Erster Abschnitt.

Allgemeine Rechenkunst.

Von den entgegengesetzten Grössen, und deren Anwendung auf Buchstaben-Rechnung.

I.

Unter entgegengesetzten Größen versteht man Grössen, wovon die eine das Gegentheil von der andern andeutet. Z. B. Vor- und Rückwärts gehen, Auf- und Absteigen, Schulden und Vermögen, Wärme und Kälte, Bejahen und Verneinen, u. s. w. Diese Größen, um sie sogleich, und dazu bequem, von einander zu unterscheiden, bezeichnet man sie mit dem Zeichen plus (+) und minus (—). Setzt man vor die eine Größe das Zeichen +, so muß, die ihr entgegengesetzte, das Zeichen — bei sich führen.

2.

Hieraus folgt also, daß Größen mit verschiedenen Zeichen nicht zusammengelegt oder addirt werden können; weil die eine das Gegentheil von der andern andeutet. Wenn einer 10 Rthlr. Vermögen hat,

und

und 5 Rthlr. schuldig ist, so wird die erste Summe, grade um die letztere, vermindert. Einer der 6 Meilen vorwärts geht, und hierauf wieder um 4 Meilen rückwärts, ist nur um 2 Meilen vorwärts gekommen. 5 Grad Wärme und 10 Grad Kälte an einem Thermometer, bezeichnet 5 Grad Kälte ꝛc. Daraus entsteht dann folgende allgemeine Regel für die Additio mit entgegen gesetzten Grössen. Gleiche Zeichen, als + und +, — und —, werden addirt, ungleiche, als + und —, und — und +, werden subtrahirt. Im letztern Fall behält die Differenz das Zeichen der größten Größe bei sich.

3.

Man nehme an, daß folgende Größen zusammen gezählt werden sollen.

$$\begin{array}{ccccccc} +16 & -32 & +48 & +52 & -64 & -3 & -17 \\ -14 & -64 & +32 & -16 & +80 & -4 & +19 \\ \hline +2 & -96 & +80 & +36 & +16 & -7 & +2 \end{array}$$

Das Verfahren hat völlig seinen Grund in (2). Will man sich indessen noch mehr davon überzeugen, so addire man die Größen mit gleichen Zeichen, und von der Summe derselben, nehme man die Summe von den erstern entgegengesetzten Größen, ab; so muß die Differenz einerlei sein mit der so eben herausgebrachten Summe. Ich will die Größen, mit dem bejahten oder positiven Zeichen unter die Reihe A, und die mit dem verneinten oder negativen Zeichen,

unter

unter B bringen; so wird die Differenz C, die verlangte Summe geben.

A	B
	— 32
	— 64
+ 16	— 3
+ 48	— 17
+ 52	— 34
+ 32	— 14
+ 80	— 16
+ 19	— 4
+ 247	— 214
— 214	
33	

$$33 = C = +2 - 96 + 80 + 36 + 16 - 7 + 2.$$

Hat man eben so viele positive Einheiten als negative, so hat man, indem sie zusammen gezählt werden, eigentlich nichts; folglich hatte man vorher weniger als nichts. Z. B. 3 ℳ in der Tasche haben, und 3 ℳ schuldig sein, heißt erstlich nichts haben, nachdem man die Schuld bezahlt hat. Vorher hatte man also weniger als nichts.

4.

Um entgegengesetzte Größen von einander abzunehmen, muß man sich das Verfahren auf folgende Art deutlich zu machen suchen. Gesetzt, man soll von einer Größe eine andere zusammengesetzte, davon der eine Theil aber ein entgegengesetztes Zeichen bei

sich

sich führet, subtrahiren, so muß man die erste abnehmen, und die zweite Größe, oder den zweiten Theil, mit dem entgegengesetzten Zeichen, addiren. Von + 100 soll man abnehmen (+ 75 — 50); so heißt das: von + 100 nehme man + 75, weniger 50, ab. Oder subtrahirt man 75 würklich, so hat man um 50 zu viel abgenommen; also muß man diese wieder addiren. Folglich verwandelt sich das Zeichen, welches bei 50, oder dem zweiten Theil der zusammengesetzten Größe steht, in das entgegengesetzte; und es ist demnach + 100 — (75 — 50) = 100 — (75 — 50) = 25 + 50 = 75. Nun läßt sich jede Zahl, die von einer andern abgezogen werden soll, als eine zusammengesetzte Zahl ansehen, wenn man zu derselben eine 0 setzt; also läßt sich wenigstens der eine Theil der Zahl nach der obenerwähnten Art von der andern abziehen. Man soll von + 50 — 40 abziehen, so ist — 40 = + 0 — 40. Zieht man 0 von 50 ab, so hat man um 40 zu viel abgezogen; man muß also 40 addiren. Soll man hingegen von + 50, + 40 wegnehmen, so muß die Differenz + 10 sein; oder + 40 wird würklich mit dem entgegengesetzten Zeichen zu + 50 addirt, das heißt, subtrahirt. Eben so verfährt man auch, wenn von — 50, (— 40) abgenommen werden soll. Hier bleibt — 10 übrig. Man muß aber addiren, wenn von — 50 + 40 subtrahirt werden soll; oder die Differenz ist = — 90. Entgegengesetzte Grössen also von einander subtrahiren, heißt nichts anders, als die abzuziehenden

Grös-

Grössen mit dem entgegengesetzten Zeichen addiren.

Es sei gegeben

$$\begin{array}{ccccccccc}
+52 & -46 & +84 & -72 & -16 & +36 & -40 & +80 & =A \\
-32 & +18 & -25 & -64 & -19 & +72 & -87 & -46 & =B \\
+ & - & + & + & + & - & + & + & \\
\hline
+84 & -64 & +109 & -8 & +3 & -36 & +47 & +126 & =D
\end{array}$$

5.

Um sich zu überzeugen, daß man recht abgezogen habe, so addire man die Zahlen mit gleichen Zeichen, in der Reihe A und B; nehme alsdann den Unterschied von beiden, so muß dieser einerlei sein mit den Zahlen der Reihe D.

$$\begin{array}{rr} +\ 52 & -\ 46 \\ +\ 84 & -\ 72 \\ +\ 36 & -\ 16 \\ +\ 80 & -\ 40 \\ \hline +\ 252 & -\ 174 \\ -\ 174 & \\ \hline \end{array}$$

$+\ 78 =$ der Summe von A.

$$\begin{array}{rr} & -\ 19 \\ & -\ 32 \\ & -\ 25 \\ & -\ 64 \\ +\ 18 & -\ 87 \\ +\ 72 & -\ 46 \\ \hline +\ 90 & -\ 273 \\ -\ 273 & \\ \hline \end{array}$$

$+\ 183 =$ der Summe von B.

Nun soll von der Reihe A die Reihe B abgenommen werden, das ist: $+ 78 - (- 183) = + 78 - (+ 0 - 183) = + 78 + 183 = 261 =$ der Reihe D $= (84 + 109 + 3 + 47 + 126) - (- 64 - 8 - 36) = + 369 - 108 = 261$.

6.

Da die Multiplicatio eine wiederholte Additio ist, so werden sich die Regeln der Additio leicht auf die

Mul-

Multiplicatio mit entgegengesetzten Größen, anwenden lassen. Um am bequemsten das Ganze übersehen zu können, beobachte man indessen folgende drei Fälle.

1) Wenn die Factores positiv oder das Zeichen plus bei sich führen, so muß das Product ebenfalls bejahend oder plus sein.

Man multiplicire + 4 mit + 3, so ist das Product = + 12. Ich soll den Factor + 4 dreimal nehmen; das heißt doch wohl nichts anders, als ich soll + 4 dreimal zu sich selber addiren.

2) Wenn der eine Factor das Zeichen +, der andere das Zeichen — hat, so ist das Product minus oder negativ.

Es soll + 4 mit — 3 multiplicirt werden, so kann das Product wohl nicht positiv, sondern muß negativ sein; weil ich das Gegentheil von plus nehmen soll.

3) Haben beide Factores das Zeichen minus, so muß das Product das Zeichen plus haben.

Multiplicire — 4 mit — 3, so heißt das, ich soll — 4 dreimal nicht minus nehmen, ich muß also wohl das Gegentheil nehmen, d. i. das Product muß + 12 sein.

Hieraus folgt also, daß gleiche Zeichen, d. i. + und +, oder — und —, ein positives Product oder + geben; ungleiche Zeichen, d. i. + und —, oder — und +, jedesmal minus, oder ein negatives Product.

Bei=

7.

Beispiel. Man soll + 15 — 30 + 12 — 6 + 100 multipliciren mit + 9 — 3 — 6.

Setze die Factores so unter einander, wie man bei der Multiplicatio zu thun gewohnt ist. Doch ist es einerlei, ob man von der rechten nach der linken Hand, oder umgekehrt, von der linken nach der rechten Hand, multiplicirt. Obiges Beispiel multiplicire man so:

$$\begin{array}{rrrrrcrrcr}
+15 & -30 & +12 & -6 & +100 & = & +127 & -36 & = & +91 \\
+9 & -3 & -6 & & & = & & & & 0 \\
\hline
+135 & -270 & +108 & -54 & +900 & & & & & \\
-45 & +90 & -36 & +18 & -300 & & & & & \\
-90 & +180 & -72 & +36 & -600 & & & & & \\
\hline
0 & +0 & +0 & +0 & +0 & & & & &
\end{array}$$

Multiplicirt man den ersten zusammengesetzten Faktor des Multiplicandus mit $+ 9$, so erhält man zum Producte $= + 135 - 270 + 108 - 54 + 900$, als dem ersten Theil des Multiplicandus. Man soll aber nicht mit 9, sondern mit 9 weniger 3 multipliciren; also muß man das dreifache Product des ersten Factors von dem ersten Producte subtrahiren; und daher entstehen die entgegengesetzten Zeichen bei dem 2ten Producte. Eben dies ist auch der Fall mit dem dritten Factor mit dem Zeichen minus. Nun ist $9 - 3 - 6 = 0$; also muß das ganze Product $= 0$ werden: welches man auch deutlich gewahr wird, wenn die Factores auf einfache Zahlen gebracht werden.

8.

Bei der Divisio mit entgegengesetzten Größen kommen folgende Fälle vor.

1) Wenn der Dividend sowohl als der Divisor das Zeichen $+$ bei sich führet, so muß der Quotient ebenfalls das Zeichen $+$ haben.

Denn $+ 16 : + 4 = + 4$; weil $+ 4 + 4 = + 16$ ist.

2) Wenn der Dividend das Zeichen $+$, der Divisor aber das Zeichen $-$ bei sich hat, so hat der Quotient das Zeichen $-$ bei sich.

Denn $+ 16 : - 4 = - 4$. $- 4$ kann in $+ 16$ nicht $+ 4$ mal stecken; weil sonst $+ 4$ mal $- 4$ zum Producte $+ 16$ geben müßte; welches aber nicht ist. Also $- 4$ muß im $+ 16$ offenbar $- 4$ mal enthalten sein.

3)

3) Wenn der Dividend das Zeichen —, und der Divisor das Zeichen + bei sich hat, so muß der Quotient mit dem Zeichen — versehen sein.

Denn $-16 : +4 = -4$; weil -4 mal $+4 = -16$ giebt.

4) Wenn sowohl der Dividend als der Divisor das Zeichen minus bei sich führet, so bekommt der Quotient das Zeichen plus. Denn $-16 : -4 = +4$. Denn -4 steckt in -16 würklich 4 mal, oder es läßt sich -4 von -16 würklich 4 mal abnehmen; nicht -4 mal, weil sonst 4 mal -4 zum Dividend $+16$ geben müßte.

Hieraus folgt also, daß gleiche Zeichen plus, und ungleiche Zeichen zum Quotienten minus geben.

9.

Setzt man für die Zahlen Buchstaben, und verbindet diese mit den Zeichen plus und minus; behandelt sie nach der Lehre von der Rechnung mit entgegengesetzten Größen, so heißt diese Rechnung die Buchstaben-Rechnung, oder die Rechnung mit allgemeinen Zeichen. Demnach bedeutet $a + b$ jede Summe, welche man will; weil für a und b alle mögliche Zahlen gesetzt werden können. Eben so zeigt $a - b$, jede Differenz an, und $a.\,b = ab = a \times b$, alle Producte, und $a : b = \frac{a}{b}$ bezeichnet alle Quotienten.

10.

Additions-Beispiel.

Regel. Gleiche Zeichen addirt, ungleiche subtrahirt.

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
17a & -22m & +34bd & -16x & +32y & +mc & -2ln \\
-12a & +34m & -69bd & -x & +46y & +mc & +ln \\
\hline
5^a & +12m & -35bd & -17x & +78y & +2mc & -ln
\end{array}
$$

Die Buchstaben in diesem Beispiele können bedeuten, was man will. Setzt man z. B. für $a = 5$; so ist die Summe von $17a$ und $12a = 5^a = 5 \cdot 5 = 25$. Wäre $m = \frac{1}{2}$, so ist $12m = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$ u. s. w.

Wenn eine Größe kein Zeichen vor sich hat, so ist sie allemal positiv, oder hat das Zeichen $+$ vor sich. Addire $a + b$ zu $a - b$, so ist die Summe $= 2a$; oder wenn man die Summe und die Differenz zweier Größen addirt, so ist die Summe $=$ 2 mal der größten Zahl gleich.

11.

11.

Subtractions-Beispiel.

Regel. Die Zeichen, welche vor den zusammengesetzten Größen stehen, die abgezogen werden sollen, verwandle man in die entgegengesetzte, und addire alsdann nach (10).

Beispiel.

$$\begin{array}{rrrrr}
23a & -\,15\,bx & -\,4\,dy & +\,8\,m & \\
-\,24\,a & +\,16\,bx & -\,8\,dy & & -\,30\,dz \\
+ & - & + & & + \\
\hline
47a & -\,31\,bx & +\,4\,dy & +\,8\,m & \\
 & & +\,30\,dz & &
\end{array}$$

Subtrahire von $a + b$, $a - b$, so ist die Differenz $+ 2\,b$; oder wenn man von der Summe zweier Zahlen die Differenz derselben subtrahirt, so ist der Unterschied zweimal der kleinsten Größe gleich.

12.

Multiplications-Beispiele.

Bei der Multiplicatio mit Buchstaben verfährt man eben so, wie ich bei der Multiplicatio mit entgegengesetzten Größen (6) gezeigt habe. Größen, oder Buchstaben mit gleichen Zeichen, geben ein positives (bejahendes), mit verschiedenen Zeichen ein negatives oder verneinendes Product.

Multiplicire $3\,a - 2\,b$ mit $4\,a + 5\,b$. Man setze die beiden zusammengesetzten Factoren unter einander; fange entweder von der linken zur rechten Hand, oder umgekehrt, von der rechten zur linken, zu multipliciren an; addire hierauf die gleichnamigten Größen, so giebt die Summe derselben das gesuchte Product.

$$\begin{array}{l} 3a - 2b \\ 4a + 5b \\ \hline 12aa - 8ab \\ \qquad\quad + 15ab - 10bb \\ \hline 12aa + 7ab - 10bb. \end{array}$$

Die Zahlen, welche vor den Buchstaben stehen, oder worin selbige multiplicirt worden sind, heißen Coefficienten. So ist 12 ein Coefficient von aa, 7 von ab, und 10 von bb, in unserm Beispiel.

13.

Bei der Multiplicatio in Buchstaben kommt die Rechnung mit Potenzen häufig vor, und deren Abkürzungen ich hier erst, ehe ich weiter gehe, erklären muß. Statt $a \times a = aa$, schreibe man a^2; und für aaa setze man a^3 u. s. w. Bekanntlich heißt die Zahl, die oben zur rechten Hand des Buchstaben steht, der Exponent der Potenz. Soll man demnach Potenzen mit einander multipliciren, so braucht man nur ihre Exponenten zu addiren. So ist $a^2 \times a^3 = a^5$. Denn $a^2 = aa$; und $a^3 = aaa$, also $aa \times aaa = aaaaa = a^5$. Ferner: $a \times a^n = a^{n+1}$. Bei der ersten Potenz läßt man den Exponenten 1 weg, und daher ist das Product von $a \times a^n = a^{n+1}$. Allgemein $a^{m \pm n} = a^{m \pm n}$. Die Exponenten m und n kön-

können jede Zahl bedeuten. Ist n = m; so ist $a^{\frac{m+n}{2}} = a^{\frac{m+m}{2}} = a^{\frac{2m}{2}}$. Eben so ist $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a$; $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3$ (heißt $a^{\frac{1}{3}}$ zur dritten Potenz) $a^{\frac{1}{3}}$ ist hier also die Wurzel von (1. B. 294.) $a^{\frac{3}{3}}$ oder a. Daher $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$ und $\sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$; und $\sqrt[3]{y^2} = y^{\frac{2}{3}}$; allgemein also $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$.

Auf diese Weise kann man das Wurzel-Zeichen vor einer Größe leicht wegschaffen, welches, wie in der Folge gezeigt werden soll, von vieler Bequemlichkeit ist.

Eine Potenz auf eine Potenz zu bringen, multiplicirt man den Exponenten der Potenz mit dem Grad der verlangten Potenz. $(a^3)^2 = a^6$. Denn $a^3 = aaa$; folglich $aaa^2 = aaa.\ aaa = a^6$. Also $(x^m)^n = x^{mn}$.

Ein Product auf eine Potenz zu bringen, erhebe man jeden Factor zu der gesuchten Potenz. Z. B. $(a\,x)^5 = a^5\,x^5$; welches man nicht mit $(a+x)^5$ verwechseln muß.

14.

Hier folgen ein paar Beispiele von der Multiplicatio mit zusammengesetzten Größen und Potenzen.

$$
\begin{array}{l}
3x^4 - 2x^2 + 5x - 4 \\
x^3 - 5x - 4 \\
\hline
3x^7 - 2x^5 + 5x^4 - 4x^3 \\
\quad - 15x^5 + 10x^3 - 25x^2 + 20x \\
\qquad - 12x^4 + 8x^2 - 20x + 16 \\
\hline
3x^7 - 17x^5 - 7x^4 + 6x^3 - 17x^2 + 16
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
ax^m + hx - dy^3 + b \\
x - ay \\
\hline
ax^{m+1} + hx^2 - dy^3x + bx \\
\quad - a^2x^my - ahxy + ady^4 - aby \\
\hline
ax^{m+1} + hx^2 - a^2x^my - dy^3x - ahxy \\
\quad + bx + ady^4 - aby
\end{array}
$$

In diesem letzten Beispiele kommen drei Producte, nämlich $- dy^3x - ahxy + bx$ vor, die den gemeinschaftlichen Factor x, haben. Dieser läßt sich auf eine bequeme Art absondern, wenn man die übrigen in Klammern einschließt und mit x multipliciret; nämlich: $(- dy^3 - ahy + b)\,x$

In dem Absondern der Factoren muß man suchen, eine Fertigkeit zu erhalten, weil diese Arbeit in der Lehre von den Gleichungen oft mit Vortheil gebraucht werden kann.

Auf eben die Art lassen sich auch Potenzen von einander absondern, als $ay^3 - my^2 + xy = (ay^2 - my + x)\,y$.

Noch ist zu merken, daß $(a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$ und $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$- b^2$ giebt; oder die Summe zweier Zahlen mit ihrer Differenz multiplicirt, giebt die Differenz ihrer Quadrate.

Es sei $a = 7$ und $b = 5$; so ist die Differenz ihrer Quadrate $= 7^2 - 5^2 = 24$.

15.

Wenn man verschiedene Größen, die auch zusammengesetzt sein können, mit einander dividiren soll, so kann man diese Größen, entweder in der Form eines Bruchs unter einander schreiben, oder auch den Dividend und den Divisor einklammern, wobei aber das Zeichen der Divisio nicht außer Acht gelassen werden darf.

Es soll $b + dc$ durch $e + f$ getheilt werden, so schreibt man entweder den Quotienten so: $\frac{b + dc}{e + f}$ oder deutet ihn auch so an: $(b + dc) : (e + f)$.

Kommen im Dividend und im Divisor, gleiche Größen oder einerlei Buchstaben vor, so hebe man diese gegen einander auf, als $abc + gx : ab = \frac{abc + gx}{ab} = c + \frac{gx}{ab}$ und $aa - ab : ab = \frac{aa - ab}{ab} = \frac{a}{b} - 1 = \frac{a - b}{b}$ und; $b + c : b = 1 + \frac{c}{b}$. Denn b ist in b einmal, aber in c, $\frac{c}{b}$ mal enthalten.

Hat

Hat der Dividend und Divisor, Coefficienten bei sich, so theilt man erstlich diese durch einander, und sodann die gleichen Buchstaben. Z. B.

$$\frac{12\,aa - 4x}{4\,a} = 3a - \frac{x}{a}$$

16.

Auch die Potenzen lassen sich nach diesen Gründen leicht durch einander theilen. Denn $aa : a = a$; und $a^3 : a = a^2$. Offenbar steckt a in a^3, a^2 mal, weil $a^2 . a = a^3$ ist. Kürzer geschieht dieses, wenn man die Exponenten der Potenzen von einander abnimmt; oder wenn man von dem Exponenten des Dividends den Exponenten des Divisors abnimmt.

Also $a^6 : a^2 = a^4 = a^{6-2} = \frac{aaaaaa}{aa} = aaaa = a^4$. Allgemein $a^m : a^n = a^{m-n}$; $x^n : x = x^{n-1}$; $a^5 : a^6 = a^{-1} = \frac{1}{a}$; $a^2 :$ $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$; $a : a = 1 = \frac{a}{a} = a^0$. Daher ist jede Größe zur 0 Potenz = 1.

17.

Ist sowohl der Dividend als der Divisor eine zusammengesetzte Größe, so muß man versuchen, ob sich nicht beide, nach dem gewöhnlichen Verfahren der Divisio, und in gehöriger Rücksicht auf die Zeichen, durch einander theilen lassen. Man soll z. B. $aa - bb$

 durch

durch $a + b$ theilen, so wird der Quotient $a - b$ sein.

Denn
$$\begin{array}{l|l|l}
a - b & aa - bb & a - b \\
 & aa + ab & \\
 & \; - & \\
\hline
 & -ab - bb & \\
 & -ab - bb & \\
 & \;+ \quad\;\; + & \\
\hline
 & \quad 0 &
\end{array}$$

Hier sagt man, a ist in aa, a mal enthalten, und multiplicirt a, als den ersten Theil des Quotienten, mit dem Divisor $a + b$. Das Product ist $aa + ab$, welches von dem Dividend $aa - bb$ abgezogen, $-ab - bb$ übrig läßt. Nun ist a in $-ab$, $-b$ mal enthalten; welches der andere Theil des Quotienten ist. Multiplicirt man diesen mit $a + b$, so ist das Product $= -ab - bb$, welches abgezogen, nichts übrig läßt. Auf eben die Art ist man bei folgenden Beispielen zu Werke gegangen.

I.

$$\begin{array}{l|l|l}
3a - 2b & 12aa + 7ab - 10ab & 4a + 5b \\
 & 12aa - 8ab & \\
 & \quad\;\; + & \\
\hline
 & \qquad\; 15ab - 10bb & \\
 & \qquad\; 15ab - 10bb & \\
 & \qquad\; - \qquad\; + & \\
\hline
 & \qquad\quad 0 \qquad\; 0 &
\end{array}$$

II.

II.

$$
\begin{array}{llll}
a + b\,) & a^3 + b^3 & & (\,a^2 - ab + b^2 \\
 & a^3 + a^2b & & \\
 & - & & \\
\hline
 & - a^2b + b^3 & & \\
 & - a^2b - ab^2 & & \\
 & + \quad\; + & & \\
\hline
 & & + ab^2 + b^3 & \\
 & & + ab^2 + b^3 & \\
 & & - \quad\;\; - & \\
\hline
 & & \circ \quad\; \circ & \\
\end{array}
$$

III.

III.

$$
\begin{array}{l}
x^3 - 5x - 4 \left) \; 3x^7 - 17x^5 - 7x^4 + 6x^3 - 17x^2 + 16 \; \right(3x^4 - 2x^2 + 5x - 4 \\
\qquad\qquad\quad 3x^7 - 15x^5 - 12x^4 \\
\qquad\qquad\qquad\; + \qquad\; + \\
\hline
\qquad\qquad\qquad - 2x^5 + 5x^4 + 6x^3 \\
\qquad\qquad\qquad - 2x^5 + 10x^3 + 8x^2 \\
\qquad\qquad\qquad + \qquad\; - \qquad\; - \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad + 5x^4 - 4x^3 - 8x^2 - 17x^2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + 5x^4 \quad 0 \quad - 25x^2 - 20x \\
\qquad\qquad\qquad\qquad - \qquad - \qquad + \qquad + \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 4x^3 + 20x + 16 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 4x^3 + 20x + 16 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \qquad - \qquad - \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 \qquad 0 \qquad 0
\end{array}
$$

Geht die Division am Ende nicht auf, so setzt man den Rest in einen Bruch, wovon der Rest der Zähler und der Divisor der Nenner ist, wie man aus folgendem Beispiele sehen kann.

$$2y^2 + y \Big) \; 4y^6 - 8y^3 + 2y \; \Big(2y^4 - y^3 + \tfrac{1}{2}y^2 - 4\tfrac{1}{4}y + 2\tfrac{1}{8} + \frac{-\frac{1}{8}y}{2y^2 + y}$$

$$\begin{array}{l}
4y^6 + 2y^5 \\
\quad - \\
\hline
-2y^5 - 8y^3 \\
-2y^5 - y^4 \\
+ \quad\;\; + \\
\hline
+ y^4 - 8y^3 \\
+ y^4 + \tfrac{1}{2}y^3 \\
- \quad\;\; - \\
\hline
- 8\tfrac{1}{2}y^3 + 2y \\
- 8\tfrac{1}{2}y^3 - 4\tfrac{1}{4}y^2 \\
+ \quad\;\; + \\
\hline
+ 4\tfrac{1}{4}y^2 + 2y \\
+ 4\tfrac{1}{4}y^2 + 2\tfrac{1}{8}y \\
- \quad\;\; - \\
\hline
\text{Rest} = -\tfrac{1}{8}y
\end{array}$$

For-

Formeln zur Zusammensetzung der Potenzen, und deren Anwendung bei der Ausziehung der Wurzeln.

18.

Ich habe die Zusammensetzung der Quadrat- und Cubikzahlen schon im ersten Bande, in Zahlen, erläutert; hier will ich erklären, wie dieses mit Hülfe der Buchstaben-Rechnung, auf eine leichte, und dem Gedächtniß zu Hülfe kommende Art, bewerkstelliget werden könne.

Zu dem Ende nenne man eine Größe, die aus zwei Theilen besteht, binomisch; aus drei Theilen, trinomisch, und aus mehreren Theilen, multinomisch. Bezeichne die erstern mit $a + b$, die zweiten mit $a + b + c$ und die dritten mit $a + b + c + d$ u. s. w.

Nach den Regeln der Multiplicatio ist $(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$; und $(a + b + c)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2 + 2\,(a + b)\,c + c^2$.

Durch Hülfe der ersten Formel, lassen sich alle übrigen zusammensetzen, weil jede Größe auf eine zweitheilige zurückgeführt werden kann. Denn wenn die Wurzel aus drei Theilen, $a + b + c$ besteht, so nenne man die beiden erstern $a + b = a$ und $c = b$;

so ist $a^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$
$2\,ab = 2\,(a + b)\,c$ und
$b^2 = c^2$

Also

Also $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 = (a+b+c)^2$.

Es sei 567 gegeben; so ist $a = 500$; $b = 60$ und $c = 7$; also

$$\begin{array}{rcll} a^2 & = & 500^2 = 500 \cdot 500 & = 250000 \\ 2ab & = & 2 \cdot 500 \cdot 60 = & 60000 \\ b^2 & = & 60^2 = 60 \cdot 60 & = 3600 \\ 2(a+b)c & = & 2 \cdot 560 \cdot 7 \cdot & = 7840 \\ c^2 & = & 7^2 & = 49 \\ \hline \end{array}$$

folgl. $a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 = 321489$
567^2.

Hat die Wurzel vier Theile, nämlich $a+b+c+d$, so setze man für $a+b+c = a$ und für $d = b$. Mithin ist

$a^2 = (a+b+c)^2 =$ dem Quadrate einer 3 theiligen Wurzel.

$2ab = 2(a+b+c)d$

$b^2 = d^2$

Also $(a+b+c+d)^2 = (a+b+c)^2 + 2(a+b+c)d + d^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)d + d^2$.

19.

Ein dreitheiliges Quadrat besteht demnach aus dem zweitheiligen Quadrate, aus dem doppelten Producte der beiden ersten Theile multiplicirt in den dritten Theil, und aus dem Quadrate des dritten Theil der Wurzel.

Eben

Eben so eine viertheilige Wurzel, deren Quadrat ist aus dem Quadrate einer drittheiligen, aus dem doppelten Producte der drei ersten Theile multiplicirt in den vierten Theil, und aus dem Quadrate des vierten Theil der Wurzel, zusammengesetzt.

Nach diesem Gesetze läßt sich also jedes Quadrat zusammensetzen, die Wurzel mag aus so viel Theilen bestehen als sie wolle.

So ist $(a+b+c+d+e)^2 = (a+b+c+d)^2 + 2(a+b+c+d)e + e^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)d + d^2 + 2(a+b+c+d)e + e^2$.

20.

Nach einer der vorhergehenden Formeln läßt sich leicht, aus einer jeden gegebenen Zahl die Quadratwurzel ziehen, wenn man sich nämlich derjenigen Formel bedient, welche mit der Anzahl der Wurzeltheile der gegebenen Quadratzahl übereinkommt. Also bei einer zweitheiligen gebraucht man die Formel von $a^2 + 2ab + b^2$; bei einer dreitheiligen, $a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2$ u. s. w. Zur Uebersicht sei folgende Quadratzahl, deren Wurzel aus vier Theilen besteht, gegeben.

Auflösung. $a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)d + d^2$

$$\begin{array}{rl} & 23 \mid 65 \mid 84 \mid 96 \\ a^2 = & 16\;\;00\;\;00\;\;00 \\ \hline & 7\,6\,5\,8\,4\,9\,6 = 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)d + d^2 \\ 2a = & 8\,0\,0\,0 \\ b = & 8\,0\,0 \\ \hline 2ab = & 6\,4\,0\,0\,0\,0\,0 \\ b^2 = & 6\,4\,0\,0\,0\,0 \\ \hline & 7\,0\,4\,0\,0\,0\,0 \\ \hline & 6\,1\,8\,4\,9\,6 = 2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)d + d^2 \end{array}
\qquad
\left(\begin{array}{l} 4000 = a \\ 800 = b \\ 60 = c \\ 4 = d \end{array}\right. = 4864.$$

$2(a+b)$

$$
\begin{array}{rcl}
2(a+b) & = & 9600 \\
c & = & 60 \\
\hline
2(a+b)c & = & 576000 \\
c^2 & = & 3600 \\
\hline
 & & 579600 \\
\hline
 & & 38896 = 2(a+b+c)d + d^2 \\
2(a+b+c) & = & 9720 \\
d & = & 4 \\
\hline
2(a+b+c)d & = & 38880 \\
d^2 & = & 16 \\
\hline
 & & 38896 \\
\hline
 & & 0
\end{array}
$$

21.

Bei diesem Beispiele setze ich voraus, daß der Leser dasjenige, was ich im ersten Bande (V. Abschn. 292) über die Ausziehung und auch Zusammensetzung der Quadratzahlen gesagt, richtig verstanden habe; daß er den Grund davon weiß, warum jede gegebene Quadratzahl von der rechten zur linken Hand in Klassen, von zwei und zwei Ziefern, eingetheilt werden müsse: unter dieser Voraussetzung wird es jedem leicht werden, die Quadratwurzel nach der Formel anzu-

anzugeben. Daß man mit dem Doppelten des gefundenen Theils der Wurzel, nachdem das Quadrat des ersten Theil abgezogen worden ist, dividiren muß, sieht man aus $2ab + b^2$. Dieser ist $= 2(a+b)b$. Der Quotient ist $= b$; und eben so verfährt man, um den dritten, vierten u. s. w. Theil der Wurzel zu finden.

Indessen hat man nicht nöthig, sich jedesmal einer so weitläuftigen Formel zu bedienen, wie ich im vorigen Beispiele gethan habe; sondern man kann, bei jeder Quadrat-Wurzel, sie bestehe aus so viel Theilen als sie wolle, mit der Formel einer zweitheiligen Wurzel zurechte kommen, nämlich mit $a^2 + 2ab + b^2$.

Nach dieser Formel, nennt man alle vorhergehenden Theile, als den ersten Theil $= a$, verdoppele diese, um den Theiler zu finden; der Quotient ist $= b$.

12.

Multiplicirt man das Quadrat einer zweitheiligen Wurzel mit der Wurzel aufs neue, so erhält man die dritte Potenz oder den Cubus von einer zweitheiligen Größe.

$$
\begin{array}{lllllll}
(a+b)^2 = & a^2 & + 2ab & + b^2 & & & \\
& a & + b & & & & \\
\hline
& a^3 & + 2a^2b & + ab^2 & & & \\
& & + a^2b & + 2ab^2 & + b^3 & & \\
\hline
(a+b)^3 = & a^3 & + 3a^2b & + 3ab^2 & + b^3 & &
\end{array}
$$

Diese

Diese Formel ist im ersten Bande, (V. Abschn. 312) durch Worte und Zahlen, erläutert worden.

Besteht die Wurzel aus drei Theilen, a, b und c, so setze man $a + b = a$ und $b = c$; folglich ist

$$a^3 = (a + b)^3$$

und $$3a^2b = 3(a + b)^2 c$$

und $$3ab^2 = 3(a + b)c^2$$

$$b^3 = c^3$$

Also $(a + b + c)^3 = (a + b)^3 + 3(a + b)^2 c + 3(a + b)c^2 + c^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a + b)^2 c + 3(a + b)c^2 + c^3$.

Der Cubus einer dreitheiligen Wurzel besteht demnach aus dem Cubus einer zweitheiligen, aus dem dreifachen Quadrate der zwei ersten Theile multiplicirt mit dem dritten, aus dem dreifachen Producte der beiden ersten Theile multiplicirt mit dem Quadrate des dritten Theil und aus dem Cubus des dritten Theil der Wurzel. Nach eben dem Gesetze läßt sich der Cubus von jeder vieltheiligen Wurzel zusammensetzen. So ist $(a + b + c + d + e)^3 = (a + b + c + d)^3 + 3(a + b + c + d)^2 e + 3(a + b + c + d)e^2 + e^3 = (a + b + c)^3 + 3(a + b + c)^2 d + 3(a + b + c)d^2 + d^3 + 3(a + b + c + d)^2 e + 3(a + b + c + d)e^2 + e^3 = (a + b)^3 + 3(a + b)^2 c + 3(a + b)c^2 + c^3 + 3(a + b + c)^2 d + 3(a + b + c)d^2 + d^3 + 3(a + b + c + d)^2 e + 3(a + b + c + d)e^2 + e^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a + b)^2 c + 3(a + b)c^2 + c^3 +$

3 (a +

$3\,(a+b+c)^2\,d + 3\,(a+b+c)\,d^2 + d^3 + 3\,(a+b+c+d)^2\,e + 3\,(a+b+c+d)\,e^2 + e^3.$

Nach dem letzten Ausdrucke läßt sich nun der Cubus von 48642 auf folgende Ar zusammensetzen. Diese Zahl besteht aus 40000 + 8000 + 600 + 40 + 2.

a^3	$= 40{,}000^3$	$= 64000000000000$
$3\,a^2b$	$= 3 \cdot 40{,}000^2 \cdot 8000$	$= 38400000000000$
$3\,ab^2$	$= 3 \cdot 40{,}000 \cdot 8000^2$	$= 7680000000000$
b^3	$= 8000^3$	$= 512000000000$
$3\,(a+b)^2\,c$	$= 3 \cdot 48000^2 \cdot 600$	$= 4147200000000$
$3\,(a+b)\,c^2$	$= 3 \cdot 48000 \cdot 600^2$	$= 51840000000$
c^3	$= 600^3$	$= 216000000$
$3\,(a+b+c)^2\,d$	$= 3 \cdot 48600^2 \cdot 40$	$= 283435200000$
$3\,(a+b+c)\,d^2$	$= 3 \cdot 48600 \cdot 40^2$	$= 233280000$
d^3	$= 40^3$	$= 64000$
$3\,(a+b+c+d)^2\,e$	$= 3 \cdot 48640^2 \cdot 2$	$= 14195097600$
$3\,(a+b+c+d)\,e^2$	$= 3 \cdot 48640 \cdot 2^2$	$= 483580$
e^3	$= 2^3$	$= 8$
$(48642)^3$		$= 115089120225288$

23.

So wie ich hier den Cubus zusammengesetzt habe, eben so läßt sich aus demselben, nach der Formel, die Wurzel finden. Ich will zu dem Ende dasselbe Beispiel wahlen, woven im vorigen der Cubus gefunden worden ist.

$$
\begin{array}{lcl}
 & & 115 \mid 089 \mid 120 \mid 225 \mid 288 \\
a^3 & = & 64 \quad 000 \quad 000 \quad 000 \quad 000 \\
\hline
 & & 51\,089\,120\,225\,288 \\
3a^2 & = & 4800000000 \\
b & = & 8000 \\
\hline
3a^2b & = & 38400000000000 \\
3ab^2 & = & 7680000000000 \\
b^3 & = & 512000000000 \\
\hline
 & & 46592000000000 \\
\hline
 & & 4497120225288
\end{array}
\qquad
\left(\begin{array}{r}
40000 = a \\
8000 = b \\
600 = c \\
40 = d \\
2 = e
\end{array}\right\} 48642,
$$

$3(a+b)^2$	=	6912000000
c	=	600
$3(a+b)^2c$	=	4147200000000
$3(a+b)c^2$	=	51840000000
c^3	=	216000000
		4199256000000
		297864225288
$3(a+b+c)^2$	=	7085880000
d	=	40
$3(a+b+c)^2d$	=	283435200000
$3(a+b+c)d^2$	=	233280000
d^3	=	64000
		283668544000
		14195681288
$3(a+b+c+d)^2$	=	7097548800
e	=	2
$3(a+b+c+d)^2e$	=	14195097600
$3(a+b+c+d)e^2$	=	583680
c^3	=	8
		14195681288
		0

24.

Die Ausziehung der Cubikwurzel wird dadurch sehr erleichtert, wenn man die ganze Arbeit auf eine zweitheilige Cubikwurzel bringt; weil jede Zahl, sie mag so groß sein als sie wolle, auf eine zweitheilige Zahl zurückgeführt werden kann. Folglich gilt die Formel $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ allgemein. Der jedesmalige Theiler ergiebt sich aus $(3a^2 + 3ab + b^2)b$; oder da derselbe schon in $3a^2b$ enthalten ist, so braucht man nur mit $3a^2$ zu theilen, um b zu finden. Das, was noch daran fehlt, kann durch b ergänzt werden.

25.

Multiplicirt man den Cubus oder die dritte Potenz aufs neue mit der Wurzel, so erhält man die vierte Potenz; und setzt man diese Multiplicatio fort, so ergeben sich alle höhere Potenzen von einer zwei-, drei- oder vieltheiligen Wurzel. Nun wird aber sowohl die Erhebung der Zahlen zu den Potenzen, als auch die Ausziehung der Wurzel aus denselben, nicht nur weitläuftiger, sondern wegen der vielen Theilen, aus welchen sie zusammengesetzt sind, auch verwickelter. Daher hat man einen Satz erfunden, vermittelst welchen nicht nur jede Potenz, sie sei so hoch als sie wolle, zusammengesetzt, sondern auch durch ihn, aus jeder zusammengesetzten Potenz, die Wurzel gefunden werde. Man nennt ihn den binomischen Lehrsatz.

Ich

Ich will, in den hier zunächst folgenden Paragraphen, versuchen, von diesem Satze einen leichten aber doch klaren Beweis zu geben, und dann denselben mit einzelnen Beispielen erläutern.

26.

Satz. Wenn eine Größe, $a + b$, die aus zwei Theilen, nämlich a und b besteht, nach und nach mit einander multipliciret wird, so entstehen bekanntlich die Potenzen dieser zusammengesetzten oder zweitheiligen Größe, auf folgende Art:

1) $(a+b)^1 = a + b$
2) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
3) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
4) $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
5) $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Nach diesen Formeln lassen sich die Potenzen von allen übrigen Größen, sie mögen aus so vielen Theilen bestehen, als sie wollen, zusammensetzen.

Man solle z. B. die dritte Potenz, oder den Cubus von $3x + 5y + 2z$ bestimmen: so setze man $3x + 5y = a$, und $2z = b$. Also $(3x + 5y + 2z)^3 = (a + b)^3$. Es ist aber

$$
\begin{aligned}
a^3 &= (3x + 5y)^3 = 27x^3 + 135x^2y + 225xy^2 + 125y^3 \\
3a^2b &= 3(3x + 5y)^2\, 2z = 54x^2z + 180xyz + 150y^2z \\
3ab^2 &= 3(3x + 5y)\, 2z^2 = 36xz^2 + 60y^2 \\
b^3 &= (2z)^3 = 8z^3
\end{aligned}
$$

Also $(3x + 5y + 2z)^3 = 27x^3 + 135x^2y + 225xy^2 + 125y^3 + 54x^2z + 180xyz + 150y^2z + 36xz^2 + 60y^2 + 8z^3$.

Läßt sich eine jede Größe nach der binomischen Formel zusammensetzen, so müssen sich auch nach eben der Formel, die Theile, aus welchen sie zusammengesetzt sind, das heißt, die W u r z e l derselben, bestimmen lassen.

27.

Um nun zu zeigen, nach welchem Gesetze die Potenzen von $a + b$ zunehmen, so kommen hierbei zwei Stücke vor. Erstlich, muß man das Gesetz herauszubringen suchen, nach welchem die Potenzen von $a + b$ zu- und abnehmen; zweitens, die Zahlen bestimmen, worin die Potenzen multiplicirt sind. Diese letztern heißen die C o e f f i c i e n t e n. So sind bei der 3ten Potenz

Potenz von $a + b$, die einzelnen Potenzen a^3 $a^2 b$ ab^2 und b^3; die Coefficienten aber 1, 3, 3, 1.

Die ersten entstehen, indem a mit der Potenz anfängt, auf welche sie gebracht werden soll, und b mit eben der Potenz beschließt. Die Potenz von a nimmt um eine Einheit, in jedem folgenden Gliede, bis a^0 ab, und b nimmt in eben der Ordnung zu. Oder sieht man die einzelnen Producte als Glieder der dritten Potenz von $a + b$ an, so ist das erste Glied ein Product von a^3 multiplicirt in $b^0 = 1$; das zweite Glied ist $= a^2$ multiplicirt in b; (hier nimmt also die Potenz von a um eine Einheit ab, und b um eine Einheit zu) das dritte Glied ist a multiplicirt in b^2, und das vierte $a^0 = 1$ multiplicirt in b^3. Hiernach läßt sich also jede Potenz von $a + b$ zusammensetzen.

28.

Aufgabe. Man soll die Glieder-Potenzen von $a+b$ zur 5ten Potenz bestimmen.

Auflösung. Man fange mit der Potenz von a^5 an, und gehe bis zu $a^0 = 1$; setze unter diese die Potenz von $b^0 = 1$, und gehe bis zu b^5 fort. Multiplicire hierauf die beiden Potenzen von a und b mit einander, so ergeben sich die einzelnen Glieder-Producte der verlangten Potenz. Demnach ist

$$\begin{array}{lccccccccl} & & a^5 & a^4 & a^3 & a^2 & a^1 & a^0 & & \text{multiplicirt} \\ \text{mit} & & b^0 & b^1 & b^2 & b^3 & b^4 & b^5 & & \text{giebt} \\ \hline \text{zum Producte} & = & a^5b^0 & a^4b^1 & a^3b^2 & a^2b^3 & ab^4 & a^0b^5 & = & \\ & & a^5 & a^4b & a^3b^2 & b^2b^3 & ab^4 & b^5. & & \end{array}$$

Die Potenzen-Glieder kommen mit No. 5 völlig überein.

Die Potenz für $(a+b)^9$ sind daher aus eben dem Grunde

$$\begin{array}{cccccccccc} a^9 & a^8 & a^7 & a^6 & a^5 & a^4 & a^3 & a^2 & a^1 & 1 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 & b^5 & b^6 & b^7 & b^8 & b^9 \\ \hline a^9 & a^8b & a^7b^2 & a^6b^3 & a^5b^4 & a^4b^5 & a^3b^6 & a^2b^7 & ab^8 & b^9 \end{array}$$

Trift dieses in Zahlen ein, so muß es auch allgemein wahr sein.

Daher ist $(a+b)^m = a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + a^{m-3}b^3 + a^{m-4}b^4 + a^{m-5}b^5$ u. s. w.

Mit

Mit den Potenzen wären wir in Ordnung; aber nun müssen wir uns bemühen, das Gesetz für die Coefficienten zu finden. Dieses gründet sich vorzüglich auf die Versetzung, oder Combination der Zahlen.

29.

Man nehme eine beliebige Größe a, an, so läßt sich diese nur einmal versetzen. Eben dies ist der Fall von a^2, a^3, a^4, a^m u. s. w., und aus dem Grunde ist der Coefficient des ersten Gliedes von irgend einer Potenz der $a + b$, allemal $= 1$. Nun nehme man zwei verschiedene Größen, a und b an, so lassen sich diese zweimal versetzen. Einmal a b, und zweitens, b a. Setzt man dazu die dritte Größe c, so kann man diese, zu jeder der beiden vorigen, vorne und hinten, dann wieder zwischen beiden, oder in die Mitte derselben setzen; also in allen sechsmal.

Denn 1) c a b; 2) a b c; 3) c b a; 4) b a c; 5) a c b und 6) b c a. Kömmt noch die vierte Größe d hinzu, so kann diese viermal ihre Stelle, in jeder der drei vorhergehenden Größen, verändern, also im ganzen 24 mal, wie aus folgender Versetzung erhellet:

c a b d	a b c d	c b a d	b c a d	b a c d	a c b d
c a d b	a b d c	c b d a	b c d a	b a d c	a c d b
c d a b	a d b c	c d b a	b d c a	b d a c	a d b c
d c a b	d a b c	d c b a	d b c a	d b a c	d a c b

Käme

Käme noch eine Größe, e, dazu, so ließe sich diese mit den vier vorhergehenden Größen fünfmal verbinden; das heißt, in allen 120 mal; oder überhaupt ließen sich fünf verschiedene Buchstaben 120 mal versetzen.

30.

Hieraus folgt also, daß sich verschiedene Größen so vielmal versetzen lassen, als das Product beträgt, das aus der Multiplicatio der Größen, wenn diese mit 1, 2, 3, 4, u. s. w. bezeichnet werden, herauskömmt. Für 4 verschiedene Größen ist die Combination demnach: 1. 2. 3. 4 = 24; für 5 = 1. 2. 3. 4. 5 = 120; für 6 = 1. 2. 3. 4. 5. 6 = 720 u. s. w. Hierauf gründen sich einzelne Aufgaben der Alten, wie oft z. B. eine Person, unter mehrern, die Stelle am Tische verändern könne und andre mehr. Wenn man aber drei Größen hat, davon zwei sich einander gleich sind, so lassen sich diese nicht sechsmal, sondern nur dreimal versetzen. Denn man nehme a b b an, so kann man ausser dieser, die drei Größen nur noch zweimal, nämlich b b a und b a b setzen. Sind vier Größen, wovon drei einander gleich sind, a b b b gegeben; so lassen sich diese nicht, wie vorhin, wenn sie ungleich wären, 24 mal, sondern nur viermal versetzen. Denn 1) a b b b; 2) b b b a; 3) b a b b und 4) b b a b. Sind 5 Größen, wovon sich vier einander gleich sind, gegeben, so lassen sie sich nicht 1. 2. 3. 4. 5 = 120, sondern

nur

nur fünfmal versetzen u. s. w. Hieraus folgt also diese Regel:

Man finde die Combination der Größen erstlich so, als wenn die Größen alle verschieden wären; dieses Product dividire man durch ein anderes Product, das aus 1. 2. 3. 4 u. s. w. besteht, so oft nämlich die eine Größe wiederholt mal vorkömmt. So z. B. läßt sich die Größe a^5b, sechsmal versetzen.

$$\text{Denn } a^5b = aaaaab = \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.4.5} = \frac{6}{1} = 6$$

Der Divisor 1. 2. 3. 4. 5 = 120 entsteht aus der Größe $a^5 = aaaaa$

Kommen vier Größen vor, wovon sich zwei und zwei einander gleich sind, wie aabb, so lassen sich diese sechsmal versetzen. Nämlich aabb, bbaa, baba, abba, baab und abab.

Diese Versetzung kommt heraus, wenn man 24, durch vier dividirt, weil jede Größe für sich zweimal vorkommt. Daher läßt sich die Versetzung durch folgenden Quotienten ausdrucken: $\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.}{1.\ 2.\ 1.\ 2.} = 6.$ Hat man a^3b^2, so ist die Combination $= \frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.}{1.\ 2.\ 3.\ 1.\ 2.} = 10.$ Man dividirt mit 1, 2, 3, weil a dreimal, und dann nach mit 1, 2, weil b zweimal in a^3b^2 vorkommt.

31.

31.

Nach dieser gegebenen Erklärung lassen sich nun die Coefficienten der Potenzen leicht bestimmen. Zum Beispiel wollen wir die Coefficienten von $(a + b)^5$ angeben. Da die Potenzen schon vorhin gefunden sind, so brauchen wir aus diesen die Coefficienten für die einzelnen Glieder nur anzugeben. Das erste Glied ist a^5; dieses läßt sich nur einmal versetzen. Also ist der Coefficient $= 1$.

Das zweite Glied ist $a^4 b$; welches eine Versetzung leibet von $\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 1.} = \frac{5}{1} = 5 =$ dem Coefficienten des zweiten Gliedes.

Das dritte Glied ist $a^3 b^2$. Die Versetzung ist $= \frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}{1.\ 2.\ 3.\ 1.\ 2} = \frac{4.\ 5}{1.\ 2} = \frac{5.\ 4}{1.\ 2} = 10 =$ dem Coefficienten des dritten.

Das vierte Glied ist $a^2 b^3$, und giebt zum Coefficienten $\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}{1.\ 2.\ 1.\ 2.\ 3} = \frac{5.\ 4.\ 3}{1.\ 2.\ 3} = 10.$

Das fünfte Glied ist $a b^4$ und kann, wie das zweite Glied, fünfmal versetzt werden; weil b viermal darin vorkömmt Endlich das sechste Glied ist b^5, welches zum Coefficienten nur 1 bekommt.

Die Coefficienten der fünften Potenz von $a + b$ sind demnach 1. 5. 10. 10. 5. 1.

Zur

Zur 6ten Potenz lassen sie sich eben so leicht bestimmen, wenn man vorher die Potenzen der einzelnen Glieder nur hinschreibt. Diese sind

$a^6 \quad a^5b \quad a^4b^2 \quad a^3b^3 \quad a^2b^4 \quad ab^5 \quad b^6$

Dazu gehören folgende Coefficienten:

$$a^6 = 1;$$
$$a^5b = \frac{6}{1} = 6$$
$$a^4b^2 = \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.4.1.2} = \frac{6.5}{1.2} = 15$$
$$a^3b^3 = \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.1.2.3} = \frac{6.5.4}{1.2.3} = 20$$
$$a^2b^4 = \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.1.2.3.4} = \frac{6.5}{1.2} = 15$$
$$ab^5 = \frac{1.2.3.4.5.6}{1.1.2.3.4.5} = 6$$
$$b^6 = 1$$

Also ist $(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$.

Nach eben dem Gesetze ergeben sich die Coefficienten von jeder Potenz von $a + b$. So ist

$(a+b)^{10}$

$$(a+b)^{10} = a^{10} + \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}$$

$$a^9 b + \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}{1.2.3.4.5.6.7.8.1.2}\, a^8 b^2 + \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}{1.2.3.4.5.6.7.1.2.3}\, a^7 b^3$$

$$+ \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}{1.2.3.4.5.6.1.2.3.4}\, a^6 b^4 + \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}{1.2.3.4.5.1.2.3.4.5}\, a^5 b^5$$

$$+ \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}{1.2.3.4.1.2.3.4.5.6}\, a^4 b^6 + \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}{1.2.3.1.2.3.4.5.6.7}\, a^3 b^7$$

$$+ \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}{1.2.1.2.3.4.5.6.7.8}\, a^2 b^8 + \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.1}\, a b^9$$

$$+ b^{10}$$

$$+ b^{10} = a^{10} + 10a^9b + \frac{10.\ 9}{1.\ 2} a^8b^2$$

$$+ \frac{10.\ 9.\ 8}{1.\ 2.\ 3} a^7b^3 + \frac{10.\ 9.\ 8.\ 7}{1.\ 2.\ 3.\ 4} a^6b^4$$

$$+ \frac{10.\ 9.\ 8.\ 7.\ 6}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} a^5b^5 + \frac{10.\ 9.\ 8.\ 7.\ 6.\ 5}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6} a^4b^6$$

$$+ \frac{10.\ 9.\ 8.\ 7.\ 6.\ 5.\ 4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7} a^3b^7$$

$$+ \frac{10.\ 9.\ 8.\ 7.\ 6.\ 5.\ 4.\ 3}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8} a^2b^8$$

$$+ \frac{10.\ 9.\ 8.\ 7.\ 6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9} ab^9 + b^{10}$$

$$= a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 120a^7b^3$$
$$+ 210a^6b^4 + 252a^5b^6 + 210a^4b^6$$
$$+ 120a^3b^7 + 45a^2b^3 + 10ab^9 + b^{10}.$$

32.

Aus den hier multiplicirten Beispielen erhellet, daß die Coefficienten bis zu dem mittlern Gliede der Reihe steigen, und dann in eben der Ordnung wieder abnehmen, in welcher sie gewachsen sind; und daher braucht man nur von jeder Potenz die Coefficienten vom ersten bis zum mittelsten Gliede zu bestimmen, weil die folgenden einerlei sind mit den vorhergehenden.

Allge-

Allgemein läßt sich also die Potenz von $(a+b)^m$ durch folgende Reihe ausdrücken, als:

$$(a+b)^m = a^m + m a^{m-1} b + \frac{m\,\overline{m-1}}{1.\ 2} a^{m-2} b^2$$

$$+ \frac{m\,\overline{m-1}\,\overline{m-2}}{1.\ 2.\ 3} a^{m-3} b^3$$

$$+ \frac{m.\ \overline{m-1}.\ \overline{m-2}.\ \overline{m-3}}{1.\ 2.\ 3.\ 4} a^{m-4} b^4 \text{ u. s. w.}$$

Aber $a^{m-1} = \frac{a^m}{a}$ und $a^{m-2} = \frac{a^m}{a^2}$ u. s. w.

Daher läßt sich auch diese Reihe in folgende darstellen: $(a+b)^m = a^m + m.\ \frac{a^m b}{a} +$

$$\frac{m.\ \overline{m-1}.\ \overline{m-2}.}{1.\ 2.\ 3.} \frac{a^m b^3}{a^3} + \frac{m.\ \overline{m-1}.\ \overline{m-2}.\ \overline{m-3}.}{1.\ 2.\ 3.\ 4.} \frac{a^m b^4}{a^4} \text{ u. s. w.}$$

In dieser Reihe kömmt a^m in jedem Gliede vor. Dafür setze man P^m. Eben so kömmt auch $\frac{a}{b}$ in jedem Gliede der Reihe vor, wofür sich auch eine andere beliebige Größe annehmen läßt. Ich wähle hier

hier den Buchstaben Q, den ich $= \frac{b}{a}$ setze. Demnach hat man

$$(a+b)^m = P^m + m P^m Q + \frac{m.m-1}{1.\;2} P^m Q^2 + \frac{m.m-m-2}{1.\;2.\;3} P^m Q^3 + \frac{m.m-1.m-2.m-3.}{1.\;2.\;3.\;4} P^m Q^4 \text{ u. s. w.}$$

Ferner läßt sich jedes Glied der Reihe in Factores zerlegen, davon einer das vorhergehende Glied ausmacht. So ist das zweite Glied der Reihe aus dem ersten Gliede multiplicirt in $m\,Q$; das dritte aus dem zweiten Gliede multiplicirt in $m-1.\;Q$. u. s. w. zusammengesetzt. Oder $m.\;P^m Q = P^m\, m\, Q$ und $\frac{m.\;m-1}{1.\;2} P^m Q^1 = m\, P^m\, Q\, \frac{m-1}{2} Q$ u. s. w.

Man setze demnach für $P^m = A$; so ist das zweite Glied $= m\,A\,Q$. Dieses nenne man B; folglich ist das dritte Glied $= \frac{m-1}{2} B\,Q$, welches $= C$ u. s. w. gesetzt wird, wodurch dann endlich die erste Reihe in folgende, sehr einfache, und bequemere wie die vorige, übergeht.

$(a+b)^m$

$$(a+b)^m = P^m + m A Q + \frac{m-1}{2} B Q + \frac{m-2}{3} C Q + \frac{m-3}{4} D Q + \frac{m-4}{5} E Q \text{ u. s. w.}$$

wo die Buchstaben A, B, C, D und E, immer die vorhergehenden Glieder andeuten.

Aber m kann auch einen gebrochenen Exponenten $= \frac{n}{p}$ vorstellen; und in diesem Fall muß man, wo m, in der Reihe vorkommt, $\frac{n}{p}$, setzen.

Demnach ist $P^{\frac{n}{p}} + \frac{n}{p} A Q + \frac{n-p}{2p} B Q + \frac{n-2p}{3p} C Q + \frac{n-3p}{4p} D Q + \frac{n-4p}{5p} E Q$

Das hieße so viel als man sollte aus P^n u. s. w. die Wurzel von der Potenz p bestimmen. Diese beiden Ausdrücke sind hinlänglich, Potenzen zusammenzusetzen, und zu zerlegen. Zu jener Arbeit bedient man sich der ersten, und zu dieser der letzten Reihe.

Ein paar Beispiele mögen hier zur Erläuterung beider Reihen, diesen Beweis beschließen.

33.

Aufgabe. Man soll $\frac{1}{4}x + 3y$ zur 6ten Potenz erheben.

Auflösung. Setze $\frac{1x}{4} = P$; $\frac{3y}{\frac{1}{4}x} = \frac{12y}{x} = Q$; $m = 6$. Demnach ist:

$$P^m = (\tfrac{1}{4}x)^6 = \tfrac{1}{4096}x^6 = A.$$

$$mAQ = 6.\tfrac{1}{4096}x^6 \frac{12y}{x} = \tfrac{3}{172}x^5y = B.$$

$$\frac{m-1}{2}BQ = \tfrac{5}{2}.\tfrac{3}{172}x^5y.\frac{12y}{x} = \tfrac{45}{86}x^4y^2 = C.$$

$$\frac{m-2}{3}CQ = \tfrac{4}{3}.\tfrac{45}{86}x^4y^2\frac{12y}{x} = \tfrac{360}{43}x^3y^3 = D.$$

$$\frac{m-3}{4}DQ = \tfrac{3}{4}.\tfrac{360}{43}x^3y^3\frac{12y}{x} = \tfrac{3240}{43}x^2y^4 = E.$$

$$\frac{m-4}{5}EQ = \tfrac{2}{5}.\tfrac{3240}{43}x^2y^3\frac{12y}{x} = \tfrac{7776}{43}xy^5 = F.$$

$$\frac{m-5}{6}FQ = \tfrac{1}{6}.\tfrac{7776}{43}xy^5\frac{12y}{x} = \tfrac{15552}{43}y^6 = G.$$

$$\frac{m-6}{7}GQ = \tfrac{0}{7}.\tfrac{15552}{43}y^6\frac{12y}{x} = 0.$$

Es ist also $(\frac{1}{4}x + 3y)^6 = \frac{1}{4096}x + \frac{3}{172}x^5y + \frac{45}{86}x^4y^3 + \frac{360}{43}x^3y^3 + \frac{3240}{43}x^2y^4 + \frac{7776}{43}xy^5 + \frac{15552}{43}y^6$.

Auf eben die Art ist $(\frac{1}{2}x + 2y)^5 = \frac{1}{32}x^5 + \frac{5}{8}x^4 y + 5x^3y^2 + 20x^2y^3 + 40xy^4 + 32y^5$.

34.

Aufgabe. Man soll $(1+x)(1-x)^{\frac{1}{10}} = (1+x)\sqrt[10]{(1-x)}$ angeben.

Auflösung. Um hier den Factor $1-x^{\frac{1}{10}}$ zu bestimmen, muß man sich der zweiten Reihe bedienen; darnach kann man so viele Glieder nehmen, als man nur will. Hat man den Werth genau genug gefunden, so muß man denselben mit $1+x$ multipliciren. Zu dem Ende setze man $P=1$; $Q = \frac{-x}{1} = -x$, und $\frac{-}{} = \frac{1}{10}$; so ergiebt sich folgende Auflösung:

$$P^{\frac{n}{p}} = 1^{\frac{1}{10}} = 1 = A.$$

$$\frac{n}{p} AQ = \frac{1}{10}\, 1 - x = -\frac{1}{10}x = B.$$

$$\frac{n-p}{2p} BQ = \frac{1-10}{2.\ 10} \cdot -\frac{1}{10}x = -\frac{9}{200}x^2 = C.$$

$$\frac{n-2p}{3p} CQ = \frac{1-20}{3.\ 10} \cdot -\frac{9}{200}x = -\frac{171}{6000}x^3 = D.$$

$$\frac{n-3p}{4p} DQ = \frac{1-30}{4.\ 10} \cdot -\frac{171}{6000}x^3 - x = \frac{4959}{240000}x^3 \text{ u. s. w.}$$

Dem;

Demnach ist

$$(1-x)^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{(1-x)} = 1 - \frac{1}{10}x - \frac{9}{200}x^2 - \frac{171}{6000}x^3 - \frac{4959}{240000}x^4 \text{ u. s. w.}$$

Diesen Ausdruck multiplicire man mit $1 + x$

$$\begin{array}{l} 1 - \frac{1}{10}x - \frac{9}{200}x^2 - \frac{171}{6000}x^3 - \frac{4959}{240000}x^4 \\ \quad + x - \frac{1}{10}x^2 - \frac{9}{200}x^3 - \frac{171}{6000}x^4 \\ \hline \end{array}$$

so ist $(1+x)(1-x)^{\frac{1}{10}} = 1 + \frac{9}{10}x - \frac{29}{200}x^2 - \frac{147}{2000}x^3 - \frac{3933}{80000}x^4$ u. s. w.

Herr Hofrath Kästner ist, so viel mir bekannt, der erste gewesen, der einen allgemeinen Beweis von diesem Satze, durch die Rechnung des unendlichen gegeben hat. Auch Herr Mitterpacher giebt durch den Weg der Analysis endlicher Größen, einen allgemeinen Beweis davon. Man sehe dessen Unterricht in der mathematischen Analysis, im ersten Bande, S. 184. VIII Abschn.

35.

Wenn man a — b auf eine beliebige Potenz bringen will, so kann man diese auf eben die Art bestimmen, wie a + b; nur mit dem Unterschiede, daß die Zeichen + und — abwechseln. So ist $(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$, und so mit allen übrigen.

Die Verbindung der Nummern des bekannten Zahlen-Lotto, gründet sich ganz auf dem binomischen Lehrsatz. Bekanntlich besteht dieses Lotto aus 90 Nummern, wovon aber nur jedesmal fünfe gezogen werden. Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Nummer getroffen werde, ist wie 1 : 90 = 1 : 18; daß zwei Nummern, oder eine sogenannte Ambe fällt, ist aus dem Verhältniß von $\frac{10}{1} : \frac{90 \cdot 89}{1 \cdot 2} = 10 : 4005 = 1 : 400\frac{1}{2}$ zusammengesetzt. Denn in 5 Nummern sind 10 Amben, in 90 aber 4005 enthalten; also ist die Wahrscheinlichkeit, daß man auf 5 Nummern eine Ambe zieht, wie $1 : 400\frac{1}{2}$. Sollen 3 Nummern, oder eine Terne, von 5 Nummern getroffen werden, so ist die Wahrscheinlichkeit, wie $\frac{10}{1} : \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10 : 117480 = 1 : 11748$; oder unter 11748 Fälle ist nur ein einziger Fall wahrscheinlich, wo eine Terne fällt. Um vier Nummern von 5 zu gewinnen, ist die Wahrscheinlichkeit,

wie

wie $5 : \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5 : 2555190 =$ $1 : 511038$. Und um alle 5 Nummern, oder eine sogenannte **Quine** zu gewinnen, ist die Wahrscheinlichkeit, wie $1 : 43,949268$.

Hieraus sieht man, wie höchst unsicher es ist, sein Glück, einer Lotterie von der Art, anzuvertrauen.

17.

Die Formel $(a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{n-4} b^4$ u. s. w. dienet, wie ich schon in 33 und 34 gezeigt habe, zu der Zusammensetzung und Ausziehung aller Wurzeln, denn man braucht für n nur zu setzen, was man Lust hat, so ergiebt sich dadurch die Reihe. Ist $n = \frac{1}{2}$, so bedeutet $(a+b) = (a+b)^{\frac{1}{2}}$ d. i. $\sqrt{(a+b)}$ $= a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}-1} b + - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} a^{-\frac{3}{2}} b^2 + \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{6} a^{-2\frac{1}{2}} b^3 - \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{8} a^{-3\frac{1}{2}} b^4$ u. s. w. $=$

$\sqrt{a} + \frac{1}{2} \sqrt{a}$

$$\sqrt{a} + \tfrac{1}{2}\sqrt{a}^{\,-1} b - \tfrac{1}{8}\sqrt{a}^{\,-3} b^2 + \tfrac{1}{16}\sqrt{a}^{\,-5} b^3 - \tfrac{5}{128}\sqrt{a}^{\,-7} b^4 \text{ u. s. w.}$$

Aber $a^{-1} = \frac{1}{a}$; und $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$; und $a^{-5} = \frac{1}{a^5}$ u. s. w.

Also ist die ebengefundene Reihe =

$$\sqrt{a} + \frac{\sqrt{a}}{a} b - \tfrac{1}{8}\frac{\sqrt{a}}{aa} b^2 + \tfrac{1}{16}\frac{\sqrt{a}}{a^3} b^3 - \tfrac{5}{128}\frac{\sqrt{a}}{a^4} b^4 \text{ u. s. w.}$$

Diese Reihe, die beständig, oder wie man sich hier ausdrückt, ins unendliche fortgeht, stellt also den Werth von der Quadratwurzel vor.

Ist $n = \frac{1}{3}$, so hat man die Cubicwurzel aus $a + b$ =

$$\sqrt[3]{a} + \tfrac{1}{3} a^{\frac{1}{3}-1} b - \tfrac{1}{9} a^{\frac{1}{3}-2} b^2 + \tfrac{5}{81} a^{\frac{1}{3}-3} b^3 \text{ u. s. w.}$$

$$\sqrt[3]{a} + \tfrac{1}{3}\frac{\sqrt[3]{a}}{a} b - \tfrac{1}{9}\frac{\sqrt[3]{a}}{a^2} b^2 + \tfrac{5}{81}\frac{\sqrt[3]{a}}{a^3} - \tfrac{10}{243}\frac{\sqrt[3]{a}}{a^4} \text{ u. s. w.}$$

Ist

Ist $n = \frac{1}{4}$; so ist $\sqrt[4]{(a + b)} = (a + b)^{\frac{1}{4}} =$

$$a^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} a^{\frac{1}{4}-1} b - \frac{3}{8} a^{\frac{1}{4}-2} b^2 + \frac{7}{32} a^{\frac{1}{4}-3} b^3 \text{ u. s. w.}$$

$$= \sqrt[4]{a} + \frac{1}{4} \frac{\sqrt{a}}{a} b - \frac{3}{8} \frac{\sqrt{a^4}}{aa} b^2 + \frac{7}{32} \frac{\sqrt{a^4}}{a^3} b^3 \text{ u. s. w.}$$

37.

Aus dem vorigen ist bekannt, daß $\frac{1}{a}$ durch a^{-1} ausgedruckt werden kann; und so auch $\frac{1}{a^2} = a^{-2}$ u. s. w. Folglich ist $\frac{1}{a+b} = (a+b)^{-1}$ und $\frac{1}{(a+b)^2} = (a+b)^{-2}$

Daher läßt sich auch dieser Ausdruck durch dem binomischen Satze auf eine unendliche Reihe bringen.

bringen. Denn $\frac{1}{(a+b)^{n}} = (a+b)^{-n} = a^{-n} - n\,a^{-n-1}\,b + \frac{n.\,n+1}{1.\;2}$

$a^{-n-2}\,b^{2} - \frac{n.\,n+1.\,n+2}{1.\;2.\;3}\,a^{-n-3}\,b^{3}$ u. s. w. $=$

$\frac{1}{a^{n}} - \frac{n}{1}\,\frac{b}{a^{n+1}} + \frac{n.}{1}\,\frac{n+1}{2}\,\frac{b^{2}}{a^{n+2}} - \frac{n}{1}\,\frac{n+1}{2}\,\frac{n+2}{3}\,\frac{b^{3}}{a^{n+3}}$ u. s. w.

Für $(a+b)^{-1}$ entsteht folgende Reihe:

$a^{-1} - -1\,a^{-1-1}\,b + \frac{-1.\,-1-1}{1.\;2}\,a^{-1-2}\,b^{2} + \frac{-1.\,-1-1\,-1-2}{1.\;2.\;3}\,a^{-1-3}\,b^{3}$

$= \frac{1}{a} - \frac{b}{a^{2}} + \frac{b^{2}}{a^{3}} - \frac{b^{3}}{a^{4}}$ u. s. w.

Eben

Eben dieselbe Reihe kommt heraus, wenn $\frac{1}{a+b}$ durch die Division in eine unendliche Reihe aufgelöset wird. Denn

$$
\begin{array}{l}
a+b\,)\; 1 \;\left(= \frac{1}{a} \quad \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4}\right. \\
\quad 1 + \frac{b}{a} \\
\quad - \\
\hline
\quad -\frac{b}{a} \\
\quad -\frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^2} \\
\quad + \quad + \\
\hline
\qquad +\frac{b^2}{a^2} \\
\qquad +\frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} \\
\qquad - \quad - \\
\hline
\qquad\quad -\frac{b^3}{a^3} \\
\qquad\quad -\frac{b^3}{a^3} - \frac{b^4}{a^4} \\
\qquad\quad + \quad + \\
\hline
\qquad\qquad +\frac{b^4}{a^4} = \text{dem Rest.}
\end{array}
$$

$$= a^{-1} - a^{-2}\,b + a^{-3}\,b^2 - a^{-4}\,b^3 \text{ u. s. w.}$$

Multi=

Multiplicirt man die eben gefundene Reihe mit $a + b$, so muß das Product $= 1$ sein. Denn $\dfrac{1}{a+b} \cdot a + b = 1$. Oder indem würklich multiplicirt wird, als:

$$\begin{array}{lllllll}
\dfrac{1}{a} & - & \dfrac{b}{a^2} & + & \dfrac{b^2}{a^3} & - & \dfrac{b^3}{a^4} \\
a & + & b & & & & \\
\hline
1 & - & \dfrac{b}{a} & + & \dfrac{b^2}{a^2} & - & \dfrac{b^3}{a^3} \\
 & + & \dfrac{b}{a} & - & \dfrac{b^2}{a} & + & \dfrac{b^3}{a^3} \\
\hline
\end{array}$$

so ist das Product $= + 1$.

Zweiter