 - 8$.

42.

Diese Aufgabe läßt sich allgemein ausdrücken, wenn man die unbekannten Größen mit m und n multiplicirt, und zu dem einen Producte a addiret, von dem andern aber b subtrahiret. Alsdann hat man der Aufgabe zufolge

$mx + a$

$$mx + a = nx - b$$

Addire auf beiden Seiten $+ b \qquad + b$ so ist

$$mx + a + b = nx$$

subtrahire ebenfalls $mx \qquad = mx$ so hat man

$$a + b = nx - mx$$

Nun sondere man auf der einen Seite den gemeinschaftlichen Factor x ab; so ist

$$a + b = (n - m)x;$$

dividire hierauf die ganze Gleichung mit $n - m$; so ist $x = \frac{a + b}{n - m}$

Diese Gleichung giebt eine allgemeine Auflösung für alle hieher gehörige Aufgaben. Denn die unbekannte Größe (x) ergiebt sich, wenn man die beiden Zahlen, die zu der unbekannten Größe addirt und subtrahirt werden, zusammenlegt, und durch den Unterschied der beiden Zahlen, womit man die unbekannte Größe multipliciren soll, dividirt. In unserm Beispiele war $a = b = 8$, also $a + b = 16$; n war $= 7$ und $m = 5$; folglich ist $x = \frac{16}{7-5}$ $= \frac{16}{2} = 8$ wie vorhin.

43.

Hier stehen noch einzelne Gleichungen zur Uebung.

$$ax + b = c - d$$

Subtrahire auf beiden Seiten $+ b$, so fällt es

auf

auf der einen weg, und kommt auf der andern zu stehen. Demnach

$$ax = c - d + b.$$

Nun dividire man die ganze Gleichung mit dem Coefficienten von x, nämlich a, so ist

$$x = \frac{c - d + b}{a}$$

Hieraus folgt auch, wenn auf der einen Seite einer Gleichung, eine Größe mit dem Zeichen $+$ steht, so braucht man die Größe nur nach der andern Seite mit dem Zeichen minus zu bringen, so ändert sich dadurch die Gleichung um nichts. Der umgekehrte Fall trifft ein, wenn die Größe, welche weggeschaft werden soll, das Zeichen minus bei sich hat.

Hat die unbekannte Größe einen Factor oder Coefficienten, bei sich, so muß der Ausdruck auf der andern Seite mit diesem getheilt werden.

Kommt die unbekannte Größe in verschiedenen Gliedern vor, so muß man sie abzusondern suchen, und die Glieder der andern Seite, mit dem gemeinschaftlichen Factor dividiren. Als

$$ax - bx + x = d; \quad \text{so ist}$$

$$(a - b + 1)x = d$$

folglich $$x = \frac{d}{a - b + 1}.$$

Eben so:

$$by + cd = ay + mf - gh$$

oder: $$by - ay = mf - gh - cd$$

und $$y(b-a) = mf - gh - cd$$

also $$y = \frac{mf - gh - cd}{b - a}$$

44.

Wenn eine Gleichung Brüche bei sich hat, so muß man die Glieder der Gleichung mit dem gemeinschaftlichen Nenner der Brüche, multipliciren. Als

$$\frac{5x}{8} + 14 = 100.$$

Multiplicire alle Glieder der Gleichung mit 8; so ist $\frac{5x \cdot 8}{8} + 112 = 800.$ In dem ersten Gliede fällt die 8 weg, und man hat

$$5x + 112 = 800.$$

Hier wird + 112 mit dem entgegengesetzten Zeichen auf die andere Seite gebracht; folglich

$$5x = 800 - 112$$

also $$x = \frac{800 - 112.}{5}$$

Allge-

Allgemein sei $\frac{bx-c}{d} = m - n =$

$bx - dc = (m-n)\,d = bx = (m-n)\,d + dc$

$= x = \frac{(m-n)\,d + dc}{b} = \frac{(m-n+c)\,d}{b}.$

Eben so: $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 100.$

Der gemeinschaftliche Nenner von $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ ist 12; man multiplicire daher die ganze Gleichung mit 12; so ist

$6x + 4x + 3x = 1200$ oder

$13x = 1200$; also

$x = \frac{1200}{13}$

allgemein $\frac{x}{a} + \frac{3x}{b} + \frac{5x}{c} = d - e$

d. i. $\frac{bcx + 3acx + 5abx}{abc} = d - e$

und $(bc + 3ac + 5ab)\,x = abc\,(d-e)$

also $x = \frac{abc\,(d-e)}{bc + 3ac + 5ab}$

Anwendung der vorhergehenden Sätze, auf einzelne Aufgaben mit einer unbekannten Größe.

45.

1ste Aufgabe. Die Summe zweier Größen und der Unterschied derselben, sei gegeben. Man verlangt die Größen selbst zu wissen?

Auflösung. Die Summe der beiden Größen sei a, und die Differenz derselben $= b$. Nun sei die eine Größe $= x$; so ist die andere $x - b$. Also:

$$x + x - b = a \quad \text{oder}$$
$$2x - b = a; \quad \text{folglich}$$
$$2x = a + b \quad \text{und daher}$$
$$x = \frac{a + b}{2} = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b$$

Mithin die kleine $= \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b - b = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b = \frac{a - b}{2}$.

Die größte Zahl ergiebt sich aus der halben Summe und dem halben Unterschiede, so wie die kleine aus der halben Summe weniger der halben Differenz.

Die Summe zweier Zahlen sei $= 100$, ihr Unterschied $= 84$; so ist die größte Zahl $=$

$= \frac{100 + 84}{2} = 50 + 42 = 92$ und die kleinste Zahl $= \frac{100 - 84}{2} = \frac{16}{2} = 8.$

Hieher gehört auch folgende Aufgabe:

46.

2te Aufgabe. Vater und Sohn haben zusammen ein Alter von 54 Jahren. Der Vater ist 34 Jahr älter als der Sohn. Wie alt ist jeder von ihnen?

Auflösung. Hier ist, nach der vorigen Aufgabe, a = 54 und b = 34; also des Vaters Alter $= \frac{54 + 34}{2} = 44$ und das des Sohnes $= \frac{54 - 34}{2} = 10.$

47.

3te Aufgabe. Man zerlege die Zahl 720 in drei Theile, so daß die größte Zahl 80 mehr beträgt als die kleinste, und die mittlere 40 größer ist als die kleinste. Was sind es für Zahlen?

Auflösung. Wüßte man die kleinste Zahl, so würde man auch die beiden andern finden können.

Zu

Zu dem Ende sei die kleinste Zahl $= x$; so ist
die mittlere $= x + 40$ und
die größte $= x + 80$

die drei zusammen also $= 3x + 120$
und diese Summe muß mit 720 einerlei sein.
Demnach hat man $3x + 120 = 720$ und

$$3x = 720 - 120 = 600$$

folglich $x = 200$
daher $x + 40 = 240$
und $x + 80 = 280$

zusammen also 720.

Diese Aufgabe läßt sich allgemein auflösen, wenn für die Summe der 3 Theile $= a$, gesetzt wird.

Ist nun die größte Zahl um b mehr als die kleinste, und die mittlere um c größer als die kleinste; so ist

$$x + x + c + x + b = a;$$

oder $3x + c + b = a$
mithin $x = \frac{a - c - b.}{3}$

Zieht man also von der gegebenen Zahl, die Summe, um welche die beiden andern größer sind als die kleinste, uud theilt die Differenz durch 3, so hat man die kleinste Zahl. Hiernach läßt sich folgende Frage leicht auflösen.

48.

4te Aufgabe. Drei verschiedene Personen, A, B und C, bekommen 155 m℔; davon erhält B 15 m℔ mehr als A, und C 35 m℔ mehr als A.

Auflösung. Demnach A = $\frac{155-50}{3}$ = $\frac{105}{3}$ = 35 m℔.

49.

5te Aufgabe. Ein Herr vertheilt unter seinen 4 Bedienten, A, B, C und D, 550 Thalr. Davon erhält B zweimal so viel als A; C so viel als A und B; und D so viel als C und B. Wie viel erhält jeder?

Auflösung. A bekomme = x; so erhält B = 2x, und C = 3x, und D 5x. Demnach alle vier = 11 x = 550 Rthlr.; mtihin x = 50 = A. Daher B = 100; C = 150 und D = 250.

50.

6te Aufgabe. Die Zahl 14250, in drei Theile zu theilen, so, daß sich diese, wie die drei Zahlen, 3, 5 und 11, verhalten; die erste zur zweiten, wie 3 : 5, und die erste zur dritten, wie 3 : 11. Was sind das für Zahlen?

Auflösung. Die erste Zahl sei $= x$; so ist die 2te $= \frac{5}{3}x$; Denn $3 : 5 = x : \frac{5x}{3}$. Die 3te $= \frac{11}{3}x$; weil $3 : 11 = x : \frac{11}{3}x$. Addirt man demnach diese 3 gefundenen Zahlen, so muß 14250 heraus kommen. Also ist die Gleichung

$$x + \frac{5}{3}x + \frac{11}{3}x = 14250.$$

Multiplicire die ganze Gleichung mit 3; so ist

$$3x + 5x + 11x = 42750$$

und daher also $19x = 42750$. Daher

$$x = 2250$$

folglich $\frac{5}{3}x = 3750$

und $\frac{11}{3}x = 8250$.

Nun ist $2250 : 3750 = 3 : 5$ und

$$2250 : 8250 = 3 : 11.$$

Allgemein läßt sich diese Aufgabe auf folgende Art auflösen. Die Zahl, welche getheilt werden soll, sei a; die drei Größen, nach welchen dieses geschehen soll, sei m, n und p; so ist, wenn der erste Theil $= x$ ist, der zweite $\frac{n x}{m}$ und der dritte $= \frac{p x}{m}$.

Folglich $x + \frac{n x}{m} + \frac{p x}{m} = a$, mit m multiplicirt, giebt

$$mx + nx + px = am \quad \text{oder}$$

$$(m + n + p)x = am \quad \text{und also}$$

$$x = \frac{am}{m+n+p}.$$

Multi-

Multiplicirt man demnach die gegebene Größe mit der ersten Zahl, und dividirt das Product durch die Summe der drei Theile, so erhält man die kleinste Größe.

51.

7te Aufgabe. Eine Zahl anzugeben, deren doppeltes und 24 so viel über 80 ist, als die Zahl selbst ist unter 100.

Auflösung. Die Zahl sei $= x$; so ist

$$2x + 24 - 80 = 100 - x;$$

bringe x auf die andere Seite, so ist

$$3x + 24 - 80 = 100$$

und $3x + 24 = 180$; und $3x = 156$; folglich $x = 52$.

52.

8te Aufgabe. Ein Mann bedingt zu einer Arbeit, die Eile erfordert, einen Handwerker auf 30 Tage zu 30 ß, mit dem Bedinge, daß er für jeden Tag, da er nicht arbeitet, ihm von dem an den übrigen Tagen verdienten Lohn 10 ß abziehen wolle. Am Ende der 30 Tage bezahlt er ihm 31 ℳ 4 ß. Die Frage ist, wie viel Tage hat er gearbeitet, und wie viele versäumt?

Aufgabe. Er habe x Tage versäumt, mithin gearbeitet 30 Tage — x. Jeden Arbeitstag bezahlt er mit 30 ß; also hat er verdient (30 Tage — x) 30 ß = 900 ß — 30 x. Versäumt hat er x Tage; mithin wird ihm abgezogen, für jeden Tag

10 ß.

10 ß, d. i. 10 x ß. Also ist die erste Gleichung $= 900 - 30x - 10x = 31$ ℳ 4 ß $=$ 500 ß; oder $900 - 40x = 500$ oder $900 = 40x + 500$ und $40x = 400$ mithin $x = 10$ Tage. Demnach gearbeitet $30 - 10 = 20$ Tage.

53.

9te Aufgabe. Ein $44\frac{1}{2}$jähriger Vater hat einen Sohn von 10 Jahren. Wie alt wird wohl dieser Sohn sein, wenn er halb so alt ist als sein Vater?

Auflösung. Die Zahl der Jahre, die dem Sohne an dem halben Alter des Vaters fehlen, sei x. Eben so viele Jahre kommen zu dem Alter des Vaters, mithin ist $10 + x = \frac{44\frac{1}{2} + x}{2}$

$20 + 2x = 44\frac{1}{2} + x$, und

$20 + x = 44\frac{1}{2}$ und daher

$x = 24\frac{1}{2}$ Jahr.

Gegenwärtig ist der Sohn 10 Jahre, also wenn er halb so alt wird, ist er $= 34\frac{1}{2}$, und dann ist der Vater 69 Jahre.

54.

10te Aufgabe. Ein Spieler wird gefragt: wie viel Geld er noch habe; dieser antwortet: 3 mal so viel als ich verlohren habe. Wie viel hat er dann verlohren? Wenn ich die Zahl des Verlustes, sagt er, mit $\frac{1}{6}$ von dem, was ich noch habe, multiplicire,

so

so bekomme ich eine Zahl, die so groß ist, als die Zahl des Geldes, das ich vor dem Spiel hatte. Wie viel hat er verlohren und was bleibt ihm noch übrig?

Auflösung. Er habe verlohren x; hat also noch 3 x. Folglich hatte er vor dem Spiele 4 x.

Nun ist $\frac{1}{6}$ von $3x = \frac{1}{2}x$; und wird dieser mit dem Verluste x multiplicirt, so ist das Product

$$= \frac{1}{2}xx = 4x; \text{ oder } xx = 8x.$$

Dividire die Gleichung mit x, so ist $x = 8 =$ dem Verluste. Er hat noch übrig $3x = 24$, und hatte also $= 32$.

55.

11te Aufgabe. Ein Kasten wird durch 2 Röhren in 12 Minuten, durch eine aber in 20 Minuten gefüllt. In wie viel Zeit wird er durch die andere Röhre voll werden?

Auflösung. In x Zeit. In dieser Zeit wird $\frac{12}{x}$ tel des Kastens voll. Denn x Zeit : 12 M. $= 1 : \frac{12}{x}$ tel. In 12 Minuten wird die eine Röhre, die den Kasten in 20 Minuten füllt, $\frac{12}{20}$ tel $= \frac{3}{5}$ des Kastens voll machen. Denn

$$20\ \text{M.} : 12\ \text{M.} = 1 : \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

Also

Also $\frac{12}{x} + \frac{3}{5} = 1$; oder $60 + 3x = 5x$, und daher $2x = 60$; oder $x = 30$ Minuten.

56.

12te Aufgabe. Vor 4 Tagen ist ein Bothe abgeschickt worden, der täglich nur 10 Stunden weit geht. Es wird demselben ein zweiter nachgeschickt, der alle Tage 12 Stunden geht. Wann wird letzterer den erstern einholen?

Auflösung. In x Tagen. Der erste ist schon 4 Tage unterweges; also $4 + x$ Tage dauert die Reise, und da geht er auf $40 + 10x$ Stunden. In x Tage geht der andere $12x$ Stunden. Nun sind die Wege sich einander gleich; also ist

$$40 + 10x = 12x, \text{ oder } 40 = 2x;$$

mithin $x = 20$ Tagen. In dieser Zeit kommen sie zusammen. Denn $(4x + 20)\,10 = 20 . 12 = 240$ Stunden.

Allgemein läßt sich diese Aufgabe auch so vorstellen:

Ein Körper, dessen Geschwindigkeit in einer bestimmten Zeit b ist, sei um a Tage dem andern voraus, der eine Geschwindigkeit c, in eben der Zeit hat. Wann treffen beide zusammen?

Auflösung. In x Zeit. Also $(a + x)\,b = c\,x$; oder $x = \frac{ab}{c - b}$.

Daß

Daß diese Auflösung allgemein sei, läßt sich dadurch zeigen, wenn man annimmt, der Stundenzeiger einer Uhr stehe auf 3, und habe eine Geschwindigkeit von 5 Minuten in einer Stunde; der Minutenzeiger bewege sich aber mit 60 in eben der Zeit; so ist die Zeit der Zusammenkunft beider Zeiger $= \frac{3 \cdot 5}{60 - 5} = \frac{15}{55} = \frac{3}{11}$ Stunden $= 16\frac{4}{11}$ Minuten.

Aus der Gleichung $\frac{ab}{c - b} = x$ läßt sich, wenn x bekannt ist, leicht c finden. Denn $ab = cx - bx$, oder $\frac{ab + bx}{x} = c$. Z. B. Ein Bothe, der schon 8 Tage unterweges ist, geht täglich 8 Stunden. In 12 Tagen soll denselben ein anderer einholen; wie viel Stunden muß dieser täglich zurücklegen?

Hier ist $a = 8$; $b = 8$; $x = 12$. Folglich $c = \frac{8 \cdot 8 + 8 \cdot 12}{12} = \frac{64 + 96}{12} = \frac{160}{12} = 13\frac{1}{3}$ Stunden.

Zu dieser Gattung von Aufgaben gehört auch noch folgende:

Wenn der Fuchs so große Sprünge macht als der ihn verfolgende Hund, und 60 Sprünge voraus hat, aber nur 4 Sprünge thut, während der Hund 6 macht,

macht, so holt der Hund ihn in 180 Sprünge ein. Denn der Fuchs thue noch x Sprünge, so verhalten sich diese zu der des Hundes, wie $4 : 6 = 2 : 3$; also werden diese von dem Hunde in $\frac{2}{3}$ x Sprünge vollendet. Daher ist $60 + x = \frac{2}{3}x$; oder $180 + 3x = 2x$; und $x = 180$.

56.

13te Aufgabe. Einer giebt dem nächsten Bettler $\frac{1}{6}$ seines Geldes und 1 ß darüber; dem andern $\frac{1}{6}$ des Restes und 2 ß, dem dritten wieder $\frac{1}{6}$ des Restes und 3 ß u. s. w., bis er kein Geld mehr hat. Ein Bettler bekam so viel als der andere. Wie viel Bettler bekamen etwas, und wie viel Geld hatte er?

Auflösung. Er habe x Geld bei sich, so bekam der erste $\frac{1}{6}x + 1$ ß. Dieses von x abgezogen, läßt $x - \frac{1}{6}x - 1$ ß $= \frac{5}{6}x - 1$ ß. Von diesem Reste bekam der 2te $\frac{1}{6}$tel und 2 ß, also $\frac{5}{36}x - \frac{1}{6}$ ß $+ 2$ ß, abgezogen von $\frac{5}{6}x - 1$ ß, läßt $\frac{5}{6}x - 1$ ß $- \frac{5}{36}x + \frac{1}{6}$ ß $- 2$ ß $= \frac{25}{36}x - 3$ ß $+ \frac{1}{6}$ ß, wovon der 3te wieder $\frac{1}{6}$tel bekam und noch 4 ß mehr. Alle bekamen aber gleich viel; folglich muß das, was der erste erhielt, dem, was der zweite bekam, gleich sein, und daher ist

$$\frac{1}{6}x + 1\text{ ß} = \frac{5}{36}x - \frac{1}{6}\text{ ß} + 2\text{ ß}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit dem gemeinschaftlichen Nenner, nämlich 36, so ist

$$6x + 36\text{ ß} = 5x - 6\text{ ß} + 72\text{ ß}; \text{ oder}$$

$$6x + 36\text{ ß} = 5x + 66\text{ ß}; \text{ oder } x = 30\text{ ß}.$$

Da

Da er dem Bettler $\frac{1}{6}$ von diesem gab und noch 1 ß darüber, so hat jeder erhalten $= \frac{30}{6} + 1 = 6$ ß, und theilt man diese Summe in 30 ß, so giebt der Quotient $= 5$ Bettler.

57.

14te Aufgabe. Ein Kaufmann hat zweierlei Sorten Thee, nämlich feinen und mittelmäßigen. Von der erstern Sorte hat er 100 ℔, wovon das ℔ 4 mß kostet; von der mittlern Sorte kostet das ℔ 2 mß. Aus beiden Sorten, will er das ℔ zu 3 mß verkaufen. Wie viel ℔ muß er von der schlechtern Sorte hinzusetzen, um das ℔ zu bemeldetem Preise verkaufen zu können?

Auflösung. Von der schlechtern Sorte, nehme er x ℔; so ist der Preis von dieser $= 2x$ mß. Von der feinern Sorte hat er 100 ℔ zu 4 mß das ℔, macht 400 mß. Nach der Mischung hat er 100 ℔ + x ℔ zu 3 mß das ℔, giebt $300 + 3x$ mß.

Dieser Werth muß den beiden erstern gleich sein; daher ist

$$2x + 400 = 300 + 3x;$$

$$x = 100 \text{ ℔}$$ Die Mischung beträgt also 200 ℔ zu 3 mß $= 600$ mß; 100 ℔ der besten Sorte zu 4 mß $= 400$ mß, und 100 ℔ der schlechtern zu 2 mß $= 200$; zusammen also ebenfalls 600 mß.

58.

15te Aufgabe. Man sucht eine Zahl, die von der Beschaffenheit ist, daß wenn man zu derselben

einmal

einmal 5, und zweitens 12 addirt, daß beide Zahlen sich zu einander wie $3 : 4$ verhalten. Wie heißt diese Zahl?

Auflösung. Die Zahl heiße x; so ist, vermöge der Aufgabe, $x + 5 : x + 12 = 3 : 4$. Oder $4x + 20 = 3x + 36$; oder $x = 16$.

Allgemein läßt sich diese Aufgabe so vorstellen:

Man lege zu der unbekannten Größe, einmal die Größe a, dann b, so sollen sich beide verhalten, wie $m : n$. Oder $mx + ma = mx + mb$; oder $nx - mx = mb - na$; oder $(n - m)\,x = mb - na$. Daher $x = \dfrac{mb - na}{n - m}$.

59.

16te Aufgabe. Es wird eine Zahl gesucht, wenn man zu derselben 20 addirt, und 80 davon abzieht, daß das Verhältniß von $6 : 1$ heraus komme. Was ist das für eine Zahl?

Auflösung. Die Zahl sei x; so ist

$$x + 20 : x - 80 = 6 : 1.$$

Demnach $x + 20 = 6x + 480$. Oder

$$x + 500 = 6x;\ \text{d.i.}\ x = 100.\ \text{Denn}$$

$$100 + 20 : 100 - 80 = 6 : 1.$$

Allgemein sei die eine Größe a und die andere b. Jene soll addiret und diese subtrahiret werden, um das Verhältniß von $m : n$ herauszubringen. Es ist

also

also $x + a : x - b = m : n$. Daher
$nx + an = mx - bx$; folglich
$mx - nx = an + bm$; oder $x = \frac{an + bm}{m - n}$

17te Aufgabe. Ein Kaufmann kauft Mahagoni Holz; bezahlt für 3 Quadrat-Fuß 5 Mk 12 ß. Nach einiger Zeit verkauft er 5 Fuß zu 11 Mk 8 ß wieder, und gewinnt dabei 38 Mk 5 ß 4 ₰. Wie viel Quadrat-Fuß hat er gekauft?

Auflösung. 3 □Fuß : $5\frac{3}{4}$ Mk $= x$ Q.F. : $\frac{23}{12} x$ Mk
ferner: 5 □Fuß : $11\frac{1}{2}$ Mk $= x$ Q.F. : $\frac{23}{10} x$ Mk
Nun ist $\frac{23}{10} x - \frac{23}{12} x = 38\frac{1}{3}$ oder
$\frac{23}{60} x = 38\frac{1}{3}$; oder $23 x = 2300$.
Also $x = 100$.

Gleichungen vom ersten Grade, worin mehr als eine unbekannte Größe vorkommen.

60.

Bei einer jeden bestimmten Aufgabe, kommen eben so viele Gleichungen als unbekannte Größen vor. Hat man demnach zwei unbekannte Größen, so gebe man den Werth von einer unbekannten Größe in beiden Gleichungen an, und kehre sich nicht daran, ob noch eine unbekannte Größe in den beiden Gleichungen vorkomme oder nicht.

Auf diese Weise hat man zwei Werthe, die sich, (vermöge des Grundsatzes in der Arithmetik, wenn zwei Größen einer dritten gleich sind, sie auch unter sich gleich sind) völlig einander gleich sein müssen.

Aus dieser Gleichung suche man nun nach dem vorhergehenden, die zweite unbekannte Größe, und den Werth derselben setze man in die erste Gleichung, so ergiebt sich auch die zweite unbekannte Größe.

61.

Ich habe z. B. folgende zwei Gleichungen:

$$\text{I)}\ 2x + y = 24;\ \text{II)}\ 5x + 3y = 65.$$

Aus I) ist $x = \frac{24 - y}{2}$ und aus II) $x = \frac{65 - 3y}{5}$.

Diese beiden Ausdrücke für x müssen sich demnach einander gleich sein; und es ist

$$\frac{24 - y}{2} = \frac{65 - 3y}{5};$$

eine Gleichung, worinn nur eine unbekannte Größe, nämlich y, enthalten ist.

Multiplicire nun den einen Theil mit 5, und den andern mit 2, so ist

$$120 - 5y = 130 - 6y$$ woraus sich
$$y = 10$$ ergiebt.

Diesen gefundenen Werth von y, setze man für y in I; so ist $x = \frac{24 - 10}{2} = 7.$

Eben

Eben so läßt sich dieses auch auf eine allgemeine Art zeigen. Zu dem Ende habe man folgende zwei Gleichungen:

$$\text{I)}\ ax + by = c;\quad \text{II)}\ dx + fy = e.$$

a, b, c, d und e, sind bekannte Größen.

Aus I) ist $x = \frac{c - by}{a}$ und aus II) ist $x = \frac{e - fy}{d}$. Folglich hat man

$\frac{c - by}{a} = \frac{e - fy}{d}$; worin nur y allein vorkommt. Demnach ist, wenn man mit a und d multiplicirt, $dc - dby = ae - afy$ und

$$afy - dby = ae - dc \quad \text{oder}$$
$$(af - db)y = ae - dc; \quad \text{also}$$
$$y = \frac{ae - dc}{af - db}.$$

Diesen Werth setze in den von I gefundenen Ausdruck für y; so ist

$$x = \frac{c - b.\,\frac{ae - dc}{af - bd}}{a} = \frac{c\,\frac{-abe + bcd}{af - bd}}{a}$$

$$= \frac{\frac{acf - bcd - abe + bcd}{af - bd}}{a} =$$

$$\frac{\frac{acf - abe}{af - bd}}{a} = \frac{acf - abe}{aaf - abd} = \frac{cf - be.}{af - bd}$$

62.

Die vorhergehende Art, den Werth von x und y, aus den beiden Gleichungen zu finden, ist immer etwas weitläuftig, und wird noch verwickelter, wenn die Gleichung mehr als zwei unbekannte Größen hat. Aus dem Grunde muß man versuchen, ob sich nicht eine oder mehrere unbekannte Größen durch die Additio, Subtractio, Multiplicatio und Divisio, wegschaffen oder eliminiren lassen. Wenn z. B. die beiden Gleichungen $x + y = a$ und $x - y = d$, gegeben sind, so fällt y weg, wenn beide Gleichungen addirt, und x geht weg, wenn beide Gleichungen subtrahirt werden. Denn im ersten Fall hat man $2x = a + d$, nnd daher $x = \frac{a + d}{2}$; im andern ist $2y = a - d$, oder

$y =$

$y = \frac{a-d}{2}$. Die Aufgabe, welche hier durch zwei unbekannte Größen gefunden worden ist, habe ich in 45, durch eine unbekannte Größe gefunden. Allein, dieses Verfahren läßt sich nicht bei jeder Aufgabe von mehr als einer unbekannten Größe anwenden. Dafür ist aber folgendes Verfahren allgemein:

Man nehme die beiden Gleichungen $2x + y = 24$, und $5x + 3y = 65$, (51) als gegeben an; multiplicire die zweite Gleichung mit m, so kommt $5mx + 3my = 65m$. Zu dieser addire man die erste Gleichung, so ist $5mx + 2x + 3my + y = 24 + 65m$.

Aus dieser Gleichung läßt sich x und y bequem absondern, und man hat

$$(5m+2)x + (3m+1)y = 24 + 65m.$$

Nun sei $5m + 2 = 0$; mithin fällt x aus der Gleichung weg; und m ist $= -\frac{2}{5}$. Aber $y = \frac{24 + 65m}{3m + 1}$. Für m setze man allenthalben $-\frac{2}{5}$, so ist $y = \frac{24 - 26}{-3(\frac{2}{5})+1} = \frac{24 - 26}{-\frac{6}{5}+1} = \frac{-2}{-\frac{1}{5}} = +10$. Dieser Werth kommt mit dem in 61 gefundenen völlig überein. Wollte man hingegen y in der Gleichung verschwinden lassen, so setze

setze

setze man $3m + 1 = 0$; so ist $x = \frac{24 + 65m}{5m + 2}$

Aber m ist $= -\frac{1}{3}$; diesen Werth setze man für m, so ist $x = \frac{24 - \frac{65}{3}}{-\frac{5}{3} + 2} = \frac{72 - 65}{-\frac{15}{3} + 6}$

$= \frac{+7}{+1} = 7.$

63.

Bevor ich das letzte Verfahren, auf eine Gleichung, worin drei unbekannte Größen vorkommen, anwende, will ich der bekannten Methode erwähnen, deren man sich bedienet, die drei unbekannten Größen heraus zu bringen.

Die allgemeine Regel ist diese:

Man finde aus jeder Gleichung den Werth von x; vergleiche alsdann die erste mit der zweiten, und ebenfalls die erste mit der dritten; oder auch die zweite Gleichung mit der dritten; so erhält man einen Ausdruck, worin nur zwei unbekannte Grössen vorkommen. Aus diesem schaffe man nach (51 und 52) die andere unbekannte Größe weg, so ergiebt sich der Werth für die eine unbekannte Größe; und die Aufgabe ist demnach so gut als aufgelöst anzusehen.

64.

Folgende drei Gleichungen, worin x, y und z die unbekannten Größen vorstellen, sind gegeben:

$$\text{I)}\ 3x + 5y + 7z = 179.$$
$$\text{II)}\ 8x + 3y - 2z = 64.$$
$$\text{III)}\ 5x - y + 3z = 75.$$

Aus I) ist $x = \frac{179 - 5y - 7z}{3}$; aus II) $x = \frac{64 - 3y + 2z}{8}$ und aus III) $x = \frac{75 + y - 3z}{5}$.

Nun setze man den Werth in I, dem in II gleich.

$$\frac{179 - 5y - 7z}{3} = \frac{64 - 3y + 2z}{8}$$ und

ebenfalls den I, dem Werth in III gleich. Das ist:

$$\frac{179 - 5y - 7z}{3} = \frac{75 + y - 3z}{5}$$

In beiden Gleichungen kommen nur zwei unbekannte Größen, y und z, vor. Man finde nun aus beiden y, so hat man z allein.

Aus der ersten ergiebt sich für $y = \frac{1240 - 62z}{31}$;

und

und aus der zweiten $y = \frac{670 - 26z.}{28}$

Die hier gefundenen Werthe von y, setze man nun einander gleich, so ist

$$\frac{1240 - 62z}{31} = \frac{670 - 26z}{28} =$$

$$34720 - 1736z = 20770 - 806z.$$

Daraus ist $z = 15$.

Diesen Werth setze man für z in der Gleichung für

$$y = \frac{1240 - 62z}{31} = \frac{1250 - 62.15}{31} = 10.$$

Nun war $x = \frac{179 - 5y - 7z}{3} =$

$$\frac{179 - 5.10 - 7.15}{3} = \frac{24}{3} = 8.$$

Demnach ist $x = 8$; $y = 10$; und $z = 15$.

65.

Um sich, bei der Bestimmung des Werths von x, y und z, derselben Methode zu bedienen, deren ich in (62) erwähnet habe, verfahre man folgendermassen. Multiplicire die 2te Gleichung $8x + 3y - 2z = 64$ (53) mit m, und die dritte $5x - y + 3z = 75$ mit n; zu beiden Producten addire man die erste Gleichung $3x + 5y + 7z = 179$. Also $8mx + 3my + 2mz = 64m$ und $5nx - ny + 3nz = 75$, und

3x +

$3x + 5y + 7z = 179 = 3x + 8mx + 5nx + 5y + 3my - ny + 7z - 2mz + 3nz = 179 + 64m + 75n = (3 + 8m + 5n)x + (5 + 3m - n)y + (7 - 2m + 3n)z = 179 + 64m + 75m.$

Nun setze man $3 + 8m + 5n = 0$, und $5 + 3m - n$, ebenfalls $= 0$; so ist

$$z = \frac{179 + 64m + 75n.}{7 - 2m + 3n}$$

Hier muß man also m und n zu bestimmen suchen, und das geschieht durch die beiden Gleichungen

$3 + 8m + 5n = 0$ und $5 + 3m - n = 0.$

Man verfährt eben so als vorhin, das heißt, man multiplicirt die zweite Gleichung mit p, und addirt zu dem Producte die erste. Folglich $(5 + 3m - n)p = 5p + 3mp - np + 3 + 8m + 5n = 3 + 5p + 8m + 3pm + 5n - np = 0 = 3 + 5p + (8 + 3p)m + (5 - p)n = 0.$

Um n zu finden, so setze man $8 + 3p = 0$; so ist $3 + 5p + (5 - p)n = 0$. Also

$$n = \frac{-3 - 5p.}{5 - p}$$

Wenn $8 + 3p = 0$ ist; so ist $p = -\frac{8}{3}$. Daher

$$n = \frac{-3 + \frac{40}{3}}{5 + \frac{8}{3}} = \frac{31}{23}.$$ Und

um

um m zu finden, so setze man $5 - p = 0$. Demnach ist $3 + 5p + (8 + 3p)m = 0$; und

$$m = \frac{-3 - 5p.}{8 + 3p}$$

Aber wenn $5 - p = 0$, so ist $p = 5$; folglich

$$m = \frac{-3 - 25}{8 + 15} = -\tfrac{28}{23}.$$ Diese beiden

Ausdrücke setze man in der Gleichung von z; und es ist

$$z = \frac{179 - 64.\tfrac{28}{23} + 75\tfrac{31}{23}}{7 - 2. -\tfrac{28}{23} + 3.\tfrac{31}{23}} = 15.$$

Hat man den Werth von z gefunden, so ergeben sich die beiden übrigen Werthe leicht.

Einzelne, hiehergehörige Aufgaben.

66.

1ste Aufgabe. Man hat eine gewisse Menge Gold und Silber mit einander vermischt. Die ganze Mischung nimmt einen Raum von 12 Cubiczoll ein, und wiegt 100 Unzen. Ein Cubiczoll Gold wiegt $12\frac{2}{3}$ Unzen, und ein Cubiczoll Silber $6\frac{8}{9}$ Unzen. Man fragt, wie viel Gold, und wie viel Silber, befindet sich in der Mischung.

Auflösung. Wüßte man, wie viel Cubiczoll jede Materie einnehme, so ließe sich die Menge Gold und Silber in der Mischung bald finden. Da aber dieses nicht bekannt ist, so setze man, es sei in der Mischung x Cubiczoll Gold, und y Cubiczoll Silber.

Beides

Beides zusammen nimmt also einen Raum von 12 Cubiczoll ein. Demnach ist

I) $x + y = 12$, und $x = 12 - y$

Nun wiegt 1 Cubiczoll Gold $12\frac{2}{3}$ Unzen, also x Cubiczoll $12\frac{2}{3}$ x Unzen $= \frac{38}{3}x$, und 1 Cubiczoll Silber wiegt $6\frac{8}{9}$ Unzen, folglich y Cubiczoll $6\frac{8}{9}$ y Unzen $= \frac{62}{9}y$. Man hat demnach II) $\frac{38}{3}x + \frac{62}{9}y = 100$ Unzen.

Man schaffe die Brüche weg, so hat man

$$342x + 186y = 2700$$

$114x + 62y = 900 : 3$ und daher

$x = \frac{900 - 62y}{114}$. Dieser Werth ist dem in I) gefundenen gleich. Folglich

$12 - y = \frac{900 - 62y}{114}$ und

$$\begin{array}{rcl} 1368 - 114y &=& 900 - 62y \\ +114y & & +114y \\ \hline 1368 &=& 900 + 52y; \end{array}$$

oder

$468 = 52y$ und $y = 9$. Also $x = 3$.

Nun ist $3 . \frac{38}{3} + 9 . \frac{62}{9} = 100$.

Allgemein läßt sich diese Aufgabe so vorstellen:

a sei der Raum der ganzen Mischung;

b das ganze Gewicht der Mischung;

c das Gewicht eines Cubiczolls der einen, und

d das Gewicht eines Cubiczolls der andern Materie.

Nun sei x der Raum der einen, und y der, der andern Materie; so ist $x + y = a$; also
$x = a - y$. Ferner:

$1 : c = x : cx =$ dem Gewichte der einen,
und $1 : d = y : dy =$ dem Gewichte der andern Materie.

Folglich ist $cx + dy = b$ und

$$x = \frac{b - dy}{c}.$$ Folglich

$$a - y = \frac{b - dy}{c}, \text{ und}$$

$ac - cy = b - dy$ und $cy - dy = ac - b$. Daher
$y = \frac{ac - b}{c - d}$. Nun ist $x = a - \frac{ac - b}{c - d} =$

$$\frac{ac - ad + b - ac}{c - d} = \frac{b - ad}{c - d}.$$

Diese beiden Formeln enthalten die Auflösung von der **Vermischungs-** oder der **Alligations-Regel**. Um diese Formel zu benutzen, so setze man, daß 1638 mk in Friedrichsd'or und Dukaten bezahlt werden solle; aber unter der Bedingung, daß dazu grade 164 Stück genommen werden. Den F. d'or rechnet man zu 13 mk 8 ß, und den Ducaten zu 7 mk 8 ß. Wie viel Stücke muß man von jeder Münzsorte nehmen.

Hier

Hier ist $a = 164$; $b = 1638$; $c = 13\frac{1}{2}$ und $d = 7\frac{1}{2}$ Mk. Demnach ist $x = \frac{1638 - 164 . 7\frac{1}{2}}{13\frac{1}{2} - 7\frac{1}{2}}$

$= \frac{408}{6} = 68$ F.d'or und $y = \frac{164 . 13\frac{1}{2} - 1638}{13\frac{1}{2} - 7\frac{1}{2}}$

$= \frac{576}{6} = 96$ Ducaten.

67.

2te Aufgabe. Ein Soldat, der 6 Jahre lang dienen muß, wird gefraget, wie lange er schon diene? Dieser antwortet: $\frac{1}{5}$ der verflossenen Zeit ist so groß, als $\frac{1}{4}$ von der Zeit, die ich noch dienen muß. Wie lange hat er schon gedienet, und wird er noch dienen?

Auflösung. Gedienet hat er x Jahre, und dienen wird er noch y Jahre. Folglich ist I)

$x + y = 6$ und $x = 6 - y$.

II) $\frac{1}{5}x = \frac{1}{4}y$

$4x = 5y$ und $x = \frac{5}{4}y$.

Also ist $6 - y = \frac{5}{4}y$; oder $24 - y = 5y$; also

$9y = 24$, und daher $y = 2\frac{2}{3}$. Mithin

$x = 6 - 2\frac{2}{3} = 3\frac{1}{3}$.

68.

3te Aufgabe. Man fragt, wie viel Uhr es sei? Die Antwort ist: die vom Mittage verflossenen Stunden sind $\frac{2}{3}$ von denen, die noch bis Mitternacht kommen werden. Wie viel Uhr war es nun?

Auflö-

Auflösung. Es war x Uhr, und bis Mitternacht sind noch y.

Es kommen hier zwei Gleichungen vor, nämlich I) $x + y = 12$; weil vom Mittage bis Mitternacht 12 Stunden sind. II) $x = \frac{2}{3} y$.

Aus der ersten Gleichung ergiebt sich $x = 12 - y$; und aus der zweiten ist $x = \frac{2}{3} y$.

Also ist $\frac{2}{3} y = 12 - y$; oder $2y = 36 - 3y$. Demnach ist $5y = 36$ und $y = 7$ St. 12 Min. Folglich $x = 4$ St. 48 M.

69.

4te Aufgabe. Was für Zahlen sind es, wovon die Hälfte der ersten, und ein Drittel der zweiten, die Zahl 32 ausmachen; ein Viertel aber der ersten und ein Fünftel der zweiten zusammen 18 betragen?

Auflösung. Die eine Zahl nenne man x, und die zweite y; so ist, nach den Bedingungen der Aufgabe, I) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 32$ und II) $\frac{1}{4}x + \frac{1}{5}y = 18$. Aus beiden Gleichungen finde man den Werth von x, woraus dann auch y gefunden wird.

Aus I) ist $3x + 2y = 192$; oder $x = \frac{192 - 2y}{3}$ und aus II) ist $5x + 4y = 360$;

oder $x = \frac{360 - 4y}{5}$.

Also

Also $\frac{192 - 2y}{3} = \frac{360 - 4y}{5}$ oder
$960 - 10y = 1080 - 12y$ oder
$2y = 120$ und $y = 60$. Daher
$x = \frac{192 - 120}{3} = 24$.

Die Probe ist leicht: denn $\frac{24}{2} + \frac{60}{3} = 32$ und $\frac{24}{4} + \frac{60}{5} = 18$.

70.

5te Aufgabe. Ein Bruch wird in den Bruch von $\frac{1}{3}$ verwandelt, wenn man 1 zum Zähler zählet; er wird aber $\frac{1}{4}$ werden, wenn der Nenner um 1 vermehret wird. Wie heißt dieser Bruch?

Auflösung. Er heiße $\frac{x}{y}$; so ist I) $\frac{x+1}{y} = \frac{1}{3}$, und II) $\frac{x}{y+1} = \frac{1}{4}$. Aus I) ist $x + 1 = \frac{1}{3}y$, folglich $x = \frac{1}{3}y - 1$, und aus II) ist $4x = y + 1$, und daher $x = \frac{y+1}{4}$. Demnach ist $\frac{1}{3}y - 1 = \frac{y+1}{4}$ oder $\frac{y-3}{3} = \frac{y+1}{4} = 4y - 12 = 3y + 3$. Mithin $y = 15$; oder $x = \frac{15}{3} - 1 = 4$; also $\frac{x}{y} = \frac{4}{15}$. Addirt

man

man zu dem Zähler 1, und subtrahirt vom Nenner 1; so erhält man im ersten Fall $\frac{1}{3}$ und im zweiten $\frac{1}{4}$, welche die beiden gesuchten Brüche sind.

71.

6te Aufgabe. Ein Kaufmann verkauft 30 Centner (jeden von 100 ℔) einer gewissen Waare, und 40 von einer schlechtern Sorte, zusammen für 1260 Mk. Nachmals aber 50 Centner der bessern, und 35 der schlechtern Sorte für 1625. Die Frage ist, wie hoch hat er die 100 ℔ gerechnet?

Auflösung. Der Preis der bessern Sorte sei x, der schlechtern y; so ist

$$30x + 40y = 1260 \text{ oder}$$
$$3x + 4y = 126 \text{ mithin I)}$$
$$x = \frac{126 - 4y}{3}$$

ferner:
$$50x + 35y = 1625 \text{ oder}$$
$$10x + 7y = 325 \text{ folglich II)}$$
$$x = \frac{325 - 7y}{10}. \text{ Also}$$
$$\frac{126 - 4y}{3} = \frac{325 - 7y}{10} \text{ oder}$$
$$1260 - 40y = 975 - 21y \text{ oder}$$
$$19y = 285 \text{ und daher } y = 15.$$

Also $x = \frac{126 - 60}{3} = 22.$

Der

Der Preis der bessern ist 22 mß und der schlechtern Sorte 15 mß. Denn 30. 22 = 660 mß und 40. 15 = 600; zusammen also 1260 mß. Eben so ist 50. 22 = 1100 und 35. 15 = 525; mithin beide Sorten = 1625.

Kürzer kann man diese Aufgabe auflösen, wenn man die erste Gleichung mit 5, die zweite mit 3 multipliciret, und beide von einander abnimmt; so erhält man zum Unterschiede sogleich den Werth von y. Denn $(30x + 40y = 1260) \times 5 =$

$$150x + 200y = 6300$$ und

$(50x + 35y = 1625) \times 3 = 150x + 105y = 4875$. Demnach

$$150x + 200y = 6300$$ und

$$\frac{150x + 105y = 4875}{95y = 1425}$$ also

$$y = 15.$$

Diesen Werth für y in einer der Gleichungen gesetzt, giebt $x = 22$; wie vorhin.

72.

7te Aufgabe. Man hat dreierlei Arten von Gold. In der ersten ist die Mischung so, daß in 16 Unzen, 7 Unzen Gold, 8 Unzen Silber und 1 Unze Kupfer befindlich sind. In der zweiten sind in 16 Unzen, 5 Unzen Gold, 7 Unzen Silber und 4 Unzen Kupfer. In der dritten Mischung befinden sich in 16 Unzen, 2 Unzen Gold, 9 Unzen Silber und 5 Unzen Kupfer. Aus den drei Mischungen, will man eine neue zusammensetzen, so, daß auf 16 Unzen, $4\frac{15}{16}$ Unzen Gold, $7\frac{10}{16}$ Unzen Silber und $3\frac{7}{16}$ Unzen Kupfer, gehen sollen. Wie viel nimmt man von jedem Metalle?

Auflösung. Hier sind drei Größen unbekannt. Von der ersten Mischung nehme man x, von der zweiten y, und von der dritten z Unzen. In der ersten befinden sich in 16 Unzen, 7 Unzen Gold; also in x Unzen, $\frac{7}{16}x$; in der zweiten sind demnach $\frac{5}{16}y$, und in der dritten $\frac{2}{16}z$. Diese drei Theile Gold, müssen $4\frac{15}{16}$ Unzen Gold der neuen Mischung machen. Demnach ist I) $\frac{7x+5y+2z}{16} = 4\frac{15}{16}$ oder

$$\frac{7x+5y+2z}{16} = \frac{79}{16} = 7x+5y+2z = 79$$

daher $x = \frac{79-5y-2z.}{7}$

Ferner befinden sich in 16 Unzen der ersten Mischung, 8 Unzen Silber, also in x, $\frac{8}{16}x$; in der zweiten $\frac{7}{16}y$, und in der dritten $\frac{9}{16}z$; zusammen demnach $\frac{8x+7y+9z}{16}$ Unzen; oder II)

$$\frac{x+7y+9z}{16} = 7\frac{10}{16} = 8x+7y+9z$$

$= 122$. Daher $x = \frac{122-7y-9z.}{8}$

Eben

Eben so enthalten 16 Unzen der ersten Mischung, 1 Unze Kupfer, der zweiten, 4 Unzen, und der 3ten, 5 Unzen. Daher ist III) $\frac{1}{16}x + \frac{4}{16}y + \frac{5}{16}z = 3\frac{7}{16}$ oder $\frac{1x + 4y + 5z}{16} = \frac{55}{16} =$

$x + 4y + 5z = 55$ und $x = 55 - 4y - 5z$.

Nun setze man die erste Gleichung gleich der zweiten und auch gleich der dritten, so ist

$$\frac{79 - 5y - 2z}{7} = \frac{122 - 7y - 9z}{8} \text{ und}$$

$$\frac{79 - 5y - 2z}{7} = 55 - 4y - 5z; \text{ aus}$$

beiden finde man den Werth von y. Zu dem Ende multiplicire man die erste Gleichung mit 7 und 8, so ist

$632 - 40y - 16z = 854 - 49y - 63z$ oder

$9y + 47z = 222 = y = \frac{222 - 47z}{9}$;

und die zweite Gleichung mit 7, giebt

$79 - 5y - 2z = 385 - 28y - 35z$;

oder $23y + 33z = 306 = y = \frac{306 - 33z}{23}$.

Jetzt hat man zwei Gleichungen, worin nur eine unbekannte Größe vorkommt; oder

$\frac{222 - 47z}{9} = \frac{306 - 33z}{23}$. Man multiplicire

mit 9 und 23, so ist

$5106 - 1081z = 2754 - 297z$ oder $2352 = 784z$; folglich $z = 3$. Nun läßt sich der Werth von y und x leicht bestimmen. Denn $y = \frac{306 - 99}{23} = 9$

und $x = 55 - 36 - 15 = 4$. Nimmt man also von der ersten 4, von der zweiten 9, und von der dritten 3 Unzen, so ist der Aufgabe ein Genüge geleistet. Denn unter dieser Voraussetzung nimmt man also von der ersten Mischung

	$\frac{28}{16}$ Unzen Gold,	$\frac{32}{16}$ Unzen Silber und	$\frac{4}{16}$ Unzen Kupfer.
Von der zweiten	$\frac{45}{16}$ " "	$\frac{63}{16}$ " "	$\frac{36}{16}$ " "
Von der dritten	$\frac{6}{16}$ " "	$\frac{27}{16}$ " "	$\frac{15}{16}$ " "
Zusammen also	$\frac{79}{16}$ Unzen Gold,	$\frac{122}{16}$ Unzen Silber und	$\frac{55}{16}$ Unzen Kupfer.

$= 4\frac{15}{16}$ Unzen Gold, $7\frac{10}{16}$ Unzen Silber und $3\frac{7}{16}$ Unzen Kupfer.

73.

8te Aufgabe. Ein Mann hat für Schuld angenommen, 23 Schtt Blei, 5 Schtt Eisen, 3 Schtt Kupfer, welche ihm mit den Zinsen und allen Unkosten 1293 Mk zu stehen kommen; ferner

ferner 7 Schtt Blei, 10 Schtt Eisen, 13 Schtt Kupfer, welche ihm 2508 rℓ kosten; endlich 12 Schtt Blei, 9 Schtt Eisen, 20 Schtt Kupfer, welche ihm 3723 rℓ betragen. Die Frage ist, wie hoch er das Schtt von jeder Waare ausbringen müsse, um genau sein Geld wieder zu haben?

Auflösung. Man setze den Preis des

Schtt Blei $= x$
des Eisens $= y$
des Kupfers $= z$.

So ist:

$23x + 5y + 3z = 1293$ folglich I)

$x = \dfrac{1293 - 5y - 3z}{23}$ und

$7x + 10y + 13z = 2508$ also II)

$x = \dfrac{2508 - 10y - 13z}{7}$ und

$12x + 9y + 20z = 3723$ demnach III)

$x = \dfrac{3723 - 9y - 20z}{12}$.

Nun

Nun setze man die erste Gleichung gleich der zweiten und dritten, so ist

$$\frac{1293 - 5y - 3z}{23} = \frac{2508 - 10y - 13z}{7}$$

oder $9051 - 35y - 21z = 57684 - 230y - 299z$

also $y = \frac{48633 - 278z}{195}$.

Ferner:

$$\frac{1293 - 5y - 3z}{23} = \frac{3723 - 9y - 20z}{12} \text{ oder}$$

$$15516 - 60y - 36z = 85629 - 207y - 460z$$

folglich $y = \frac{70113 - 424z}{147}$.

Nun ist

$$\frac{48633 - 278z}{195} = \frac{70113 - 424z}{147} \text{ oder}$$

$13672035 - 82680z = 7149051 - 40866z$ also

$z = \frac{6522984}{41814} = 156.$ Demnach ist

$$y = \frac{70113 - 424 \times 156}{147} = 27 \text{ und}$$

$$x = \frac{2508 - 10 \times 27 - 13 \times 156}{7} = 30.$$

74.

9te Aufgabe. A, B und C, reden von ihrem Vermögen. A spricht zu B und C: gebet mir die Hälfte von eurem Vermögen, so habe ich 170 Ducaten. Darauf verlangt B von A und C nur $\frac{1}{3}$ ihres Geldes, und hat dann 170 Ducaten. Endlich bringt C, mit $\frac{1}{4}$ von beider Vermögen, schon 170 Ducaten zusammen. Wie viel hatte jeder?

Auflösung. A hatte x, B, y, und C $= z$;

so ist $x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 170$ oder

$2x + y + z = 340$ mithin

$x = \frac{340 - y - z}{2}$.

Ferner:

$y + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z = 170$ oder

$3y + x + z = 510$ folglich

$x = 510 - 3y - z$.

Und:

$z + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y = 170$ oder

$4z + x + y = 680$ also

$x = 680 - 4z - y$.

Aber $\frac{340 - y - z}{2} = 510 - 3y - z$

oder $340 - y - z = 1020 - 6y - 2z$

und $y = \frac{680 - z}{5}$. Eben so ist

$$340 - y - z = 1360 - 8z - 2y$$

also $y = 1020 - 7z$ daher

$$\frac{680 - x}{5} = 1020 - 7z \text{ oder}$$

$$880 - z = 5100 - 35z.$$

Demnach $z = \frac{4420}{34} = 130$ und

$$y = 1020 - 7 \times 130 = 110 \text{ und}$$

$$x = 680 - 4 \times 130 - 110 = 50.$$

Die Probe von diesem Beispiele ist leicht zu machen.

75.

10te Aufgabe. Drei Personen haben ein Haus für 100 Thaler gekauft. Der erste begehret von dem andern die Hälfte seines Geldes, so könnte er das Haus allein bezahlen; der andere begehrt vom dritten $\frac{1}{3}$ seines Geldes, so wäre sein Vorrath hinreichend; der dritte begehrt vom ersten $\frac{1}{4}$ seines Geldes, so könnte er die Zahlung leisten. Wie viel hat jeder Geld gehabt?

Auflösung. Der erste habe x, der zweite y, und der dritte z Thaler, so ist 1)

$$x + \tfrac{1}{2}y = 100; \text{ oder } x = \frac{200 - y}{2};$$

2) $y + \tfrac{1}{3}z = 100;$ oder $z = 300 - 3y;$

3) $z + \tfrac{1}{4}x = 100;$ oder $z = \frac{400 - x}{4}.$

Man

Man setze die zweite Gleichung der dritten gleich, so ist $300 - 3y = \frac{400 - x}{4}$ oder $1200 - 12y = 400 - x$. Mithin $x = 12y - 800$. Diese Gleichung setze man der ersten gleich, so ist $12y - 800 = \frac{200 - y}{2}$ oder $24y - 1600 = 200 - y$ und daher $y = 72$; also $x = 12y - 800 = 64$ und $z = 84$.

76.

11te Aufgabe. Drei Personen hatten jede eine Summe Geldes. A sagte zu B: gieb mir 100 Thaler von deinem Gelde zu meinem, so habe ich zweimal so viel als du behältst. B sagte zu C: gieb mir 200 Thaler von deinem zu meinem Gelde, so habe ich dreimal so viel als du behältst. C sagte zu A: gieb mir 60 Thaler von deinem Gelde zu meinem, so habe ich fünfmal so viel als du behältst. Wie viel hat jeder gehabt?

Auflösung. A hatte x, B y, und C z Thaler. Demnach ist

1) $x + 100 = 2(y - 100)$ folglich
$x = 2y - 300$.
2) $y + 200 = 3(z - 200)$ also
$y = 3z - 800$.
3) $z + 60 = 5(x - 60)$ oder
$x = \frac{z + 360}{5}$.

Setze

Setze die erste der zweiten Gleichung gleich; so ist

$$\frac{z + 360}{5} = 2y - 300; \text{ oder}$$

$$z + 360 = 10y + 1500 \text{ mithin ist}$$

$$\frac{z + 1860}{10} = y. \text{ Diese Gleichung}$$

ist so groß als die zweite. Also

$$\frac{z + 1860}{10} = 3z - 800; \text{ folglich}$$

$$29z = 9860, \text{ oder } z = 340.$$

Demnach $y = 3z - 800 = 220$ und

$x = 2y - 300 = 140.$

77.

12te Aufgabe. Drei Personen hatten in einem Wirthshause eine Summe Geldes verzehrt. Keiner aber konnte allein bezahlen, daher spricht A zu B: gieb mir $\frac{1}{4}$ deines Geldes zu meinem, so kann ich bezahlen. C spricht zu A: gieb mir die Hälfte deines Geldes zu meinem, so kann ichs bezahlen, ob ich gleich nur 4 Thaler habe. B spricht zu C: gieb mir $\frac{1}{8}$ deines Geldes zu meinem, so kann ich bezahlen. Wie viel hatten sie nun verzehrt, und wie viel hatte A und B Vorrath?

Auflösung. A hatte x, B = y, C = 4 Thaler. Verzehrt haben sie = z.

Dem=

Demnach ist

1) $x + \frac{1}{4}y = z$; $x = \frac{4z - y}{4}$.

2) $y + \frac{1}{2} = z$; $y = \frac{2z - 1}{2}$.

3) $4 + \frac{1}{2}x = z$; $x = 2z - 8$.

Dieser Ausdruck ist dem erstern gleich; also

$$2z - 8 = \frac{4z - y}{4}, \text{ oder}$$

$$8z - 32 = 4z - y.$$

Mithin $-4z + 32 = y$. Dieser ist einerlei mit dem zweiten. Folglich

$$-4z + 32 = \frac{2z - 1}{2}; \text{ oder}$$

$$-8z + 64 = 2z - 1.$$

Demnach $z = 6\frac{1}{2}$, und so viel haben sie verzehrt. Daher hatte A = 5 und B = 6 Thaler.

78.

13te Aufgabe. Vier Personen haben gewonnen 1710 Thaler. Wenn A seinen Gewinn mit 3, B seinen Gewinn mit 4, C mit 5, und D mit 6 multipliciret, so kommt allemal ein gleiches Product. Wie stark ist eines jeden Gewinn gewesen?

Auflö-

Auflösung. A habe gewonnen $= x$, B $= y$, C $= z$, und D $= 1710 - x - y - z$. Demnach ist

1) $3x = 4y$, oder $x = \frac{4}{3}y$.
2) $4y = 5z$, oder $y = \frac{5}{4}z$ und
3) $5z = 10260 - 6x - 6y - 6z$;

also $x = \frac{10260 - 6y - 11z}{6}$.

Aber nach 1) ist $x = \frac{4}{3}y$; folglich $\frac{10260 - 6y - 11z}{6} = \frac{4}{3}y$. Mithin $y = \frac{30780 - 33z}{42}$. Dieser Ausdruck ist dem in 2 gleich. Also $\frac{30780 - 33z}{42} = \frac{5}{4}z$ folglich $z = 360$. Mithin $A = 600$, $B = 450$, und $D = 300$.

79.

14te Aufgabe. Vier Personen haben überhaupt 1090 Thaler gewonnen. Wie jeder seinen Theil nachzählet, findet sich folgendes Verhältniß: Wenn A seinen Theil durch 3, B durch 4, C durch 5. und D durch 6 dividiret, so kommt allezeit ein gleicher Quotient. Wie viel hat nun ein jeder gewonnen?

Auflö=

Auflösung. A habe x, B = y, C = z und D = 1090 — x — y — z gewonnen. Es ist also

1) $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$, oder $x = \frac{3}{4}y$.

2) $\frac{y}{4} = \frac{z}{5}$, oder $y = \frac{4}{5}z$; und

(3 $\frac{z}{5} = \frac{1090 - x - y - z}{6}$, oder

$$x = \frac{5450 - 5y - 11z}{5}.$$

Demnach ist ferner:

$\frac{3}{4}y = \frac{5450 - 5y - 11z}{5}$, oder

$y = \frac{21800 - 44z}{35}$. Eben so ist

$\frac{4}{5}z = \frac{21800 - 44z}{35}$ oder $360z = 109000$

folglich $z = 302\frac{7}{9}$. Daher $A = 181\frac{2}{3}$, $B = 242\frac{2}{9}$, und $D = 363\frac{1}{3}$ Thaler.

80.

15te Aufgabe. Ein Wechsler hat drei Beutel, mit A, B und C, bezeichnet, und wird gefragt, wie viel Thaler in jedem Beutel wären? Er antwortet: nehme ich aus B 80 Thaler, und lege sie zu A, so ist in A $2\frac{1}{2}$ mal so viel als in B bleibt. Nehme ich aus

aus C 120 Thaler, und lege sie zu B, so ist in B $3\frac{1}{2}$ mal so viel, als in C bleibt. Nehme ich aus A 60 Thaler, und lege sie zu C, so ist in C $4\frac{1}{3}$ mal so viel, als in A bleibt. Wie viel ist in jedem Beutel gewesen?

Auflösung. In $A = x$, in $B = y$, und in $C = z$ Thaler. Demnach

1) $x + 80 = 2\frac{1}{2}(y - 80)$; oder

$$x = \frac{5y - 560}{2};$$

und 2) $y + 120 = \frac{7}{2}(z - 120)$;

oder $$y = \frac{7z - 1080}{2};$$

und 3) $z + 60 = \frac{13}{3}(x - 60)$; oder

$$x = \frac{3z + 960}{13}.$$

Nun ist $\frac{3z + 960}{13} = \frac{5y - 560}{2}$ also

$$y = \frac{6z + 9200}{65}.$$

Ferner ist: $\frac{6z + 9200}{65} = \frac{7z - 1080}{2}$.

Demnach $z = 200$; also in $A = 120$ und in $B = 160$ Thaler.

81.

16te Aufgabe. Ihrer viere machen Beute 165 Ducaten, so daß B 2 mal so viel als A, C 3 mal so viel als B, und D 4 mal so viel als C erlanget. Wie viel hat nun ein jeder besonders bekommen?

Auflösung. A habe x, $B = y$, $C = z$, und $D = 165 - x - y - z$ bekommen. Der Aufgabe zufolge ist demnach 1) $y = 2x$; 2) $z = 3y$ und 3) $165 - x - z = 4z$. Also

$$\frac{165 - x - y}{5} = z; \text{ mithin}$$

$$\frac{165 - x - y}{5} = 3y. \text{ Daher } y = \frac{165 - x}{16}.$$

Aber $y = 2x$; also $2x = \frac{165 - x}{16}$;

folglich $x = 5 = A$; mithin $y = 10 = B$, und $z = 30 = C$, und $D = 120$ Ducaten.

82.

Von den unbestimmten Gleichungen.

Bisher habe ich solche Aufgaben abgehandelt, die eben so viele Gleichungen hatten, als unbekannte Größen in der Aufgabe vorkamen. Daher nennt man

man diese bestimmte Aufgaben. Kommen hingegen bei einer Frage nicht so viele Gleichungen vor, als unbekannte Größen sind, so nennt man selbige unbestimmte Aufgaben. Von diesen letztern soll hier nun das Nöthige gesagt werden.

82.

Bei einer unbestimmten Aufgabe können sehr viele Auflösungen statt finden; besonders ist dies der Fall, wenn die Frage auch in Brüchen, oder wohl gar in negativen Größen, beantwortet werden soll. Gewöhnlich richtet man aber die Fragen so ein, daß die Antworten positiv ausfallen. Man nehme z. B. an, die Frage wäre nach zwei Zahlen, die zusammen 15 machen. Die beiden Zahlen drücke man durch x und y aus, so ist $x + y = 15$; mithin $x = 15 - y$. Für y setze man nun alle positive Werthe, und zwar in ganzen Zahlen, so kann y nicht größer als 15 sein, wenn $x = 0$ gesetzt wird. Uebrigens finden folgende Auflösungen statt.

Wenn $y =$	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
so ist $x =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Davon braucht man aber die sieben ersten nur zu nehmen, weil die andern sieben einerlei sind mit den erstern.

84.

1ste Aufgabe. Man soll 37 in zwei Theile zerlegen, wovon sich der eine durch 2, der andere aber durch 3 theilen lasse.

Auflösung. Der eine Theil sei $= 2x$; der andere $= 3y$; so ist $2x + 3y = 37$; oder $x = \frac{37 - 3y}{2}$. Für y setze man nun eine positive Größe, die aber nicht größer sein kann, als 12, weil sonst die Auflösung negativ wird. Um nun diese Werthe zu finden, so dividire man $\frac{37 - 3y}{2}$ durch 2; so ist $x = 18 - y + \frac{1 - y}{2}$. Der Bruch $\frac{1 - y}{2}$

oder $\frac{y-1}{2}$ muß sich also durch 2 theilen lassen, wenn eine ganze Zahl heraus kommen soll. Zu dem Ende setze man $\frac{y-1}{2} = p$; so ist $y - 1 = 2p$ oder $y = 2p + 1$. Diesen Werth von y setze man in die erste Gleichung; so ist $x = 18 - 2p - 1 + \frac{1 - 2p}{2} = 18 - 2p - 1 - p = 17 - 3p$. Hier kann also p nicht größer sein als 5. Man setze demnach $p = 0$; so ist $y = 1$, und x also 17. Denn $3y + 2x = 37 = 3 + 34 = 37$. Ferner $p = 1$; $y = 3$, $x = 14$; $p = 2$; $y = 5$; $x = 11$; $p = 3$; $y = 7$ und $x = 8$; $p = 4$; $y = 9$ und $x = 5$. $p = 5$; $y = 11$; $x = 2$. Bequemer läßt sich diese Anfgabe noch auf folgende Art auflösen:

$$2x + 3y = 37.$$

Dividire die ganze Gleichung durch 2, so ist

$$x + y + \tfrac{1}{2}y = 18 + \tfrac{1}{2}.$$

Bringe $\frac{1}{2}$ auf die andere Seite, so erhält man

$$x + y + \frac{y-1}{2} = 18.$$

Nun setze man $\frac{y-1}{2} = p$, so ist $y - 1 = 2p$. Also $y = 2p + 1$.

Diesen

Diesen Werth für y in der ersten Gleichung gesetzt, giebt

$$x + 2p + 1 + \frac{2p + 1 - 1}{2} = 18;$$

oder $x + 3p = 17$; mithin $x = 17 - 3p$ wie vorhin.

85.

2te Aufgabe. Unter zwei Familien, wovon die eine aus sieben, und die andere aus eilf Personen besteht, sollen 100 Thaler so vertheilt werden, daß jede Person in einer Familie eine gleiche Anzahl voller Thaler bekommt. Wie viel wird in jeder Familie vertheilt werden müssen?

Auflösung. Den einen Theil bezeichne man mit x, den zweiten mit y; so ist $7x + 11y = 100$; oder, wenn man mit 7 theilt,

$$x + y + \tfrac{4}{7}y = 14 + \tfrac{2}{7}. \text{ Folglich}$$

$$x + y + \frac{4y \div 2}{7} = 14.$$

Wenn $4y \div 2$, durch 7 getheilt, eine ganze Zahl geben soll, so muß sich auch $2y \div 1$ durch 7 theilen lassen.

Man setze demnach $2y \div 1 = 7p$, oder

$$y + \tfrac{1}{2} = 3p + \tfrac{1}{2}p, \text{ und}$$

$$y = 3p + \frac{p + 1}{2}. \text{ Für } \frac{p + 1}{2} = q;$$

so ist $p = 2q \div 1$.

Mithin ist $y = 6q - 3 + \frac{2q - 1 + 1}{2} = 7q - 3$

und $x + 7q - 3 + \frac{28q - 12 - 2}{7} = 14.$

D. i. $x + 11q = 19$ und daher $x = 19 - 11q.$

q kann also nicht größer werden, als 1.

Demnach sei $q = 1$; so ist $p = 1$ und daher

$$y = 4 \text{ und } x = 8. \text{ Also}$$

$$7x + 11y = 56 + 44 = 100.$$

86.

3te Aufgabe. Man zerlege 100 in zwei Theile, wovon einer mit 6, der andere mit 8 theilbar sei.

Auflösung. $6x + 8y = 100$; oder

$$3x + 4y = 50.$$

Dividire die letzte Gleichung mit 3; so ist

$$x + y + \tfrac{1}{3}y = 16 + \tfrac{2}{3}.$$

Bringe $\frac{2}{3}$ auf die andere Seite, so ist

$$x = y + \frac{y - 2}{3} = 16.$$

Nun setze man $\frac{y - 2}{3} = p$. Folglich ist

$$y - 2 = 3p; \text{ oder } y = 3p + 2.$$

Diesen

Diesen Werth setze man für y in der ersten Gleichung, so ist $x + 3p + 2 + \frac{3p + 2 - 2}{3} = 16 =$

$x + 3p + 2 + p = 16 = x + 4p = 14$, und $x = 14 - 4p$.

p kann also nicht größer als 3 werden.

Man setze daher $p = 1$; so ist $y = 5$, und $x = 10$. Demnach $6x = 60$ und $8y = 40$; zusammen also 100. Ferner $p = 2$, giebt $y = 8$ und $x = 6$. Daher $6x = 36$ und $8y = 64$; mithin
$6x + 8y = 100$. $p = 3$ giebt $y = 11$ und $x = 2$. Folglich $6x + 8y = 12 + 88 = 100$. Keine weitre Auflösung findet für einen positiven Werth statt.

87.

4te Aufgabe. Man theile 157 in zwei Theile; wenn man den ersten durch 4 theilt, so bleiben 3 übrig; theilt man den zweiten durch 7, so bleiben 5 übrig. Was sind das für Zahlen?

Auflösung. Die beiden Zahlen heißen x und y; so ist

$$4x + 3 + 7y + 5 = 157;$$

oder $4x + 7y = 149$. Folglich

$$x + y + \tfrac{3}{4}y = 37 + \tfrac{1}{4};$$

oder $x + y + \frac{3y - 1}{4} = 37$.

Nun

Nun sei $3y - 1 = 4p$; folglich $y - \frac{1}{3} = p + \frac{1}{3}p$ und $y = p + \frac{1}{3}p + \frac{1}{3} = p + \frac{p + 1}{3}$. Man setze ferner $p + 1 = 3q$, so ist $p = 3q - 1$; folglich $y = 3q - 1 + 3q = 4q - 1$, und $x + 4q - 1 + \frac{12q - 3}{4} = 37 + \frac{1}{4} =$ $x + 4q - 1 + 3q - \frac{3}{4} = 37 + \frac{1}{4} =$ $x + 7q - 1 = 38 = x + 7q = 39$; also $x = 39 - 7q$. q muß also kleiner als 5 sein. Setze demnach

q	=	1,	2,	3,	4,	5;	so ist
y	=	3,	7,	11,	15,	19,	und
x	=	32,	25,	18,	11,	4.	

88.

5te Aufgabe. Zwei Bäuerinnen haben zusammen 100 Eyer; die erste spricht: wenn ich die meinigen je zu 8 überzähle, so bleiben 7 übrig; die andere spricht: wenn ich die meinigen zu 10 überzähle, so bleiben mir auch 7 übrig. Wie viel hat jede Eyer gehabt?

Auflösung. Die eine habe x, und die andere y Eyer; so ist der Aufgabe nach

$$8x + 7 + 10y + 7 = 100;$$
oder $$8x + 10y = 86;$$
oder $$4x + 5y = 43;$$
oder $$x + y + \tfrac{1}{4}y = 10 + \tfrac{3}{4};$$
oder $$x + y + \frac{y-3}{4} = 10.$$

Nun setze man $y - 3 = 4p$, folglich $y = 4p + 3$; demnach $$x + 4p + 3 + \frac{4p + 3 - 3}{4} = 10$$
oder $x + 4p + 3 + p = 10$; oder $x + 5p = 7$. Also $x = 7 - 5p$. p kann also nicht größer als 1 sein. Setze demnach

$p =$	$0 =$	1	so ist
$y =$	$3 =$	7	und
$x =$	$7 =$	2.	

Demnach $x = 63$, und $y = 37$; oder $x = 23$, und $y = 77$.

89.

6te Aufgabe. 20 Personen, Männer, Frauen und Töchter, verzehren 60 mß. Ein Mann bezahlt 5, eine Frau 4, und eine Tochter 2 mß. Wie viel Männer, Frauen und Töchter waren es?

Auflö-

Auflösung.

Männer waren x, die bezahlen 5x.
Frauen y, „ „ 4y.
Töchter $20 - x - y = z$ „ $40 - 2x - 2y$ Mg.
Diese bezahlen zusammen $= 40 + 3x + 2y = 60$.
Demnach $3x + 2y = 20 = 2y + 3x = 20$
$= y + x + \frac{x}{2} = 10$.

Nun setze man $\frac{x}{2} = p$; so ist $x = 2p$;
folglich $y + 2p + \frac{2p}{2} = 10 = y + 3p = 10$.
Also $y = 10 - 3p$ und $z = 20 - 2p - 10 + 3p = 10 + p$.

Nun sei p =	1,	2,	3;	so ist
x =	2	4	6	und
y =	7	4	1	und
z =	11	12	13.	

Sie verzehren demnach	10,	20,	30.
	28,	16,	4.
	22,	24,	26.
zusammen also	60,	60,	60.

90.

7te Aufgabe. Im hannöverschen Cassa-Gelde gilt der holländische Ducaten 4 Gulden, und der Friedrichsd'or 7 fl. Nun sollen in die-

sem

sem Gelde 952 fl. bezahlt werden. Wie viel Ducaten und F. d'or werden dazu erfordert?

Auflösung. Ducaten x und F. d'or y. Also $4x + 7y = 952$, oder $x + y + \frac{3}{4}y = 238$. Man setze $\frac{3}{4}y = p$; so ist $3y = 4p$ oder $y = p + \frac{1}{3}p$. Ferner sei $\frac{1}{3}p = q$; so ist $p = 3q$, mithin $y = 4q$, und $x + 4p + 3p = 238$. Folglich $x = 238 - 7q$.

Hier finden viele Auflösungen statt; doch kann p nicht größer als 34 sein. Man setze

demnach für	$q =$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8	u. s. w.
so ist	$y =$	4,	8	12,	16,	20,	24,	28,	32	u. s. w.
und	$x =$	231,	224,	217,	210,	203,	196,	189,	182	u. s. w.

Also $4x + 7y = 4 \cdot 231 + 4 \cdot 7$ und $4 \cdot 224 + 7 \cdot 8 = 952$ u. s. w.

91.

8te Aufgabe. Wöchentlich werden 360 Thaler unter Arbeiter vertheilet. Einige bekommen 3, etliche 2 Thaler. Wie viel haben 3, und wie viel haben 2 Thaler bekommen?

Auflö-

Auflösung. Von den erstern waren x, und von den zweiten y Arbeiter. Jene erhalten 3 x, und diese 2 y die Woche; also

$$3x + 2y = 360; \text{ oder } x + \tfrac{2}{3}y = 120.$$

Nun sei $\frac{2}{3}y = p$, oder $2y = 3p = p + \frac{1}{2}p$.
Ferner: $\frac{1}{2}p = q$. Folglich $p = 2q$.
Demnach $y = 3p$ und $x + 2p = 120$,
d. i. $x = 120 - 2p$.

p kann nicht größer als 60 werden, wenn es positiv bleiben soll. Es sei demnach

$p =$ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 u.s.w.
so ist
$y =$ 3, 6 9 12 15, 18 21, 24 u.s.w.
und
$x =$ 118, 116, 114, 112, 110, 108, 106, 104 u.s.w.

Denn $3x + 2y = 3 \cdot 118 + 2 \cdot 3 = 354 + 6 = 360$ Rthlr. u. s. w.

92.

9te Aufgabe. Ein Goldschmid hat 14löthiges, 12= und 9löthiges Silber; daraus will er 20 Mk 13löthiges zusammenschmelzen. Wie viel soll er von jedem nehmen?

Auflösung.
Vom 14löthigen nehme er x Mk;
Vom 12 = y =
Vom 9 = $= z = 20 - x - y$.
Nun hält 20 Mk 13löthiges Silber = 260 Loth fein Silber.

Also

Also $14x + 12y + 180 - 9x - 9y = 260$ oder $5x + 3y = 80$, oder $x + \frac{3}{5}y = 16$.

Man setze $\frac{3}{5}y = p$; so ist $3y = 5p$; folglich $y = p + \frac{2}{3}p$. Ferner nehme man $\frac{2}{3}p = q$ oder $2p = 3q$; oder $p = q + \frac{1}{2}q$. Endlich setze man $\frac{1}{2}q = r$; so ist $q = 2r$; mithin $p = 3r$ und $y = 5r$. Demnach $x = 16 - 3r$.

r kann also nicht größer als 5 werden.

Nun sei	$r =$	1,	2,	3 u. s. w.
so ist	$y =$	5,	10	;
und	$x =$	13,	10	;
und $z = 20 - y - x =$		2	0	

Hier ist nur eine Auflösung in positiven Größen und in ganzen Zahlen möglich, weil bei der zweiten schon $z = 0$ wird.

Probe.

$x = 13$ mℓ X 14	=	182	Loth fein Silber.
$y = 5$ mℓ X 12	=	60	;
$z = 2$ mℓ X 9	=	18	;
20 mℓ	=	260	Loth fein Silber.

93.

10te Aufgabe. Ein Münzmeister hat dreierlei Arten von Silber. Die eine hält $14\frac{1}{2}$, die andere $13\frac{1}{2}$, und die dritte hält $10\frac{1}{2}$ Loth fein für die mℓ. Hieraus will er 30 mℓ 12löthiges Silber zusammenschmelzen. Wie viel mℓ muß er von jeder Art nehmen?

Auflö-

Auflösung. Von der ersten nimmt er x, von der zweiten y, und von der dritten $30 - x - y$ Mß. Es ist also

$$14\tfrac{1}{2}x + 13\tfrac{1}{2}y + 315 - 10\tfrac{1}{2}x - 10\tfrac{1}{2}y = 360$$

oder $4x + 3y = 45$. Folglich

$$x + \tfrac{3}{4}y = 11 + \tfrac{1}{4}.$$

Nun ist $\frac{3y - 1}{4} = p$; oder $3y - 1 = 4p$;

also $y = p + \frac{1}{3}p + \frac{1}{3}$. Ferner sei $\frac{p + 1}{3} = q$;

oder $p = 3q - 1$. Demnach ist $y = 4q - 1$ und $x = 12 - 3q$.

Man setze demnach	$q =$	1,	2,	3	so ist
	$p =$	2,	5,	8	daher
	$y =$	3,	7,	11	und
	$x =$	9,	6,	3	und
	$30 - x - y =$	18,	17,	16	
		30,	30,	30.	

94.

11te Aufgabe. Einer kauft Pferde und Ochsen; zahlt für ein Pferd 31 Rthlr., für einen Ochsen aber 20 Rthlr., und es findet sich, daß die Ochsen insgesammt 7 Rthlr. mehr gekostet haben, als die Pferde. Wie viel sind es Ochsen und Pferde gewesen?

Auflö-

Auflösung. Der Pferde sind x, und der Ochsen y; so kosten die erstern 31 x, und die letztern 20 y. Da aber diese insgesammt 7 Rthlr. mehr als die Pferde gekostet haben, so ist

$20y = 31x + 7$, und $y = x + \frac{11}{20}x + \frac{7}{20}$.

Nun sei $\frac{11x + 7}{20} = p$; oder $11x = 20p - 7$,

also $x = p + \frac{9}{11}p - \frac{7}{11}$.

Setze $\frac{9p - 7}{11} = q$; so ist $9p - 7 = 11q$

und $p = q + \frac{2}{9}q + \frac{7}{9}$.

Ferner setze man $\frac{2q + 7}{9} = r$; oder $2q + 7 = 9r$;

folglich $q = 4r + \frac{r}{2} - \frac{7}{2}$. Nun setze man noch $\frac{r - 7}{2} = s$; also $r = 2s + 7$;

mithin $q = 9s + 28$; und $p = 11s + 35$.

Daher $x = 11s + 35 + \frac{99}{11}s + 28 + \frac{7}{11} - \frac{7}{11}$

$= 11s + 35 + 9s + 28 = 20s + 63$,

und $y = 20s + 63 + 11s + 34\frac{13}{20} + \frac{7}{20}$

$= 31s + 98$.

Um hier die positiven Größen anzugeben, so setze man für $s = -3$; so bleibt für $y = -93 + 98 = 5$ = der Zahl der Ochsen; und für $x = -60 + 63 = 3$ = der Zahl der Pferde. Denn $5 \times 20 = 3 \times 31 + 7 = 100$. Setzt

man

man ferner für $s = -2$; so ist $y = -62 + 98 = 36$, und $x = -40 + 63 = 23$. Also $36 \times 20 = 23 \times 31 + 7 = 713$ u. s. w.

95.

12te Aufgabe. 50 Personen, Männer, Frauen und Kinder, verzehren in einem Wirthshause 65 Mℓ. Ein Mann verzehrt 2 Mℓ, eine Frau 1 Mℓ, und ein Kind $\frac{1}{2}$ Mℓ. Die Frage ist, wie viel Männer, Frauen und Kinder, es gewesen sind?

Auflösung. Es sind x Männer, y Frauen und z Kinder gewesen; so hat man 1) $x + y + z = 50$. woraus $z = 50 - x - y$. Hier muß also x und y zusammen genommen weniger als 50 betragen. Zweitens hat man $2x + y + \frac{1}{2}z = 65$ oder $4x + 2y + z = 130$. Für z setze man den vorhin gefundenen Werth; so ist

$4x + 2y + 50 - x - y = 130$ oder
$3x + y = 80$; mithin
$y = 80 - 3x$. Nun setze man für x einen Werth, der aber nicht größer sein darf als 26, so ist die Aufgabe aufgelöset. Es sei demnach

x	=	19,	20,	21,	22,	23,	24,	25,	26	so ist
y	=	23	20	17	14	11	8	5	2	und
z	=	8	10	12	14	16	18	20	22.	

Multiplicirt man den jedesmaligen Werth von x mit 2, den von y mit 1, und den von z mit $\frac{1}{2}$, so muß jedesmal 65 heraus kommen.

96.

13te Aufgabe. Einer kauft 100 Stück Vieh, Schweine, Ziegen und Schafe, für 100 Rthlr. Ein Schwein kostet $3\frac{1}{2}$ Rthlr, eine Ziege $1\frac{1}{3}$ Rthlr., und ein Schaf $\frac{1}{2}$ Rthlr. Wie viel waren es von jeder Gattung?

Auflösung. Die Zahl der Schweine sei x, der Ziegen $= y$, und der Schafe $= z$, so ist 1) $x + y + z = 100$; also $z = 100 - x - y$. Ferner hat man 2) $3\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{3}y + \frac{1}{2}z = 100$, mit 6 multiplicirt, giebt $21x + 8y + 3z = 600$.

Für z setze man den gefundenen Werth desselben, so ist $21x + 8y + 300 - 3x - 3y = 600$, oder $18x + 5y = 300$; mithin

$$y = 60 - \tfrac{18}{5}x = 60 - 3x + \tfrac{3}{5}x.$$

Nun sei $\frac{3}{5}x = p$, so ist $3x = 5p$ und

$x = p + \frac{2}{3}p$. Ferner $\frac{2}{3}p = q$; also

$2p = 3q$, oder $p = q + \frac{1}{2}q$.

Endlich $\frac{1}{2}q = s$; folglich $q = 2s$.

Nun setze man für s eine beliebige Größe, aber so, daß x und y kleiner sein müsse, als 100. Es sei demnach $s = 1, 2, 3$; so ist

p	$=$	4,	6	9	und daher
x	$=$	5	10	15	und
y	$=$	42	24	6	und
z	$=$	53	66	79.	

Mehrere Fälle für ganze Zahlen sind nicht möglich.

97.

Gleichungen vom zweiten Grade.

Diese unterscheiden sich in Gleichungen, worin die unbekannte Größe zur zweiten Potenz entweder allein, oder auch mit einer bekannten Größe multiplicirt oder dividirt, vorkommt; oder, wo ausser der zweiten Potenz, die unbekannte Größe mit einer bekannten, nochmal enthalten ist. Jene heißen **reine**, und diese **unreine**, oder **vermischte quadratische** Gleichungen.

Die erstern lassen sich allgemein so vorstellen:

$$bx^2 \pm m = p.$$

Bringt man hier m auf die andere Seite, und theilt alsdann durch b, so hat man auf der einen Seite, die zweite Potenz, oder das Quadrat von x allein, und auf der andern befinden sich blos bekannte Größen. Zieht man nun aus beiden die Quadratwurzel, so erhält man den Werth von x, der aber + und — sein kann, weil bekanntlich + mit +, und auch — mit —, multiplicirt, die zweite Potenz oder das Quadrat giebt.

In der gegebenen Gleichung ist demnach

$$x = \pm \sqrt{\frac{p \mp m}{b}}.$$

In einer quadratischen Gleichung kommen also zwei Werthe von der unbekannten Größe vor.

98.

Eine vermischte quadratische Gleichung läßt sich allgemein so darstellen:

$$x^2 \pm px = a.$$

Wollte man bei dieser Formel, px, auf die andere Seite der Gleichung bringen, und aus beiden die Quadratwurzel ziehen, so hat man dadurch seinen Zweck nicht erreicht, weil der eine Ausdruck, rechter Hand der Gleichung, noch x bei sich führet.

Da auf der einen Seite der Gleichung, nämlich linker Hand, x, oder die unbekannte Größe zweimal vorkommt, so sieht man leicht, daß dieser Ausdruck zu einem nicht vollständigen binomischen Quadrate gehöret. Könnte man dieses vollständig machen, oder wie man sich gewöhnlich ausdrückt, ergänzen, so ließe sich die Wurzel bald finden. Nun erinnere man sich, daß jedes binomische Quadrat aus drei Theilen bestehe, aus dem Quadrate des ersten, aus dem doppelten Producte beider Theile, und aus dem Quadrate des zweiten Theil der Wurzel. Man versuche mal den ersten Theil der Wurzel $= x$, und den zweiten $= p$, zu setzen; so ist das Quadrat $= x^2 + 2px + p^2$, und vergleiche die beiden ersten Glieder mit dem Ausdrucke linker Hand der gegebenen Gleichung, so weichen beide darin von einander ab, daß die gegebene px, die gefundene aber $2px$ hat. Die Wurzel kann also nicht $x + p$ sein. Nun setze man, die Wurzel sei $x + \frac{1}{2}p$, so ist das Quadrat derselben $= x^2 + px + \frac{1}{4}p^2$. Hier kommen die beiden ersten Glieder in beiden Ausdrücken überein; also erhält man ein vollständiges Quadrat auf der einen Seite, wenn man $\frac{1}{4}p^2$ zu $x^2 \pm px$ addiret, und damit die ganze Gleichung sich nicht verändere, so muß auch $\frac{1}{4}p^2$ zu a addiret werden. Folglich ist

$$x^2 \pm px + \frac{1}{4}p^2 = a + \frac{1}{4}p^2.$$

Jetzt weiß man, daß von dem einen Theil der Gleichung, die Wurzel $x \pm \frac{1}{2}p$ ist, und der andere Theil, bekannte Größen enthält, aus welchen man die Quadratwurzel angeben kann.

Demnach ist $x \pm \frac{1}{2}p = \sqrt{(a + \frac{1}{4}p^2)}$

$$= \sqrt{\left(\frac{4a + p^2}{2}\right)}.$$

Um x zu finden, addire oder subtrahire man auf beiden Seiten $\frac{1}{2}p$; so ist

$$x = \pm \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\left(\frac{4a + p^2}{2}\right)}.$$

99.

Um also eine unvollständige quadratische Gleichung aufzulösen, so ergiebt sich aus dem vorigen folgende allgemeine Regel: Halbire die Größe, worin x zur ersten Potenz multiplicirt worden ist, und addire das Quadrat dieser Größe zu beiden Seiten der Gleichung, so ergiebt sich auf der einen Seite ein vollständiges Quadrat, und auf der andern, bekannte Größen.

Hierauf

Hierauf ziehe man aus beiden Seiten die Quadratwurzel, und addire oder subtrahire, den zweiten Theil der Wurzel zu beiden Theilen der Gleichung, so ergiebt sich der Werth von x.

100.

Nach dieser Regel, werden sich folgende Beispiele von vermischten quadratischen Gleichungen, leicht auflösen lassen.

Es sei $x^2 - 4x = 96$. Ergänze das Quadrat, welches geschieht, wenn man 4 halbiret, und das Quadrat beiderseits addiret.

Demnach $x^2 - 4x + 4 = 96 + 4 = 100$.
Hieraus die Quadratwurzel, ist

$$x - 2 = \pm 10; \text{ folglich}$$

$$x = \pm 10 + 2 = 12, \text{ oder } -8.$$

Ferner sei $x^2 + 6x = 72$

Das $\square$ ergänzt, ist $x^2 + 6x + 9 = 72 + 9$ $\sqrt{}$

$$x + 3 = \pm 9.$$

Also $x = 6$, oder -12.

Gegeben sei $x^2 - 5x = 84$

Das Quadrat ergänzt, $x^2 - 5x + \frac{25}{4} = 84 + \frac{25}{4} = \frac{336 + 25}{4}$ $\sqrt{}$

$x - \frac{5}{2} = \pm \frac{19}{2}$.

Folglich $x = 12 = -7$.

101.

Wenn die zweite Potenz einen Coefficienten bei sich hat, muß man die ganze Gleichung durch diesen dividiren, bevor man das Quadrat ergänzt. Z. B.

$4x + 3x$

$$4x^2 + 3x = 280 \quad :4$$

$$x^2 + \tfrac{3}{4}x = 70$$

$$x^2 + \tfrac{3}{4}x + \tfrac{9}{64} = 70 + \tfrac{9}{64} = \tfrac{4489}{64} \quad \sqrt{}$$

$$x + \tfrac{3}{8} = \tfrac{67}{8}.$$

Also $x = \frac{64}{8} = 8$; oder $x = -\frac{70}{8} = -8\frac{3}{4}$.

Eben so verfährt man mit folgender Gleichung:

$$7x^2 - \tfrac{1}{5}x = 698 \quad :7$$

$$x^2 - \tfrac{1}{35}x = \tfrac{698}{7}$$

$$x^2 - \tfrac{1}{35}x + \tfrac{1}{4900} = \tfrac{698}{7} + \tfrac{1}{4900} = \tfrac{488601}{4900} \quad \sqrt{}$$

$x - \frac{1}{70} = \frac{699}{70}$ und daher

$x = \frac{700}{70} = 10$; oder $x = -\frac{698}{70}$.

In folgender Gleichung, hat der eine Theil rechter Hand, das Zeichen minus bei sich, wobei aber eben die Auflösung, wie bei den vorigen Beispielen, statt findet.

$$x^2 - 10x = -21$$

$$x^2 - 10x + 25 = -21 + 25 = +4 \quad \sqrt{}$$

$$x - 5 = \pm 2$$

also $x = 7$, oder $x = 3$.

Diese Gleichung hat demnach zwei positive Werthe für x.

102.

Beispiele von reinen und vermischten quadratischen Gleichungen.

1ste Aufgabe. Was ist das für eine Zahl, wenn man $\frac{1}{12}$ mit $\frac{1}{16}$ derselben multipliciret, zum Producte 15552 heraus komme?

Auflösung. Die Zahl sei x; so ist
$\frac{1}{12}x \cdot \frac{1}{16}x = 15552$; oder $\frac{1}{192}x^2 = 15552$.
Man multiplicire beiderseits mit 192, so ist
$x^2 = 2985984$. Hieraus die Quadratwurzel, giebt für $x = \pm 1728$.

103.

2te Aufgabe. Unter drei Personen wird eine Summe Rthlr. auf folgende Art vertheilt. Wenn die erste 4 Rthlr. bekommt, so bekommt die zweite 3 derselben, und wenn die zweite 6 erhält, so bekommt die dritte 5 Rthlr. Multiplicirt man die Hälfte des Geldes der ersten Person mit $\frac{1}{3}$ der zweiten, und $\frac{1}{4}$ der zweiten mit $\frac{1}{5}$ der Summe der dritten Person, und legt beider Summen zusammen; zieht aber von derselben, das Product von $\frac{1}{6}$ der Summe der dritten, multiplicirt mit $\frac{1}{8}$ der ersten, ab, und legt zu der Differenz $54\frac{1}{3}$ zu, so erhält man zur Summe $2862\frac{1}{3}$. Wie viel hat jede Person erhalten?

Auflösung. Die erste Person erhalte x Rthlr., so bekommt die 2te $= \frac{3}{4}x$: denn $4 : 3 = x : \frac{3}{4}x$; und die dritte erhält $\frac{5}{8}x$: denn $6 : 5 = \frac{3}{4}x : \frac{5}{8}x$.

Ferner

Ferner ist $\frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{4}x = \frac{1}{8}x^2$, und $\frac{3}{16}x \cdot \frac{1}{8}x = \frac{3}{128}x^2$. Zusammen also für beide $\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{128}x^2 = \frac{19}{128}x^2$. Davon geht ab $\frac{5}{48}x \cdot \frac{1}{8}x = \frac{5}{384}x^2$, und es bleibt $= \frac{13}{96}x^2$.

Also $\frac{13}{96}x^2 + 54\frac{1}{3} = 2862\frac{1}{3}$ oder

$\frac{13}{96}x^2 = 2808$, oder

$x^2 = 20736$. Beiderseits die Quadratwurzel ausgezogen, giebt für $x = 144 =$ der Summe der ersten Person; demnach 108 Rthlr für die zweite, und 90 Rthlr. für die dritte.

104.

3te Aufgabe. Verschiedene Kaufleute treten, einer Handlungs-Unternehmung wegen, in Gesellschaft, und jeder legt 16 mal so viel ein als der Kaufleute sind. Mit diesem Gelde gewinnen sie auf hundert 4 mal so viel als Personen sind. Theilt man den Gewinn mit 800, so ist der Quotient grade zweimal so groß als der Personen sind. Wie viel Kaufleute sind da gewesen?

Auflösung. Kaufleute waren x. Jeder legte also $16x$ ein; mithin zusammen $16x^2$. Nun gewinnen sie auf 100, $4x$; demnach auf $16x^2 = \frac{64}{100}x^3 = \frac{16}{25}x^3$. Den Gewinn mit 800 getheilt, giebt $\frac{1}{1250}x^3 = 2x$. Man multiplicire beiderseits mit 1250, so ist $x^3 = 2500x$.

Nun theile man beides durch x, so ist

$x^2 = 2500$; mithin

$x = 50 =$ der Anzahl der Kaufleute.

105.

105.

4te Aufgabe. Zwei Personen hatten eine Summe Geldes verzehrt. Der Eine hatte zur Bezahlung 5 Thaler zu wenig, der Andere hatte 5 Thaler zu viel. Als aber beider Vorrath mit einander multiplicirt wurde, kamen 96. Wie viel hatten sie verzehrt?

Auflösung. Sie hatten x Thaler verzehrt. Also hat der eine $x + 5$, und der andere $x - 5$ Thaler. Multiplicire beide mit einander, so ist das Product

$x^2 - 25 = 96$. Folglich $x^2 = 121$ und $x = \pm 11$.

106.

5te Aufgabe. Ich sagte zu einigen Armen: wenn ich einem Jeden von euch 2 Thaler gebe, so bekommt ihr alle mein Geld; wenn ich aber einem Jeden so viel geben wollte, als ich habe, so müßte ich 1058 Thaler haben. Wie viel Thaler hatte ich, und wie viel waren der Armen?

Auflösung. Es waren x Arme. Jedem giebt er 2 Thaler; folglich hatte er $2x$ Thaler im Vermögen. Giebt er Jedem nun $2x$ Thaler, so erhalten x Arme $2xx$ Thaler. Demnach ist $2x^2 = 1058$; oder $x^2 = 529$. Folglich $x = 23$ Arme, und das Vermögen ist $2x = 46$ Thaler.

107.

6te Aufgabe. Es hat Jemand dreierlei Waaren, und kostet jedes Pfund von jeder Sorte so viel Thaler, als es Pfunde sind. Der zweiten Sorte ist zweimal so viel als der ersten, und der dritten Sorte ist dreimal so viel als der zweiten, und beträgt der ganze Werth $256\frac{1}{4}$ Thaler. Wie viel hat er von jeder Waare besonders gehabt?

Auflösung. Von der ersten Sorte habe er x; von der zweiten hat er also 2 x, und von der dritten 6 x ℔. Die erste Sorte beträgt also x^2.
Die zweite " " " $4x^2$.
Die dritte " " $36x^2$.
Zusammen demnach $41x^2 = 256\frac{1}{4}$ Thaler, und $x^2 = 6\frac{1}{4}$; oder $x^2 = \frac{25}{4}$. Demnach $x = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ = der ersten Sorte. Also die zweite = 5, und die dritte = 15 ℔.

108.

7te Aufgabe. Es haben drei Personen Geld, so oft der erste hat 7 Thaler, hat der andere 3, und so oft der andere hat 17 Thaler, hat der dritte 5. Wenn ich aber das Geld des ersten mit dem Gelde des andern, das Geld des andern mit dem Gelde des dritten, und das Geld des dritten mit dem Gelde des ersten multiplicire, hernach diese drei Producte addire, so ist die Summe $3830\frac{2}{3}$ Thaler. Wie viel hat ein Jeder gehabt?

Auflösung. Der erste habe x Thaler, so hat der zweite $\frac{3}{7}x$, und der dritte $\frac{15}{119}x$. Demnach ist $x.\,\frac{3}{7}x = \frac{3}{7}x^2$; und $\frac{3}{7}x.\,\frac{15}{119}x = \frac{45}{833}x^2$, und $x.\,\frac{15}{119}x = \frac{15}{119}x^2$. Also die Summe der drei Producte ist $= \frac{507}{833}x^2$. Mithin

$\frac{507}{833}x^2 = 3830\frac{2}{3}$, oder $x^2 = \frac{9572836}{1521}$; und daher $x = \frac{3094}{39} = 79\frac{1}{3}$. Der zweite hat 34, und der dritte 10.

109.

8te Aufgabe. Die Summe zweier Zahlen sei 80, und ihr Product 975. Was sind es für Zahlen?

Auflösung. Die eine Zahl sei $= x$; so ist die andere $= 80 - x$. Ihr Product also

$80x - xx = 975$; oder, indem man die Zeichen umkehrt, $x^2 - 80x = -975$. Man ergänze das $\square$,

so ist $x^2 - 80x + 1600 = -975 + 1600 = 625$.

Hieraus die $\sqrt{}$, ist $x - 40 = \pm 25$.

Also $x = 65$, oder 15.

Folglich die andere Zahl $= 15$, oder 65.

110.

Diese vorhergehende Aufgabe läßt sich allgemein auflösen, wenn man für die Summe der beiden Zahlen $= a$, und für das Product derselben $= b$, setzt. Ist die eine Größe nun x, so ist die andere $a - x$, und ihr Product $ax - x^2 = b$, oder

x^2 —

$x^2 - ax = -b$. Also das $\square$ ergänzt, giebt $x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = -b + \frac{1}{4}a^2 = \frac{-4b + a^2}{4}$

und $\sqrt{}$ ist $= x - \frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\left(\frac{-4b + a^2}{2}\right)}$

folglich $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{-4b + a^2}{2}\right)}$

In unserm vorigen Beispiel, ist $a = 80$, und $b = 975$. Mithin $x = \frac{80}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4 \cdot 975 + 80^2}{2}\right)}$

$= \frac{\sqrt{2500}}{2} = \frac{50}{2} + \frac{80}{2} = 65.$

III.

9te Aufgabe. Ein Reisender giebt für sich und seine Bedienten in einem Gasthofe jeden Tag, ich weiß nicht, wie viel Thaler. Er ist aber 6 Tage mehr da gewesen, als er für jeden Tag Thaler giebt. Am Ende bezahlt er 135 Thaler. Wie viel Tage ist er da gewesen, und wie viel Thaler hat er für jeden Tag bezahlt?

Auflösung. Er habe täglich x Thaler bezahlt, so ist er also $x + 6$ Tage da gewesen. Folglich hat er verzehrt

$(x+6)$

$(x+6)x = x^2 + 6x = 135$. Ergänze das Quadrat, so ist

$$\sqrt{\frac{x^2+6x+9 = 144}{x+3 = 12.}}$$

Also $x = 12 - 3 = 9$ Thaler;
mithin $9 + 6 = 15$ Tage.

112.

10te Aufgabe. Ein Wasserbehälter hat von drei Quellen Zufluß. Die zweite Quelle füllt den Behälter in $\frac{2}{3}$ der Zeit an, darin solcher von der ersten gefüllt wird; und wenn die dritte noch 6 Stunden länger als die erste läuft, so wird der Behälter gleichfalls angefüllt. Man fragt, in wie viel Zeit jede Quelle den Behälter für sich füllen würde, wenn bekannt ist, daß alle drei Quellen dieses in 9 Stunden leisten können?

Auflösung. Die erste Quelle fülle den Behälter in x Stunden an, so füllt ihn die zweite in $\frac{2}{3}x$, und die dritte in $x + 6$ Stunden. Wenn also der Behälter $= 1$, in 9 Stunden angefüllet wird, und wenn alle drei Quellen zugleich fließen, so findet man den Raum, welchen jede Quelle von dem Behälter füllt, nach folgenden Proportionen:

x Stunden

x Stunden : 9 St. $= 1 : \frac{9}{x}$tel des Raums, und

$\frac{2}{3}x$ St. : 9 St. $= 1 : \frac{27}{2x}$tel ; und

$x+6$ St. : 9 St. $= 1 : \frac{9}{x+6}$tel ;

Die drei Räume addiret, geben $\frac{63x+270}{2x^2+12x} = 1$.

Multiplicire beiderseits mit dem Nenner, giebt

$63x + 270 = 2x^2 + 12x$; oder

$2x^2 - 51x = 270$. Dividirt durch 2, ist

$x^2 - \frac{51}{2}x = 135$. Das Quadrat ergänzt, ist $x^2 - \frac{51}{2}x + \frac{2601}{16} = 135 + \frac{2601}{16} = \frac{4761}{16}$. Hieraus die $\surd$, ist $x - \frac{51}{4} = \frac{69}{4}$; mithin $x = \frac{120}{4} = 30$ Stunden.

113.

11te Aufgabe. Doris wird gefragt, wie groß das Capital sei, das sie zu 5 p. C. verliehen habe? Sie antwortet, wenn du den achten Theil des Capitals durch die zweijährigen Zinsen multiplicirest, und zum Producte 15 addirest, so erhältst du die Größe dieses Capitals. Wie groß ist nun dasselbe?

Auflösung. Das Capital sei x; so ist die Zinse für zwei Jahre $\frac{1}{10}x$. Denn $100 : 5 = x : \frac{1}{10}x$.

1 Jahr 2 Jahr

Ferner ist $\frac{1}{10}x \times \frac{1}{8}x + 15 = x$; oder

$\frac{1}{80}x^2 + 15 = x$; oder

$x^2 + 1200 = 80x$; oder

$x^2 - 80x = -1200$. Ergänze das Qua-

Quadrat, so ist $x^2 - 80x + 1600 = 400$

$$\sqrt{\quad}$$

$$x - 50 = \pm 20; \text{ mithin}$$

$$x = 60, \text{ oder } 20.$$

114.

12te Aufgabe. Man soll 12 in zwei Theile zerlegen, deren Product 30 ausmache.

Auflösung. Der eine Theil sei x; so ist der andere $12 - x$. Multiplicirt man beide mit einander, so muß das Product 30 machen. Demnach $(12 - x)\, x = 12x - x^2 = 30$, oder wenn die Zeichen verwechselt werden, ist

$$x^2 - 12x = -30$$

$$x^2 - 12x + 36 = +6$$

$$\surd$$

$$x - 6 = \surd \pm 6.$$

Also $x = 6 \pm \surd 6.$

Folglich $12 - x = 12 - 6 + \surd 6 = 6 - \surd 6.$
Nun ist $6 + \surd 6$ und $6 - \surd 6 = 12$, und

$$\begin{array}{r} 6 + \surd 6 \\ 6 - \surd 6 \\ \hline 36 + 6\surd 6 \qquad \\ - 6\surd 6 - 6 \\ \hline 36 - 6 = 30. \end{array}$$

115.

1ste Anmerkung. Das letzte Beispiel giebt mir hier Gelegenheit, etwas über die Behandlung der Irrational-Größen zu sagen, die bei der Auflösung vermischter quadratischer, und auch anderer Gleichungen häufig vorkommen. Bei der Additio solcher Größen verfährt man eben so, wie bei der Additio der gewöhnlichen Buchstaben-Rechnung, gezeigt worden ist. So ist $\sqrt{x} + \sqrt{x} = 2\sqrt{x}$. Die Zahl, welche vor dem Wurzelzeichen steht, läßt sich auch hinter dasselbe bringen, wenn man die Größe zu der Potenz erhebt, aus welcher die Wurzel von der Größe, die hinter dem Wurzelzeichen steht, ausgezogen werden soll. So ist in unserm Fall $2\sqrt{x} = \sqrt{4x}$. Aus dem Grunde läßt sich auch manche Größe, die hinter dem Wurzelzeichen steht, vor dasselbe bringen, wenn man die Ausziehung der Wurzel, entweder aus der ganzen Zahl, oder auch aus den Theilen derselben, würklich vornehmen kann. So ist z. B. $\sqrt{8x} = \sqrt{4 \cdot 2x} = 2\sqrt{2x}$. Denn aus 4 läßt sich die Wurzel in ganzen Zahlen angeben. Eben so ist $2\sqrt[3]{24a} = 2\sqrt[3]{8 \cdot 3a} = 2 \cdot 2\sqrt[3]{3a} = 4\sqrt[3]{3a} = \sqrt[3]{192a}$. Hat der irrationale Theil noch einen rationalen bei sich, oder ist das Ganze ein Binomium, so ist die Additio eben so leicht. Denn $4 + 2\sqrt{4}$, und $6 - 2\sqrt{4}$ giebt zur Summe $= 2$. Die beiden irrationalen Theile gehen gegen einander weg. Was ich hier über die Additio gesagt habe, gilt auch völlig von der Subtractio. Z. B.

$$
\begin{array}{l}
5+3\sqrt{2}-4-5\sqrt[3]{4}+6+3\sqrt[4]{6}-8+\sqrt{2} \\
4-5\sqrt{2}+5+6\sqrt[3]{4}-9-8\sqrt[4]{6}-9+7\sqrt{2} \\
\hline
1+8\sqrt{2}-9-11\sqrt[3]{4}+15+11\sqrt[4]{6}+1+6\sqrt{2}
\end{array}
$$

116.

2te Anmerkung. Was die Multiplicatio betrift, so multiplicirt man die Größen, die vor dem Wurzelzeichen stehen, wie gewöhnlich, wobei aber die verschiedenen Zeichen beobachtet werden müssen. Grössen, welche das Wurzelzeichen bei sich haben, werden, wenn sie nicht von einerlei Art sind, wie verschiedene Factoren, mit dem Wurzelzeichen hingeschrieben; sind aber die Größen sich gleich, so fällt beim Multipliciren das Wurzelzeichen weg. Z. B. $\sqrt{4} \times \sqrt{16} = \sqrt{4.\ 16} = \sqrt{64} = 8$. Oder allgemein $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$. Aber $\sqrt{4} \times \sqrt{4} + \sqrt{4.\ 4.} = \sqrt{16} = 4$; und so auch $\sqrt{a}.\ \sqrt{a} = a$; $\sqrt[3]{x}.\ \sqrt[3]{x} = x$. Z. B.

$$
\begin{array}{l}
3+5\sqrt{4} = +13 \\
4-6\sqrt{4} = -8 \\
\hline
12+20\sqrt{4} \\
\quad -18\sqrt{4}-30.4 \\
\hline
12+2\sqrt{4}-120 = 12+4-120 = -104.
\end{array}
$$

Also

Also allgemein:

$$\begin{array}{l} a + b\sqrt{x} \\ d - c\sqrt{x} \\ \hline ad + bd\sqrt{x} \\ \quad - ac\sqrt{x} - bcx \\ \hline ad + (bd - ac)\sqrt{x} - bcx \end{array}$$

$$= ad - bcx + (bd - ac)\sqrt{x}.$$

Ist die Größe mit dem Wurzelzeichen imaginär, so macht dies keine weitere Aenderung in der Multiplicatio, als daß man das Zeichen beibehält; z. B.

$$\sqrt{-b} \times \sqrt{-b} = -b.$$

So ist die Cubiczahl von $-1 + \sqrt{-3} = +8$.

Denn

Denn

$$\begin{array}{l}
-1+\sqrt{-3}\\
-1+\sqrt{-3}\\
\hline
+1-\sqrt{-3}\\
\quad\;\,-\sqrt{-3}-3\\
\hline
+1-2\sqrt{-3}-3
\end{array}
= \begin{array}{l}
-2-2\sqrt{-3}\\
-1+\sqrt{-3}\\
\hline
-2+2\sqrt{-3}\\
\quad\;\,-2\sqrt{-3}-2-3\\
\hline
+2+2.3 = +8.
\end{array}$$

117.

3te Anmerkung. Kann man mit irrationalen Größen multipliciren, so ist es auch leicht mit denselben zu dividiren. Denn man kann den Nenner des Bruchs rational machen, wenn

wenn man sowohl den Zähler als den Nenner des irrationalen Bruchs, durch den Nenner, aber mit veränderten Zeichen, multipliciret.

Dividire z. B. $4 + 5\sqrt{2} : 3 - 2\sqrt{2}$, so ist der Quotient $= \dfrac{4 + 5\sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}} =$

$$\frac{32 + 23\sqrt{2}}{1} = 32 + 23\sqrt{2}.$$

Der letzte Ausdruck kommt heraus, wenn man den erstern mit $3 + 2\sqrt{2}$ multipliciret. Denn

$$\begin{array}{l} 4 + 5\sqrt{2} \\ 3 + 2\sqrt{2} \\ \hline 12 + 15\sqrt{2} \\ \quad + 8\sqrt{2} + 10.2 \\ \hline 32 + 23\sqrt{2} \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{l} 3 - 2\sqrt{2} \\ 3 + 2\sqrt{2} \\ \hline 9 - 6\sqrt{2} \\ \quad + 6\sqrt{2} - 4.2 \\ \hline 9 - 8 = 1. \end{array}$$

118.

4te Anmerkung. Ich habe in den 3 vorhergehenden Anmerkungen gezeigt, wie man Irrational-Größen zu behandeln habe, wenn man sie addiren, subtrahiren, multipliciren und dividiren soll. Mir bleibt also in dieser Anmerkung noch übrig, die Methode anzugeben, wie man aus Binominal-Größen, die Wurzel ausziehen müsse. Ein Fall, der sehr häufig bei den vermischten quadratischen Gleichungen vorkommt. Herr Euler giebt in seiner vollständigen Anleitung zur Algebra, zwei Wege dazu an. Folgender ist der erste.

119.

Von irgend einem Binomio drücke man die Quadratwurzel durch $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ aus; multiplicirt man nun die Wurzel mit sich selbst, so ist das Quadrat $= x + 2\sqrt{xy} + y = (x+y) + 2\sqrt{xy}$.

Es besteht demnach aus einem rationalen Theil $(x + y)$, und einem irrationalen $(2\sqrt{xy})$, und hiernach läßt sich jedes Binomium auflösen.

Es sei $\sqrt{(5 + 2\sqrt{6})}$ gegeben. Hier ist $x + y = 5$, und $2\sqrt{xy} = 2\sqrt{6}$; oder $\sqrt{xy} = \sqrt{6}$. Mithin, wenn man beiderseits quadrirt, $xy = 6$. Nun ist $x + y = 5$; also $y = 5 - x$. Diesen Werth von y, setze man in der Gleichung $xy = 6$; so ist $5x - x^2 = 6$; oder $x^2 - 5x = -6$; eine quadratische Gleichung, welche nach dem vorhergehenden leicht aufgelöset wird. Denn wenn das Quadrat ergänzt wird, so ist

$x^2 - 5x + \frac{25}{4} = -6 + \frac{25}{4}$, und die Wurzel ausgezogen, giebt

$$x - \frac{5}{2} = \sqrt{\pm(-6 + \tfrac{25}{4})} = \pm \tfrac{1}{2}.$$

Also $x = \frac{6}{2} = 3$; mithin $y = 2$. Demnach

$$\sqrt{(5 + 2\sqrt{6})} = \sqrt{3} + \sqrt{2}.$$

Probe.

Probe.

$$\begin{array}{l} \sqrt{3} + \sqrt{2} \\ \sqrt{3} + \sqrt{2} \\ \hline 3 + \sqrt{6} \\ \quad + \sqrt{6} + 2 \\ \hline 3 + 2\sqrt{6} + 2 = \end{array}$$

$$(3 + 2) + 2\sqrt{6} = 5 + 2\sqrt{6}.$$

Oder nach dem andern Wege läßt sich der Werth von x und y, auf folgende Weise bestimmen.

120.

In der vorigen Gleichung hatte man

1) $x + y = 5$, und 2) $xy = 6$.

Man nehme von dem ersten Ausdrucke das Quadrat, so ist dasselbe $x^2 + 2xy + y^2 = 25$. Von dieser Gleichung subtrahire $4xy = 24 = 4\,(xy = 6)$, so ist der Unterschied $= x^2 - 2xy + y^2 = 1$. Hieraus die Quadratwurzel, giebt $x - y = 1$.
Nun ist $x + y = 5$.
Also die Summe $= 2x = 6$, und die Differenz $= 2y = 4$. Demnach $x = 3$, und $y = 2$; oder die Quadratwurzel $= \sqrt{3} + \sqrt{2}$, wie vorhin.

121.

Allgemein sei folgendes Binomium, $a + \sqrt{b}$, gegeben, davon die Quadratwurzel $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ ist; so ist $(x + y) + 2\sqrt{xy} = a + \sqrt{b}$.

Dem-

Demnach ist 1) $x + y = a$, und $2\sqrt{xy} = \sqrt{b}$. Nun ist $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = a^2$, und $(2\sqrt{xy})^2 = (\sqrt{b})^2 = 4xy = b$. Also $x^2 + 2xy + y^2 - 4xy = a^2 - b =$

$$\frac{x^2 - 2xy + y^2 = a^2 - b}{x - y = \pm\sqrt{(a^2 - b)}}\ \sqrt{}$$

Nun ist

$$\frac{x + y = a}{2x = a \pm \sqrt{(a^2 - b)}}$$

demnach und

$$x = \frac{a \pm \sqrt{(a^2 - b)}}{2}.$$

Eben so ist

$$y = \frac{a - \pm\sqrt{(a^2 - b)}}{2}.$$

Folglich $\sqrt{(a + \sqrt{b})} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{(a^2 - b)}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{(a^2 - b)}}{2}}$.

Ist $a^2 - b$ ein Quadrat $= c^2$; so fällt das $\sqrt{}$ hinter das $\sqrt{}$ weg, und es ist

$\sqrt{(a + \sqrt{b})}$

$$\sqrt{(a + \sqrt{b})} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}}.$$

Ist es aber kein Quadrat, so muß man $\sqrt{}$ beibehalten.

122.

Will man nach dieser Formel die Wurzel ausziehen, so setze man den rationalen Theil $= a$, den irrationalen $= b$; also $aa - b = c^2$. Zieht man also aus c^2 die Wurzel, so ergiebt sich der Werth von $\sqrt{\frac{a+c}{2}}$, und von $\sqrt{\frac{a-c}{2}}$.

Folgende Beispiele mögen zur Erläuterung des Verfahrens dienen.

123.

1stes Beispiel. Die Quadratwurzel aus $2 + \sqrt{3}$. Hier ist $a = 2$, und $b = 3$; also $aa - b = c^2 = 4 - 3 = 1$; folglich $\sqrt{1} = 1 = c$, und daher $\sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}}$

$= \sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt{\frac{2-1}{2}} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}}$

$=$ der gesuchten Quadratwurzel.

2tes Beispiel. Die $\sqrt{(11 + 6\sqrt{2})}$. Hier ist $11 = a$, und $36.\ 2 = b$. Also $aa - b = c^2 = 121 - 72 = 49$; mihin $c = 7$. Folglich

$$\sqrt{\frac{11+7}{2}} + \sqrt{\frac{11-7}{2}} = 3 + \sqrt{2}.$$

3tes Beispiel. $\sqrt{(11 - 2\sqrt{30})}$ $= 121 - 120 = c^2 = 1$. Daher

$$\sqrt{\frac{11+1}{2}} + \sqrt{\frac{11-1}{2}} = \sqrt{6} - \sqrt{5}.$$

4tes Beispiel. $(1 + 4\sqrt{-3})$. $a = 1$; $b = 4^2.\ -3 = -48$; also $aa - b = 49 = c^2$; folglich $c = 7$. Daher $\sqrt{\frac{1+7}{2}} + \sqrt{\frac{1-7}{2}} =$

$\sqrt{4} + \sqrt{-3} = 2 + \sqrt{-3}$ = der gesuchten Quadratwurzel.

5tes Beispiel. $\sqrt{(2\sqrt{-1})}$. Da hier kein rationaler Theil ist, so setze man für $a = 0$; b ist $= -4$; also $aa - b = c^2 = 0 + 4$. Demnach $= c = 2$. Folglich

$$\sqrt{\frac{0+2}{2}} + \sqrt{\frac{0-2}{2}} = \sqrt{1} + \sqrt{-1}$$

$= 1 + \sqrt{-1}$.

Von

Von der arithmetischen Reihe, und den daraus entstehenden figurirten oder vieleckigten Zahlen.

124.

Im ersten Bande, (S. 319. §. 331.) habe ich die Lehre von den arithmetischen und geometrischen Zahl-Reihen, umständlich, so viel mir die Gränzen der gewöhnlichen Arithmetik erlaubten, aus einander gesetzt, und mit hinlänglichen Beispielen erläutert. Ich werde mich daher, in diesem Bande, nur auf allgemeine Sätze einlassen dürfen, und allenfalls den Leser bitten, zu einer bessern Verständlichkeit des hier Vorkommenden, dasjenige, welches ich im angeführten Paragraph, und in den folgenden, gesagt habe, vorher nochmal überzulesen.

125.

Es sei das erste Glied einer arithmetischen Reihe $= a$, die Differenz $= d$, so ist die Reihe selbst folgendermassen zusammengesetzt:

Gliederzahl	1	2	3	4	n
Reihe	$a,$	$a + d$	$a + 2d$	$a + 3d$	$a + (n - 1)\,d.$

Das $n$te Glied besteht also aus dem ersten Gliede, und dem Unterschiede multiplicirt in die Anzahl der Glieder weniger eins. Dies ist also der Fall mit jedem Gliede der Reihe.

Nennt man das $n$te Glied $= z$; so ist $z = a + (n - 1)\,d$; mithin

$$z - a = (n - 1)\,d, \text{ und daher } d = \frac{z - a.}{n - 1}$$

Oder die Differenz der Reihe ist gleich dem Unterschiede des $n$ten Gledes weniger dem ersten, dividirt durch die Anzahl der Glieder weniger eins.

Aus eben der Gleichung ergiebt sich auch a, oder das erste Glied. Denn $a = z - (n - 1)\,d$, und $n = \frac{z - a}{d} + 1.$

126.

126.

Es sei folgende arithmetische Reihe gegeben:

Gliederzahl	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	u. s. w.
Reihe	a.	$a+d$,	$a+2d$,	$a+3d$,	$a+4d$,	$a+5d$,	$a+6d$,	u. s. w.

Addirt man hier ein paar Glieder, die gleichweit ab, von den beiden äussern stehen, so ist die Summe einerlei mit der Summe der beiden äussern.

Denn $a + a + 6d = a + d + a + 5d$; oder $2a + 6d = 2a + 6d$, und so mit alle übrigen.

Addirt man alle Glieder der Reihe, so ist die Summe einerlei mit der Summe des ersten und letzten Gliedes, multiplicirt mit der halben Anzahl der Glieder. Denn es ist

$$a + a + d + a + 2d + a + 3d + a + 4d + a + 5d + a + 6d$$
$$= 7a + 21d = a + a + 6d \times \tfrac{7}{2} = 2a + 6d \times \tfrac{7}{2} = \frac{14a + 42d}{2}$$
$$= 7a + 21d,$$

Von

Von der obigen Reihe (125) ist also die Summe $= S = a + a + (n - 1)\,d.\ \frac{n}{2} = \frac{2an + n(n-1)d}{2} = an + \frac{n(n-1)d}{2}$.

127.

Ist $a = 1$; so ist $S = n + \frac{n(n-1)d}{2}$.

Ist $d = 1$; so ist $S = n + \frac{n(n-1)}{2} = n + \frac{n^2 - n}{2} = \frac{2n + n^2 - n}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$.

Ist $d = 2$; so ist $S = n + \frac{2n^2 - 2n}{2} = n + n^2 - n = n^2$. Ist $d = 3$; so ist $S = n + \frac{3n^2 - 3n}{2} = \frac{2n + 3n^2 - 3n}{2} = \frac{3n^2 - n}{2}$. Ist $d = 4$; so ist $S = \frac{4n^2 - 2n}{2} = 2n^2 - n$. Für $d = 5$, ist $S = \frac{5n^2 - 3n}{2}$; $d = 6$, ist $S =$

$6n^2 -$

$\frac{6n^2 - 4n}{2} = 3n^2 - 2n$; $d = 7$, ist

$S = \frac{7n^2 - 5n}{2}$; $d = 8$, ist $S =$

$\frac{8n^2 - 6n}{2} = 4n^2 - 3$; $d = 9$, ist

$S = \frac{9n^2 - 7n}{2}$; und ist $d = 10$, so ist

$S = \frac{10n^2 - 8n}{2} = n^2 - 4n$.

128.

Hierauf beruhen die figurirten oder vieleckigten Zahlen. Ist das erste Glied = 1, und die Differenz ebenfalls 1, so entsteht folgende arithmetische Reihe:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, u. s. w.

Addirt man in derselben, das erste, zweite, dritte, vierte u. s. w. Glied, so entsteht folgende Zahlreihe:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, u. s. w.

Diese Zahlen nennt man Triangular: oder dreieckigte Zahlen. So viel Einheiten die Zahl hat, so viel Puncte füllen den Raum eines Dreiecks aus. So zeigt z. B. 6 in der Reihe das 3te Glied an, und es entsteht ein Dreieck aus 6 Puncten, wenn man drei Puncte zur Seite annimmt. Ist die Differenz und das erste Glied = 1; so ist die Summe

(127)

(127) $= \frac{n^2 + n}{2}$. Dies ist die Formel für alle Triangular-Zahlen. Hier bedeutet n das Glied oder die Seite des Dreiecks, und $\frac{n^2 + n}{2}$ die Summe der Puncte, aus welchen es besteht. Ist $n = 9$; so ist $\frac{n^2 + n}{2} = \frac{81 + 9}{2} = 45$. Ist $n = 100$; so ist $\frac{100^2 + 100}{2} = 5050$, u. s. w.

129.

Ist die Differenz einer arithmetischen Reihe $= 2$, und das erste Glied $= 1$, so ist die Reihe selbst:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, u. s. w.

Addirt man hier das erste und das zweite, oder das erste, zweite und dritte u. s. w., so entstehen folgende Zahlen:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, u. s. w.

welche Quadratzahlen sind. Die Formel für diese Zahlen (127) ist $= n^2$.

130.

Die Differenz der Reihe sei $= 3$, so ist die Progression folgende:

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, u. s. w.

und addirt, 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, u. s. w.

Diese

Diese Zahlen heißen fünfeckigte. Davon ist die Formel (127) $= \frac{3n^2 - n}{2}$.

Gesetzt, man wollte die fünfeckigte Zahl von 100 finden; so ist $n = 100$. Demnach $\frac{3n^2 - n}{2}$ $= \frac{3 \cdot 100^2 - 100}{2} = \frac{30000 - 100}{2} =$ 14950.

131.

Sechseckigte Zahlen entstehen aus einer arithmetischen Reihe, deren Differenz $= 4$ ist; siebeneckigte aus einer Reihe, deren Unterschied $= 5$; achteckigte aus 6, 9eckigte aus 7, u. s. w.

Demnach hat man die Formeln für 6-, 7-, 8-, 9-, und 10eckigte Zahlen aus (127). Oder

VIeckigte $= \frac{4n^2 - 2n}{2} = 2n^2 - n.$

VIIeckigte $= \frac{5n^2 - 3n}{2}$

VIIIeckigte $= \frac{6n^2 - 4n}{2} = 3n^2 - 2n.$

IXeckigte $= \frac{7n^2 - 5n}{2}$

Xeckigte $= \frac{8n^2 - 6n}{2} = 4n^2 - 3n.$

132.

Jede vieleckigte Zahl besteht also aus n^2, multiplicirt mit der Anzahl der Seiten weniger zwei, weniger n multiplicirt mit der Zahl der Seiten weniger 4.

Es drücke m demnach allgemein die Seite eines Vielecks aus, so ist das

m Eck $= \frac{(m - 2)\, n^2 - (m - 4)\, n.}{2}$

Es sei $m = 100$; so ist die 100eckigte Zahl $= \frac{98 n^2 - 96 n}{2} = 49 n^2 - 48 n$, u. s. w.

133.

133.

Aus den in (131) angegebenen Formeln der figurirten Zahlen, läßt sich jedesmal die Seite einer solchen Figur finden, wenn man die Formel, der gegebenen figurirten Zahl, gleich setzt. Es gehöret nichts weiter dazu, als die Auflösung einer vermischten quadratischen Gleichung. Es sei z. B. 45 eine dreieckigte Zahl, und man sucht die Seite dieser Zahl; so ist die Formel einer dreieckigten Zahl $= \frac{n^2 + n}{2}$.

Also $\frac{n^2 + n}{2} = 45$, oder $n^2 + n = 90$;

folglich $n^2 + n + \frac{1}{4} = 90 + \frac{1}{4} = \frac{361}{4}$.
Hieraus die $\sqrt{}$, ist $n + \frac{1}{2} = \pm \frac{19}{2}$; also
$n = \frac{19}{2} - \frac{1}{2} = 9$.

Allgemein läßt sich diese Zahl so finden, wenn a die dreieckigte Zahl bedeutet.

$$\frac{n^2 + n}{2} = a$$

$n^2 + n = 2a$. Ergänze das Quadrat, so

ist $n^2 + n + \frac{1}{4} = 2a + \frac{1}{4} = \frac{8a + 1}{4}$ | $\sqrt{}$

$$n + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{(8a + 1.)}{2}}$$

Also $n = \sqrt{\left(\frac{8a + 1}{2}\right)} - \frac{1}{2}$.

Alle dreieckigte Zahlen geben ein vollständiges Quadrat, wenn dieselben mit 8 multipliciret, und zum Producte 1 addiret werden.

In unserm vorigen Beispiel war 45 eine Dreiecks-Zahl; also $8 \cdot 45 + 1 = 361 = 19^2$.

134.

Es sei a eine gegebene fünfeckigte Zahl, so ist die Formel derselben (127. 130) $\frac{3n^2 - n}{2}$. Also $3n^2 - n = 2a$; oder $n^2 - \frac{1}{3}n = \frac{2}{3}a$. Das Quadrat ergänzt, giebt $n^2 - \frac{1}{3}n + \frac{1}{36} = \frac{2}{3}a + \frac{1}{36} = \frac{24a + 1}{36}$. Beiderseits die $\sqrt{}$

ausgezogen,

gezogen, giebt $n - \frac{1}{6} = \sqrt{\left(\frac{24a + 1}{6}\right)}$; also

$$n = \sqrt{\left(\frac{24a + 1}{6}\right)} + \frac{1}{6}.$$

Hier entsteht wieder eine Quadratzahl, wenn man die fünfeckigte Zahl mit 24 multiplicirt, und 1 zum Producte addirt.

Es sei $a = 51$; so ist $24 \cdot 51 + 1 = 35^2$.

135.

Die Formel aller 9eckigten Zahlen ist $\frac{7n^2 - 5n}{2}$ (131). Also $7n^2 - 5n = 2a$; oder $n^2 - \frac{5}{7}n = \frac{2}{7}a$; mithin $n^2 - \frac{5}{7}n + \frac{25}{196} = \frac{2}{7}a + \frac{25}{196} = \frac{56a + 25}{196}$. Demnach $n - \frac{5}{14} = \frac{\sqrt{(56a + 25)}}{14}$ und daher

$$n = \frac{\sqrt{(56a + 25)}}{14} + \frac{5}{14}.$$

Multiplicirt man also die 9eckigte Zahl mit 56, und addirt zum Producte 25, so giebt die Summe eine Quadratzahl.

136.

Um die figurirten Zahlen noch allgemeiner darzustellen, so sei a eine m eckigte Zahl. Es ist also

$$(132)\ \frac{(m-2)\,n^2 - (m-4)\,n}{2} = a$$

$$(m-2)\,n^2 - (m-4)\,n = 2\,a;$$

oder durch $m - 2$ getheilt, $n^2 - \frac{(m-4)\,n}{m-2} = \frac{2\,a}{m-2}$. Man ergänze das Quadrat, so ist

$$n^2 - \frac{(m-4)}{m-2}\,n + \frac{(m-4)^2}{4\,(m-2)^2} = \frac{2\,a}{m-2} + \frac{(m-4)^2}{4\,(m-2)^2},$$

oder den letzten Ausdruck auf einerlei Benennung gebracht, giebt

$$n^2 - \frac{(m-4)}{m-2}\,n + \frac{(m-4)^2}{4\,(m-2)^2} = \frac{8\,a\,(m-2)^2}{4\,(m-2)^2} + \frac{(m-4)^2 n.\ m-2}{4\,(m-2)^2}$$

$$= \frac{8\,a\,(m-2) + (m-4)^2}{4\,(m-2)^2}$$ und beiderseits

derseits die Quadratwurzel ausgezogen, ist

$$\frac{n - m - 4}{2(m-2)} = \frac{\sqrt{(8a(m-2) + (m-4)^2)}}{2(m-2)}$$

und folgl. $n = \frac{\sqrt{\pm}(8a(m-2) + (m-4)^2)}{2(m-2)}$

$$+ \frac{m-4}{2(m-2)} =$$

$$\frac{\sqrt{\pm}(8a(m-2) + (m-4)^2) + m - 4.}{2(m-2)}$$

Diese Formel gilt allgemein für jede vieleckigte Zahl. Es sei $3009 =$ einer vieleckigten Zahl, so ist
$a = 3009$; $m = 24$; mithin

$$n = \frac{\sqrt{\pm}(8 \cdot 3009(22) + (20)^2) + 20}{2(22)}$$

$$= \frac{728 + 20}{44} = 17.$$

137.

Hier folgen noch ein paar Aufgaben von vermischten quadratischen Gleichungen, worin zum Theil eine arithmetische Reihe mit vorkommt.

13te Aufgabe. Man hat acht Zahlen, die in arithmetischer Progression stehen. Werden die beiden mittelsten addirt, so kommen 34. Wird aber die erste und letzte mit einander multipliciret, so kommen 93. Welches sind die Zahlen?

Auflö=

Auflösung. Das 5te Glied sei $= x$, so ist, weil das 5te und das 4te die beiden mittlern Glieder sind, das vierte $= 34 - x$. Der Unterschied beider Glieder ist demnach $- 34 + 2x$; folglich entsteht folgende Reihe:

$$\overset{1}{136-7x},\ \overset{2}{102-5x},\ \overset{3}{68-3x},\ \overset{4}{34-x},\ \overset{5}{x},\ \overset{6}{-34+3x},$$

$$\overset{7}{-68+5x},\ \overset{8}{-102+7x}.$$

Nun ist, vermöge der Gleichung

$$(136 - 7x).\ (-102 + 7x)$$
$$= -13872 + 1666x - 49x^2 = 93$$

oder mit veränderten Zeichen

$$49x^2 - 1666x + 13872 = -93;$$

und getheilt durch 49, giebt

$$x^2 - 34x = -285.$$

Das Quadrat ergänzt, ist

$$x^2 - 34x + 289 = +4 \text{ und } \surd$$

$$x - 17 = \surd \pm 4 = \pm 2$$

Also $x = 19 =$ dem 5ten Gliede. Mithin das 4te $= 15$, und der Unterschied $= 4$. Demnach hat man folgende arithmetische Reihe:

3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31.

138.

14te Aufgabe. Einer kauft eine gewisse Anzahl Tücher, das erste für 2 Rthlr., das zweite für

4 Rthlr.

4 Rthlr., das dritte für 6 Rthlr., und immer 2 Rthlr. mehr für das folgende, bezahlt für alle Tücher 110 Rthlr. Wie viel sind der Tücher gewesen?

Auflösung. Es sind x Tücher gewesen, und bezahlt wie folget:

für das 1, 2, 3, 4, ... x

2 4 6 8 . . . . . . 2x

Die Summe dieser Reihe ist $(2x + 2) \frac{x}{2} = 110$

oder $\frac{2x^2 + 2x}{2} = 110$; oder $x^2 + x = 110$.

Das Quadrat ergänzt, giebt

$x^2 + x + \frac{1}{4} = 110 + \frac{1}{4} = \frac{441}{4}$.

Hieraus die $\sqrt{}$, ist

$x + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{441}{2}} = \frac{21}{2}$; also

$x = \frac{20}{2} = 10$.

139.

15te Aufgabe. Es sind sieben Zahlen in einer arithmetischen Reihe, wovon die größte Zahl ist 33. Wenn man aber die beiden kleinsten mit einander multipliciret, so giebt $\frac{1}{3}$ des Products und noch 28, grade so viel, als die Summe aller Zahlen. Welches muß die Differenz dieser Progression sein?

Auflösung. Die Differenz sei x; also die Reihe selbst ist folgende:

$\overset{7}{33}, \overset{6}{33-x}, \overset{5}{33-2x}, \overset{4}{33-3x}, \overset{3}{33-4x}, \overset{2}{33-5x}, \overset{1}{33-6x}$.

Die beiden kleinsten Glieder sind demnach $33 - 5x$ und $33 - 6x$. Diese mit einander multipliciret, geben

geben $1089 - 363x + 30x^2$. Dividirt mit 3, ist der Quotient $= 363 - 121x + 10x^2$, und 28 addiret, ist $391 - 121x + 10x^2 =$ der Summe der Reihe. Diese ist

$(33 + 33 - 6x)\frac{7}{2} = 231 - 21x$.

Also $391 - 121x + 10x^2 = 231 - 21x$. Oder $10x^2 - 100x = -160$; getheilt mit 10, giebt $x^2 - 10x = -16$. Das Quadrat ergänzt, ist $x^2 - 10x + 25 =$
$-16 + 25 = 9$. Die $\sqrt{}$ ausgezogen, giebt
$x - 5 = \pm\sqrt{9} = \pm 3$; $x = 2$.

140.

16te Aufgabe. Man kauft ein Pferd für etliche Thaler, verkauft dasselbe wieder für 119 Thaler, und gewinnt an hundert so viel Thaler, als das Pferd gekostet hat. Wie theuer ist es nun eingekauft?

Auflösung. Das Pferd habe x Thaler gekostet. Mithin ist der Gewinst $\frac{x^2}{100}$. Denn

$100 : x = x : \frac{x^2}{100}$. Folglich ist

$\frac{x^2}{100} + x = 119$ Thaler, oder

$x^2 + 100x = 11900$; oder

$x^2 + 100x + 2500 = 14400$. Also

$x = 120 - 50 = 70$ Thaler.

141.

141.

17te Aufgabe. Die Summe zweier Zahlen ist 35, und die Summe ihrer Quadrate ist 625. Was sind das für Zahlen?

Auflösung. Die eine Zahl sei x; so ist die andere $35 - x$. Das Quadrat der ersten ist $= x^2$, und das Quadrat der zweiten ist

$1225 - 70x + x^2$. Also die Summe von beiden $1225 - 70x + 2x^2 = 625$; oder $x^2 - 35x = -300$. Das Quadrat ergänzt, giebt

$x^2 - 35x + (\frac{35}{2})^2 = -300 + \frac{1225}{4} = \frac{-1200 + 1225}{4} = \frac{25}{4}$. Hieraus die $\surd$, ist

$x - \frac{35}{2} = \pm \surd(\frac{25}{4}) = \pm \frac{5}{2}$; also

$x = + \frac{40}{2} = 20$. Daher die andere Zahl $= 15$.

142.

18te Aufgabe. Zwanzig Personen, Männer und Weiber verzehren, die Männer 24 ß und die Weiber 24 ß; aber es findet sich, daß ein Mann einen Schilling mehr verzehret hat, als ein Weib. Wie groß war die Zahl der Männer und der Weiber?

Auflösung. Die Zahl der Männer sei x; so ist die Zahl der Weiber $20 - x$. Nun ist

x Män-

x Männer : 24 ß $=$ 1 M. : $\frac{24}{x}$ und

$20 - x$ Weiber : 24 ß $=$ 1 W. : $\frac{24}{20 - x}$

Aber ein Mann verzehrt 1 ß mehr als ein Weib; mithin ist

$$\frac{24}{x} - 1 = \frac{24}{20 - x} \quad \text{oder}$$

$$\frac{24 - x}{x} = \frac{24}{20 - x} \quad \text{oder}$$

$$480 - 44x + x^2 = 24x \quad \text{d. i.}$$

$x^2 - 68x = -480$. Das Quadrat ergänzt, giebt $x^2 - 68x + 1156 = + 676$. Hieraus die $\surd$, ist $x - 34 = \pm 26$; also $x = 8 =$ der Zahl der Männer und $20 - 8 = 12 =$ der Zahl der Weiber.

143.

19te Aufgabe. Eine gewisse Waare wird mit so viel Procent Gewinn verkauft, als das Pfund im Einkauf gekostet hat. Man empfängt aber nun für jedes Pfund 6 M$\mathfrak{k}$ 10 ß 3 ₰. Wie viel hat also das Pfund im Einkaufe gekostet?

Auflö-

Auflösung. Es habe x Mk gekostet. Folglich ist gewonnen $\frac{x^2}{100}$ Mk. Denn

$$100 : x = x : \frac{x^2}{100}.$$ Also ist

$$x + \frac{x^2}{100} = 6\tfrac{41}{64} \text{ Mk};$$ oder

$$\frac{64x^2 + 6400x = 42500}{x^2 + 100x = \frac{42500}{64}} : 64$$

das Quadrat ergänzt, ist $x^2 + 100x + 2500 = \frac{42500}{64} + 2500$
$= \frac{202500}{64}$.

Mithin $x + 50 = 56\frac{1}{4}$ und daher
$x = 6\frac{1}{4}$ Mk.

144.

20ste Aufgabe. Einer kauft etliche Tücher für 180 Thaler; wären der Tücher drei mehr gewesen für eben das Geld, so wäre ihm das Stück um 3 Thaler wohlfeiler gekommen. Wie viel sind es Tücher gewesen?

Auflösung. Es sind x Tücher gewesen. Einmal ist der Preis $= \frac{180}{x}$; zweitens $\frac{180}{x+3}$.

Letzterer Werth ist um 3 Thaler wohlfeiler als der erste;

erste; demnach $\frac{180}{x} - 3 = \frac{180}{x+3}$ oder

$171x - 3x^2 + 540 = 180x$ d. i.

$-x^2 - 3x = -180$ oder die Zeichen verwandelt, ist $x^2 + 3x = 180$. Demnach

$x^2 + 3x + \frac{9}{4} = 180 + \frac{9}{4} = \frac{729}{4}$.

Hieraus $\surd$, ist $x + \frac{3}{2} = \frac{27}{2}$; oder

$x = \frac{24}{2} = 12$.

145.

21ste Aufgabe. Zwei Kaufleute verkaufen einige Ellen Zeug, der andre drei Ellen mehr als der erste, und lösen zusammen 35 Thaler. Spricht der erste zum andern: Hätte ich dein Zeug so theuer wie das meinige verkauft, so hätte ich daraus 24 Thaler gelöset. Der andre antwortet: alsdann hätte ich aus deinem $12\frac{1}{2}$ Thaler gelöset. Wie viel Ellen hat nun jeder gehabt?

Auflösung. Der eine habe x Ellen und der andre $x + 3$ Ellen. Nun hat der erste $x + 3$ Ellen für 24 Thaler verkauft, also hat er x Ellen zu $\frac{24x}{x+3}$ Thaler verkauft. Der andere verkauft x Ellen für $12\frac{1}{2}$ Thaler, folglich verkauft er $x + 3$ Ellen zu $\frac{25x + 75}{2x}$ Thaler. Addirt man beide, so ist die

Summe $\frac{73x^2 + 150x + 225}{2x^2 + 6x} = 35$ Thaler.

Mit-

Mithin $73x^2 + 150x + 225 = 70x^2 + 210x$
oder $3x^2 - 60x = -225$ und
$x^2 - 20x = -75$; folglich das
Quadrat ergänzt, ist
$x^2 - 20x + 100 = +25$ und $\surd$ ist
$x - 10 = +5$;
also $x = 15$ oder 5 Ellen für den ersten,
und 18 oder 8 Ellen für den zweiten.

146.

22ste Aufgabe. Einer hat zweierlei Thee, und findet, wenn er jedes Pfund des ersten um so viel Thaler verkauft, als des zweiten Pfunde sind, so kann er 98 Thaler lösen. Da er aber jeden besonders jedes Pfund um so viel Thaler verkauft, als es Pfunde sind: so bekommt er 245 Thaler. Wie viel Pfund sind nun vom ersten, und wie viel Pfund sind von dem andern vorhanden?

Auflösung. Von der ersten Sorte habe er x ℔, und von der zweiten y Pfunde. Nun ist, der Aufgabe zufolge, 1 ℔ : y Thaler = x ℔ : x y Thlr. Diese $xy = 98$ Thaler, welches die erste Gleichung ist; ferner:

1 ℔ : x Thlr. = x ℔ : xx Thlr. und
1 ℔ : y Thlr. = y ℔ : yy Thlr.

Also ist $xx + yy = 245$, welches die zweite Gleichung ist. Aus der ersten finde man den

Werth

Werth von y, dieser ist $= \frac{98}{x}$; und setze denselben in die zweite Gleichung, so hat man

$$x^2 + \frac{98^2}{x^2} = 245.$$ Multiplicire mit x^2, so ist $x^4 + 9604 = 245\,x^2$; oder

$$x^4 - 245\,x^2 = -9604.$$

Dies ist zwar eine Gleichung vom 4ten Grade, die man aber leicht auf eine vom 2ten Grade zurückbringen kann, wenn man $x^2 = y$ setzt; also $x^4 = y^2$. Demnach ist $x^4 - 245\,x^2 = -9604 =$

$$y^2 - 245\,y = -9604.$$

Man ergänze das Quadrat, so ist

$$y^2 - 245\,y + \tfrac{60025}{4} = \tfrac{21609}{4}.$$ Hieraus $\surd$, ist $y - \frac{245}{2} = + \frac{147}{2}$. Also

$$y = \tfrac{392}{2} = 196.$$

Nun war $y = x^2$; folglich $x = \surd\,196 = 14$, und da $xy = 98 = 14 \cdot y$; so ist $y = 7$.

147.

23ste Aufgabe. Zwei Personen haben ein Kapital von 200 Thaler zu einem Handel zusammen gebracht. Der erste läßt sein Geld 4 Monat darin, und zieht darauf mit seiner Einlage und seinem Gewinne zusamme 176 Thaler. Der andere hatte sein Geld nur 3 Monate im Handel, und mit Einlage und Gewinn zusammen 228 Thaler gezogen. Wie viel hat jeder angelegt?

Auflö-

Auflösung. Der eine habe x Thaler, und der andere 200 — x Thaler eingelegt. Der erste gewinnt also 176 — x, und der zweite

$228 - (200 - x) = 28 + x.$

Sie gewinnen demnach beide

$= 176 - x + 28 + x = 204$ Thaler.

Der erste hat sein Geld 4 Monat und der zweite 3 Monat darin stehen; also $4x + 600 - 3x =$ beider Einsatz für diese Zeit, $= 600 + x$. Demnach

$600 + x : 204$ Thlr. Gewinn $= 4x : \frac{816x}{600+x}$ Gew.

Mithin ist $\frac{816x}{600+x} = 176 - x$ oder

$816x = 105600 - 424x - x^2$

oder gehörig reducirt, giebt

$x^2 + 1240x = 105600$. Folglich

$x^2 + 1240x + 384400 =$

$105600 + 384400 = 490000$. Hieraus $\sqrt{}$, ist $x + 620 = 700$; also $x = 80 =$ dem Kapital des ersten, und $200 - 80 = 120 =$ dem Kapital des zweiten.

148.

24ste Aufgabe. Es hat jemand zwei Zahlen, wovon die eine um sieben größer ist, als die andere. Wenn man nun 100 durch jede dieser Zahlen dividiret, dirt, und die Quotienten addiret, so kommen $43\frac{1}{3}$. Welche Zahlen müssen das sein?

Auflösung. Die eine Zahl sei x, so ist die andere $= x + 7$.

Demnach ist:

$$\frac{100}{x} + \frac{100}{x+7} = 43\tfrac{1}{3}; \text{ oder}$$

$$\frac{100x + 700 + 100x}{x^2 + 7x} = 43\tfrac{1}{3}$$

d. i. wenn alles reducirt wird,

$$130x^2 + 310x = 2100.$$

Das Quadrat ergänzt, giebt

$$x^2 + \tfrac{31}{13}x + \tfrac{961}{676} = \tfrac{11881}{676} \text{ und } \surd$$

$$x + \tfrac{31}{26} = \tfrac{109}{26}. \text{ Demnach}$$

$$x = \tfrac{78}{26} = 3 = \text{der ersten Zahl.}$$

Folglich die zweite $x + 7 = 10$.

149.

25ste Aufgabe. Zwei Läufer, A und B, laufen gegen einander, und gehen zu gleicher Zeit von ihrem Ziele ab. Sie begegnen sich dergestalt, daß A 12 Schritte mehr gemacht hat, als B. Den übrigen Weg macht A in 2 Minuten, und B macht seinen übrigen in 8 Minuten. Wie groß ist die Entfernung beider Ziele?

Auflösung. Der Weg, den B bis zur Zusammenkunft zurück gelegt hat, sei $= x$: so ist der von A gemachte Weg $= x + 12$; weil A 12 Schritte

mehr

mehr gemacht hat, als B. Nun muß man suchen, in wie viel Zeit jeder seinen Weg gemacht hat.

A macht den Weg x in 2 Minuten; in wie viel den Weg $x + 12$? $= \frac{2x + 24}{x}$.

B macht den Weg $x + 12$ in 8 Minuten, in wie viel den Weg x? $= \frac{8x}{x+12}$.

Beide haben ihren Weg zu gleicher Zeit gemacht: darum ist die Zeit $\frac{2x + 24}{x} = \frac{8x}{x + 12}$ oder $2x^2 + 48x + 288 = 8x^2$; oder $6x^2 - 48x = 288$; mithin $x^2 - 8x = 48$. Das Quadrat ergänzt, giebt $x^2 - 8x + 16 = 48 + 16 = 64$ und $\surd$, ist $x - 4 = 8$; also $x = 12$.

Die Ziele waren demnach 36 Schritte von einander entfernt, wovon A 24 und B 12 zurück gelegt hat. Nun macht A 12 Schritte in 2 Minuten, also 24 in 4 Minuten, und B macht 24 Schritte in 8 Minuten, also 12 Schritte in 4 Minuten, folglich haben beide ihren Weg in 4 Minuten gemacht.

150.

Von den geometrischen Zahlenreihen oder Progressionen.

Von der geometrischen Progreßion habe ich im ersten Bande (330-336), eine vollständige Erklärung gegeben, und das Summiren einer wachsenden Reihe (337) durch Zahlen erläutert. Hier bleibt mir also nichts weiter zu thun übrig, als diese Arbeiten, die bei einer solchen Reihe vorkommen, auf eine allgemeine Art, aus einander zu setzen.

Zu dem Ende sei das erste Glied $= a$, der Exponenent $= m$, so läßt sich die Reihe allgemein so vorstellen:

$$a, \ am, \ am^2, \ am^3, \ am^4, \ am^5 \ \ldots\ldots\ldots$$

Das letzte Glied in einer geometrischen Reihe besteht aus dem ersten Gliede multipliciret in den Exponenten zu der Potenz erhoben, als die Zahl der Glieder weniger Eins beträgt. In der gegebenen Reihe war das sechste Glied $= a.m^5 = am^{6-1}$. Ist also die Zahl der Glieder $= n$, der Exponent $= m$, und das erste Glied $= a$; so ist das nte Glied $= am^{n-1}$; das $n + 1$ te Glied $= am^n$ u. s. w.

151.

Die Summe einer geometrisch zunehmenden Reihe läßt sich auf folgende Weise leicht finden.

Die Progreßion sei

$$a, \ am, \ am^2 \ am^3 \ \ldots\ldots \ am^{n-2}, \ am^{n-1} = S \text{ (der Summe)}$$

Man

Man multiplicire die Reihe mit dem Exponenten m, so ist

$$am, am^2, am^3 \ldots\ldots\ldots am^{n-1}, am^n = Sm.$$

Subtrahire die erste Reihe von der letztern, so ist

$Sm - S = am^n - a$, oder $(m-1)\, S = am^n - a$

und daher $S = \dfrac{am^n - a}{m-1}$.

Man multiplicire demnach das erste Glied mit dem Exponenten auf die Potenz gebracht, als die Zahl der Glieder beträgt, und ziehe davon das erste Glied ab. Den Unterschied dividire man mit dem Exponenten weniger eins; so giebt der Quotient die Summe der Reihe.

Aus (150) ist das letzte Glied einer geometrischen Reihe $= am^{n-1}$; heißt dieses nun z, so ist $z = am^{n-1}$. Man multiplicire die Gleichung mit m, so ist $zm = am^n$. Diesen Ausdruck von zm für am^n, in die erste Gleichung gesetzt, giebt $S = \dfrac{zm - a}{m-1}$. Oder die Summe

 ist

ist gleich dem letzten Gliede der Reihe weniger dem ersten Gliede, dividirt durch den Exponenten weniger eins.

Beispiel. Es sei $a = 1$; $m = 3$, und die Zahl der Glieder $= 10$; so ist die Summe $= S$ $= \frac{1 \cdot 3^{10} - 1}{3 - 1} = \frac{1 \cdot 59049 - 1}{2} = 29524.$

Oder nach der zweiten Formel ist das letzte Glied $= z = 19683$; also $S = \frac{19683 \cdot 3 - 1}{3 - 1}$ $= 29524.$

152.

Es giebt noch eine andere Methode, die Summe einer geometrischen Reihe zu finden, nämlich, wenn das erste, zweite und letzte Glied der Reihe bekannt ist.

Die Reihe sei $a + b + c + d + e$, wovon die Summe $= S$ ist. Nun ist bekannt, daß drei auf einander folgende Glieder in einer geometrischen Reihe, in einer zusammenhängenden Proportion stehen; und daß daher zwei auf einander folgende Glieder in der Reihe selbst, mit den beiden ersten Gliedern, eben eine solche Proportion bilden. Demnach ist

$a : b =$

$a : b = a : b$
$a : b = b : c$
$a : b = c : d$
$a : b = d : e$

$$4a : 4b = a : b + b : c + c : d + d : e = a + b + c + d : b + c + d + e.$$

Nun ist aber $a + b + c + d = S - e$; und $b + c + d + e = S - a$; also wenn man $4a : 4b$ mit 4 theilt, so ist

$$a : b = S - e : S - a.$$

Multiplicirt man die beiden äussern Glieder dieser Proportion, so ist das Product derselben, den beiden mittlern gleich. Demnach $(S - a)\,a = (S - e)\,b$; oder $aS - a^2 = bS - be$ und daher

$$aS - bS = -be + a^2 \text{ und}$$

$$(a - b)\,S = a^2 - be \text{ und also}$$

$$S = \frac{a^2 - be}{a - b}.$$

Es sei a oder das erste Glied = 1; das zweite $b = 3$, und das fünfte oder hier das letzte Glied $e = 81$; so ist $S = \frac{1 - 3 \cdot 81}{1 - 3} =$

$$\frac{-242}{-2} = 121.$$

Bei einer abnehmenden Reihe ist a größer als b und der Ausdruck $\frac{a^2 - be}{a - b}$ wird positiv.

153.

Aus der Formel (151) von $\frac{zm - a}{m - 1}$ läßt sich das letzte Glied leicht bestimmen. Denn da $S = \frac{zm - a}{m - 1}$, so ist $z = \frac{S(m - 1) + a}{m}$. Dieser Ausdruck ist einerlei mit dem aus (152) hergeleitet. Denn hier ist e (oder das letzte Glied) $= \frac{S(a - b) - a^2}{- b}$.

Auf eben die Art, läßt sich auch aus beiden Formeln das erste Glied a, einer gegebenen Reihe, herleiten.

154.

Die Summe einer abnehmenden Reihe läßt sich auf eben die Art finden, wie ich das Summiren einer wachsenden Reihe gezeigt habe.

Es sei $S = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5}$ u. s. w.

Multiplicire die Reihe mit $\frac{a}{}$ so ist

$Sa = 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4}$ u. s. w.

Subtrahire die erste von der zweiten, so ist der Unterschied $= Sa - S = 1$; oder $(a - 1) S = 1$; also $S = \frac{1}{a - 1}$.

Ist

Ist $a = 2$; so ist die Reihe selbst

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ bis ins Unendliche, und die Summe derselben ist $= \frac{1}{2-1} = 1$.

155.

Man nehme dieselbe Reihe, aber mit abwechselnden Zeichen, an, so ist die Summe $= \frac{1}{a+1}$.

Denn $S = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5}$ u. s. w.

Mutiplicire mit a so ist

$aS = 1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} - \frac{1}{a^5}$ u. s. w.

Man addire beide, so ist $aS + S = 1$; und daher $S = \frac{1}{a+1}$.

156.

Von den Logarithmen.

Ich habe im ersten Bande (338) das Nöthige über Logarithmen gesagt, und werde hier deswegen mich kürzer fassen können, weil ich nur noch das Allgemeine über die Logarithmen und deren Anwendung auf algebraische Gegenstände, abzuhandeln, und durch einzelne Beispiele zu erläutern habe.

157.

Aus dem, was ich über geometrische Zahl-Reihen in (150 u. f. w.) gesagt habe, folgt, daß der Exponent von jedem Gliede in einer gegebenen Reihe anzeigt, wie oft das erste Verhältniß, aus welchem die Reihe entstanden ist, in dem bekannten Gliede enthalten oder zusammengesetzt ist. So ist folgende geometrische Reihe, $1, a, a^2, a^3, a^4$ u. s. w. aus dem Verhältniß von $1 : a$, oder dem Exponenten a, zusammengesetzt.

Das fünfte Glied dieser Reihe ist $= a^4 = a^{5-1}$ und der Exponent 4 zeigt an, daß das Verhältniß von $1 : a$ in a^4, viermal enthalten oder zusammengesetzt ist. Daher heißt der Exponent 4, die Verhältnißzahl oder der Logarithmus. Demnach ist der Logarith. $a^4 = 4$. In der Folge will ich Logarithmus allemal durch Log. ausdrücken. Allgemein ist von a^n der Log. $= n$. Ist $a = 2$, und $n = 1$; so ist von 2 der Log. 1; und ist $n = 0$; so ist von a^0 der Log. $= 0$. Nun ist aber $a^0 = 1$; also ist der Log. von $1 = 0$.

158.

Setzt man für n einen gebrochenen Exponenten, als $\frac{1}{2}$, oder $\frac{1}{3}$, oder $\frac{1}{4}$ u. s. w., so ist der Logarithmus $a^{\frac{1}{2}}$

$a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$, und der Log. $a^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$ u. s. w. Aber $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, also Log. $\sqrt{a} = \frac{1}{2}$, und $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$, folglich $\sqrt[3]{a} = \frac{1}{3}$. Ferner ist $\frac{1}{a} = a^{-1}$, und $\frac{1}{a^2} = a^{-2}$, und $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$. Mithin ist der Log. von $\frac{1}{a} = -1$; von $\frac{1}{a^2} = -2$, und von $\frac{1}{a^n} = -n$. Eigentliche Brüche, und deren Potenzen haben also verneinende Logarithmen.

159.

Wenn man Potenzen mit einander multipliciret, so addiret man ihre Exponenten, wie aus dem vorigen bekannt ist; und bei der Divisio der Potenzen, subtrahirt man ihre Exponenten. Oder $a^4 . a^3 = a^7$. D. i. $a^{\text{Log. } 4} . a^{\text{Log. } 3} = \text{Log. } 4 + \text{Log. } 3 = \text{Log. } 7$. Oder allgemein $x^m . x^n = \text{Log. } m + \text{Log. } n$. Die Multiplicatio verwandelt sich also in eine

Additio.

Additio. Ist m = n in dem vorigen Beispiel, so ist $x^n \cdot x^n = x^{2n}$ = Log. n + Log. n = 2 Log. n. Und Log. $(x^n)^3$ = 3 Log. n u. s. w. Soll also eine Zahl auf eine Potenz gebracht werden, so braucht man nur den Log. der Zahl mit dem Grad der Potenz zu multipliciren.

160.

Eben so ist Log. $\sqrt[4]{a^2} = a^{\frac{2}{4}} = a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ Log. a. allgemein $\sqrt[n]{x^m} = \frac{m}{n}$ Log. x. Die Ausziehung der Wurzel verwandelt sich in eine Divisio; oder man braucht nur den Log. der Zahl, aus welcher eine Wurzel gezogen werden soll, mit dem Grad der Potenz zu theilen. Dies sind die vorzüglichsten Arbeiten in der Arithmetik, die, wie ich hier gezeigt habe, durch den Gebrauch der Logarithmen, so ungemein abgekürzt werden.

161.

Im ersten Bande (344) habe ich das System, nach welchem unsere logarithmetischen Tabellen berechnet worden sind, erkläret, und gezeigt, daß es aus dem Verhältnisse von 1 : 10 zusammen gesetzt ist; oder welches einerlei ist, folgende geometrische Reihe zum Grunde liegt:

$10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ u. s. w.

Also

Also der Log. von $10^0 = 1 = 0$ ist; von $10 = 1$, von $10^2 = 2$ u. s. w. ist. Von allen Zahlen, die zwischen 1 und 10 fallen, ist der Logarithmus größer als 0, aber kleiner als 1. Gesetzt, man wollte demnach den Logarithmus von der Zahl 2, nach diesem System finden, so setze men denselben $= x$. Also ist $10^x = 2$, oder Log. $2 = x$. Nun sei $x = \frac{1}{2}$; so ist $10^{\frac{1}{2}} = 2$. Aber $10^{\frac{1}{2}}$ ist $= \sqrt{10}$. Wäre also Log. $2 = \frac{1}{2}$; so müßte $(10^{\frac{1}{2}})^2 = 2^2$; oder $10 = 4$ sein, welches aber viel zu klein ist. Es sei $x = \frac{1}{3}$, oder $10^{\frac{1}{3}} =$ L. 2. Aber $10^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10}$; mithin $(10^{\frac{1}{3}})^3 = 2^3$, d. i. $10 = 8$; welches schon etwas näher kommt. Nun sei $10^{\frac{1}{4}} = 2$; oder $\frac{1}{4} =$ Log. 2; so muß $(10^{\frac{1}{4}})^4 = 2^4$ sein. Allein $(10^{\frac{1}{4}})^4 = 10$ und $2^4 = 16$; also zu groß. Indessen sieht man daraus, daß der Logarithmus von 2, größer ist als $\frac{1}{4}$, aber kleiner als $\frac{1}{3}$. Der Logarithmus von dieser Zahl muß also zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ fallen.

162.

Zu dem Ende setze man $x = \frac{2}{7}$; so muß $(10^{\frac{2}{7}})^7 = 2^7$ sein; aber $(10^{\frac{2}{7}})^7 = 100$ und $2^7 = 128$.

Also

Also ist $\frac{2}{7}$ zu klein: Mithin fällt der Log. zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{7}$. Jener ist zu groß, dieser zu klein. Nun ist der Bruch $\frac{3}{10}$ größer als $\frac{2}{7}$: es sei also $x = \frac{3}{10}$, so ist der Log. von $2 = \frac{3}{10}$, wenn $(x^{\frac{3}{10}})^{10} = 2^{10}$ ist. $x^{\frac{3}{10}}$ zur 10ten Potenz ist $= 10^3 = 1000$; und $2^{10} = 1024$. Es fehlt also doch noch etwas daran, oder $\frac{3}{10}$ ist zu klein. Der Bruch $\frac{7}{20}$ ist etwas größer. Es sei demnach $x = \frac{7}{20}$ und daher muß $(10^{\frac{7}{20}})^{20} = 2^{20}$. Das ist: $10^7 = 2^{20}$; oder $10000000 = 1048576$ noch zu groß u. s. w. Man nehme noch einen kleinern Bruch, so würde man dadurch der Wahrheit immer näher kommen, ohne sie doch ganz zu erreichen, oder auf einen Bruch zu kommen, der dem Log. von 2 völlig gleich wäre. Es giebt andere Wege, wodurch man die Logarithmen berechnen kann, deren Gründe hier aber noch nicht aus einander gesetzt werden können. Ich habe hier nur ein Verfahren zeigen wollen, wodurch man einen Begriff erlangen kann, welche Mühe die ersten Erfinder der Logarithmen, bei der Berechnung derselben, haben anwenden müssen, um von allen den Zahlen, die jetzt in unsern Tafeln enthalten sind, die Logarithmen, bis auf so viele Decimal-Ziefern, zu finden.

163.

Bei der Berechnung der Logarithmen braucht man bei weitem nicht für alle Zahlen die Logarithmen auf eine

eine so mühsame Art zu suchen, sondern nur für solche Zahlen, die sich nicht in andere zerlegen lassen, oder für die sogenannten Primzahlen. Denn ist z. B. der Log. 2 bekannt, so kann man aus diesem den Log. von 4, den Log. von 8, den von 16, von 32; den von 5, von 25, von 125 u. s. w. durch die Additio, Multiplicatio und Divisio, finden. Man muß ferner den Log. 3 auf eben die Weise suchen, wie man den Log. von 2 gefunden hat. Aus beiden lassen sich, nach der eben angeführten Art, die Logarithmen von sehr vielen Zahlen angeben oder zusammensetzen.

164.

Gebrauch und Anwendung der Logarithmen, bei Berechnung der Zins- auf Zinse-Rechnung, und solchen Aufgaben, die mit diesen in Verbindung stehen.

Das vierte Beispiel im ersten Bande, S. 340, läßt sich allgemein so vorstellen.

a sei ein gegebenes Kapital, p und q drücke das Verhältniß von 100 zu 100 und der jährlichen Zinse aus, n zeige die Zahl der Jahre an, so ist das Kapital, welches ich durch n andeuten will, am Ende von n Jahren =

$$\left(\frac{q}{p}\right)^n \cdot a = x.$$

Oder

Oder durch die Logarithmen ausgedrückt, giebt Log. x = n (Log. q — Log. p) + Log. a. In dem angeführten Beispiele, ist $a = 1000$ ℛ︎; $p : q = 100 : 105$; $n = 10$ Jahren, also Log. x = 10 (Log. 105 — Log. 100) + Log. 1000.

165.

Aus der logarithmischen Formel

Log. x = n (Log. q — Log. p) = Log. a, ergiebt sich a, wenn x als gegeben angenommen wird. Denn alsdann ist

$$\text{Log. } a = \text{Log. } x - n(\text{Log. } q - \text{Log. } p).$$

Nach dieser Formel wird das 6te Beispiel des ersten Bandes aufgelöset.

Aus (164) ergiebt sich $n = \dfrac{\text{Log. } x - \text{Log. } a}{\text{Log. } q - \text{Log. } p}$; also die Zeit, wenn ein eingelegtes Kapital a auf x angewachsen ist. Ist $x = 2a$, so ist

$$n = \frac{\text{Log. } 2 - \text{Log. } 1}{\text{Log. } q - \text{Log. } p} = \text{der Zeit der}$$

Verdoppelung.

Fragt man, wie viel die jährliche Zinse betragen müsse, wenn ein Kapital a, auf x, nach einer gegebenen Anzahl von Jahren n, wachsen soll, so ist

$$\text{Log. } q = \frac{\text{Log. } x - \text{Log. } a}{n} - \text{Log. } p.$$

166.

Aufgabe. Wenn zu einem Kapital a, ausser der Zinse auf Zinse, noch jährlich ein bestimmtes Kapital b, welches wieder Interesse auf Interesse giebt, zugelegt wird; wie groß wird das eingelegte Kapital nach einer bestimmten Zeit sein?

Auflösung. Nach dem ersten Jahre wird das Kapital $\frac{q}{p}a$ sein. Hierzu kömmt die jährliche Zulage b, also ist das Ganze nach dem ersten Jahre $= \left(\frac{q}{p}\right) a + b$. Am Ende des zweiten Jahrs ist das Kapital $a = \left(\frac{q}{p}\right)^2 a$ und das Kapital b, welches nun 1 Jahr Zinsen getragen hat, $= \left(\frac{q}{p}\right) b$; mithin zusammen $\left(\frac{q}{p}\right)^2 a + \left(\frac{q}{p}\right) b$, wozu aufs neue b kommt; also am Ende des zweiten Jahrs $\left(\frac{q}{p}\right)^2 a + \left(\frac{q}{p}\right) b + b$. Dies wächst nun eben so als vorhin, und daher ist es am Ende des 3ten Jahrs mit der Zulage $=$

$$\left(\frac{q}{p}\right)^3 a + \left(\frac{q}{p}\right)^2 b + \left(\frac{q}{p}\right) b + b \text{ u. s. w.}$$

Also

Also nach n Jahren =

$$\left(\frac{q}{p}\right)^{n} a + \left(\frac{q}{p}\right)^{n-1} b + \left(\frac{q}{p}\right)^{n-2} b + \left(\frac{q}{p}\right)^{n-3} b \ldots$$

$\left(\frac{q}{p}\right) b + b = \left(\frac{q}{p}\right)^{n} a$ + einer geometrischen Reihe, die zum Exponenten $\frac{q}{p}$, zum ersten Gliede b, und zur Anzahl der Glieder n, hat. =

Von dieser geometrischen Reihe ist nach (151) die Summe =

$$\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{n} b - b}{\frac{q}{p} - 1} = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{n} b - b}{\frac{q - p}{p}} =$$

$\dfrac{\left(\frac{q}{p}\right)^{n} bp - bp}{q - p}$. Hierzu addire man $\left(\frac{q}{p}\right)^{n} a$, so ist das Kapital x nach n Jahren =

$\left(\frac{q}{p}\right)$

$$\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n a + \left(\frac{q}{p}\right)^n bp - bp}{q - p} =$$

$$\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n aq - ap + \left(\frac{q}{p}\right)^n bp - bp.}{q - p}$$

Nun sondere man den gemeinschaftlichen Factor $\left(\frac{q}{p}\right)^n$ gehörig ab, so ist

$$x = \frac{(aq - ap + bp)\left(\frac{q}{p}\right)^n - bp}{q - p}$$ oder

durch Logarithmen ausgedruckt, giebt Log. $x =$

$$\frac{\text{Log.}\,(aq - ap + bp) + n(\text{Log.}\,q - \text{Log.}\,p) - bp.}{q - p}$$

167.

Ich habe auf der 346sten Seite des ersten Bandes ein hiehergehöriges Beispiel gegeben, welches ich jetzt, nach der im vorigen Paragraph gefundenen Formel, auflösen will. Hier ist

 $x =$

$a = 1000$ ℳ︀; $b = 200$ ℳ︀; $p : q = 100 : 105$ $= 20 : 21$; $a = 5$ Jahren. Demnach ist Log. $x =$

$$\frac{\text{Log.}\ (1000.\ 21 - 1000.\ 20 + 200.\ 20) + 5\ (\text{Log.}\ 21 - \text{L.}\ 20) - 200.\ 20}{21 - 20}$$

Nun ist Log. $(21000 - 20000 + 4000) =$

	Log. $5000 =$	3,6989700
Dazu 5 (Log. 21 — Log. 20)	$=$	0,1059465
Summe	Log.	3,8049165

Die dazu gehörige Zahl ist	$=$	6481, 4
hiervon geht ab 200. 20	$=$	4000
bleibt		2381. 4 ℳ︀ $=$

dem Kapital nach 5 Jahren.

168.

Ist x und a, wie auch $p : q$ und b bekannt, so läßt sich aus dem in (166) gefundenen Ausdrucke, n, oder die Zeit bestimmen. Denn

$$x = \frac{(aq - ap + bp)\left(\frac{q}{p}\right)^n - bp}{q - p} \text{ ist } =$$

$$qx - px = (aq - ap + bp)\left(\frac{q}{p}\right)^n - bp =$$

$$\frac{qx - px + bp}{aq - ap + bp} = \left(\frac{q}{p}\right)^n.$$ Und durch Logarithmen ausgedruckt, giebt $n\,(\text{Log.}\,q - \text{Log.}\,p) = \text{Log.}\,(qx - px + bp) - \text{Log.}\,(aq - ap + bp)$.

Also $n =$

$$\frac{\text{Log.}\,(qx - ox + bp) - \text{Log.}\,(aq - ap + bp).}{\text{Log.}\,q - \text{Log.}\,p.}$$

169.

Beispiel. Einer sei 100000 Rthlr. schuldig. Diese Schuld wollte er mit 100 Rthlr. ausser der Zinse auf Zinse, noch mit einer jährlichen Zulage von 5 Rthlr. abtragen. Wie viel Jahre gehören dazu, wenn die jährlichen Zinsen 5 Procent betragen.

Auflösung. Hier ist $x = 100000$ Rthlr.; $a = 100$ Rthlr.; $b = 5$ Rthlr.; $p : q = 20 : 21$; folglich ist, nach der Formel (168) $n =$

$$\frac{\text{Log.}\,(21.\,100000 - 20.\,100000 + 5.\,20) - \text{Log.}\,(100.\,21 - 100.\,20 + 5.\,20)}{\text{Log.}\,21 - \text{Log.}\,20}$$

$$= \frac{\text{Log.}\,100100 - \text{Log.}\,200}{\text{Log.}\,21 - \text{Log.}\,20} = \frac{5{,}0004341 - 2{,}3010300}{211893}$$

$= 127\frac{39}{100}$ Jahren.

In eben der Zeit könnte man also eine Million Thaler mit 1000 Rthlr. und 50 Rthlr. jährlicher Zulage, und 100 Million Rthlr. mit 100000 Rthlr. Kapital, und 5000 Rthlr. jährlicher Zulage u. s. w. abtragen.

170.

Aufgabe. Die Größe eines Kapitals nach einer gegebenen Zeit zu finden, vom dem jährlich eine gewisse Summe abgenommen wird.

Auflösung. Hier geht von dem Kapital eine geometrische Reihe ab, die einerlei ist, mit der, die in (166) addiret worden ist. Wenn also alles, wie vorhin, bleibt, so ist nach n Jahren

$$x = \frac{(aq - ap - bp)\left(\frac{q}{p}\right)^n + bp}{q - p} \quad \text{oder}$$

durch die Log. x =

$$\frac{\text{Log.}\,(aq - ap - bp) + n\,(\text{Log.}\,q - \text{Log.}\,p) + bp.}{q - p.}$$

171.

171.

Aufgabe. Wenn ich 1000 Rthlr. zu 5 Procent Zinse auf Zinse gebe, und jährlich 30 Rthlr. abnehme. Was werden diese 1000 Rthlr. nach 10 Jahren werth sein?

Hier ist a = 1000; b = 30 Rthlr.; p : q = 20 : 21; n = 10. Folglich ist Log. x =

$$\frac{\text{Log.}(21000 - 20000 - 600) + 10(\text{L.}21 - \text{L.}20) + 600}{21 - 20.}$$

Demnach ist Log. x = 2. 8139530 = 651, 56 + 600 = 1251, 56 Rthlr. nach 10 Jahren.

172.

Ist in der Formel bp größer als (aq — ap), so verschwindet das Kapital, oder x wird = 0. Das heißt, wenn man mehr von dem Kapital abnimmt, als die jährlichen Zinsen betragen, so muß das Kapital am Ende verschwinden, oder = 0 werden. Wann dieses geschieht, erfährt man, wenn aus der Formel (170) der Werth von n gesucht wird, und allenthalben, wo x in der Formel vorkommt, = 0 gesetzt wird. Z. B.

$$\left(\frac{q}{p}\right)^n = \frac{qx - px - bp}{aq - ap - bp} = \frac{-bp}{aq - ap - bp};$$

oder durch die Logarithmen ausgedruckt:

n (Log.

$n(\text{Log.}q - \text{Log.}p) = \text{Log.} - bp - \text{Log.}(aq - ap - bp)$

und daher $n = \dfrac{\text{Log.}(-bp) - \text{Log.}(aq - ap - bp)}{\text{Log.}q - \text{Log.}p}$.

173.

Aufgabe. Einer hat ein kleines Vermögen von 1000 Rthlr. zu 5 Procent jährlich ausstehen. Die gewöhnlichen Zinsen geben ihm jährlich 50 Rthlr. Er will aber gerne eine Revenüe von 100 Rthlr. haben. Wie viel Jahre kann er diese Rente ziehen?

Auflösung. Hier ist $a = 1000$; $b = 100$; $p : q = 20 : 21$; also $n =$

$$\frac{\text{Log.}(-2000) - \text{Log.}(21000 - 20000 - 2000)}{\text{Log.}21 - \text{Log.}20}$$

$= 14,206$ Jahren, oder 14 Jahr, $2\frac{472}{1000}$ Monat.

174.

Wenn man in (170) gefundenen Formel für $x = 0$ setzt, so ist

$$0 = (aq - ap - bp)\left(\frac{q}{p}\right)^n + bp.$$

Multiplicire den Factor $aq - ap - bp$ mit $\left(\frac{q}{p}\right)^n$

so ist

0 =

$$b = \frac{aq^{n+1} - apq^n - bpq^n + bp}{p^n}, \text{ und}$$

$$\frac{aq^{n+1} - apq^n}{p^n} = \frac{bpq^n}{p^n} - bp, \text{ oder}$$

$$\frac{aq^{n+1} - apq^n}{p^n} = \frac{bpq^n - bp^{n+1}}{p^n} \text{ oder}$$

$$aq^{n+1} - apq^n = (pq^n - p^{n+1})\,b; \text{ folglich}$$

$$b = \frac{aq^{n+1} - apq^n}{pq^n - p^{n+1}} = \frac{(aq - ap)q^n}{(q^n - p^n)p}.$$

Letzterer Ausdruck giebt den Werth von b, wenn a, p : q, und n, bekannt ist.

175.

Aufgabe. Einer hat 30000 M℔ in Vermögen, die er zu 5 Procent jährliche Zinsen weggiebt. Der Wahrscheinlichkeit nach, hat er noch 6 Jahre zu leben. Wie viel wird die jährliche Rente betragen, die er jedes Jahr hindurch zu ziehen hat?

Auflö-

Auflösung. Nach der so eben gefundenen Formel ist $a = 30000$ Rthlr.; $p : q = 20 : 21$ und $n = 20$. Demnach ist

$$b = \frac{(30000 . 21 - 30000 . 20) 21^6}{(21^6 - 20^6) 20} = \frac{30000 . 21^6}{(21^6 - 20^6) 20}$$

Oder in Logarithmen, giebt

$$\text{Log. } b = \text{Log. } 30000 + 6 \text{ Log. } 21 - \text{Log. } 20 + \text{Log. } (21^6 - 20^6).$$

Nun ist Log. 30,000 = 4,4771213
Und 6 Log. 21 = 7,9333158

12,4104371

Und

Log. $(21^6 - 20^6)$ = Log. 21766121 = 7,3377810.
Dazu Log. 20 = 1,3010300

8,6388110
Abgezogen von 12,4104371

Log. 3,7716261

5910½ Rthlr.

176.

Aus $b = \frac{a q^{n+1} - a p q^n}{(q^n - p^n) p}$ läßt sich auch a, oder das Kapital finden, wenn die jährlich zu ziehende Rente, für eine bestimmte Zeit, bekannt ist.

Denn

Denn man multiplicire beiderseits mit $(q^n - p^n)p$, so ist

$$b p (q^n - p^n) = a (q^{n+1} - p q^n) \text{ und}$$

auf beiden Seiten mit $q^{n+1} - p q^n$ getheilt, giebt

$$a = \frac{b p (q^n - p^n)}{q^{n+1} - p q^n} = \frac{b p (q^n - p^n)}{(q - p) q^n}$$

Oder in Logarithmen ausgedruckt, giebt Log. a = Log. bp + Log. $(q^n - p^n)$ — Log. $(q - p)$ + n Log. q. Das vorige Beispiel läßt sich hier bequem anwenden.

177.

Das 8te Beispiel, welches sich auf der 344sten Seite des ersten Bandes befindet, läßt sich allgemein so vortragen: Eine Größe C soll vermehrt werden, daß sie zu dem jährigen Wachsthum das beständige Verhältniß m : r behält; der Wachsthum soll immer wieder in eben dem Verhältniß vermehrt, und jährlich zu der Größe addirt werden. Zu gleicher Zeit soll aber auch die Größe C in dem beständigen Verhältniß von m : ſ abnehmen. (Siehe Chaſſet de Florencourt Abhandl. aus der juriſtiſchen und politiſchen Rechenkunſt.)

Die Vermehrung ergiebt sich aus

$m : r = C : \frac{r}{m} C$ und die

Verminderung aus

$m : s = C : \frac{s}{m} C.$

Also die gänzliche Aenderung $= \frac{r}{m} C - \frac{s}{m} C$

$= \left(\frac{r - s}{m}\right) C.$ Dazu addire man C, als den ersten Zustand, nach einem Jahre, so ist

$\left(\frac{r - s}{m}\right) C + C = \left(\frac{r - s}{m} + 1\right) C =$

$\left(\frac{r + m - s}{m}\right) C.$ Nach zwei Jahren ist der Ausdruck $\left(\frac{r + m - s}{m}\right)^2 C$; also nach n Jahren

$\left(\frac{r + m - s}{m}\right)^n C = x.$ Um den Werth von x, durch die Logarithmen zu bestimmen, so ist

$$\text{Log. } x = n \text{ Log. } \left(\frac{r + m - s}{m}\right) + \text{Log. } C.$$

Und

Und n ist $= \frac{\text{Log. } x - \text{Log. } C}{\text{Log.}\left(\frac{r + m - f}{m}\right)}$, wenn nämlich x bekannt ist, und man n, oder die Zahl der Jahre, finden soll.

Soll $x = pC$ sein; so ist

$$n = \frac{\text{Log. } p + \text{Log. } C - \text{Log. } C}{\text{Log.}\left(\frac{m + r - f}{m}\right)} = \frac{\text{Log. } p}{\text{Log.}\left(\frac{m + r - f}{m}\right)}$$

178.

Um diese drei Formeln anzuwenden, so bedeute C die Bevölkerung eines Orts oder eines ganzen Landes; m : r das Verhältniß der jetzt Lebenden, zu denen, die jährlich geboren werden; m : f, das Verhältniß der jetzt Lebenden, zu denen, die jählich sterben. Nach der ersten Formel findet man, wie viel die Bevölkerung zu- oder abgenommen hat, nach einer gegebenen Zahl von Jahren. Die zweite Formel giebt die Zeit, oder die Jahre an, wann die Größe bekannt ist, um welche die Bevölkerung gewonnen oder verlohren hat, und die dritte Formel giebt die Auflösung an, wie viel Jahre dazu gehören, wenn die Volksmenge sich verdoppelt oder vervielfachet hat. Setzt man für p = 2, so erhält man die doppelte, p = 3 u. s. w. gesetzt, giebt die dreifache Bevölkerung u. s. w.

Bei-

Beispiel. Es sei $m : r = 250 : 10$; und $m : s - 250 : 8$; so geschieht die Verdoppelung in $86\frac{99}{100}$ Jahren.

Denn $n = \frac{\text{Log. } 2}{\text{Log. } (\frac{126}{125})} = \frac{0,3010300}{0,0034605} =$ 86, 99 Jahren.

Also ein Staat, worin auf 25 Lebende eine Geburt fällt, und von 250 Lebenden 8 sterben, wird in 87 Jahren eine doppelte Bevölkerung haben.

Soll die Bevölkerung wachsen, so muß immer r größer als s. sein; ist $r = s$, so nimmt der Staat weder zu noch ab; wird aber r kleiner als s, so ist die Bevölkerung im Abnehmen.

Von den cubischen Gleichungen.

179.

Eine Gleichung, welche die unbekannte Größe zur dritten Potenz bei sich führet, heißt allgemein eine cubische Gleichung. Kommt die unbekannte Größe zur dritten Potenz allein vor, so heißt sie eine reine cubische Gleichung, zu deren Auflösung weiter nichts nöthig ist, als die Ausziehung der Cubicwurzel.

Sie läßt sich so vorstellen:

$$x^3 = a; \text{ also } x = \sqrt[3]{a}.$$

Die

Die unbekannte Größe kann auch noch andere bekannte bei sich führen, ohne daß sie dadurch aufhöret, eine reine cubische Gleichung zu sein. Z. B.

$ax^3 + m = bn - d$. Hier ist

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{bn - d - m}{a}\right)}$$

180.

Bei den quadratischen Gleichungen hat man gesehen, daß jede zwei Werthe hat, nämlich einen positiven, und einen negativen. Man kann also leicht vermuthen, daß bei einer cubischen Gleichung drei Werthe vorkommen werden. Denn es sei $x^3 = 8$; so ist der eine, und zwar der positive Werth, $= 2$. Denn $2^3 = 8$. Aber wenn $x = 2$ ist, so muß $x - 2 = 0$ sein. Eben dies gilt auch für $x^3 - 8$. So gut nun 2 ein Factor von 8 ist, eben so gut muß auch $x - 2$ ein Factor von $x^3 - 8$ sein. Ist dieses, welches leicht in die Augen fällt, so muß sich $x^3 - 8$ durch $x - 2$, ohne Bruch theilen lassen. Thut man dieses, so giebt der Quotient eine quadratische Gleichung, die aber ebenfalls $= 0$ sein muß.

Denn

$$
\begin{array}{llllll}
\text{Denn } x - 2 \big) & x^3 & - \; 8 \big(& x^2 + 2x + 4 & & \\
& x^3 & - \; 2x^2 & & & \\
& & + & & & \\
\hline
& & + \; 2x^2 & - \; 8 & & \\
& & + \; 2x^2 & - \; 4x & & \\
& & - & + & & \\
\hline
& & & + \; 4x & - \; 8 & \\
& & & + \; 4x & - \; 8 &
\end{array}
$$

181.

Aus dem so eben gefundenen Quotienten, finde man nach dem vorhergehenden, indem die unvollständige quadratische Gleichung aufgelöset wird, den Werth von x.

$$x^2 + 2x = -4$$

oder

$$x^2 + 2x + 1 = -3$$

also $\sqrt{\ }$

$$x + 1 = \pm \sqrt{-3}$$

folglich

$$x = -1 \pm \sqrt{-3}.$$

Der eine Werth ist demnach $-1 + \sqrt{-3}$, und der andere $-1 - \sqrt{-3}$. Beide sind zwar imaginär, müssen aber doch, wenn sie auf die dritte Potenz gebracht werden, die Zahl 8 geben.

Denn

Denn
$$\begin{array}{llll}
-1 & + & \surd-3 & \\
-1 & + & \surd-3 & \\
\hline
+1 & - & \surd-3 & \\
 & - & \surd-3 & -3 \\
\hline
-2 & - & 2\surd-3 & \\
-1 & + & \surd-3 & \\
\hline
+2 & + & 2\surd-3 & \\
 & - & 2\surd-2 & +2.3 \\
\hline
+2 & + & 2.3 & = 8.
\end{array}$$

Eben dies kommt auch heraus, wenn man den zweiten Werth zum Cubus macht. Denn

$$\begin{array}{llll}
-1 & - & \surd-3 & \\
-1 & - & \surd-3 & \\
\hline
+1 & + & \surd-3 & \\
 & + & \surd-3 & -3 \\
\hline
-2 & + & 2\surd-3 & \\
-1 & - & \surd-3 & \\
\hline
+2 & - & 2\surd-3 & \\
 & + & 2\surd-3 & +6 \\
\hline
+2 & + & 6 & = 8.
\end{array}$$

Hieraus erhellet also, daß jede cubische Gleichung drei Werthe hat, und wenn man den einen oder den andern gefunden, die beiden andern

dern sich durch den so eben gezeigten Weg finden lassen.

182.

Unter einer vollständigen cubischen Gleichung versteht man eine solche, worin, ausser der dritten Potenz, die zweite und auch die erste Potenz der unbekannten Größe mit einer bekannten vorkommt. Z. B.

$$x^3 \pm ax^2 \pm bx = \pm c.$$

Diese Gleichung läßt sich auf Null bringen, wenn man den Ausdruck rechter Hand auf die linke bringt; also in unserer Gleichung

$$x^3 \pm ax^2 \pm bx \pm c = 0.$$

183.

Nun giebt es zwei Wege eine Gleichung dieser Art aufzulösen, oder den Werth von x zu bestimmen. Der eine Weg ist, daß man angiebt, auf welche Art die unbekannte Größe, oder vielmehr die drei unbekannten Werthe in der Gleichung selbst enthalten sind. Der andere Weg besteht darin, eine allgemeine Auflösung anzugeben, die sich vorzüglich auf der Zusammensetzung des Cubus, einer zweitheiligen Wurzel, gründet. Von beiden soll hier das Nöthige gesagt werden.

184.

Aus (180. 181) ist bekannt, daß jede cubische Gleichung drei Werthe hat. Diese drei Werthe

will

will ich durch p, q und r angeben. Oder $x = p$; $x = q$, und $x = r$ setzen. Hier wären die drei Werthe positiv. Man bringe sie auf o, welches geschieht, wenn man p, q und r, von x abzieht. Hat man dieses gethan, so multiplicire man sie durch einander, wie folget:

$$\begin{array}{l}
x - p = 0 \\
x - q = 0 \\
\hline
x^2 - px \\
\quad - px + pq \\
\hline
x^2 - (p+q)x + pq = 0 \\
x - r = 0 \\
\hline
x^3 - (p+q)x^2 + pqx \\
\quad - r\,x^2 + (pr+rq)x + pqr \\
\hline
x^3 - (p+q+r)x^2 + (pq+pr+rq)x + pqr = 0.
\end{array}$$

185.

Die gefundene Gleichung muß, da die drei Factores o sind, ebenfalls = o sein, und zugleich zeigt sie, daß im zweiten Gliede die Summe der drei Werthe, im dritten, die Summe von zwei und zwei Producten der drei Wurzeln, und im letzten Gliede das Product aller drei Wurzeln vorkommen. Das letzte Glied giebt also auf eine bequeme Art den Weg an, wie die drei Werthe zu finden sind. Denn man braucht dieses Product nur in seine Factores zu zerlegen, und diese nach und nach für x setzen. Kommt man dadurch auf eine Gleichung, die = o ist, so muß der ange-

 nommene

nommene Factor eine Wurzel, und zwar eine ratio-nale, von der gegebenen Gleichung, sein.

186.

Es sei folgende vollständige cubische Gleichung gegeben:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$$

In dem letzten Gliede, nämlich 6, müssen die drei Werthe von x, wenn sie rational sind, enthalten sein; oder die drei Werthe mit einander multipliciret, müssen das Product $= 6$, geben. Nun sind die Theiler von $6 = 1, 2, 3,$ und 6. Man setze dem-nach x sei $= 1$; so ist $x^2 = 1$, und x^3 ebenfalls $= 1$. Also

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 = 1 - 6 + 11 - 6,$$

ebenfalls $= 0$. Es ist also $x = 1$ eine rationale Wurzel. Um die beiden andern zu finden, so theile man $x - 1$ in $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

$$\begin{array}{r|rrrr|l}
x - 1 & x^3 & - 6x^2 & + 11x & - 6 & x^2 - 5x + 6 \\
 & x^3 & - x^2 & & & \\
\hline
 & & - 5x^2 & + 11x & & \\
 & & - 5x^2 & + 5x & & \\
 & & + & - & & \\
\hline
 & & & + 6x & - 6 & \\
 & & & + 6x & - 6 & \\
 & & & - & + & \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Die-

Dieser Quotient ist = o, und zugleich eine unvollständige quadratische Gleichung. Diese wird auf die bekannte Weise aufgelöset. Also

$$x^2 - 5x = -6$$

$$x^2 - 5x + \frac{25}{4} = +\frac{1}{4} \quad \sqrt{}$$

$$x - \frac{5}{2} = \pm\frac{1}{2}.$$

Demnach $x = \pm\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{6}{2}$, und $\frac{4}{2}$ $= 3$, und 2.

Die beiden andern Werthe sind daher 3 und 2, und so wie der erste, positiv.

187.

Diese, hier erklärte Auflösung der cubischen Gleichung, findet so lange nur statt, so lange das erste Glied keinen Coefficienten bei sich hat. Ist dieses aber, so muß man bekantlich die ganze Gleichung mit diesem Coefficienten theilen, wodurch also die Coefficientender andern GliederBrüche werden. Um nun diese Schwierigkeit auszuweichen, muß man diese Gleichung in eine andere verwandeln, wovon die Coefficienten aus ganzen Zahlen bestehen Ist dieses geschehen, so läßt sich obige Auflösungs-Methode wieder anwenden.

188.

Es sei folgende cubische Gleichung gegeben:

$$6x^3 - 11x^3 + 6x - 1 = 0.$$

Man dividire mit 6, so ist

$$x^3 - \frac{11}{6}x^2 + x - \frac{1}{6} = 0.$$

 Um

Um diese Gleichung nun in eine andere, davon die Coefficienten ganze Zahlen sind, zu verwandeln, so setze man $x = \frac{1}{6}y$; mithin $x^2 = \frac{1}{36}y^2$, und $x^3 = \frac{1}{216}y^3$. Demnach ist

$$x^3 - \frac{11}{6}x^2 + x - \frac{1}{6} = 0 =$$
$$\frac{1}{216}y^3 - \frac{11}{216}y^2 + \frac{1}{6}y - \frac{1}{6} = 0.$$

Diese Gleichung multiplicire man mit 216, so kömmt

$$y^3 - 11y^2 + 36y - 36 = 0.$$

Nun zerlege man 36, als das letzte Glied der Gleichung, in seine Factores, die eine beträchtliche Anzahl ausmachen. Indessen probire man mit folgenden:

$$\begin{array}{llll} y = 1; & y = 2; & y = 3; & \text{so ist} \\ y^2 = 1; & = 4 & = 8 & \\ y^3 = 1; & = 9 & = 27 & \text{u. s. w.} \end{array}$$

Nimmt man demnach $y = 1$; so ist

$$y^3 = 1;\ 11y^2 = 11;\ 36y = 36;\ \text{also}$$
$$y^3 - 11y^2 + 36y - 36 = 1 - 11 + 36 - 36$$
$$= -10;$$

folglich $y = 1$, keine Wurzel.

Nun sei $y = 2$; so ist $y^3 = 8$; $11y^2 = 44$, und $36y = 72$; also

$$8 - 44 + 72 - 36 = 0.$$

Da hier die Gleichung aufgeht, so ist $y = 2$, eine Wurzel. Nun war $x = \frac{1}{6}y$; also ist $x = \frac{1}{3}$ eine Wurzel von der ersten Gleichung. Um die beiden andern zu finden, so theile man

$$6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 = 0 \text{ mit } x - \tfrac{1}{3}.$$

Das ist:

$x - \frac{1}{3}$

$$
\begin{array}{l}
x - \tfrac{1}{3} \big) \, 6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 \, \big(\, 6x^2 - 9x + 3 = 0 \\
\qquad 6x^3 - 2x^2 \\
\qquad \qquad \; + \\
\hline
\qquad \qquad - 9x^2 + 6x \\
\qquad \qquad - 9x^2 + 3x \\
\qquad \qquad + \qquad - \\
\hline
\qquad \qquad \qquad \qquad + 3x - 1 \\
\qquad \qquad \qquad \qquad + \;\; x - 1 \\
\hline
\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 0
\end{array}
$$

Löset man diese Gleichung auf, so kommen für die beiden andern Werthe 1, und $\frac{1}{2}$. Diese Gleichung hat ebenfalls drei positive Werthe.

189.

Vergleicht man die Zeichen, in den beiden letztern Gleichungen, so wird man finden, daß sie abwechselnd sind; woraus man also schließt, daß die drei Werthe der Gleichung positiv sind. Hat die Gleichung nicht verschiedene, sondern dieselben Zeichen, so deutet dieses auf drei negative Werthe. Wird die Folge der Zeichen unterbrochen, so enthält sie positive und negative Werthe.

190.

Was den zweiten Weg betrift, um eine cubische Gleichung aufzulösen, so besteht dieser im Gebrauche und der Anwendung der Regel des Cardani, oder des Scipio Ferrei.

Es

Es sei $x^3 = fx + g$. Man setze $x = a + b$; so ist

$x^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab\,(a+b)$ oder da $a + b = x$ ist, so ist $x^3 = a^3 + b^3 + 3abx$. Von dieser Gleichung weiß man, daß $a + b$ eine Wurzel $= x$ ist. Ferner sei $a^3 = p$, und $b^3 = q$; so ist $ab = \sqrt[3]{pq}$: und wir haben $a^3 + b^3 + 3abx = p + q + 3\sqrt[3]{pq}\,x = x^3$. Nun setze man $3\sqrt[3]{pq} = f$; so ist $27pq = f^3$; mithin $pq = \frac{1}{27}f^3$; folglich $4pq = \frac{4}{27}f^3$. Ferner: $p + q = g$; also das Quadrat von beiden $= p^2 + 2pq + q^2 = g^2$. Von diesem letztern ziehe man $4pq = \frac{4}{27}f^3$ ab, so ist

$$p^2 - 2pq + q^2 = g^2 - \tfrac{4}{27}f^3$$

Hieraus ——————————— $\sqrt{}$

ist $p - q = \sqrt{(g^2 - \frac{4}{27}f^3)}$

Aber $p + q = g$ addirt

giebt $2p = g + \sqrt{(g^2 - \frac{4}{27}f^3)}$;

und daher $p = \dfrac{g + \sqrt{(g^2 - \frac{4}{27}f^3)}}{2}$.

Subtrahirt man die beiden Ausdrücke, so ist

$$q = \frac{g - \sqrt{(g^2 - \frac{4}{27}f^3)}}{2}$$

Nun

Nun war $a^3 = p$, und $q = b^3$; also $a = \sqrt[3]{p}$, und $b = \sqrt[3]{q}$; mithin $\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$

$$= a + b = x = \sqrt[3]{\left(\frac{g + \sqrt{(g^2 - \frac{4}{27}f^3)}}{2}\right)}$$

$$+ \sqrt[3]{\left(\frac{g - \sqrt{(g^2 - \frac{4}{27}f^3)}}{2}\right)}.$$

191.

Um den Gebrauch der so eben gefundenen Formel besser einzusehen, so sei folgende cubische Gleichung gegeben:

$$x^3 = 6x + 9.$$

Hier ist $g = 9$, und $f = 6$; also $g^2 = 81$, und $f^3 = 216$. Mithin $\frac{4}{27}f^3 = 32$. Daher

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{9 + \sqrt{(81 - 32)}}{2}\right)}$$

$$+ \sqrt[3]{\left(\frac{9 - \sqrt{(81 - 32)}}{2}\right)}$$

$$= \sqrt[3]{\left(\frac{9 + 7}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{9 - 7}{2}\right)}$$

$$= \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 2 + 1 = 3 = x.$$

Demnach ist 3 eine Wurzel der gegebenen Gleichung.

Um die beiden andern Wurzeln zu finden, muß man die gegebene Gleichung $x^3 = 6x + 9$ auf Null bringen, und dann selbige mit $x - 3$ theilen. Der Quotient giebt eine quadratische Gleichung, welche die beiden andern Werthe enthält.

192.

Die Gleichung $x^3 = fx + g$ ist, wie man sieht, keine vollständige cubische Gleichung; denn es fehlt die zweite Potenz von x. Soll also diese Cardanische Formel allgemein für jede cubische Gleichung brauchbar sein, so muß man jede vollständige cubische Gleichung in eine solche, worin das zweite Glied fehlt, verwandeln können; und das geschieht, indem man das zweite Glied mit 3 theilet, und diesen dritten Theil mit dem Zeichen des zweiten Gliedes zu x zuleget; diese alsdann $= y$ setzt: so wird, wenn alles gehörig substituiret wird, das zweite Glied, oder die zweite Potenz von x, aus der Gleichung wegfallen.

193.

Aufgabe. Aus der Gleichung

$$x^3 - 6x^2 + 13x - 12 = 0$$

das zweite Glied wegzuschaffen.

Auflösung. Dividire den Coefficienten des zweiten Gliedes mit 3, und setze ihn mit dem Zeichen des zweiten Gliedes zu x; alsdann setze diesen Ausdruck $= y$, so geht das zweite Glied, wenn alles gehörig geordnet wird, aus der Gleichung weg.

Dem:

Demnach $x - 2 = y$; also $x = y + 2$, und $x^2 = y^2 + 4y + 4$, und

$$x^3 = y^3 + 6y^2 + 12y + 8.$$

$$\begin{aligned} \text{Folglich} \quad x^3 &= y^3 + 6y^2 + 12y + 8 \\ -\ 6x^2 &= -6y^2 - 24y - 24 \\ +\ 13x &= +13y + 26 \\ -\ 12 &= -12 \end{aligned}$$

Demnach $x^3 - 6x^2 + 12x - 10 = y^3 + y - 2 = 0$,

Letztere Gleichung kann man also mit

$$x^3 = fx + g = 0$$

vergleichen.

194.

Die gefundene Gleichung $y^3 + y - 2 = 0$ ist $= y^3 = -y + 2$. Hier ist $-1 = f$, und $2 = g$. Also $g^2 = 4$, und $f^3 = -1$. Demnach $\frac{4}{27} f^3 = -\frac{4}{27}$. Folglich

$$y = \sqrt[3]{\left(\frac{2 + \sqrt{(4 + \frac{4}{27})}}{2}\right)}$$

$$+ \sqrt[3]{\left(\frac{2 - \sqrt{(4 + \frac{4}{27})}}{2}\right)}$$

Dazu lege man 2; so hat man den Werth von x.

195.

195.

Es sei ferner folgende vollständige cubische Gleichung gegeben, aus welcher das zweite Glied weggeschaft werden soll.

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Es ist also $x + \frac{1}{3}a = y$; mithin $x = y - \frac{1}{3}a$, und $x^2 = y^2 - \frac{2}{3}ay + \frac{1}{9}a^2$, und

$$x^3 = y^3 - ay^2 + \frac{1}{3}a^2y - \frac{1}{27}a^3.$$

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Also} & x^3 & = & y^3 - ay^2 + \frac{1}{3}a^2y - \frac{1}{27}a^3 \\
& + ax^2 & = & \quad + ay^2 - \frac{2}{3}a^2y + \frac{1}{9}a^3 \\
& + bx & = & \qquad\qquad + by - \frac{1}{3}ab \\
& + c & & \qquad\qquad\qquad + c \\
\end{array}$$

Daher $x^3 + ax^2 + bx + c = y^3 - (\frac{1}{3}a^2 + b)y + \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c = 0.$

Hier ist also $f = \frac{1}{3}a^2 + b$, und $g = -\frac{2}{27}a^3 + \frac{1}{3}ab + c$.

Etliche hieher gehörige Aufgaben, die sowohl reine, als vollständige cubische Gleichungen enthalten.

196.

1ste Aufgabe. Es werden drei Zahlen gesucht, die in einer geometrischen Progreßion stehen, und zum Exponenten 2 haben. Quadrirt man die dritte, und multiplicirt sie mit der ersten, so kommt zum Producte 432. Was sind es für Zahlen?

Auf-

Auflösung. Die erste Zahl sei x, so ist die zweite = 2 x, und die dritte = 4 x. Nun ist $(4x)^2 = 16x^2$ multiplicirt mit x, ist $= 16x^3 = 432$. Also $x^3 = 27$. Folglich

$$x = 3.$$

Daher die zweite = 6, und die dritte = 12.

197.

2te Aufgabe. Etliche Kaufleute machen eine Gesellschaft, und jeder legt hundertmal so viel ein, als ihrer sind, schicken damit einen Factor nach Amsterdam, der gewinnt allemal mit 100 Gulden zweimal so viel, als ihrer sind, kommt wieder zurück, und der Gewinn beträgt 2662 fl. Wie viel sind der Kaufleute gewesen?

Auflösung. Der Kaufleute waren x. Jeder legt 100 x fl. ein; also alle zusammen $100x^2$ fl. Mit diesen gewinnt der Factor auf jede 100 fl., 2 x fl. Folglich gewinnt er auf $100x^2$ fl., $2x^3$ fl. Also

$$2x^3 = 2662 \text{ fl. oder}$$
$$x^3 = 1331 \text{ daher}$$
$$x = \sqrt[3]{1331} = 11.$$

198.

3te Aufgabe. Eine Bäuerin vertauscht Enten gegen Hühner, und giebt allemal zwei Enten für drei Hühner. Die Hühner legen Eier, jede $\frac{1}{3}$ so viel, als der Hühner sind. Mit denselben geht sie zu Markte, giebt allemal 9 Eier für so viel Pfennige, als ein Huhn

Huhn hat Eier gelegt, und löset 72 Pfennige. Wie viel Enten hat nun die Bäuerin vertauscht?

Auflösung. x Enten. Der Hühner waren also $\frac{3}{2}x$. Ein Huhn legt $\frac{1}{3}$. $\frac{3}{2}x$ Eier $= \frac{1}{2}x^2$. Also die Hühner zusammen legen $\frac{3}{4}x^2$ Eier. Nun kosten 9 Eier $\frac{1}{2}x$ ₰; mithin $\frac{3}{4}x^2$ Eier kommen $\frac{1}{24}x^3$ ₰. Daher $\frac{1}{24}x^3 = 72$; oder $x^3 = 1728$.

$$\text{Also } x = \sqrt[3]{1728} = 12.$$

199.

Vollständige cubische Gleichung.

4te Aufgabe. Etliche Personen fangen einen Handel an, ein jeder von ihnen giebt dazu zehnmal so viel Thaler, als der Personen sind, und gewinnen mit jedem hundert Thaler, 6 Thaler mehr, als ihrer sind. Ihr Gewinn beträgt nun 392 Thaler. Wie viel sind der Personen gewesen?

Auflösung. Der Personen sind x gewesen. Jeder legt $10x$ Thaler ein, zusammen also $10x^2$ Thlr. Mit 100 Thaler gewinnen sie $x + 6$ Thaler; folglich mit $10x^2$,

$$\frac{10x^3 + 60x^2}{100} = \frac{x^3 + 6x^2}{10} = 392 \text{ Thlr.}$$

Demnach $x^3 + 6x^2 = 3920$, oder

$$x^3 + 6x^2 - 3920 = 0.$$

Nun

Nun zerlege man 3920 in Factores; da aber die Zahl etwas zu groß ist, und sie sich durch 8 (wovon $\sqrt[3]{} = 2$ ist) theilen läßt, so setze man $x = 2y$; folglich $x^2 = 4y^2$, und $x^3 = 8y^3$; mithin wird die Gleichung $x^3 + 6x^2 - 3920$ in folgende verwandelt: $8y^3 + 24y^2 - 3920$, welche sich bequem durch 8 theilen läßt. Demnach ist

$$y^3 + 3y^2 - 490 = 0.$$

Von 490 ist 7 ein Theiler; also

$$7^3 + 3 \cdot 7^2 - 490 = 343 + 147 - 490 = 0;$$

folglich ist $y = 7$; mithin $2y = x = 14$.

Dividirt man demnach $x^3 + 6x^2 - 3920$ durch $x - 14$, so erhält man zum Quotienten $= x^2 + 20x + 280 = 0$. Hieraus die $\sqrt{}$, ist $x = -10 \pm \sqrt{-180}$. Die beiden andern Wurzel sind demnach imaginär.

200.

5te Aufgabe. Einige Kaufleute haben zusammen ein Kapital von 8240 Thaler. Dazu legt ein Jeder noch vierzig mal so viel Thaler als der Personen sind. Mit dieser ganzen Summe gewinnen sie so viel Procent, als der Personen sind. Hierauf theilen sie den Gewinn, und da findet es sich, nachdem ein Jeder zehnmal so viel Thaler genommen, als ihrer sind, daß noch 224 Thaler übrig bleiben. Wie viel sind der Personen gewesen?

Auflösung. Der Personen waren x. Jeder legt 40 x zu dem Kapital zu; also die x Personen $= 40\,x^2$. Das ganze ist demnach $8240 + 40\,x^2$. Mit diesem gewinnen sie auf 100 so viel als Personen sind; folglich ist der Gewinnst $= \frac{8240\,x + 40\,x^3}{100}$

$= \frac{824\,x + 4\,x^3}{10}$. Davon nimmt Jeder 10 x, also alle $= 10\,x^2$. Daher ist

$$\frac{824\,x + 4\,x^3}{10} - 10\,x^2 = 224.$$

Oder $824\,x + 4\,x^3 - 100\,x^2 = 2240$; oder

$$\frac{4x^3 - 100x^2 + 824x - 2240 = 0}{x^3 - 25x^2 + 206x - 560 = 0.} : 4$$

Von 560 ist, außer vielen andern Zahlen, 7, 8, und 10, ein Theiler. Es sei demnach $x = 7$; so ist $x^2 = 49$, und $x^3 = 343$. Folglich

$$343 - 1225 + 1442 - 560 = 0.$$

Nun theile man die gefundene Gleichung mit $x - 7$, um die beiden andern Werthe zu finden. Denn die Gleichung muß, wegen der Abwechselung der Zeichen, drei positive Werthe haben.

$$
\begin{array}{lrrrl}
x - 7)\,x^3 & - 25x^2 & + 206x & - 560 & (x^2 - 18x + 80 = 0 \\
x^3 & - 7x^2 & & & \\
 & + & & & \\
\hline
 & - 18x^2 & + 206x & & \\
 & - 18x^2 & + 126x & & \\
 & + & - & & \\
\hline
 & & + 80x & - 560 & \\
 & & + 80x & + 560 & \\
 & & - & - & \\
\hline
 & & 0 & 0 &
\end{array}
$$

Alſo

Also ist $x^2 - 18x = -80$

$$x^2 - 18x + 81 = +1$$

$$x - 9 = 1$$

$$x = 9 + 1 = 10; \text{ oder } 9 - 1 = 8.$$

Folglich sind die beiden andern Werthe, 10 und 8. Also alle drei, 7, 8, und 10.

Gleichungen der vierten Potenz.

201.

Diese Gleichungen heißen auch biquadratische. Man unterscheidet drei Arten derselben. Die erste begreift solche in sich, wo die unbekannte Größe zur vierten Potenz allein, oder auch mit bekannten Größen vorkömmt. Diese sind also reine biquadratische Gleichungen. Um diese aufzulösen, braucht man weiter nichts, als die Wurzel der vierten Potenz auszuziehen. Diese ist aber einerlei mit der doppelten Quadratwurzel, und hieraus erhellet schon, daß eine Gleichung vom vierten Grade, vier Werthe haben müsse; weil eine Gleichung vom zweiten Grade zwei derselben hat. Allgemein läßt sich also jede biquadratische Gleichung so darstellen.

$$x^4 = m; \text{ also } x = \sqrt[4]{m} = \sqrt{\sqrt{m}}.$$

202.

Die zweite Art enthält eine Gleichung, worin x zwar zur vierten Potenz vorkommt, wo aber das

zweite

zweite Glied x zur zweiten Potenz in sich faßt. Die noch übrigen Glieder enthalten bekannte Größen. So eine Gleichung läßt sich auf eine unvollständige quadratische Gleichung zurückführen, wenn man für $x^2 = y$ setzt. Es sei folgende Gleichung dieser Art gegeben:

$$x^4 - ax^2 = m.$$

Man setze $x^2 = y$; so ist $x^4 = y^2$; also

$$x^4 - ax^2 = m = y^2 - ay = m. \text{ Demnach}$$

$$y^2 - ay + \tfrac{1}{4}aa = m + \tfrac{1}{4}aa = \frac{4m + a^2}{4}$$

$$\text{und } y = + \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{4m + a^2}{2}\right)} = x^2.$$

Zieht man daher nochmal die Quadratwurzel diesem gefundenen Ausdrucke aus, so ergiebt sich der Werth von x.

203.

Die dritte Art enthält die vollständigen biquadratischen Gleichungen, die sich allgemein auf folgende Art darstellen lassen.

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0.$$

Hier gehen die Glieder ganz nach der Ordnung der Potenzen fort. Und da ich schon in den vorhergehenden Paragraphen gezeigt habe, daß eine solche Gleichung vier Wurzel habe, so läßt sich, wenn man für x vier verschiedene Werthe annimmt, und sie nach einander multiplicirt, nachdem sie vorher auf 0 gebracht worden sind, die

Eigenschaft einer allgemeinen biquadratischen Gleichung, eben so erläutern, wie ich dies mit einer vollständigen cubischen Gleichung, im vorigen gezeigt habe.

204.

Zu dem Ende setze man $x = p = q = r$ und $x = s$; so ist $x - p = 0$; $x - q = 0$; $x - r = 0$, und $x - s = 0$. Multipliciret man diese vier angenommenen Werthe mit einander, so ergiebt sich folgendes Product: $x^4 - (p + q + r + s)x^3 + (pq + pr + ps + qr + qs + rs)x^2 - (pqr + pqs + prs + qrs)x + pqrs = 0$. Das zweite Glied enthält demnach die Summe der vier Wurzeln, multiplicirt mit x^3; das dritte Glied enthält die Summe der Producte von zwei und zwei Wurzeln, multiplicirt in x^2; das vierte Glied enthält die Summe der Producte von drei und drei Wurzeln, multiplicirt in x; und das fünfte Glied enthält endlich das Product aller vier Wurzeln. Es trift also dasselbe Gesetz hier in der Verbindung der Wurzeln ein, was eben bei einer vollständigen cubischen Gleichung eintraf.

205.

Hat man nun eine biquadratische Gleichung dieser Art, so weiß man, daß das letzte Glied, das Product aller Wurzel enthält, die freilich positiv und negativ sein können, und die, wie ich im vorhergehenden gezeigt habe, aus der Folge der Zeichen müssen hergeleitet werden. Man zerlege also das Product des

letzten

letzten Gliedes in seine Factores, und setze diese nach und nach dem Werthe von x gleich. Giebt einer oder mehrerer derselben, gleich Null; so ist dieser Factor zugleich eine Wurzel der Gleichung. Dividirt man alsdann diesen auf Null gebrachten Werth, in die erste Gleichung, so giebt der Quotient eine cubische Gleichung, die, nach dem vorhergehenden, aufgelöset werden muß.

206.

Es sei folgende Gleichung gegeben:

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0.$$

Das letzte Glied dieser Gleichung ist 120. Daher sind folgende Factores in ganzen Zahlen zu bemerken: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, und 120. Nun setze man, x sei $= 2$; so ist $x^2 = 4$; $x^3 = 8$; und $x^4 = 16$. Folglich $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0 = 16 - 32 - 76 + 212 - 120 = 0$. Also ist $x = 2$ eine Wurzel. Nun theile man die Gleichung mit $x - 2$; so giebt der Quotient eine cubische Gleichung. Denn

$$x-2\,)\,x^4-4x^3-19x^2+106x-120\,(\,x^3-2x^2-23x+60$$

$$\begin{array}{l}
x^4-2x^3 \\
+\quad - \\
\hline
-2x^3-19x^2 \\
-2x^3+\ 4x^2 \\
+\quad - \\
\hline
\quad -23x^2+106x \\
\quad -23x^2+\ 46x \\
\quad +\quad - \\
\hline
\qquad +\ 60x-120 \\
\qquad +\ 60x-120 \\
\qquad -\quad + \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Demnach ist $x^3 - 2x^2 - 23x + 60 = 0$.

Von 60 ist 3 ein Factor. Es sei demnach $x = 3$; so ist $x^2 = 9$, und $x^3 = 27$. Also

$$27 - 18 - 69 + 60 = 0.$$

Daher ist auch 3 eine Wurzel. Nun theile man aufs neue die cubische Gleichung, mit $x - 3$; so ist der Quotient $= x^2 + x - 20 = 0$. Löst man diese quadratische Gleichung auf, so ist x entweder $= 4$, oder $= -5$. Also hat die gegebene Gleichung drei positive und eine negative Wurzel. Dieses stimmt auch mit der Folge der Zeichen überein. Denn zwei gleiche Zeichen folgen in der Gleichung auf einander.

207.

Die vorhergehende Verfahrungsart trift so lange zu, so lange das erste Glied keinen Coefficienten bei sich hat. Sobald aber dieser Fall eintrift, muß die ganze Gleichung mit dem Coefficienten getheilet worden, wodurch größtentheils Brüche entstehen, die, wenn man sich der leztern Methode bedienen will, nothwendig in eine andere Gleichung verwandelt werden muß, wovon das erste Glied bloß in 1 multipliciret, und die andern Glieder ganze Zahlen zu Coeffieienten haben müssen.

208.

Um dieses durch ein Beispiel zu erläutern, so sei folgende Gleichung gegeben:

$$18x^4 - 120x^3 + 294x^2 - 312x + 120 = 0.$$

In dieser Gleichung müssen, wie man aus den abwechselnden Zeichen sieht, vier positive Wurzeln vorkommen. Man dividire die ganze Gleichung mit 18, so ist

$$x^4 - 6\tfrac{2}{3}x^3 + 16\tfrac{1}{3}x^2 - 17\tfrac{1}{3}x + 6\tfrac{2}{3} = 0.$$

Da der Nenner von allen Brüchen 3 ist, so setze man $x = \frac{y}{3}$; folglich ist $x^2 = \frac{y^2}{9}$; $x^3 = \frac{y^3}{27}$, und $x^4 = \frac{y^4}{81}$. Nun dringe man diese Werthe

für

für x in der vorigen Gleichung an, so ist

$$\frac{y^4}{3^4} - \frac{6\frac{2}{8}y^3}{3^3} + \frac{16\frac{1}{3}y^2}{3^2} - \frac{17\frac{1}{3}y}{3} + 6\tfrac{2}{3} = 0.$$

Diese gefundene Gleichung multiplicire man mit 3^4, so kommt

$$\frac{y^4 \cdot 3^4}{3^4} - \frac{6\frac{2}{3}y^3 \cdot 3^4}{3^3} + \frac{16\frac{1}{3}y^2 \cdot 3^4}{3^2} - \frac{17\frac{1}{3}y \cdot 3^4}{3} + 6\tfrac{2}{3} \cdot 3^4 = 0$$

$$= y^4 - 20y^3 + 147y^2 - 468y + 540 = 0.$$

Nun ist von 540, außer vielen andern Theilern, auch 6 einer. Man setze also $y = 6$; so ist

$y^2 = 36$; $y^3 = 216$, und $y^4 = 1296$. Folglich $1296 - 4320 + 5292 - 2808 + 540 = 0$. Aber $x = \frac{1}{3}y$; also ist $x = 2$.

Die übrigen drei Wurzeln kann man nach der vorhergergehenden Art, finden.

209.

Die beiden vorigen Methoden, einer biquadratischen Gleichung aufzulösen, sind noch nicht allgemein genug, oder geben nicht eine solche Regel, wie die Cardanische bei einer cubischen Gleichung. Einer, Namens Pombelli, hat schon im vorigen Jahrhundert eine Methode angegeben, nach welcher jede biquadratische Gleichung, auf eine cubische Gleichung zu bringen ist. Diese hier zu erklären, halte ich für nothwendig und zweckmäßig.

210.

210.

Es sei demnach

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

eine allgemeine biquadratische Gleichung, die in eine cubische Gleichung verwandelt werden soll. Für a, b, c, und d, kann man alle mögliche Zahlen setzen. Nun sei diese Gleichung =

$$(x^2 + \tfrac{1}{2}ax + p)^2 - (qx + r)^2 = 0.$$

Die beiden Theile der Gleichung quadrire man, und ziehe sie von einander ab.

Nun ist

$$\begin{array}{ll}(x^2+\tfrac{1}{2}ax+p)^2 = x^4 + ax^3 + \tfrac{1}{4}a^2 & \left\{\begin{array}{l} + apx + p^2 \\ \\ x^2 - 2qrx - r^2 \end{array}\right. \\ \phantom{(x^2+\tfrac{1}{2}ax+p)^2 = x^4 + ax^3} + 2p & \\ \text{und } (qx+r)^2 = - q^2 & \end{array}$$

Die beiden Glieder, nämlich x^4, und ax^3, sind einerlei mit den beiden ersten Gliedern der gegebenen allgemeinen Gleichung. Also ist $b = \frac{1}{4}a^2 + 2p - q^2$; und c ist $= ap - 2qr$; und $d = p^2 - r^2$.

Aus diesen drei Gleichungen muß man p, q, und r, zu bestimmen suchen. Man finde nur p; so ergeben sich die beiden letztern leicht.

211.

Aus der ersten Gleichung $b = \frac{1}{4}a^2 + 2p - q^2$, ist $q^2 = \frac{1}{4}a^2 + 2p - b$; und aus der zweiten ist $2qr = ap - c$, und aus der dritten $r^2 = p^2 - d$. Die erste Gleichung multiplicire

man

man mit 4; so ist $4q^2 = a^2 + 8p - 4b$, und diese mit der dritten $p^2 - d = r^2$ multipliciret, giebt

$$4q^2r^2 = 8p^3 + (a^2 - 4b)\,p^2 - 8pd - d\,(a^2 - 4b).$$

Nun war die zweite Gleichung $2qr = ap - c$; erhebt man diese zum Quadrat, so ist

$$4q^2r^2 = a^2p^2 - 2apc + c^2.$$

Man hat also zwei Werthe von $4q^2r^2$, die sich daher einander gleich sein müssen. Mithin ist

$$8p^3 + (a^2 - 4b)\,p^2 - 8pd - d\,(a^2 - 4b) =$$
$$a^2p^2 - 2apc + c^2; \text{ oder}$$
$$8p^3 + a^2p^2 - 4bp^2 - 8pd - d\,(a^2 - 4b) =$$
$$a^2p^2 - 2apc + c^2; \text{ oder}$$
$$8p^3 - 4bp^2 + (2ac - 8d)\,p - a^2d + 4bd - ec.$$

Dies ist eine cubische Gleichung, aus welcher man den Werth von p, nach dem vorhergehenden, finden kann. Ist dieser gefunden, so ergiebt sich q aus der ersten Gleichung, nämlich aus $\frac{1}{4}a^2 + 2p - b$; oder $q = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + 2p - b)}$. Ferner findet man den Werth von r aus der zweiten Gleichung. Denn $2qr = ap - c$; also $r = \dfrac{ap - c}{2q}$.

212.

Nachdem man p, q und r, gefunden hat, so läßt sich auch x angeben. Denn die angenommene Gleichung in (210) ist

$$(x^2 + \tfrac{1}{2}ax + p)^2 - (qx + r)^2 = 0$$

einerlei mit

$$(x^2 + \tfrac{1}{2}ax + p)^2 = (qx + r)^2.$$

Zieht man beiderseits die Quadratwurzel aus, so ist

$$x^2 + \tfrac{1}{2}ax + p = qx + r; \text{ oder}$$

$$x^2 = qx - \tfrac{1}{2}ax - p + r =$$

$$(q - \tfrac{1}{2}a)x - p + r.$$

Aber $x^2 + \frac{1}{2}ax + p$ ist auch $= -qx - r$; also $x^2 = -(q + \frac{1}{2}a)x - p - r$.

213.

Es sei folgende Gleichung gegeben:

$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$; diese mit der allgemeinen Gleichung verglichen, giebt für $a = -10$; für $b = +35$; für $c = -50$; und für $d = 24$. Mithin ist

$$8p^3 - 4bp^2 + (2ac - 8d)p - a^2d + 4bd - cc =$$

$$8p^3 - 140p^2 + 808p - 1540 = 0.$$

Diese

Diese Gleichung theile man durch 4; so kommt

$$2p^3 - 35p^2 + 202p - 385 = 0.$$

Von dem letzten Gliede ist 5 und 7 ein Theiler. Man setze demnach $p = 5$; so ist $p^2 = 25$, und $p^3 = 125$. Mithin

$$2p^3 - 35p^2 + 202p - 385 =$$
$$250 - 875 + 1010 - 385 = 0.$$

Also $p = 5$, eine Wurzel. Eben so ist $p = 7$, eine Wurzel aus unserer Gleichung. Denn

$$686 - 1715 + 1414 - 385 = 0.$$

Die dritte findet man, wenn die Gleichung

$$2p^3 - 35p^2 + 202p - 385 = 0,$$

durch zwei getheilet wird. Man erhält also

$$p^3 - \tfrac{35}{2}p^2 + 101p - \tfrac{385}{2} = 0.$$

Nun ist aus dem Vorhergehenden bekannt, daß der Coefficient des zweiten Gliedes die Summe der drei Wurzeln ausmache. Da nun 7 und 5, schon ein paar Wurzeln sind, und $\frac{35}{2} = 17\frac{1}{2}$, die Summe aller drei Wurzeln beträgt, so muß die dritte $= 5\frac{1}{2} = \frac{11}{2}$ sein. Nun ist ferner $q = \sqrt{(25 + 10 - 35)} = 0$, und $r = \frac{5^0 - 5^0}{2} = 0$. Aber aus (211) ist auch $r^2 = p^2 - d = 25 - 24 = 1$.

214.

Aus diesen drei gefundenen Wurzeln, läßt sich nun nach (212) der Werth von x bestimmen. Denn $x^2 = 5x - 4$; oder auch $= 5x - 6$.

Löst man beide quadratische Gleichungen auf, so ist $x = \frac{5 \pm 3}{2} = 4$, oder $= 1$; und aus der andern ist $x = \frac{5 \pm 1}{2} = 3$, oder $= 2$.

215.

Mehrere Beispiele dieser Art, findet man beim Euler, und andern hieher gehörigen Schriftstellern. Für meinen Zweck, halte ich es hinlänglich, diejenigen Regeln, deren man sich bei der Auflösung biquadratischer Gleichungen bedienet, hier in möglichster Kürze erkläret zu haben. Was die übrigen höhern Gleichungen

chungen betrift, so brauche ich hierüber nichts weiter zu sagen, als daß man bisher, so viel mir darüber bekannt ist, keine allgemeine Regel, wie etwa die Cardanische für die cubische, oder die von Pombelli, für die biquadratische, erfunden hat. Ueber die Methode, sich dem Werthe einer Wurzel zu nähern, will ich am Ende das Allgemeine darüber noch beizubringen suchen. Ehe dieses aber geschieht, mögen hier noch ein paar Aufgaben, die biquadratisch sind, voran gehen.

216.

Aufgabe. Es hat Jemand einige Arbeitsleute, welche jeder täglich so viel Groschen bekommen, als ihrer sind, und so viele Tage arbeiten, als sie insgesammt täglich Groschen bekommen, weniger einen Tag, und diese Zeit über insgesammt 180 Thaler verdienen, den Thaler zu 36 Groschen gerechnet. Wie viel sind es Arbeitsleute gewesen, und wie lange haben sie gearbeitet?

Auflösung. Arbeiter waren x. Jeder verdienet täglich x Groschen; also alle $= x^2$ Groschen. Demnach arbeiten sie $x^2 - 1$ Tage, und verdienen

dienen in dieser Zeit $x^4 - x^2$ Groschen. Folglich ist

$$x^4 - x^2 = 180 \text{ Thlr.} \times 36 = 6480 \text{ Gr.}$$

Dies ist zwar eine Gleichung vom vierten Grade, gehört aber zu der zweiten Art, die ich im (202) erkläret habe. Um diese aufzulösen, oder sie vielmehr auf eine vermischte quadratische Gleichung zurück zu bringen, so setze man $x^2 = y$; also $x^4 = y^2$, und es ist $y^2 - y = 6480$. Ergänze das Quadrat, so ist

$$y^2 - y + \tfrac{1}{4} = 6480 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{25921}{2} \quad \sqrt{}$$

$$y - \tfrac{1}{2} = \pm \tfrac{161}{2}; \text{ also } y = \tfrac{162}{2} = 81.$$

Nun ist $y = x^2$; folglich $x = 9$ Arbeiter, die 80 Tage gearbeitet haben.

217.

Aufgabe. Vier Personen haben eine ungleiche Summe Geldes in ihren Beuteln. B hat 1 Thaler mehr als A, C hat 1 Thaler mehr als B, und D hat 1 Thaler mehr als C. Aller Geld mit einander

ander multipliciret, weniger 176, bringt eine Quadratzahl, deren Wurzel die Hälfte der subtrahirten Zahl ist. Wie viel hat jeder im Beutel?

Auflösung. A habe x Thaler; so hat B $= x + 1$, C $= x + 2$, und D $= x + 3$. Multipliciret man diese vier Größen mit einander, so erhält man zum Producte

$$= x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x.$$

Davon ziehe man 186 ab; so giebt der Unterschied eine Quadratzahl, davon die Wurzel $= \frac{176}{2} = 88$ ist. Demnach ist

$$\sqrt{(x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x - 176)} = 88^2.$$

Man mache beiderseits die Quadratzahl, so ist

$$x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x - 176 = 7744;$$

oder $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x - 7920 = 0.$

Um von dieser Gleichung den Werth von x zu finden, so zerlege man das Product 7920 in seine Factores, deren es eine große Anzahl giebt. Von den Factoren ist auch 8 einer. Es sei demnach $x = 8$;

so

so ist $x^2 = 64$, $x^3 = 512$, und $x^4 = 4096$. Folglich $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x - 7920 = 4096 + 3072 + 704 + 48 - 7920 = 0$.

Also ist $x = 8 =$ dem Werthe von A. Demnach $B = 9$, $C = 10$, und $D = 11$.

Den Werth einer Wurzel durch Näherung zu finden.

218.

Dieses geschieht, wenn man den Werth einer Wurzel zwischen zwei Größen, sie mögen rational oder irrational sein, einschließt, so daß die eine zu groß, die andere aber zu klein ist. So weiß ich, z. B., daß die Quadratwurzel von 30, zwischen 5 und 6 fällt. Erstere ist zu klein, und die zweite ist zu groß. Gesetzt also, die $\sqrt{30}$ ist x; so ist

$x^2 = 30$. Nun sei die Wurzel

$5 + p$; so ist $(5 + p)^2 = 30$. Aber

$$(5 + p)^2 = 25 + 10p + p^2.$$

Allein

Allein, wenn p schon klein ist, so muß p^2, p^3, p^4 u. s. w., noch viel kleiner sein.

Aus dem Grunde kann man bei einem solchen Ausdrucke p^2, p^3, p^5, und überhaupt die Potenzen von p füglich weglassen. Demnach ist

$$25 + 10p = 30; \text{ oder } 10p = 5; \text{ oder}$$

$$p = \tfrac{1}{2}; \text{ also ist } \sqrt{30} = 5\tfrac{1}{2}.$$

Soll der Werth noch genauer gefunden werden, so setze man aufs neue $(5\frac{1}{2} + p)^2 = 30$; also

$$30\tfrac{1}{4} + 11p = 30; \quad \text{mithin}$$

$$11p = -\tfrac{1}{4}; \text{ und daher } p = -\tfrac{1}{44}.$$

Demnach ist $\sqrt{30} = 5\frac{1}{2} - \frac{1}{44}$ u. s. w.

219.

Um dieses Verfahren allgemein vorzustellen, so sei $xx = a$, wovon die Wurzel größer als n, aber kleiner als $n + 1$ ist. Es sei demnach

$x = n + p$; so ist $x^2 = n^2 + 2np$ (p^2 läßt man hier weg, wegen 218) $= a$;

also

also $2np = a - n^2$, und $p = \dfrac{a - n^2}{2n}$;

folglich $x = n + \dfrac{a - n^2}{2n} = \dfrac{n^2 + a}{2n}$.

Man verlangt z. B. $\surd\, 6$; so fällt diſe zwiſchen 2 und 3. Hier iſt alſo $n = 2$, und $a = 6$; mithin $x = \dfrac{4 + 6}{4} = \frac{10}{4} = 2\frac{1}{2}$.

Will man die Wurzel genauer finden, ſo ſetze man n aufs neue $= \frac{10}{4}$. Demnach iſt

$$x = \tfrac{100}{16} = \tfrac{196}{80} = 2\tfrac{36}{80} = 2\tfrac{9}{20}.$$

Noch genauer ſei $n = \frac{196}{80}$; ſo iſt

$$x = \frac{(\frac{196}{80})^2 + 6}{\frac{2.\ 196}{80}} = \tfrac{5145280}{2508800} =$$

$2\frac{14095}{30110}$ u. ſ. w.

220.

Was ich in den beiden letzten Paragraphen über die Ausziehung der Quadratwurzel geſagt habe, läßt sich auch eben so gut auf höhere Potenzen anwenden. Denn es sei $x^3 = a$; und man nehme an, die Wurzel falle zwischen n und $n + 1$, oder $x = n + p$; so ist der Cubus $=$

$$n^3 + 3\,n^2 p + 3\,n p^2 + p^3 = x^3.$$

Da aber p schon klein ist, so muß p^2 und p^3 noch viel kleiner sein; und beide Ausdrücke können daher ohne Bedenken weggelassen werden. Aus dem Grunde setze man $x^3 = n^3 + 3\,n^2 p = a$. Mithin ist $p = \frac{a - n^3}{3\,n^2}$; also $n + p = x =$

$$n + \frac{a - n^3}{3\,n^2} = \frac{2\,n^3 + a}{3\,n^2}.$$

Man soll z. B. die $\sqrt[3]{2}$ angeben; so ist $n = 1$, $a = 2$. Demnach $x = \frac{2 + 2}{3} = \frac{4}{3}$.

Diesen Werth setze man wieder $= n$, so ist

$$= \frac{2 \cdot \frac{64}{27} + 2}{3 \cdot \frac{16}{9}} = \frac{182}{144} = \frac{91}{72}.$$

Dieser

Dieser Werth ist näher als der erste. Will man ihn noch genauer finden, so setze man aufs neue $n = \frac{91}{72}$. Alsdann ist $x = \dfrac{2.\left(\frac{91}{72}\right)^3 + 2}{3.\left(\frac{91}{72}\right)^2} = \frac{1126819}{894348}$.

221.

Eben diese Nährungs-Methode läßt sich nun auf jede Gleichung anwenden, wovon der Werth derselben beinahe bekannt ist. Es sei folgende allgemeine cubische Gleichung gegeben:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Davon sei n eine Wurzel, die entweder um p zu groß, oder um p zu klein ist. Ich will das erste annehmen, so ist $x = n + p$; also $x^2 = n^2 + 2pn$; und $x^3 = n^3 + 3n^2p$. Diese Werthe setze man für x in die obige Gleichung, so ist

$$n^3 + 3n^2p + an^2 + 2anp + bn + bp + c = 0.$$

Bringe alle Ausdrücke, worin p vorkommt, auf die andere Seite; so ist $n^3 + an^2 + bn + c = -3n^2p - 2anp - bp$; oder $n^3 + an^2 + bn + c = (-3n^2 - 2an - b)p$; und daher

$$p = \frac{n^3 + an^2 + bn + c.}{-3n^2 - 2an - b}$$ Demnach ist

$$x = n + \frac{n^3 + sn^2 + bn + c}{-3n^2 - 2an - b} = \frac{-2n^3 - an + c}{-3n^2 - 2an - b.}$$

Setzt man $x = n - p$; so ist

$$x = \frac{2n^3 + an^2 - c}{3n^3 + 2an + b.}$$

Beider Formeln bedienet man sich nun eben so, wie im vorigen, bei der Ausziehung der Quadrat- und Cubicwurzeln, gezeigt worden ist.

222.

Indessen will ich die letztere Formel noch näher durch folgende Gleichung zu erklären suchen. Es ist sehr gut, daß man sich in dieser Art Rechnungen eine gewisse Fertigkeit zu verschaffen sucht, und diese erhält man nicht gut anders, als durch Auflösung vieler Beispiele. In dem 224 §. habe ich noch ein Beispiel angebracht, welches eine höhere Gleichung enthält, wozu aber eben so, wie zu den vorigen, sich leicht eine Formel

Formel finden läßt, wie auch hier geschehen ist, nach welcher der Werth von x, durch die Näherung, gefunden werden kann.

223.

Um diese Formel anzuwenden, so sei folgende Gleichung gegeben:

$$x^3 + 2x^2 + 3x - 50 = 0.$$

Das erste ist, daß man den Werth von x beiläufig zu bestimmen suche; und zweitens, daß man diesen beiläufigen Werth für n, in die vorhingefundene Formel bringe, um x anzugeben.

Was das erste betrift, so setze man für $x = 1$; oder $x = 2$; oder $x = 3$.

$x = 1$ weicht zu viel von der Wahrheit ab; $x = 1$ kommt der Wahrheit schon näher; aber noch besser trift es zu, wenn $x = 3$ gesetzt wird. Denn $x = 3$, giebt $17 + 18 + 9 = 54$; also nur etwas größer als 50. Der eigentliche Werth von x fällt demnach zwischen 2 und 3; oder er ist größer als 2, aber kleiner als 3.

Nun

Nun setze man zweitens $n = 3$. Aber für a nimmt man 2, für $b = 2$, und für $c = -50$ an. Demnach ist

$$x = \frac{2n^3 + 2n^2 + 50}{3n^2 + 4n + 3} =$$

$$\frac{2.27 + 2.9 + 50}{3.9 + 4.3 + 3} = \frac{122}{42} = \frac{61}{21}.$$

Dieser Werth ist schon ziemlich nahe; allein noch näher würde man ihn finden, wenn aufs neue für n, dieser gefundene Werth von x gesetzt wird.

224.

Auf eben die Art, wie das vorhergehende Beispiel ist aufgelöset werden, läßt sich auch der Werth von jeder höhern Gleichung, vermittelst der Näherungs-Methode, finden. Es sei $x^5 = 6x + 10$; oder $x^4 - 6x - 10 = 0$ gegeben. Der Werth dieser Gleichung fällt zwischen 1 und 2. Der erste ist viel zu klein, der zweite etwas zu groß.

Es sei folglich $x = n + p$; so ist

$x^5 = n^5 + 5n^4 p$. Demnach

$n^5 + 5n^4p = 6n + 6p + 10$; oder

$5n^4p - 6p = 6n + 10 - n^5$; oder

$(5n^4 - 6)\,p = 6n + 10 - n^5$, und daher

$$p = \frac{6n + 10 - n^5}{5n^4 - 6}.$$

Nun ist $x = n + p = n + \dfrac{6n + 10 - n^5}{5n^4 - 6}$

$$= \frac{5n^5 - 6n + 6n + 10}{5n^4 - 6} = \frac{4n^5 + 10}{5n^4 - 6}$$

Wäre nun $n = 1$; so ist $x = \dfrac{14}{-1}$, welcher

Werth, wie ich schon oben gesagt habe, viel zu klein ist. Man setze also $n = 2$; so ist

$$x = \frac{4 \cdot 2^5 + 10}{5 \cdot 2^4 - 6} = \frac{128 + 10}{80 - 6} = \tfrac{138}{74} = \tfrac{69}{37}.$$

Mit diesem gefundenen Werth kann man hier schon zufrieden sein. Will man ihn aber noch genauer finden, so setze man aufs neue $n = \frac{62}{37}$. Dadurch käme man der Wahrheit noch weit näher.

Ende der ersten Abtheilung des zweiten Bandes.

Druckfehler.

Seite 15, unten, muß $a^m \times a^n$ für a^{m+n} stehen.

Seite 19, zu Ende §. 16, $a^2 : a^3$ muß $1 : a^{-3}$ heißen.

Seite 20, für $a - b$ muß $a + b$ stehen.

Statt Seite 84 muß 48 stehen.

Seite 50, für — lese man $\frac{n}{P}$.

Seite 52, 5 : 90 statt 1 : 90.

Die übrigen, noch etwa fehlenden, sollen, so wie die zum ersten Bande, am Ende des zweiten Bandes, angezeiget werden.