# VORREDE.

Der neue Lehrplan der preussischen Gymnasien weist mit Recht bei gleichzeitiger Vermehrung der Stundenzahl in den beiden Secunden diejenigen Teile der Physik, deren Bildungsgehalt wesentlich in ihrer mathematischen und streng wissenschaftlichen Begründung beruht, dem Unterricht in der Prima zu. Nun sind aber die gebräuchlichen Lehrbücher und Leitfäden meist auf eine andere Reihenfolge und Gruppierung des Lehrstoffs berechnet und auch sonst wegen des springenden und lückenhaften Vortrags gewisser hergebrachten Hauptsätze weniger geeignet, den Schülern zum häuslichen Studium oder zur Repetition des Klassenvortrags in die Hände gegeben zu werden. In der nachfolgenden Arbeit will der Verfasser eine Probe gegeben haben, wie nach seiner Meinung gerade ein für das Gymnasium bestimmter Leitfaden der Physik etwa gearbeitet sein müsste. Der Hauptwert ist auf eine logisch unanfechtbare, im Ausdruck klare und leicht zu fassende Darstellung der Definitionen und Grundsätze so wie auf eine strenge Ableitung der Lehrsätze nach mathematischer Methode gelegt. Wenn auch der Verfasser sich bewusst ist, nicht viel wesentlich Neues vorgetragen zu haben, so dürfte doch vielleicht die Form der Darstellung und manche Einzelheiten, die einem kundigen und urteilsfähigen Leser nicht verborgen bleiben werden, der Beachtung nicht unwert erscheinen.

# I. Äquivalenz der Kräfte.

## Vorbemerkungen über den Begriff der Kraft.

*Τὰ πάντα ῥεῖ.*

Die Lehrsätze der Mechanik gründen sich auf gewisse Vermutungen oder Hypothesen, zu welchen man durch Beobachtung der Vorgänge in der realen Welt allmählich gekommen ist. Diese Vermutungen haben in der Wissenschaft der Mechanik die gleiche Bedeutung, wie die sogenannten Grundsätze oder Principien in der reinen Mathematik; sie werden deshalb, obgleich der Erfahrung entsprungen, mit dem Namen Principien der Mechanik belegt.

Aus dem Verhalten der materiellen Körper hat man vor Allem geglaubt entnehmen zu müssen, dass kein Körper seinen Bewegungszustand selbständig ändern könne. Das hierauf bezügliche Princip lautet kurzweg „die Materie ist träge." Was ist aber Bewegung und Bewegungszustand? Wenn zwei Körper ihre Lage gegen einander ändern, so sagt man, der eine bewege sich inbezug auf den andern, und diesen andern sieht man inbezug auf den ersten als ruhend an. Welcher von beiden in Bewegung begriffen sei, lässt sich nicht ermitteln und ist auch an und für sich gleichgültig. Wäre der Raum begrenzt, und gäbe es in seiner Grenze irgend drei feste, nicht in gerader Linie liegende Punkte, so liesse sich aus der Lage der Körper in Beziehung auf diese Punkte leicht ihre Bewegung oder Ruhe absolut feststellen. So aber sind die Begriffe Bewegung und Ruhe durchaus relativ, und man sagt z. B. heutzutage, die Erde bewege sich um die Sonne, wie man früher mit gleichem Recht der Sonne eine Bewegung um die Erde zuschrieb. Welchen von zwei oder mehreren Körpern, die ihre gegenseitige Lage verändern, man als ruhend anzusehen sich entschliesst, das hängt in der Regel damit zusammen, durch welche Auffassung die Beschreibung des Bewegungsvorganges am einfachsten und anschaulichsten wird. So gilt z. B. bei der Bewegung des Pendels einer Uhr die Axe desselben als fest, während man doch andrerseits von einem Umschwunge der die Erde zusammensetzenden Körper, also auch der Pendeluhr, um die Erdaxe, weiter von einer Bewegung der Erde um die Sonne, endlich vielleicht des Sonnensystems um einen Centralpunkt des ganzen Weltalls zu reden sich veranlasst gesehen hat.

Schwieriger ist es auszusprechen, was man unter dem Bewegungszustand eines Körpers versteht. Man nimmt gegenwärtig an, dass die Körper aus sehr vielen von einander getrennten Teilchen (Atomen) bestehen, deren jedes unteilbar und in Grösse und Gestalt unveränderlich einen gewissen Raum derartig einnimmt, dass in demselben Raum nicht zugleich ein anderes Teilchen vorhanden sein kann. Zufolge dieser Undurchdringlichkeit der Teilchen müssen im Allgemeinen zwischen ihnen zahlreiche Zwischenräume vorhanden sein, in denen möglicherweise noch andere materielle Teilchen Platz finden. Ein einzelnes Atom heisst in der Bewegungslehre ein materieller Punkt, und mit seiner Bewegung muss die mechanische Theorie beginnen.

Der Bewegungszustand eines materiellen Punktes wird bestimmt durch die Richtung und Geschwindigkeit seiner Bewegung. Man nimmt an, dass ein vollkommen frei beweglicher, d. h. durch keine Verbindung mit andern Punkten irgendwie beeinflusster Punkt, wenn er einmal in Bewegung ist, sich nur auf einer geraden Linie weiter bewegen könne, weil diese Linie die einzige ist, welche sich in Beziehung auf den ganzen unendlichen Raum nach allen Seiten hin gleich verhält, und kein vernünftiger Grund vorhanden ist, weshalb der Punkt von der gegenwärtigen Richtung seiner Bewegung lieber nach einer, als nach irgend einer andern Richtung hin abweichen sollte. Ferner meint man, dass der Punkt sich auch gegen die Zeit gleichgültig verhalten müsse, so dass er (nach dem hergebrachten Ausdruck) in gleichen Zeiträumen gleiche Strecken Weges zurücklege. Hier zeigt sich nun aber eine Schwierigkeit, die nicht durch Stillschweigen verdeckt werden darf: offenbar ist Niemand imstande, die Gleichheit zweier Zeiträume ohne Zuhilfenahme der Bewegung zu definieren, und wir erklären vielmehr umgekehrt Zeiträume dann für gleich, wenn sich in ihnen congruente Bewegungen vollziehen. Es bewegt sich also die Theorie, wie sie gewöhnlich vorgetragen wird, in einem fehlerhaften Zirkel. Dieser Zirkel aber lässt sich vermeiden, wenn wir das **Princip der Trägheit** in folgender Form aussprechen:

1) Die Bahn eines vollkommen frei beweglichen Punktes ist eine gerade Linie.

2) Wenn zwei materielle Punkte, jeder für sich, sich frei bewegen, so sind die Wege, welche sie, von demselben beliebigen Zeitpunkt an gemessen, je bis zu demselben beliebigen andern Zeitpunkt zurücklegen, einander proportional.

**Erklärungen:**

1) Zeiträume, welche ein vollkommen frei beweglicher Punkt zur Zurücklegung gleicher Wege bedarf, heissen **gleiche Zeiträume.**

2) Als Einheit der Zeit dient ein gewisser, von der Bewegung der Erde entnommener, vorläufig nicht näher definierbarer Zeitraum, welcher Secunde heisst.

3) Der von einem frei beweglichen Punkte in einer Secunde zurückgelegte Weg heisst die Geschwindigkeit des Punktes. Offenbar kann man hierfür auch sagen: Geschwindigkeit ist die Länge des in einer beliebigen Zeit zurückgelegten Weges dividiert durch die Zahl der Secunden, welche diese Zeit enthält.

4) Bei dieser Gelegenheit empfiehlt es sich aber, sogleich eine andere Erklärung mit anzuführen, die später nicht ohne umständliche Wiederholungen vorgetragen werden könnte. Die Erfahrung lehrt uns, dass die Bewegung eines Punktes aus blosser Trägheit und in vollkommener Freiheit niemals wirklich zustande kommt, sondern eine blosse Fiction ist, ohne welche freilich die Mechanik als Wissenschaft ebensowenig möglich wäre, wie die Geometrie ohne die Abstractionen: Punkt, Linie, Fläche. Die hier fingierte geradlinige und gleichförmige Bewegung kommt in der Wirklichkeit nirgends vor. Man wendet nun aber das Wort Geschwindigkeit auch auf jede ungleichförmige Bewegung an und versteht darunter, entsprechend der oben abgeleiteten Definition, den während einer unendlich kleinen Zeit zurückgelegten Weg dividiert durch diese Zeit.

Von dem Bewegungszustand eines einzelnen Punktes ist es nun möglich, zu dem einer Zusammenstellung (eines Systems) von Punkten, oder eines sogenannten materiellen Körpers überzugehen. Bewegt sich das System so, dass alle seine Punkte mit gleicher Geschwindigkeit parallele Bahnen durchlaufen, so heisst die Bewegung eine fortschreitende, und dieselbe vollzieht sich, in Übereinstimmung mit dem Princip der Trägheit, gerade so, als wären die Punkte des Systems von einander unabhängig und nur zufällig einander so nahe gerückt, dass man sie als zusammengehörig ansieht.

Dagegen lehrt uns die Frfahrung, dass sehr häufig nur gewisse Punkte des Systems die alle in einer Geraden liegen, in einer fortschreitenden Bewegung begriffen oder auch vielleicht in Ruhe sind, und die übrigen Punkte um dieselben, wie um eine Axe, eine drehende Bewegung vollführen. Diese Art Bewegung widerspricht entweder dem oben ausgesprochenen Princip der Trägheit, oder es müssen ausser diesem einen noch andere Principien der Bewegung in Geltung sein.

Ferner ist es an und für sich nicht gerade wunderbar, dass die ihrer Trägheit zufolge sich weiter bewegenden Körper, wenn sie zufällig mit andern sich bewegenden oder ruhenden Körpern zusammentreffen, zufolge ihrer Undurchdringlichkeit in eine andere Richtung und Geschwindigkeit ihrer Bewegung hineingenötigt werden, wie sie auch ihrerseits eine gleiche Störung auf jene andern Körper ausüben. Aber dass die Körper oft, z. B. bei jeder Wurfbewegung, ohne dass anscheinend auch nur das geringste Hindernis ihrer Trägheitsbewegung vorhanden ist, gleichwohl in stetig gekrümmten Bahnen und mit wechselnder Geschwindigkeit sich bewegen, musste jedem denkenden Beobachter zunächst ganz unbegreiflich sein.

Man glaubt nun, diese Abweichung vom Princip der Trägheit durch die Annahme sogenannter Kräfte erklären zu müssen. Dass der in drehender Bewegung begriffene Körper nicht in seine Atome zerfliegt, wie es nach dem Gesetz der Trägheit geschehen müsste, führt man auf eine die Atome zusammenhaltende Cohäsionskraft zurück, ebenso hält man die Anziehungskraft der Erde für die Ursache, weshalb der geworfene Stein im Bogen zur Erde zurückkehrt. Die Wirkung des Zusammenstosses der Körper ist zwar an sich nicht so überraschend, aber auch hier meint man, werden durch den Stoss für einen Moment gewisse momentane Kräfte geweckt, während jene vorher erwähnten als continuierlich wirkende Kräfte angesehen werden. Überhaupt jede Ursache, welche die Trägheit der Materie zu überwinden vermag, bezeichnet man als Kraft.

1*

Dass aber mit dem Worte Kraft das Rätsel der Bewegungserscheinungen auch nicht im Geringsten gelöst ist, ist keinem verständigen Mechaniker je entgangen. Wo soll der Sitz derselben sein? Gesetzt sie sei eine zum Wesen der Materie selbst gehörige Eigenschaft, wie kann, da Materie nur von Materie beeinflusst wird, die Kraft durch den leeren Raum hindurch sich wirksam erweisen? Offenbar ist es am geratensten, von vornherein offen zu erklären, dass die oben erwähnten und noch alle andern mit besonderen Namen bezeichneten Kräfte nur Schulbegriffe und Kunstausdrücke sind, um einen in der Theorie oft wiederkehrenden Gedanken, zu dessen Ausdruck man sich sonst einer weitschweifigen Rede bedienen müsste, mit einem Wort zu bezeichnen (die Namen Centripetal-, Tangentialkraft etc. sind ja ebenfalls nach Aller Gefühl nicht Kräfte im hergebrachten Verstande, die der Materie an sich anhaften); wir wollen also z. B. von der Anziehungskraft der Erde gleich von vornherein uns einprägen, dass sie nur ein zur möglichst anschaulichen Beschreibung eines an sich unbegreiflichen Vorgangs eingeführter Kunstausdruck ist, der nichts weiter bedeuten soll, als dass die irdischen Körper sich nach dem Mittelpunkt der Erde so hinbewegen, als ob sie mittels eines materiellen Bandes dorthin gezogen würden, u. s. w.

Ich möchte aber am Schluss dieser ja nicht unmittelbar als Vortrag für Schüler bestimmten Vorbemerkungen mit einer persönlichen Vermutung nicht zurückhalten. Die Wärme wird schon jetzt mit genügender Evidenz als blosse Wirkung der Bewegung aufgefasst, vom Lichte, noch mehr vom Schalle gilt dasselbe seit geraumer Zeit, die elektrischen und magnetischen Erscheinungen ist man auf dem besten Wege ebenfalls aus diesem Gesichtspunkt im Zusammenhang zu erfassen: sollte nicht eine Zeit kommen, wo auch die Molecularkräfte, die chemische Attraction mit inbegriffen, desgleichen die allgemeine Gravitation lediglich als Stosswirkungen, in Wahrheiten also als Folgen der Bewegung der trägen Materie aufgefasst werden möchten? Meiner Phantasie wenigstens widerstrebt es nicht, die Cohäsion eines Körpers als den Effekt gleichsam des Zusammenschmiedens aufzufassen, das von allen Seiten durch die fortwährenden Stösse der Äthermolecule auf die zufällig einander sehr nahe befindlichen, in ihren Zwischenräumen verhältnismässig nur wenige Äthermolecule als elastisches Polster beherbergenden Massenteilchen des Körper genannten Aggregats ausgeführt wird. Und ebenso wenn meine ausgestreckte Hand ein Gewicht am Fallen zur Erde hindert, so erfährt sie vielleicht fortwährende Stösse von an die Erde heranbrandenden Ätherwellen, denen sie durch Gegenstösse, d. h. durch einen Wärmeaufwand auf Kosten meines lebendigen Organismus das Gleichgewicht hält. In diesem Sinne wären also Kräfte nicht etwas, was der Trägheit der Materie mit geheimnisvoller Selbständigkeit entgegen wirkt, sondern umgekehrt Folgen und Ergebnisse der von allem Anfang an in der Materie als Ganzem vorhandenen Bewegung. Die Materie, so scheint mir, ist von Ewigkeit her in Bewegung, die einzelnen materiellen Punkte lösen zufolge unausbleiblicher Zusammenstösse einander in der Bewegung nach notwendigen Gesetzen ab, wie die Tänzer im Reigen, die Gesamtsumme der Bewegungsgrössen aber bleibt unwandelbar dieselbe, das Princip der Trägheit hat als notwendige Consequenz das Princip der Erhaltung der Kraft.

In der Mechanik wird das Wort **Kraft** gleichbedeutend mit **Stosswirkung** gebraucht. An der Realität einer solchen Wirkung zu zweifeln verbietet alle Erfahrung. Insofern aber die Wirkung eines Stosses erfahrungsgemäss, etwa mittels eines Fadens, auch durch einen **Zug** oder **Druck** ersetzt werden kann, ist es Jedem freigestellt, sich dieselbe auch als **Zugwirkung** zu denken. Man unterscheidet **momentan** und **continuierlich** wirkende Kräfte. Eine continuierliche Kraft oder, entsprechend der vorigen Vorstellung, ein dauernder Druck oder Zug wird als eine Folge sehr vieler sehr schnell auf einander folgenden Stösse angesehen. **Bezüglich ihrer Wirkung im Einzelnen lassen sich nur momentane mit momentanen, continuierliche mit continuierlichen Kräften vergleichen.** Die nachfolgenden Sätze gelten sowol für die einen, wie für die andern. Wir beschränken uns zunächst auf die Betrachtung momentaner Kräfte.

Erfahrungsgemäss vermag eine auf einen ringsum frei beweglichen ruhenden Körper wirkende Kraft diesen Körper in Bewegung zu setzen, desgleichen einen bewegten Körper zur Ruhe zu bringen. Es ist aber kein Grund vorhanden, diese Wirkung nicht auch bei einem materiellen Punkte anzunehmen, obschon ein Punkt und seine Bewegung, desgleichen die Wirkung einer Kraft auf einen Punkt niemals Gegenstand der Erfahrung sein kann. Von hier ab bewegen wir uns also auf rein theoretischem Gebiete.

**Erklärung:** Wenn ein ruhender Punkt durch eine Kraft angegriffen eine gewisse Geschwindigkeit erhalten hat und, nachdem er durch irgend welche Kraftwirkung wieder zur Ruhe gebracht ist, durch eine zweite Kraft zu der gleichen Geschwindigkeit wie vorher gebracht wird, so heissen beide Kräfte **gleich**.

**Folgerung 1).** Wenn ein ruhender Punkt durch eine Kraft eine gewisse Geschwindigkeit erhalten hat, und eine andere den Punkt unterwegs angreifende Kraft die Geschwindigkeit desselben ohne Änderung seiner Bewegungsrichtung verdoppelt, so ist die zweite Kraft der ersten gleich.

Denn man kann den in Bewegung begriffenen Punkt als relativ ruhig und seinen Geschwindigkeitszuwachs als Wirkung der zweiten Kraft ansehen.

**Folgerung 2).** Eine continuierlich mit dauernd gleicher Stärke wirkende Kraft bringt in gleichen Zeiten gleiche Geschwindigkeitszunahmen des angegriffenen Punktes hervor.

**Erklärung:** Zwei gleiche Kräfte können zwei frei bewegliche Punkte von der Ruhe aus zu gleichen oder auch zu ungleichen Geschwindigkeiten veranlassen. Im erstern Fall sagt man, die Punkte haben **gleiche Massen**, im andern Falle schreibt man demjenigen Punkte die **grössere Masse** zu, dessen Geschwindigkeit die geringere ist, derartig, dass **die Massen sich umgekehrt verhalten, wie die ihnen erteilten Geschwindigkeiten.**

**Erklärung:** Wenn zwei Kräfte zwei mit gleichen Massen ausgestattete Punkte von der Ruhe aus zu ungleichen Geschwindigkeiten veranlassen, so heisst diejenige die **grössere Kraft**, welche die grössere Geschwindigkeit hervorbringt, derartig, dass **die Kräfte den Geschwindigkeiten proportional** sind.

Hieraus ergibt sich durch ein einfaches algebraisches Verfahren, dass **zwei Kräfte sich verhalten wie die Produkte aus den von ihnen in Bewegung gesetzten Massen und deren bezüglichen Geschwindigkeiten.**

**Erklärung:** Als **Einheit der Kraft** gilt diejenige, welche einem Punkte von der Masse 1 die Geschwindigkeit 1 erteilt. Die Einheiten der Masse und der Geschwindigkeit sind willkürliche Masse, zu deren Wahl man bei der Anwendung der Theorie auf irdische Verhältnisse veranlasst worden ist. Hiernach ist es möglich, indem man eine Kraft durch ihre Masszahl bezeichnet, mit Kräften zu rechnen.

Es ist Brauch, Kräfte sinnbildlich durch Strecken, welche ihren Masszahlen proportional sind, zu bezeichnen. Diese Bezeichnung hat den Vorzug, dass dadurch gleichzeitig der angegriffene Punkt (Angriffspunkt) und die Richtung und Grösse der Kraft veranschaulicht werden.

Ein besonderer und vielfach wertvoller Kunstgriff ist die Verlegung des Angriffspunkts einer Kraft. Man denkt sich nämlich den Zug oder Stoss der Kraft, anstatt am Angriffspunkte selbst, in irgend einem Punkte eines mit demselben verbundenen rein ideellen und immateriellen starren Fadens oder Stabes ausgeübt. Man pflegt dies so auszusprechen: Der Angriffspunkt einer Kraft kann in ihrer Richtung vorwärts oder rückwärts beliebig verlegt werden.

### Wirkung gleicher Kräfte auf einen Punkt.

Wenn zwei gleiche Kräfte in entgegengesetzten Richtungen auf einen Punkt wirken, so heben sie einander auf. Denn es ist durchaus keine Änderung des Bewegungszustandes denkbar, bei welcher in Beziehung auf Richtung und Geschwindigkeit beide Kräfte, wie es doch sein müsste, zu gleicher Geltung kämen.

Wenn zwei gleiche Kräfte in derselben Richtung auf einen Punkt wirken, so trägt jede gleichviel zur Änderung seines Bewegungszustandes bei; es ist also, wenn der Punkt als vorher ruhend gilt, die ihm mitgeteilte Geschwindigkeit doppelt so gross, als sie unter der Wirkung nur einer der beiden Kräfte sein würde; die Richtung der Bewegung aber fällt mit der Richtung der Kraftwirkungen zusammen, denn es ist kein Grund vorhanden, warum der Punkt, wenn er sich in irgend einer andern Richtung bewegte, sich nicht ebensogut in jeder andern gegen die Richtung der Kräfte gleich gelegenen Richtung bewegen sollte. Man kann dieses theoretische Ergebnis auch so ausdrücken: Wenn zwei gleiche Kräfte in derselben Richtung auf einen Punkt wirken, so ist der Erfolg derselbe, als wenn eine doppelt so grosse Kraft in derselben Richtung wirkte.

Erklärung: Eine Kraft, welche mehrere Einzelnkräfte ersetzen könnte, heisst die Resultante derselben, und die Einzelnkräfte heissen ihre Componenten. Wegen der Gleichheit der Wirkung sagt man auch: die Resultante ist den Componenten **äquivalent**.

Durch Wiederholung eines gleichen Schlussverfahrens kommt man zur Erkenntnis der Resultante beliebig vieler gleichen in derselben Richtung auf einen Punkt wirkenden Kräfte, und indem man diese Einzelnkräfte, in beliebige Gruppen zusammengefasst, durch die betreffenden Resultanten ersetzt, gelangt man zu dem Satze:

> Beliebige in derselben Richtung auf einen Punkt wirkende Kräfte sind äquivalent einer einzigen in derselben Richtung wirkenden Kraft, welche gleich der Summe der Einzelnkräfte ist.
>
> Wenn dagegen zwei Kräfte $m$ und $q$ in entgegengesetzten Richtungen auf denselben Punkt wirken, so sind sie äquivalent einer einzigen Kraft, welche gleich dem Unterschiede beider Kräfte ist und in der Richtung der grösseren Kraft wirkt.

Denn sei $m > q$ und etwa $m = q + m^1$, so kann ich statt der Kraft $m$ die beiden Kräfte $q$ und $m^1$ wirken lassen; nun wird aber die Wirkung dieser letztern Kraft $q$ durch die jener andern entgegengesetzt wirkenden Kraft $q$ aufgehoben, folglich kommt nur die Kraft $m^1$, welche gleich $m - q$ ist, zur Wirkung.

Wenn zwei gleiche Kräfte in verschiedenen, aber nicht entgegengesetzten Richtungen auf einen Punkt wirken, so können sie einander nicht aufheben; denn sonst wäre die Wirkung der einen gleich der einer dritten Kraft, welche der andern Kraft entgegengesetzt gerichtet ist, was widersinnig ist. Zwei solche Kräfte müssen also eine Resultante haben, von deren Richtung aus reinen Vernunftgründen folgendes einleuchtet:

1) Die Richtung der Resultante kann aus der Ebene der Richtungen der Componenten nicht heraustreten, denn es ist kein Grund vorhanden, weshalb sie aus dieser Ebene vielmehr nach der einen als nach der andern Seite heraustreten sollte.
2) Die Richtung der Resultante muss den hohlen Winkel zwischen den Richtungen der Componenten halbieren, denn es ist kein Grund vorhanden, weshalb sie gegen die eine der beiden Richtungen eine andere Neigung haben sollte, als gegen die andere, und ebenso selbstverständlich ist, dass sie nur in den hohlen Winkel fallen kann.

Über die Grösse der Resultante aber lässt sich vorläufig nichts Bestimmtes vermuten. (Vgl. später den Abschnitt vom Parallelogramm der Kräfte.)

### Wirkung parallel gerichteter Kräfte auf starr mit einander verbundene Punkte.

Erklärung: Wir bedürfen von jetzt ab einer neuen Fiction, nämlich dass zwei oder mehrere materielle Punkte durch unmaterielle, rein geometrische, aber starre Linien mit einander verbunden gedacht werden; eine solche Verbindung kommt allerdings thatsächlich niemals vor, es wird jedoch durch deren Annahme die naturgeschichtliche Beschreibung der Bewegungsvorgänge in hohem Masse vereinfacht und die Anschauung wesentlich erleichtert. Auch ist es in der That gleichgültig, durch welche unbekannten und hier ausser Betracht bleibenden Kraftwirkungen z. B. der Zusammenhalt der Teilchen einer Eisenstange, die Jedermann für gewöhnlich als starren Körper ansieht, in Wirklichkeit zustande kommt.

Lehrsatz: Wenn auf zwei starr mit einander verbundene Punkte zwei gleiche Kräfte in übereinstimmend parallelen[1]) Richtungen wirken, so können sie durch eine einzige Kraft ersetzt werden, welche in übereinstimmend paralleler Richtung durch den Mittelpunkt ihrer Verbindungsstrecke geht und gleich der Summe beider Kräfte ist.

Denn seien (Fig. I) $A$ und $B$ die angegriffenen Punkte, und füge ich den an ihnen ziehenden Kräften, deren jede gleich $p$ sei, noch zwei ihnen gleiche in den Richtungen $AB$ und $BA$ ziehende Kräfte hinzu, so wird, da die neu eingeführten Kräfte wegen der starren Verbindung zwischen $A$ und $B$ einander aufheben, in der Wirkung der ersten Kräfte nichts geändert. Nun können aber die beiden in $A$ ziehenden Kräfte $p$ durch eine in der Halbierungslinie des Winkels ihrer Richtungen ziehende Kraft $q$, desgleichen die in $B$ ziehenden Kräfte durch eine entsprechend gerichtete Kraft $q^1$ ersetzt und, indem man $A$ und $B$ mit dem Durchschnittspunkt $C$ der beiden neuen Kraftrichtungen starr verbunden denkt, in $C$ angreifend gedacht werden. Die in $C$ angreifende Kraft $q$ aber kann wieder in zwei Componenten zerlegt werden, welche den in $A$ ziehenden Kräften $p$ bezüglich gleich und parallel sind. Entsprechendes kann mit der in $C$ angreifenden Kraft $q^1$ geschehen. Die ursprünglich wirksamen Kräfte sind also jetzt durch vier in $C$ angreifende Kräfte $p$ ersetzt, von denen zwei, weil in entgegengesetzten Richtungen ziehend, einander aufheben, die beiden andern, weil in derselben Richtung ziehend,

1) Zu unterscheiden von parallelen aber entgegengesetzten Richtungen.

durch eine Kraft $2p$ ersetzt werden können. Es erübrigt nur noch, was aber der Kürze wegen unterbleiben mag, zu zeigen, dass die Richtung dieser Kraft die $\overline{AB}$ halbiert.

Lehrsatz: Wenn auf zwei starr mit einander verbundene Punkte zwei ungleiche Kräfte in übereinstimmend parallelen Richtungen wirken, so können sie durch eine einzige der Summe dieser Kräfte gleiche und übereinstimmend parallel gerichtete Kraft ersetzt werden, welche die Verbindungsstrecke der Angriffspunkte nach dem Verhältnis der Einzelnkräfte in einem innern Teilpunkt derartig teilt, dass der Teilpunkt dem Angriffspunkt der grössern Kraft näher liegt, als dem der kleinern.

Beweis: Es ziehe (Fig. II.) in $A$ die Kraft $p$, in $B$ die Kraft $q$. Ich teile $\overline{AB}$ in $p + q$ gleiche Teile, und einer der Teilpunkte, welcher $C$ heissen mag, genüge der Gleichung $\overline{AC} : \overline{BC} = p : q$. Ich verlängere nun $\overline{BA}$ um $\overline{AF} = \overline{AC}$ und $\overline{AB}$ um $\overline{BE} = \overline{BC}$, so besteht $\overline{FE}$ aus $2p + 2q$ solchen gleichen Stücken, wie $AB$ deren $p + q$ enthält. Ich bringe nun in der Mitte jedes dieser Stücke je eine neue Kraft an, parallel den in $A$ und $B$ ziehenden Kräften und jede von der Intensität $\frac{1}{2}$, so haben die neu eingeführten Kräfte genau die gleiche Wirkung, wie die in $A$ und $B$ ziehenden Kräfte $p$ und $q$. Denn von den Kräften, welche an Punkten der $\overline{FC}$ ziehen, haben die erste und die letzte, die zweite und die vorletzte, die dritte und die drittletzte Kraft etc. zusammen je die gleiche Wirkung, wie je eine im Punkte $A$ ziehende Kraft 1, insgesamt also sind sie der in $A$ ziehenden Kraft $p$ äquivalent, und ebenso sind die an Punkten der $\overline{CE}$ ziehenden Kräfte der Kraft $q$ äquivalent. Ich darf also die Kräfte $p$ und $q$ durch die neu eingeführten Kräfte ersetzen. Nun lassen sich aber diese letztern, da ihre Angriffspunkte gleichmässig über die $\overline{FE}$ verteilt und immer paarweise von der Mitte der $\overline{FE}$ gleich weit entfernt sind, auch zu einer einzigen Kraft vereinigen, welche in der Mitte $C^1$ der $\overline{FE}$ mit der Intensität $p + q$ angreift. Es ist aber leicht zu sehen, dass $\overline{AC} = \overline{BC^1}$ und $\overline{BC} = \overline{AC^1}$, also auch $\overline{BC^1} : \overline{AC^1} = p : q$ ist.

Lehrsatz: Wenn auf zwei starr mit einander verbundene Punkte zwei ungleiche Kräfte in parallelen aber entgegengesetzten Richtungen wirken, so können sie durch eine einzige der Differenz dieser Kräfte gleiche Kraft ersetzt werden, welche, mit der grössern Kraft übereinstimmend gerichtet, die Verbindungsstrecke der Angriffspunkte in einem äussern Teilpunkt derartig teilt, dass der Teilpunkt dem Angriffspunkt der grössern Kraft näher liegt, als dem der kleinern.

Beweis: Seien (Fig. III.) $A$ und $B$ die Angriffspunkte der in parallelen aber entgegengesetzten Richtungen ziehenden Kräfte $p$ und $q$, und sei $p > q$, so kann $p$ als Resultante zweier übereinstimmend parallelen Kräfte angesehen werden, deren eine in $B$ mit der Intensität $q$, die andere in einem Punkte $C$ mit der Intensität $q - p$ zieht, wenn nur, dem vorigen Lehrsatz zufolge, die Bedingung erfüllt ist, dass $\overline{AC} : \overline{AB} = q : (p - q)$ oder $\overline{AC} : (\overline{AB} + \overline{AC}) = q : p$ oder endlich $\overline{AC} : \overline{BC} = q : p$. Nun heben aber die beiden in $B$ ziehenden Kräfte $q$ einander auf, es bleibt also als Resultante nur die in $C$ ziehende Kraft $p - q$ übrig.

Folgerungen: 1) Wenn an der starren Strecke $\overline{AB}$ in den Punkten $A$ und $B$ zwei übereinstimmend parallel gerichtete Kräfte $p$ und $q$ angreifen und der Punkt $C$ innerhalb dieser Strecke so gelegen ist, dass $p \cdot \overline{AC} = q \cdot \overline{BC}$, so wird, wenn dieser Punkt fest ist, die Wirkung der Kräfte $p$ und $q$ aufgehoben. Eine solche Strecke heisst ein zweiarmiger Hebel, $C$ sein Unterstützungspunkt (hypomochlium, Drehpunkt). Man sagt auch wol: Die Kräfte $p$ und $q$ heben mit Hilfe des Hebels und seines festen Punktes einander auf.

2) Wenn an der starren Geraden $AB$ in den Punkten $A$ und $B$ zwei Kräfte $p$ und $q$ in parallelen aber entgegengesetzten Richtungen angreifen und der Punkt $C$ in der Verlängerung der $\overline{AB}$ so gelegen ist, dass $p \cdot \overline{AC} = q \cdot \overline{BC}$, so wird ebenfalls, wenn Punkt $C$ fest ist, die Wirkung der Kräfte $p$ und $q$ aufgehoben. Diesmal heisst $AB$ ein einarmiger Hebel.

## Vom Winkelhebel.

Erklärung: Den eben erwähnten Benennungen entsprechend heisst eine den Angriffen von Kräften ausgesetzte starre gebrochene Gerade, welche den Scheitel des von ihr gebildeten Winkels als festen Punkt oder Drehpunkt hat, ein Winkelhebel. Die Strecke zwischen dem Drehpunkt und dem Angriffspunkt einer Kraft heisst der Hebelarm dieser Kraft.

Grundsatz: Wenn an gleichen Armen eines Winkelhebels zwei gleiche Kräfte in der Ebene des Winkels senkrecht gegen die Hebelarme und zwar beide nach dem Innenraum des Winkels oder beide nach aussen ziehen, so heben sie einander auf.

Lehrsatz: Zwei Kräfte $p$ und $q$, welche an ungleichen Armen $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ eines Winkelhebels in der Ebene des Winkels und zwar beide nach innen oder beide nach aussen ziehen, heben, wenn $p \cdot \overline{AB} = q \cdot \overline{AC}$ ist, einander auf.

Beweis: Schneide ich (Fig. IV.) auf $AC$ das Stück $\overline{AB^1} = \overline{AB}$ ab und lasse in $B^1$ in der Ebene des Winkelhebels senkrecht gegen $AB^1$ zwei Kräfte $p$ in entgegengesetzten Richtungen wirken, so wird, da diese neuen Kräfte einander aufheben, an der Wirkung der ersten Kräfte nichts geändert. Nun heben aber nach dem vorstehenden Grundsatz die in $B$ und $B^1$ nach innen ziehenden Kräfte $p$, desgl. nach Folg. 2 des vorigen Abschnittes die in $C$ und $B^1$ entgegengesetzt ziehenden Kräfte $q$ und $p$ einander auf, mithin kommt gar keine Kraftwirkung zustande, d. h. auch die ursprünglich vorausgesetzten Kräfte müssen einander aufheben.

## Vom Parallelogramm der Kräfte.

Hilfssatz: Sind $p$ und $q$ zwei an einander stossende Seiten eines Parallelogramms, so zerschneidet eine Diagonale den Winkel $(p\ q)$ so, dass die Produkte je aus einer Seite und dem Sinus des anstossenden Winkelteils einander gleich sind. (Beweis leicht.)

1. Lehrsatz: Wenn an einem Punkte $A$ zwei Kräfte $p$ und $q$ ziehen, so können sie durch eine einzige Kraft ersetzt werden, deren Richtung man findet, wenn man auf den Richtungen jener Kräfte, von $A$ aus, den entsprechenden Kräften proportionale Strecken als Seiten eines zu construierenden Parallelogramms abschneidet und in demselben von $A$ aus die Diagonale zieht.

Beweis (Fig. V.): Bezeichne ich der Kürze halber die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ des Par. $ABCD$ mit $p$ und $q$ und sei $\angle BAD = \beta$, $\angle CAD = \gamma$, so ist $p \sin\beta = q \sin\gamma$. Fälle ich von irgend einem P. $E$ der $AD$ auf $AB$ und $AC$ die Senkrechten $\overline{EF}$ und $\overline{EG}$ und sehe $FEG$ als Winkelhebel mit dem Drehpunkte $E$ an, so kann ich mir die Kräfte $p$ und $q$ an diesem Winkelhebel in den Punkten $F$ und $G$ angreifend denken. Nun ist aber $\overline{FE} = \overline{AE} \sin\beta$, $\overline{GE} = \overline{AE} \sin\gamma$, also $\overline{FE} : \overline{GE} = \sin\beta : \sin\gamma$. Es ist aber auch $q : p = \sin\beta : \sin\gamma$, folglich $\overline{FE} : \overline{GE} = q : p$, oder $p \,.\, \overline{FE} = q \,.\, \overline{GE}$. Es ist also die Bedingung erfüllt, unter welcher die Kräfte $p$ und $q$ vermittels des Winkelhebels $FEG$ und des festen P. $E$ einander das Gleichgewicht halten. Nun ist zwar $E$ in Wahrheit nicht fest, da ja $A$ als vollkommen frei beweglich vorausgesetzt ist. Aber daraus, dass P. $E$, wenn er fest wäre, die Wirkung von $p$ und $q$ aufheben würde, folgt mit Sicherheit, dass beide Kräfte vereint eine Bewegung des P. $A$ in der Richtung $AE$ herbeiführen, oder dass sie einer in der Richtung der Diagonale $AD$ wirkenden Kraft äquivalent sind[1]).

---

[1]) Hätte $A$ die Tendenz, sich in einer von $AD$ abweichenden Richtung zu bewegen, so würde die starre Verbindung mit $E$ als festem Punkt die Bewegung von $A$ nicht total vernichten können, sondern $A$ würde irgend einen Weg auf der um $E$ durch $A$ gelegten Kugelfläche einschlagen müssen.

2. Lehrsatz: In dem vorher gezeichneten Parallelogramm entspricht die Diagonale auch der Grösse der Resultante, so dass die Componenten und die Resultante den Seiten und der Diagonale des Parallelogramms bezüglich proportional sind.

Beweis: Sei $r$ die noch unbekannte Grösse der Resultante, so müssen, wenn ich in der der Diagonale entgegengesetzten Richtung eine der $r$ gleiche Kraft $r^1$ einführe, die drei Kräfte $r^1$, $p$ und $q$ einander vernichten. Es kann also auch $p$ als diejenige Kraft angesehen werden, welche, wenn sie in entgegengesetzter Richtung zöge, die Kräfte $q$ und $r^1$ ersetzen könnte. Damit dies möglich sei, muss die rückwärts verlängerte $p$ den Winkel zwischen $q$ und $r^1$ so teilen, dass $r^1 \sin \beta = q \sin (\beta + \gamma)$ ist, oder $r^1 \sin \beta = q \sin \beta \cos \gamma + q \cos \beta \sin \gamma$. Mit Rücksicht darauf aber, dass $q \sin \gamma = p \sin \beta$ ist, ergibt sich hieraus $r^1 \sin \beta = q \sin \beta \cos \gamma + p \sin \beta \cos \beta$, folglich $r^1 = q \cos \gamma + p \cos \beta$, also auch $r = q \cos \gamma + p \sin \beta$. Dieser letzte Ausdruck ist aber die Länge der Diagonale.

## Zusammensetzung beliebig vieler auf ein System starr mit einander verbundener Punkte wirkenden parallelen Kräfte.

Mit Ausnahme eines einzigen nachher noch besonders zu behandelnden Falles ist es möglich, beliebig viele Kräfte, welche in parallelen Richtungen auf starr mit einander verbundene Punkte wirken, durch eine einzige Kraft zu ersetzen.

Seien z. B. (Fig. VI.) drei Kräfte $m$, $p$, $q$, welche an drei Punkten $A$, $B$, $C$ angreifen, so ist es zunächst möglich, wenn wir zur Fixierung der Vorstellung alle drei als übereinstimmend parallel voraussetzen, statt der Kräfte $m$ und $p$ eine einzige Kraft $m + p$ einzuführen, welche an einem durch einen früher entwickelten Lehrsatz genau bezeichneten Punkte $F$ angreift, und darauf wieder diese neue Kraft zusammen mit der Kraft $q$ durch eine einzige Kraft $m + p + q$ von ebenfalls genau bestimmbarem Angriffspunkt $K$ zu ersetzen; in dieser Weise fortfahrend kann man nach und nach vier, fünf und überhaupt beliebig viele Kräfte zusammensetzen. Ebenso kann es keine Schwierigkeit machen, falls einige der Kräfte in entgegengesetzten Richtungen ziehen, die allen Kräften äquivalente Einzelnkraft nach ihrer Grösse und Richtung und der Lage ihres Angriffspunktes genau zu ermitteln.

Wir haben aber hierbei uns noch die Frage vorzulegen, ob die Reihenfolge, in welcher man die Kräfte nach und nach eliminiert und durch andere ersetzt, auf die Lage des Angriffspunkts der Resultierenden einen Einfluss haben kann? Denn dass die Grösse und Richtung derselben davon nicht berührt wird, ist, da es sich bei der Grösse nur um Additionen oder Subtractionen der gegebenen Kräfte handelt, die Richtung aber mit der der (ev. überwiegenden) Einzelkräfte übereinstimmt, sofort einleuchtend.

Sei also $F$ der Angriffspunkt der Kraft $m + p$, welche die Kräfte $m$ und $p$ ersetzt, ebenso $K$ der Angriffspunkt der Kraft $m + p + q$, welche durch Zusammensetzung der in $F$ und $C$ wirkenden Kräfte sich ergibt, so behaupte ich, dass die Lage des P. $K$ genau dieselbe sein würde, wenn ich zuerst die Kräfte $m$ und $q$ zu einer in $E$ ziehenden Kraft, oder die Kräfte $p$ und $q$ zu einer in $D$ angreifenden Kraft vereinigt hätte. Denn nach dem betreffenden früher entwickelten Lehrsatz muss $\overline{AF} : \overline{BF} = p : m$, $\overline{BD} : \overline{CD} = q : p$, $\overline{CE} : \overline{AE} = m : q$ sein; daraus folgt aber $\overline{AF} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{CE} = \overline{BF} \cdot \overline{CD}\ \overline{AE}$, woraus zufolge der Umkehrung des Ceva'schen Satzes sofort sich ergibt, dass die Transversalen $AD$, $BE$, $CF$ durch denselben P. $K$ gehen und dass sowohl $\overline{CK} : \overline{FK} = (m + p) : q$, als auch $\overline{AK} : \overline{DK} = (p + q) : m$, als auch $\overline{BK} : \overline{EK} = (m + q) : p$ ist. Ebenso lässt sich, falls eine der Kräfte $m$, $p$, $q$ den beiden andern entgegengesetzt gerichtet wäre, durch Anwendung desselben Satzes leicht die Richtigkeit der Behauptung darthun.

Ich behaupte aber, dass auch bei beliebig vielen Kräften und Angriffspunkten die Reihenfolge der Zusammensetzung gleichgültig ist. Gesetzt nämlich, die Behauptung sei für $n$ Punkte und Kräfte richtig, so sieht man leicht, dass sie auch für $n + 1$ Punkte und Kräfte richtig ist. Denn sei $S$ der Angriffspunkt der Resultante beliebiger $n-1$ dieser Kräfte, $T$ der Angriffspunkt der $n$ten Kraft, $U$ derjenige der $(n + 1)$ten Kraft, so kann ich, da ja nur die Zahl der Kräfte entscheidend ist, ebensogut die in $U$ ziehende Kraft als die $n$te, die in $T$ ziehende Kraft als die $(n + 1)$te ansehen. Aber wie wir oben gesehen haben, hat bei drei Kräften die Reihenfolge der Elimination auf die Lage des Angriffspunkts der Resultante keinen Einfluss, also kann sie auch bei der Zusammensetzung der in $S$, $T$, $U$ angreifenden Kräfte nicht von Einfluss sein. Die in $U$ wirkende Kraft aber hätte ebenso gut unter die $n$ ersten Kräfte noch weiter zurück rangiert und irgend eine andere von diesen als $(n + 1)$te Kraft ausgesondert werden können. Hiermit ist also die Behauptung bewiesen. Der Satz ist aber richtig für $n = 3$, mithin auch für $n + 1$ oder $4$, mithin auch weiter für $5$, $6$ und überhaupt für jede beliebige Anzahl von Kräften.

Der Angriffspunkt der Resultante heisst der Mittelpunkt der parallelen Kräfte. Seine Lage ist vollkommen genau und eindeutig durch die Grösse der Einzelnkräfte und die Lage ihrer Angriffspunkte bestimmt, und ändert sich nicht, wenn auch die Richtungen der Kräfte unter Beibehaltung ihres Parallelismus irgendwie gedreht werden.

### Zusammensetzung beliebig vieler auf einen Punkt wirkenden Kräfte.

Durch Anwendung des Lehrsatzes vom Parallelogramm der Kräfte ist es möglich beliebig viele auf einen Punkt wirkende Kräfte nach und nach durch eine einzige Kraft zu ersetzen, und auch hier haben wir uns nur noch die Frage zu beantworten, ob die Reihenfolge der zur Zusammensetzung herangezogenen Kräfte auf die Grösse und Richtung der Resultante von Einfluss sein kann.

Beginnen wir mit der Zusammensetzung dreier Kräfte $m$, $p$, $q$, so ist leicht zu sehen, dass die Resultante der Grösse und Richtung nach durch die von dem Angriffspunkt aus gezogene Diagonale des Parallelepipedums dargestellt wird, welches die Strecken, die den drei zu componierenden Kräften entsprechen, als Kanten hat, und dass die Lage dieser Diagonale dieselbe ist, ob man mit der Zeichnung der Diagonale des Parallelogramms $(m\ p)$, oder des Par. $(m\ q)$, oder des Par. $(p\ q)$ beginnt. Durch fast wörtliche Wiederholung des vorhin bei der Zusammensetzung der parallelen Kräfte geführten Beweises ist es aber leicht darzuthun, dass auch die Resultante beliebig vieler auf einen und denselben Punkt gerichteten Kräfte nur eine und nach Grösse und Richtung unzweifelhaft und eindeutig bestimmt ist.

---

Es bleibt jetzt, um zu einem alle möglichen Fälle erschöpfenden Abschluss der Theorie von der Äquivalenz der Kräfte zu gelangen, nur noch übrig, die Zusammensetzung von Kräften beliebiger Richtung, welche auf ein System starr mit einander verbundener Punkte wirken, eingehend zu erörtern. Doch ist zur bequemen Lösung dieser Aufgabe noch eine Kraftverbindung, das sogenannte Kräftepaar, abgesondert zu betrachten.

## Zusammensetzung der Kräftepaare.

Zwei Kräfte, welche an zwei starr mit einander verbundenen Punkten in parallelen, aber entgegengesetzten Richtungen ziehen, lassen sich, wie wir gesehen haben, durch eine einzige Kraft ersetzen, ausgenommen den einzigen Fall, wenn sie einander gleich sind. Denn dass diesmal ihre Resultante-$O$ und deren Angriffspunkt in unendlicher Ferne gelegen ist, kann nur so gedeutet werden, dass die Wirkung der beiden Kräfte nicht eine fortschreitende Bewegung hervorbringt; dagegen darf daraus keineswegs gefolgert werden, dass überhaupt keine Bewegung zustande kommt. In der That lehrt uns die Erfahrung, obschon Versuche in aller Strenge der Theorie sich nicht anstellen lassen, dass diesmal eine drehende Bewegung der gestossenen Punkte verursacht wird.

Zwei gleiche Kräfte, welche an zwei starr mit einander verbundenen Punkten in entgegengesetzten Richtungen ziehen, heissen ein Kräftepaar.

Man kann einem Kräftepaar, wie es durch eine Zeichnung versinnlicht wird, durch Verlegung des Angriffspunkts der einen Kraft immer eine solche Form geben, dass die Kraftrichtung auf der Verbindungsstrecke der Angriffspunkte senkrecht steht, und wir wollen uns ein Kräftepaar von jetzt ab nur in dieser Form vorstellen. Die Entfernung der Angriffspunkte von einander heisst der Arm des Paares, das Produkt aus dem Arm und der Intensität der einen Kraft das Moment desselben. Der Kürze halber will ich ein Paar mit dem Arm $\overline{AB}$ und den Kräften $q$ mit $(\overline{AB}, q)$ bezeichnen.

1. Lehrsatz: Kräftepaare mit congruenten und übereinstimmend parallelen Armen und Kräften, deren Angriffspunkte starr mit einander verbunden sind, sind äquivalent.

Beweis: (Fig. VII.) Seien $(\overline{EF}, q)$ und $(\overline{KL}, q)$ zwei der Voraussetzung entsprechende Paare, so sind $E, F, K, L$ Eckpunkte eines Parallelogramms, folglich der Durchschnittspunkt $O$ der Diagonalen die Mitte derselben. Hebe ich nun die Wirkung des Paares $(\overline{KL}, q)$ durch Einführung des gleichen aber in entgegengesetztem Sinne drehenden Paares $(\overline{KL}, q^1)$ auf, so würde die nochmalige Einführung desselben Paares auch die Wirkung des Paares $(\overline{EF}, q)$ aufheben, denn die beiden in $K$ und $F$ angreifenden Kräfte $q$ und $q^1$ lassen sich durch eine in $O$ angreifende Kraft $2q$, desgleichen die in $L$ und $E$ wirkenden $q$ und $q^1$ durch eine nach der entgegengesetzten Richtung in $O$ wirkende ebenso grosse Kraft ersetzen. Also müssen $(\overline{EF}, q)$ und $(\overline{KL}, q)$ äquivalent sein.

2. Lehrsatz: Kräftepaare mit gleichen Momenten, welche ihre Arme in derselben Ebene in gleichem Sinne zu drehen streben, und bei denen die Mittelpunkte der Arme zusammenfallen, sind äquivalent.

Zum Beweise braucht man nur zu zeigen, dass ein drittes Paar, welches in entgegengesetztem Sinne dreheud das eine der vorausgesetzten Paare aufhebt, nochmals eingeführt, auch das andere Paar aufheben würde.

3. Lehrsatz: Kräftepaare mit gleichen Momenten und starr unter einander verbundenen Angriffspunkten, welche ihre Arme in parallelen Ebenen in gleichem Sinne zu drehen streben, sind äquivalent.

Denn das eine Paar lässt sich unter Beobachtung der Bedingungen des 1. Lehrsatzes so verlegen, dass der Mittelpunkt seines Armes mit der Mitte des Arms des andern Paares zusammenfällt, wodurch auch die Bedingungen des 2. Lehrsatzes erfüllt sind.

4. Lehrsatz: Zwei Kräftepaare mit beliebigen Momenten und starr unter einander verbundenen Angriffspunkten, welche ihre Arme in demselben Sinne in parallelen Ebenen zu drehen streben, können durch ein einziges Paar ersetzt werden, dessen Moment gleich der

Summe der Momente der einzelnen Paare ist, und welches in einer jenen Ebenen parallelen Ebene seinen starr mit den andern Armen verbundenen Arm in demselben Sinne zu drehen strebt, wie jedes einzelne Paar. (Beweis folgt.)

5. Lehrsaatz: Zwei Kräftepaare mit ungleichen Momenten und starr unter einanden verbundenen Angriffspunkten, welche ihre Arme in entgegengesetztem Sinne in parallelen Ebenen zu drehen streben, können durch ein einziges Paar ersetzt werden, dessen Moment gleich der Differenz der Momente der beiden Paare ist, und das seinen starr mit den andern Armen verbundenen Arm in einer jenen Ebenen parallelen Ebene im Sinne des stärkeren Paares dreht.

Beweis beider Sätze: Ich ersetze, die Bedingungen des 3. Lehrsatzes erfüllend, das eine Paar durch ein in der Ebene des andern Paares wirkendes äquivalentes Paar, dessen Arm mit dem Arme dieses andern Paares zusammenfällt, so werden, wenn die Kräftepaare in gleichem Sinne drehen, die an demselben Arm ziehenden Kräfte je durch eine ihrer Summe gleiche Kraft ersetzt werden können, dagegen, wenn sie in entgegengesetztem Sinne drehen, je durch eine Kraft, welche ihrer Differenz gleich ist und im Sinne der grösseren zieht.

6. Folgerung: Beliebig viele in parallelen Ebenen wirkende Kräftepaare mit starr unter einander verbundenen Angriffspunkten können durch ein einziges Paar ersetzt werden.

---

Als letzte Aufgabe bleibt uns noch die Zusammensetzung von Kräftepaaren, welche ihre Arme in beliebigen Ebenen zu drehen streben. Die hierzu nötige Erkenntnis wird nach dem Vorgange von Poinsot durch Anwendung eines neuen Begriffs, nämlich der Axe des Kräftepaars, in einfachster und bequemster Weise gewonnen. Poinsot hatte den glücklichen Einfall, zur Versinnlichung eines Kräftepaares eine Strecke einzuführen, welche in der Mitte des Armes auf der Ebene des Paares senkrecht stehend dem Moment desselben proportional ist und nach der Seite aus der Ebene des Kräftepaares herausragt, von welcher aus gesehen der Arm zu einer gleichen Drehung wie der Zeiger einer Uhr veranlasst wird. Diese Strecke ist es, welche die Axe des Paares heisst.

Wenn nun zwei Kräftepaare in zwei nicht parallelen Ebenen wirken, so kann ich[1])

1) das eine Kräftepaar unbeschadet seiner Wirkung in seiner Ebene um die Axe so weit drehen (2. Lehrs.), dass sein Arm der Ebene des andern Kräftepaares parallel ist,
2) das andere Paar in seiner Ebene soweit um seine Axe drehen, dass sein Arm dem Arm des verlegten ersten Paares parallel ist, endlich
3) das eine oder das andere Paar, oder auch beide Paare ihren Ebenen parallel (3. Lehrs.) so verlegen, dass beide Arme zusammenfallen, wenn nämlich, was immer erlaubt ist, da es ja nur auf die Momente ankommt, die Kräftepaare von vornherein so angenommen werden, dass sie gleiche Arme haben.

Von den vier jetzt an diesem einen Arm ziehenden Kräften lassen sich aber immer zwei an demselben Punkt ziehende durch eine einzige Kraft ersetzen, und wegen der Con-

---

1) Die Manipulation der Beweisführung wird den Schülern aufs leichteste verständlich, wenn man sich dabei einiger Modelle bedient, die man (ein Kräftepaar samt seiner Axe, zwei Paare mit gleich langen Armen aber ungleichen Kräften, die Axen also den Kräften entsprechend proportional) leicht etwa aus starkem Messingdraht sich anfertigen kann.

gruenz der dabei gebrauchten Kräfteparallelogramme sind auch die Resultanten gleich und überdies parallel und entgegengesetzt gerichtet. Die beiden Kräftepaare sind also durch ein einziges Paar ersetzbar.

Beachtet man aber ausserdem, dass auch die Axen der verlegten Kräftepaare mit einander einen gleichen Winkel einschliessen, wie die je in einem Endpunkte des Armes angreifenden Kräfte, und dass die Diagonale des Parallelogramms, welches diese Axen als Seiten hat, auf der Ebene des resultierenden Kräftepaares senkrecht steht, also sowol wegen ihrer Grösse als wegen ihrer Richtung als Axe des resultierenden Paars angesehen werden kann, so kommt man schliesslich zu folgendem höchst einfachen Verfahren, Kräftepaare zusammenzusetzen:

Man verlegt die Axen der Kräftepaare ihnen selbst parallel so, dass sie von demselben beliebigen Punkte $O$ ausgehen, und construiert das Parallelogramm, welches diese verlegten Axen als Seiten hat, so ist die von $O$ ausgehende Diagonale dieses Parallelogramms die Axe des resultierenden Paars.

---

Die ganze Theorie von der Äquivalenz der Kräfte lässt sich endlich in folgenden Hauptschlusssatz zusammenfassen:

Beliebige auf ein System starr mit einander verbundener materiellen Punkte wirkende Kräfte können durch eine einzige Kraft und ein Kräftepaar ersetzt werden.

Beweis: Seien $A$ und $O$ zwei Punkte des Systems, und ziehe in $A$ die Kraft $p$, so wird, wenn ich in $O$ zwei der Kraft $p$ gleiche parallele Kräfte in entgegengesetzten Richtungen einführe, in der Wirkung der Kräfte des ganzen Systems nichts geändert. Ich kann aber die drei Kräfte $p$ auch ansehen als eine Kraft und ein Kräftepaar. Ebenso kann ich alle andern auf das starre System wirkenden Kräfte durch Einzelnkräfte, welche in $O$ ziehen, und entsprechende Kräftepaare ersetzen. Nun lassen sich aber sämmtliche in $O$ angreifenden Kräfte durch eine einzige Kraft, desgleichen alle Paare durch ein einziges Paar ersetzen, was zu beweisen war.

## Foucaults Pendelversuch.

Versuche mit einer Schwungmaschine zeigen, dass ein schwingendes Pendel, dessen Aufhängungspunkt in der Rotationsaxe liegt, an einer Drehung des das Pendel tragenden Gestells nicht teil nimmt, sondern seine Schwingungen unverändert in derselben Ebene vollführt.

Demgemäss müsste ein Pendel, welches etwa über dem Nordpol der Erde aufgehängt wäre, bei seinen Schwingungen seine Schwingungsebene gegen die unter ihm sich weiter drehende Erde fortwährend in dem Masse ändern, dass nach je 24 Stunden die Schwingungsebene immer wieder genau dieselbe Lage gegen die Erdoberfläche hätte.

Wenn dagegen ein Pendel über dem Äquator aufgehängt ist und etwa in der Meridianebene in Schwingungen versetzt wird, so ist, da sein Aufhängepunkt nur in einer momentan fortschreitenden Bewegung begriffen ist, also die Schwingungsebene fortwährend sich selbst parallel bleiben kann, zu einer Änderung derselben bezüglich der Erdoberfläche kein Grund vorhanden.

Die Rotation der Erde, falls eine solche vorhanden ist, muss nach der oben vorgetragenen Theorie aus der Gesamtheit der Kraftwirkungen resultieren, welche auf das

System starr mit einander verbundener Punkte, welches wir Erde nennen, ausgeübt werden. Wir können nun aber das eine Kräftepaar, durch welches die Erdrotation faktisch bewirkt wird, nach dem Gesetz vom Parallelogramm der Axen der Kräftepaare in zwei Paare zerlegen, deren eins seine Axe etwa in dem durch Brieg ($B$) gehenden Erddurchmesser, das andere in dem darauf senkrecht stehenden Durchmesser haben möge. Sei nun $m$ das Moment des die Erdrotation bewirkenden resultierenden Paars, $\varphi$ die geographische Breite von $B$, $p$ das Moment des componierenden Paars, dessen Axe durch $B$ geht, so ist $m : p = 1 : \sin \varphi$, oder $p = m \sin \varphi$.

Wenn nun statt des resultierenden Paars die zwei componierenden Paare ihre Wirkung auf ein in $B$ schwingendes Pendel ausübten, so würde die Wirkung des einen Paars, dessen Axe durch $B$ geht, eine ähnliche sein, wie sie das über dem Nordpol aufgehängte Pendel erfährt, dagegen die des andern Paares gerade so wirken, als wenn $B$ auf dem Äquator der Erde gelegen wäre. Es muss sich also an einem in $B$ aufgehängten Pendel eine solche Drehung der Schwingungsebene bemerken lassen, dass nach $\frac{24}{\sin \varphi}$ Stunden die Ebene wieder in ihrer Anfangslage erscheint. Da nun in der That eine dieses Gesetz befolgende Drehung der Schwingungsebene durch wiederholte Versuche an verschiedenen Orten der Erde bestätigt worden ist, so darf an der auch aus andern Gründen zu vermutenden Rotation der Erde nicht wol gezweifelt werden.

# II. Anwendung des Schwerpunktsbegriffs auf die Geometrie.

Erklärung: Denkt man sich eine Linie in unendlich viele gleiche Teile geteilt und in den Mitten aller Teile lauter gleiche übereinstimmend parallele Kräfte wirkend, so heisst der Mittelpunkt dieser parallelen Kräfte der Schwerpunkt der Linie. Es hängt dieser Name damit zusammen, dass man sich auch die sogenannte Schwerkraft auf die sämtlichen materiellen Punkte eines (in diesem Falle homogen genannten) Körpers derartig wirkend denkt, als wären alle Punkte mit gleicher Masse begabt und dem Angriff von lauter gleichen in übereinstimmend parallelen Richtungen ziehenden Kräften ausgesetzt. Die Wirkung der Schwerkraft ist also dieselbe, als wäre die ganze Masse des Körpers im Schwerpunkt vereinigt.

Ebenso stellt man sich, etwaige Lücken am Rande ergänzend, vor, eine Fläche sei in unendlich viele gleiche Quadrate geteilt, und die Mitten der Quadrate seien die Angriffspunkte von lauter gleichen übereinstimmend parallelen Kräften, und nennt wiederum den Mittelpunkt der parallelen Kräfte den Schwerpunkt der Fläche.

Endlich spricht man in gleichem Sinne vom Schwerpunkt eines geometrischen Körpers, indem man die Körper, etwaige Lücken an der Oberfläche ergänzend, in unendlich viele gleiche Würfel geteilt sich vorstellt und in den Mittelpunkten der Würfel Kräfte wie die vorhin erwähnten angreifen lässt.

Aus diesen Erklärungen ergeben sich sofort folgende Lehrsätze:

1. **Lehrsatz:** Der Schwerpunkt einer Strecke liegt in der Mitte derselben.
2. **Lehrsatz:** Den Schwerpunkt eines linearen Dreiecks (Dreiecksumfangs) ist das Centrum des innern Berührungskreises eines andern Dreiecks, das die Schwerpunkte der Seiten des ersten Dreiecks als Eckpunkte hat.

   Beweis: (Fig. VIII.) Sei $ABC$ das vorausgesetzte Dreieck, so können die an seinen Seiten ziehenden Kräfte durch drei Kräfte ersetzt werden, welche in den Seitenmitten $D, E, F$ ziehen und den entsprechenden Seiten proportional sind; die beiden in $D$ und $E$ ziehenden Kräfte wiederum können durch eine Kraft ersetzt werden, deren Angriffspunkt $K$ zwischen $E$ und $D$ so gelegen ist, dass $\overline{EK} : \overline{DK} = \overline{BC} : \overline{AC}$; nun ist aber $\overline{BC} : \overline{AC} = \overline{EF} : \overline{DF}$, folglich auch $\overline{EK} : \overline{DK} = \overline{EF} : \overline{DF}$, d. h. $K$ ein Punkt der Halbierungslinie des Winkels $EFD$, mithin muss auch der Angriffspunkt der Resultante aller drei Kräfte in dieser Halbierungslinie liegen. Da er nun mit gleichem Recht auch in den Halbierungslinien der Winkel $DEF$ und $EDF$ liegen muss, so muss er der Durchschnittspunkt dieser Linien sein.
3. **Lehrsatz:** Der Schwerpunkt der Fläche eines Dreiecks liegt im Schnittpunkt der die Seiten halbierenden Ecktransversalen.

   Beweis: Sei $ABC$ das vorausgesetzte Dreieck, und denke ich mir die Zerschneidung desselben in gleiche Quadrate (1. Erkl.) so ausgeführt, dass die Schnittlinien fürs erste parallel der $AB$ gehen, so können die an den einzelnen parallelen Flächenstreifen ziehenden Kräfte je durch Einzelnkräfte ersetzt werden, deren Angriffspunkte in der Transversale $CF$ gelegen sind, es muss also auch der Angriffspunkt der Resultante derselben in der $CF$ liegen. Mit demselben Recht muss aber dieser Punkt auch in der $AD$ und $BE$ gelegen, also ihr Durchschnittspunkt sein.

Beiläufig erwähnen wir den der reinen Geometrie angehörenden Lehrsatz, dass die die Seiten halbierenden Ecktransversalen (Mittellinien) eines Dreiecks einander so schneiden, dass das an die Seitenmitte angrenzende Stück jedesmal ein Drittel der ganzen Mittellinie ist. Daraus geht hervor, dass ein gleichmässig mit Masse besetzt gedachtes Dreieck durch die Schwerkraft gerade so afficiert wird, als wäre je ein Drittel der Gesamtmasse in den Eckpunkten vereinigt und das Dreieck im Übrigen leer.

4. **Lehrsatz:** Der Schwerpunkt der Oberfläche eines Tetraeders ist das Centrum der innern Berührungskugel eines andern Tetraeders, welches die Schwerpunkte der Seiten des ersten Tetraeders als Eckpunkte hat.

   (Beweis als Aufgabe zur Übung der Schüler vorbehalten.)
5. **Lehrsatz:** Der Schwerpunkt eines Tetraeders liegt im Durchschnittspunkt der vier Ecktransversalen, welche nach den Schwerpunkten der Seiten gezogen sind.

   Beweis: Denke ich mir die Zerschneidung des Tetraeders in gleiche Würfel (1. Erkl.) so ausgeführt, dass die Schnittflächen fürs erste parallel einer Seite des Tetraeders geführt werden, so können die in den Mitten der Würfel jeder einzelnen Schicht angreifenden Kräfte je durch eine Einzelnkraft ersetzt werden, welche ihren Angriffspunkt unendlich nahe dem Schwerpunkt der Schnittfläche hat. Nun sind aber alle diese Schnittflächen ähnliche Dreiecke und haben den gegenüberliegenden Eckpunkt des Tetraeders als Ähnlichkeitspunkt, mithin müssen alle ihre Schwerpunkte mit diesem Eckpunkt in gerader Linie liegen u. s. w. wie bei Lehrs. 3.

Beiläufig erwähnen wir den der reinen Geometrie angehörenden Lehrsatz, dass die vier nach den Schwerpunkten der Seiten gehenden Ecktransversalen eines Tetraeders einander so schneiden, dass das an die Seite anstossende Stück jedesmal ein Viertel der ganzen Transversale ist. Daraus erfolgt, dass ein gleichmässig mit Masse erfüllt gedachtes Tetraeder durch die Schwerkraft gerade so afficiert wird, als wäre je ein Viertel der Gesamtmasse in den Eckpunkten vereinigt und das Tetraeder im Übrigen leer.

5a. Zusätze: Der Schwerpunkt einer Kugelzone liegt mitten zwischen den Centren ihrer beiden Begrenzungskreise.

Denn werde die Zone durch unendlich viele Parallelschnitte in lauter gleich hohe Zonen zerschnitten, so kann die Fläche jeder einzelnen derselben unbeschadet der Lage ihres Schwerpunkts und der Grösse der Resultante der Parallelkräfte durch den ihr gleichen Mantel des zwischen denselben Parallelebenen gelegenen Cylinders ersetzt werden, welcher einen grössten Kugelkreis als Basis hat. Statt der Fläche der ganzen Kugelzone erscheint also jetzt die Mantelfläche eines gleich hohen geraden Kreiscylinders. Der Schwerpunkt desselben liegt aber offenbar in der Mitte zwischen den Centren der beiden Begrenzungskreise.

Hieraus ergibt sich sofort als specieller Fall die Lage des Schwerpunkts einer Calotte.

Aus dieser letztern leitet man durch einfache Überlegungen nach Lehrsatz 5 die Lage des Schwerpunkts eines Kugelsektors ab, und hieraus wiederum kann in Verbindung mit der Lage des Schwerpunkts eines geraden Kreiskegels die gleiche Aufgabe bezüglich des Kugelsegments gelöst werden. (Vgl. im Folgenden die Beispiele von No. 14.)

6. Lehrsatz: Denkt man sich ein beliebiges System starr mit einander verbundener Punkte, deren Anzahl $n$ sei, von gleichen übereinstimmend parallelen Kräften angegriffen, so ist die Summe der Entfernungen dieser Punkte von einer beliebigen Ebene gleich der $n$fachen Entfernung des Mittelpunkts der Kräfte von eben dieser Ebene.

Beweis: Die Ebene sei vorläufig so gewählt, dass alle Punkte auf einer Seite derselben liegen, und die Entfernungen der Punkte $A$, $B$, $C$, $D$ etc. von der Ebene mögen mit den entsprechenden Buchstaben $a$, $b$, $c$, $d$ etc. bezeichnet sein. Sei also $M'$ die Mitte der $\overline{AB}$, so ist offenbar $m' = \frac{a+b}{2}$, oder $2m' = a + b$. Sei ferner $M''$ zwischen $M'$ und $C$ so gelegen, dass $\overline{M'M''} : \overline{M''C} = 1 : 2$, so ist auch $(m'-m'') : (m''-c) = 1 : 2$, also $3m'' = a + b + c$. Ebenso wenn $M'''$ zwischen $M''$ und $D$ so bestimmt wird, dass $\overline{M''M'''} : \overline{M'''D} = 1 : 3$, so ist auch $(m''-m''') : m'''-d) = 1 : 3$, also $4m''' = a + b + c + d$. Diese Rechnung lässt sich in gleicher Form offenbar beliebig weit fortsetzen. Man sieht aber zugleich, dass die Bestimmung der Punkte $M'$, $M''$, $M'''$ genau nach der Regel geschieht, nach welcher man den Mittelpunkt der parallelen Kräfte durch Construction findet. Die Behauptung ist also bewiesen.

Dass aber der Satz auch in dem Falle richtig ist, wenn die Punke auf beiden Seiten der Ebene im Raume verteilt sind, erhellt sofort, wenn man die Ebene parallel mit ihr selbst so weit hinausrückt, dass alle Punkte nur auf einer Seite liegen; denn sei $n$ die Anzahl der Punkte, $k$ der Zuwachs, welchen jede einzelne Entfernung durch diese Verlegung der Ebene erfahren hat, so ist die Summe der Entfernungen um $nk$ vermehrt, die gleiche Vermehrung hat aber auch die $n$fache Entfernung des Mittelpunkts erfahren. Bringt man also von der Summe der Einzelnentfernungen und der ihr gleichen $n$fachen Entfernung des Mittelpunkts die gleichen Incremente wieder in Abzug, so zeigt sich, dass auch bei der ursprünglichen Lage der Ebene die behauptete Gleichheit bestehen muss.

Natürlich ist es nötig, die auf entgegengesetzten Seiten der Ebene gemessenen Entfernungen mit entgegengesetzten Vorzeichen zu versehen.

7. Lehrsatz: Denkt man sich ein beliebiges System starr mit einander verbundener Punkte, deren Anzahl $n$ sei, als Angriffspunkte gleicher übereinstimmend parallelen Kräfte, und diese Punkte samt ihrem Mittelpunkt durch parallele Strecken mit einer beliebigen Ebene verbunden, so ist die Summe der den einzelnen Punkten angehörigen Strecken gleich der $n$fachen dem Mittelpunkt angehörenden Strecke.

Beweis: Fällt man auf eben dieselbe Ebene von allen Punkten die Senkrechten, so erscheint jede einzelne Strecke gleich der von dem zugehörigen Punkte ausgehenden Senkrechten dividiert durch den Sinus des Neigungswinkels der Strecken gegen die Ebene.

Auch diesmal ist es nötig, die auf entgegengesetzten Seiten der Ebene gemessenen Strecken mit entgegengesetzten Vorzeichen zu versehen.

8. Lehrsatz: Die Mantelfläche eines geraden Prismenstumpfs ist gleich der eines Prismas auf derselben Basis, welches die durch den Schwerpunkt des Basisumfangs gehende Axe [1]) des Stumpfs als Höhe hat.

Beweis: Seien $a, b, c, d$ etc. die Seiten des Basisumfangs, $a', b', c', d'$ etc. die in den Mitten der Seiten parallel den stehenden Kanten gezogenen Seitenlinien, so ist die Mantelfläche $= aa' + bb' + cc' + dd' + \ldots\ldots$ Nun kann aber die Mitte der $a$ auch als Mittelpunkt von gleichen parallelen Kräften angesehen werden, welche, wenn der ganze Umfang in unendlich viele gleiche Teile geteilt ist, in den Mitten der einzelnen Teile von $a$ angreifend gedacht werden, und dasselbe gilt von den Mitten der $b, c, d$ u. s. w. Ist also $h$ die Länge der durch den Schwerpunkt des Basisumfangs gehenden Axe, so ist zufolge des 7. Lehrsatzes, indem diesmal einer der unendlich kleinen Teile als Längeneinheit gebraucht wird,

$$h\,(a + b + c + d + \ldots) = aa' + bb + cc' + dd' + \ldots\ldots \text{ w. z. b. w.}$$

9. Zusatz: Die Mantelfläche eines beliebigen Prismenstumpfs ist gleich der eines geraden Prismas, welches einen senkrecht gegen die Seitenkanten geführten Querschnitt als Grundfläche und die durch den Schwerpunkt des Umfangs dieses Querschnitts gehende Axe als Höhe hat.

Beweis: Führt man durch die prismatische Fläche einen Normalschnitt so, dass der Stumpf ganz auf einer Seite der Schnittebene liegt, so erscheint der Mantel des Stumpfs als Unterschied zweier Mäntel, deren jeder nach dem 8. Lehrsatz gefunden werden kann.

10. Hilfssatz: Das Volumen eines geraden Prismenstumpfs mit quadratischer Basis ist gleich dem eines Prismas auf derselben Basis, welches die durch die Mitte der Basis gehende Axe als Höhe hat.

Denn seien $a$ und $c$ zwei einander gegenüberliegende Seitenkanten des Stumpfes, so ist die Länge der Axe $h = \frac{a + c}{2}$, und wenn $b$ und $d$ die beiden andern Seitenkanten sind, $h = \frac{b + d}{2}$. Mit Hilfe eines bekannten Satzes vom dreiseitigen Stumpf ergibt sich also, wenn die Basis mit $G$ bezeichnet wird, das gesuchte Volumen $V = \frac{G}{4}\,\frac{a + b + h + b + c + h + c + d + h + d + a + h}{3}$, oder durch eine leichte Rechnung $V = Gh$.

11. Lehrsatz: Das Volumen eines geraden Prismenstumpfs ist gleich dem eines Prismas auf derselben Basis, das die durch den Schwerpunkt der Basis gehende Axe als Höhe hat.

Beweis: Ich denke mir den Stumpf durch einander rechtwinklig durchkreuzende der Axe parallele Ebenen in unendlich viele Stäbe mit gleichen quadratischen Basen zerschnitten, so ist nach Satz 10 das Volumen jedes einzelnen Stabes gleich seiner Basis multipliciert mit der durch die Mitte der Basis gehenden Axe, folglich das Volumen des ganzen Stumpfs gleich einem der unendlich kleinen Quadrate multipliciert mit der Summe der durch die Mitten aller Quadrate gezogenen Axen. Dieses Produkt ist aber mit Anwendung des 7. Lehrsatzes sofort gleich dem Produkt aus der Basis des Stumpfs und der durch ihren Schwerpunkt gehenden Axe, w. z. b. w.

12. Lehrsatz: Das Volumen eines beliebigen Prismenstumpfs ist gleich dem eines Prismas, welches einen senkrecht gegen die Seitenkanten geführten Querschnitt als Basis und die durch den Schwerpunkt des Querschnitts gehende Axe als Höhe hat. (Beweis nach Analogie des Beweises von Satz 9 leicht zu führen.)

---

[1]) Axe heisst hier jede parallel den Seitenkanten gehende von den beiden Endflächen begrenzte Strecke.

13. **Lehrsatz**: Wird eine ebene **Flächenfigur** auf eine Ebene projiciert, so ist die Projection ihres Schwerpunkts zugleich der Schwerpunkt der Projection der Flächenfigur.

Beweis: Sei $A'B'C'$ die Projection des Dreiecks $ABC$ auf irgend eine Ebene, $D'$ die Projection von $D$, $E'$ die von $E$, so ist, wenn $D$ die Mitte der $\overline{BC}$, auch $D'$ die Mitte der $\overline{B'C'}$, und wenn $E$ zwischen $A$ und $D$ so gelegen ist, dass $\overline{ED} = \frac{1}{3}\,\overline{AD}$, so liegt auch $E'$ zwischen $A'$ und $D'$ so, dass $\overline{E'D'} = \frac{1}{3}\,\overline{A'D'}$. Nun ist aher $E$ der Schwerpunkt von $ABC$, $E'$ der von $A'B'C'$, also ist für jedes Dreieck die Richtigkeit des Satzes bewiesen.

Gesetzt nun, der Satz sei für ein $n$eck richtig, so werde ich zeigen, dass er auch noch richtig ist, wenn das $n$eck durch Ansetzung oder Ausschneidung eines Dreiecks in ein $(n+1)$eck umgeändert wird.

Sei also $ABCD$ ein Teil des Umfangs des $n$ecks, $M$ der Schwerpunkt der $n$ecksfläche, $\triangle CDE$ in der Ebene des $n$ecks gelegen, $Q$ der Schwerpunkt des Dreiecks, so liegt der Schwerpunkt $R$ des durch Vereinigung beider Flächen entstandenen $(n+1)$ecks so, dass $\overline{MR} : \overline{QR} = \triangle : n\text{eck}$. Sei $\alpha$ der Neigungswinkel zwischen der Ebene des $(n+1)$ecks und der Projectionsebene, so hat die Projection des $n$ecks einen Inhalt $= n\text{eck} \,.\, \cos\alpha$, die Projection des Dreiecks einen Inhalt $= \triangle \cos\alpha$. Ist also endlich $M'$ die Projection von $M$, $Q'$ die von $Q$, so ist der Schwerpunkt $X$ der Projection des $(n+1)$ecks so gelegen, dass $\overline{M'X} : \overline{Q'X} = \triangle \cos\alpha : n\text{eck} \cdot \cos\alpha$, also ist $\overline{MR} : \overline{QR} = \overline{M'X} : \overline{Q'X}$, also $RX \parallel MM'$, also $X$ die Projection von $R$, w. z. b. w.

Da nun, wie oben gezeigt worden, der Satz für jedes Dreieck richtig ist, so ist er auch für jedes Viereck, demzufolge auch für jedes Fünfeck u. s. w., überhaupt für jedes beliebige Polygon und allgemein für jede ebene Flächenfigur richtig.

Anmerkung: Es wäre ein falscher Schluss, wenn man, da die Flächenfigur jede beliebige Gestalt haben kann, vorausgesetzt, dass sie eben ist, den Satz auch auf eine ebene Linie als Grenze einer ebenen Fläche ausdehnen wollte. Denn die Begriffe Schwerpunkt einer Linie, Schwerpunkt einer Fläche, Schwerpunkt eines Körpers sind, wie auch aus den an die Spitze gestellten Erklärungen hervorgeht, ihrer Natur nach verschieden und können niemals in einander übergehen. Die Nichtbeachtung dieses Unterschiedes hat schon zu manchen falschen Behauptungen und fehlerhaften Beweisen Anlass gegeben.

Damit aber über diese Verschiedenheit der Begriffe womöglich auch jeder Anfänger zu völliger Klarheit gelange, möchte ich zum Schluss noch ein besonderes Beispiel betrachten. Denkt man sich um den Schwerpunkt eines Dreiecks als Ähnlichkeitspunkt alle möglichen Dreiecke mit bezüglich parallelen Seiten, so haben nicht nur alle Dreiecke, sondern auch die Flächenunterschiede je zweier, auch der unmittelbar auf einander folgenden Dreiecke, diesen Punkt als gemeinsamen Schwerpunkt. Es wäre aber ein arger Irrtum, den Schwerpunkt eines solchen Unterschieds (Flächendifferentials) mit dem eines linearen Dreiecks zu identificieren; denn auch der noch so schmale Saum, um welchen das grössere Dreieck über das kleinere hervorragt, hat immer noch eine gewisse Breite, und das Breitenverhältnis der drei Säume bleibt auch bis zum Verschwinden ihrer Breite constant. Nur wenn alle drei Säume gleich breit sind, also nur beim gleichseitigen Dreieck, fallen die Schwerpunkte der Fläche und des Umfangs zusammen.

14. **Lehrsatz**: Mit Anwendung des vorigen Lehrsatzes kann Lehrsatz 12 auch in folgender Form vorgetragen werden:

Das Volumen eines Prismenstumpfs ist gleich dem Volumen eines Prismas, welches einen senkrecht gegen die Seitenkanten geführten Querschnitt als Basis und die Strecke zwischen den Schwerpunkten der beiden Endflächen als Höhe hat.

15. Lehrsatz: a. Wenn eine ebene Linie um eine in ihrer Ebene liegende, die Linie nicht schneidende Axe rotiert, so ist die Masszahl der von ihr beschriebenen Fläche gleich der Masszahl der Länge der erzeugenden Linie multipliciert mit der Masszahl des Weges, welchen ihr Schwerpunkt beschreibt.

b. Wenn eine ebene ringsum geschlossene Fläche um eine in ihrer Ebene liegende, die Fläche nicht schneidende Axe rotiert, so ist die Masszahl des von ihr durchlaufenen Körperraums gleich der Masszahl der erzeugenden Fläche multipliciert mit der Masszahl des Weges, welchen ihr Schwerpunkt beschreibt.

(Beide Sätze tragen zusammen den Namen „Regel des Guldinus“.)

Beweis: Legt man durch die Axe unendlich viele einander unendlich nahe Ebenen, so wird die erzeugte Rotationsfläche in Mäntel von Prismenstumpfen zerlegt, welche alle die erzeugende Linie als Normalschnitt haben, desgleichen wird dadurch der erzeugte Rotationskörper in Prismenstumpfe geteilt, für welche alle die erzeugende Fläche ein Normalschnitt ist. Durch Anwendung der Sätze 9 und 12 aber und Summierung der einzelnen Mäntel, resp. der Volumina der einzelnen Körper, kommt man sofort zu dem in der Behauptung ausgesprochenen Resultat.

Die Guldinsche Regel ist für die Berechnung der Oberfläche und des Rauminhalts der Rotationskörper von grosser Wichtigkeit, aber sie dient auch umgekehrt, wenn Oberfläche und Inhalt eines solchen Körpers anderweitig bekannt sind, die Lage der Schwerpunkte der erzeugenden Linie und der erzeugenden Fläche durch Rechnung zu finden, welche Kenntnis wiederum zur Auffindung von Oberfläche und Inhalt anderer Rotationskörper verwendet werden kann.

So findet man z. B. die Lage des Schwerpunkts eines Kreisbogens, eines Kreissektors, eines Kreissegments. Es mag dem Leser überlassen bleiben, die Richtigkeit folgender Resultate zu prüfen:

Der Schwerpunkt eines Kreisbogens liegt auf dem den Bogen halbierenden Radius so, dass sein Abstand vom Centrum sich zu einem Radius verhält, wie die den Bogen unterspannende Sehne zur Länge des Bogens.

Der Schwerpunkt eines Kreissegments, dessen Radius $r$ ist und dessen Centriwinkel $\alpha$ Grad enthält, liegt in dem das Segment halbierenden Radius so, dass seine Entfernung vom Centrum $\dfrac{240\; r\; \sin \frac{\alpha^3}{2}}{\pi\, \alpha - 180 \sin \alpha}$ ist.

Ist $h$ die Höhe eines geraden Kegelstumfs, $r'$ und $r''$ die Radien der beiden Begrenzungskreise, so hat der Schwerpunkt der Mantelfläche von der Basis mit dem Radius $r'$ den Abstand $\frac{h}{3}\,\frac{r' + 2r''}{r' + r''}$.

Ist $h$ die Höhe eines Kugelsegments, $r$ der Radius der Kugel, so hat der Abstand vom Schwerpunkt des Segments bis zum Centrum die Länge $\frac{3}{4}\,\frac{(2r-h)^2}{3r-h}$; vorher findet man den entsprechenden Abstand für den zugehörigen Kugelsektor $\frac{3}{8}\,(2r-h)$.

Ist $a$ der Radius der Basis eines Kugelsegments, $h$ seine Höhe, so liegt der Schwerpunkt des Segments über der Basis um eine Strecke $\frac{h}{2}\,\frac{2a^2+h^2}{3a^2+h^2}$.

Sind $a$ und $b$ die Radien der Begrenzungskreise einer Kugelschicht, $h$ ihre Dicke, so hat der Abstand vom Schwerpunkt der Kugelschicht bis zu dem Kreise mit dem Radius $a$ die Länge $\frac{h}{2}\,\frac{2a^2+4b^2+h^2}{3a^2+3b^2+h^2}$.

Wird eine Kugel centrisch durch einen Kreiscylinder durchbohrt, und hat der stehen bleibende Reif die Höhe $2a$, so ist das Volumen des Reifes $\frac{4}{3}\,a^3\,\pi$. Es haben also alle Kugelreife von gleicher Höhe auch gleiche Volumina.

# III. Lösung einer Aufgabe aus der Optik.

Unter welchem Winkel muss ein Lichtstrahl auf ein Prisma mit dem Brechungswinkel $\gamma$ und dem Brechungsquotienten $\frac{m}{q}$ in einer auf der Kante senkrecht stehenden Ebene einfallen, wenn er um den Winkel $\delta$ abgelenkt werden soll?

Sei $\iota$ der gesuchte Einfallswinkel, $\varkappa$ der Brechungswinkel im Prisma, $\ell$ der Einfallswinkel ebendaselbst, $\varkappa'$ der Brechungswinkel, unter welchem der Strahl aus dem Prisma austritt, so hat man zur Bestimmung der vier Unbekannten $\iota$, $\varkappa$, $\ell$, $\varkappa'$ folgende vier Gleichungen:

Nach dem Gesetz des Snellius ist

$$\left.\begin{aligned} \sin\iota : \sin\varkappa &= m : q \\ \sin\ell : \sin\varkappa' &= q : m \\ \gamma &= \varkappa + \ell \\ \delta &= \varkappa' + \iota - \gamma \end{aligned}\right\}$$

Ausserdem bestehen die Beziehungen (die letzten beiden Gleichungen).

Ich eliminiere zunächst $\varkappa$ und $\varkappa'$ und finde dadurch

$$\left.\begin{aligned} q\sin\iota &= m\sin(\gamma-\ell) \\ q\sin(\gamma+\delta-\iota) &= m\sin\ell \end{aligned}\right\}\qquad \begin{aligned}&\text{I.}\\&\text{II.}\end{aligned}$$

Aus I folgt $q\sin\iota = m\sin\gamma\cos\ell - m\cos\gamma\sin\ell$,

desgl. aus II. $q\sin(\gamma+\delta)\cos\iota - q\cos(\gamma+\delta)\sin\iota = m\sin\ell$,

oder nach Umstellung der Glieder, so dass $\cos\iota$ und $\cos\ell$ je auf einer Seite allein steht,

$$q\sin\iota + m\cos\gamma\sin\ell = m\sin\gamma\cos\ell \qquad \text{III.}$$

$$m\sin\ell + q\cos(\gamma+\delta)\sin\iota = q\sin(\gamma+\delta)\cos\iota \qquad \text{IV.}$$

III. und IV. je mit 2 potenziert ergeben mit Anwendung einiger einfachen Zusammenziehungen

$$q^2\sin\iota^2 + 2mq\cos\gamma\sin\iota\sin\ell + m^2\sin\ell^2 = m^2\sin\gamma^2$$

$$q^2\sin\iota^2 + 2mq\cos(\gamma+\delta)\sin\iota\sin\ell + m^2\sin\ell^2 = q^2\sin(\gamma+\delta)^2,$$

und daraus folgt durch Subtraction

$$2mq\,[\cos\gamma - \cos(\gamma+\delta)]\sin\iota\sin\ell = m^2\sin\gamma^2 - q^2\sin(\gamma+\delta)^2,$$

also, was wir behufs Elimination von $\ell$ zur Substitution in II. bedürfen,

$$m\sin\ell = \frac{m^2\sin\gamma^2 - q^2\sin(\gamma+\delta)^2}{2q\,[\cos\gamma - \cos(\gamma+\delta)]\sin\iota},$$

also endlich durch Substitution in II. und eine leichte Umformung

$$2\sin\iota\sin(\gamma+\delta-\iota) = \frac{m^2\sin\gamma^2 - q^2\sin(\gamma+\delta)^2}{q^2\,[\cos\gamma - \cos(\gamma+\delta)]}, \qquad \text{V.}$$

welche Gleichung nur noch die Unbekannte $\iota$ enthält.

**Durch Anwendung der bekannten Formel** $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta$ **bringt man diese Gleichung auf die Form**

$$\cos(2\iota - \gamma - \delta) - \cos(\gamma + \delta) = \frac{m^2 \sin\gamma^2 - q^2 \sin(\gamma + \delta)^2}{q^2 [\cos\gamma - \cos(\gamma + \delta)]},$$

**und daraus findet man endlich**

$$\cos(2\iota - \gamma - \delta) = \frac{m^2 \sin\gamma^2 - q^2 (1 - \cos\gamma \cos\delta)}{q^2 [\cos\gamma - \cos(\gamma + \delta)]}, \qquad \text{VI.}$$

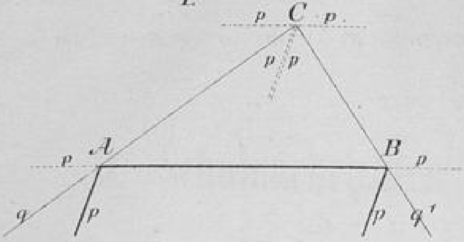
**wodurch der Winkel** $\iota$ **eindeutig bestimmt und die Aufgabe gelöst ist.**

D e t e r m i n a t i o n: Der Winkel $\delta$ darf nicht jede beliebige Grösse haben, sondern ist an die Bedingung gebunden, dass der Ausdruck rechterseits den Wert $1$ nicht überschreitet. In diesem Grenzfalle ist $2\iota - \gamma - \delta = o$, also hat diesmal $\delta$ den kleinsten zulässigen Wert. Mit Rücksicht darauf, dass $\gamma + \delta = \iota + \varkappa'$, erkennt man also, dass, wenn der Ablenkungswinkel $\delta$ der kleinstmögliche sein soll, $\iota = \varkappa'$ sein muss, ein Resultat, das sonst nur mit Anwendung der Differenzialrechnung gefunden wird.

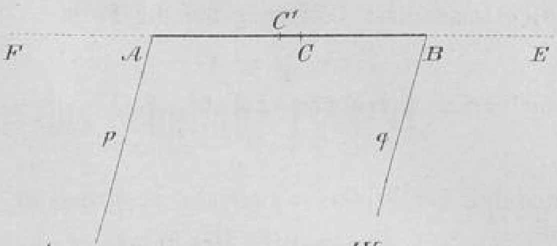
Die Grösse von $\iota$, wenn der Ablenkungswinkel ein Mimimun sein soll, wird durch Auflösung der Gleichung $\frac{m^2 \sin\gamma^2 - q^2 (1 - \cos\gamma\cos\delta)}{q^2 [\cos\gamma - \cos(\gamma + \delta)]} = 1$ ermittelt. Durch eine Reihe nicht besonders schwieriger Ableitungen erhält man daraus $\cos\frac{\gamma + \delta}{2} = \frac{m}{q}\cos\frac{\gamma}{2}$, oder da $\frac{\gamma + \delta}{2} = \iota$, $\cos\iota = \frac{m}{q}\cos\frac{\gamma}{2}$.

Ich wurde zur Lösung dieser Aufgabe durch eine sehr unschuldig aussehende Angabe in Kambly's Physik am Ende des § 103 veranlasst; der Inhalt der betreffenden Stelle dürfte den Schülern ohne die vorstehende oder eine ähnliche Rechnung schwerlich klar zu machen sein.

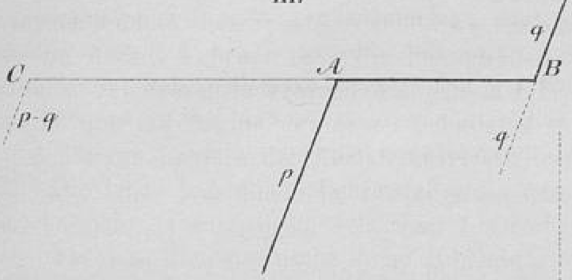
I.



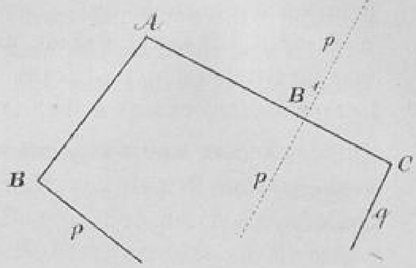

II.



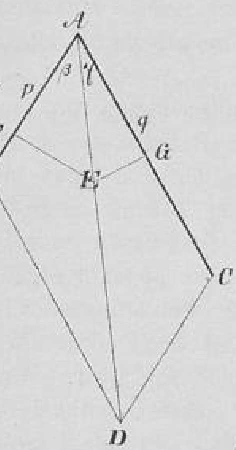

III.



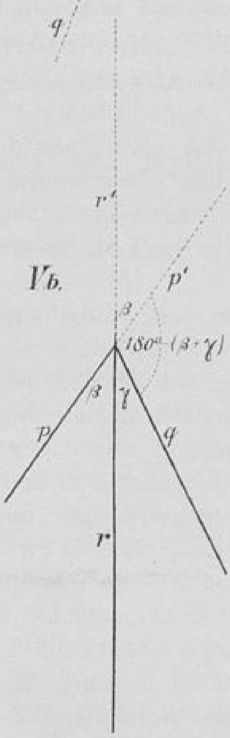

IV.



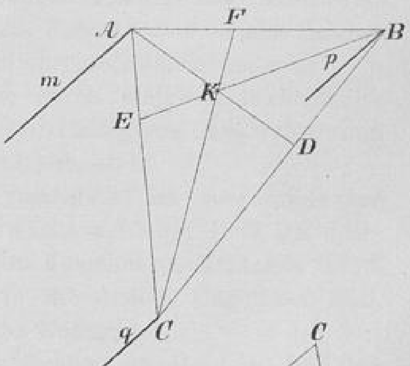

Va.



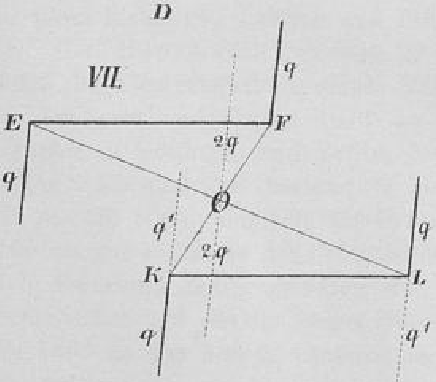

Vb.




VI.




VII.




VIII.