Ueber die

Theilbarkeit der Combinationssummen aus den natürlichen Zahlen durch Primzahlen.

Von **Prof. Dr. H. F. Scherk.**

I.

Die hier folgenden Untersuchungen sind zunächst durch den zuerst von Steiner im XIII. Band des Crelle'schen Journals mitgetheilten, dann von Jacobi erweiterten Satz veranlasst, „dass, wenn p eine gegebene Primzahl ist, wenn man ferner n beliebige durch p nicht theilbare Zahlen auswählt und deren Combinationssummen mit Wiederholungen zur $(p-n)$ten, $(p-n+1)$ten .... bis zur $(p-2)$ten Classe bildet, jede Combinationssumme durch p theilbar sei, so lange $p > n > 1$ ist." Der Versuch, diesen Satz aus andern Prämissen zu beweisen, führte mich zuerst zu einem allgemeineren Satze, von dem der Steiner-Jacobi'sche Satz ein einzelner Fall ist, sodann zu einer Reihe von Sätzen über die Theilbarkeit der Combinationssummen mit und ohne Wiederholungen durch Primzahlen und durch die Quadrate von Primzahlen, die natürlich grösser sind, als die zu combinirenden Zahlen. Die Beweise einiger dieser Sätze haben sich nur durch analytische Entwicklungen ermöglichen lassen, die scheinbar mit der Zahlenlehre in gar keiner Verbindung stehen.

Ist nämlich p eine beliebige ungerade Primzahl, so hat man bekanntlich

$$(1-x)\,(1-2x)\,(1-3x)\,\ldots\,(1-(p-1)\,x) = 1-\overset{1}{A}x+\overset{2}{A}x^2+\overset{3}{A}x^3+\ldots+\overset{p-1}{A}x^{p-1} \qquad (1)$$

wobei $\overset{1}{A}, \overset{2}{A}, \overset{3}{A} \ldots \overset{p-1}{A}$ die Summen der Combinationen ohne Wiederholung, resp. zur ersten, zweiten, dritten .... $(p-1)$sten Classe aus den Zahlen $1, 2, 3 \ldots (p-1)$ vorstellen. Sind ferner $a_1\ a_2\ a_3 \ldots a_n$ n beliebige durch p nicht theilbare Zahlen, für welche, der Einfachheit halber, ihre Reste nach dem Modul p angenommen werden mögen, so hat man

$$\frac{1}{(1-a_1x)\,(1-a_2x)\,(1-a_3x)\ldots(1-a_nx)} = 1+\overset{1}{B}x+\overset{2}{B}x^2+\ldots+\overset{p}{B}x^p+\overset{p+1}{B}x^{p+1}+\text{ etc. in inf.} \qquad (2)$$

wobei $\overset{1}{B}\ \overset{2}{B} \ldots \overset{p}{B} \ldots$ die Summen der Combinationen mit Wiederholungen resp. zur ersten, zweiten, ... p^{ten} Classe aus den Zahlen $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ bedeuten. Multiplicirt man nun diese beiden Ausdrücke mit einander, so heben sich aus dem ersten Producte die im Nenner des zweiten vorkommenden Factoren weg, und man erhält:

$$(1 - a_{n+1}x)\ (1 - a_{n+2}x) \dots (1 - a_{p-1}x)$$
$$= 1 - \overset{1}{\alpha}x + \overset{2}{\alpha}x^2 - \overset{3}{\alpha}x^3 + \dots + (-1)^n \overset{p-n-1}{\alpha} x^{p-n-1} \qquad (3)$$

wobei durch $\overset{1}{\alpha}, \overset{2}{\alpha}, \overset{3}{\alpha} \dots \overset{p-n-1}{\alpha}$ die Summen der Combinationen ohne Wiederholung aus den Zahlen $a_{n+1}\ a_{n+2} \dots a_{p-1}$ resp. zur ersten, zweiten . . . . $(p-n-1)^{ten}$ Classe bezeichnet sind.

Durch Vergleichung der Coefficienten gleicher Potenzen im Produkt des zweiten Theils der Gleichungen (1) und (2) mit dem zweiten Theile von (3) erhält man nun

$$\overset{1}{\alpha} = \overset{1}{A} - \overset{1}{B}$$
$$\overset{2}{\alpha} = \overset{2}{A} - \overset{1}{A}\overset{1}{B} + \overset{2}{B}$$
$$\overset{3}{\alpha} = \overset{3}{A} - \overset{2}{A}\overset{1}{B} + \overset{1}{A}\overset{2}{B} - \overset{3}{B}$$
$$\vdots$$
$$\overset{p-n-1}{\alpha} = \overset{p-n-1}{A} - \overset{p-n-2}{A}\overset{1}{B} + \overset{p-n-3}{A}\overset{2}{B} - \dots + (-1)^n \overset{p-n-1}{B}$$
$$0 = \overset{p-n}{A} - \overset{p-n-1}{A}\overset{1}{B} + \overset{p-n-2}{A}\overset{2}{B} - \dots + (-1)^{n-1} \overset{p-n}{B}$$
$$0 = \overset{p-n+1}{A} - \overset{p-n}{A}\overset{1}{B} + \overset{p-n-1}{A}\overset{2}{B} - \dots + (-1)^{n-2} \overset{p-n+1}{B}$$
$$\vdots$$
$$0 = \overset{p-2}{A} - \overset{p-3}{A}\overset{1}{B} + \overset{p-4}{A}\overset{2}{B} - \dots + \overset{p-1}{B}$$
$$0 = \overset{p-1}{A}\overset{1}{B} - \overset{p-2}{A}\overset{2}{B} + \overset{p-3}{A}\overset{3}{B} + \dots + \overset{p}{B}$$
$$0 = \overset{p-1}{A}\overset{2}{B} - \overset{p-2}{A}\overset{3}{B} + \overset{p-3}{A}\overset{4}{B} - \dots + \overset{p+1}{B} \quad \text{etc.}$$

Nun hat aber **Lagrange** in den Memoiren der Berliner Academie für 1771 (vergl. Klügel's Lexicon V. p. 1081) bewiesen, dass $\overset{1}{A} \equiv \overset{2}{A} \equiv \dots \equiv \overset{p-2}{A} \equiv 0$ (mod. p), während nach dem Wilson'schen Satze $\overset{p-1}{A} \equiv -1$ (mod. p.); also folgt: Erstens aus dem obigen $p-n-1$ ersten Gleichungen, dass $\overset{1}{B} \equiv -\overset{1}{\alpha}$, $\overset{2}{B} \equiv \overset{2}{\alpha}$, $\overset{3}{B} \equiv -\overset{3}{\alpha}$, ... $\overset{h}{B} \equiv (-1)^h \overset{h}{\alpha}$ bis $\overset{p-n-1}{B} \equiv (-1)^{p-n-1} \overset{p-n-1}{\alpha}$, das heisst:

Ist p eine beliebige ungerade Primzahl, und bildet man die Summe der Combinationen mit Wiederholungen zur h^{ten} Classe aus n beliebigen kleineren Zahlen als p, und die Summe der Combinationen ohne Wiederholungen aus den übrigen $p-n-1$ Zahlen, die gleichfalls kleiner sind als p, **so ist die Summe oder der Unterschied beider durch p theilbar, je nachdem h ungerade oder gerade ist.**

Zweitens ergiebt sich aus den obigen Gleichungen, dass $\overset{p-n}{B} \equiv \overset{p-n+1}{B} \equiv \overset{p-n+2}{B} \ldots \equiv \overset{p-2}{B} \equiv 0$, und im Allgemeinen $\overset{k(p-1)+h}{B} \equiv \overset{h}{B} \equiv 0$ ist, wo k eine beliebige ganze Zahl und $p-n-1 < h < p-1$ ist, welches der Steiner-Jacobi'sche Satz ist, der aber, wie man sieht, unter dem obigen Satze mit enthalten ist, da, wenn $h > p-n-1$, $\overset{h}{\alpha} = 0$ ist.

Drittens folgt aus den obigen Gleichungen, dass $\overset{p-1}{B} \equiv \overset{2(p-1)}{B} \equiv \overset{3(p-1)}{B} \equiv \ldots \equiv - \overset{p-1}{A} \equiv +1$ ist, wie der Wilson'sche Satz lehrt.

Nimmt man für $a_1, a_2, \ldots a_n$ die n ersten natürlichen Zahlen $1, 2 \ldots n$, so werden $a_{n+1}, a_{n+2} \ldots a_p$, die $p-n-1$ letzten Zahlen $n+1, n+2 \ldots p-1$, da aber $n+1 \equiv -(p-n-1), n+2 \equiv -(p-n-2), \ldots p-1 \equiv -1$, so ist $\overset{h}{\alpha}$ jetzt aus den $p-n-1$ ersten negativen Zahlen zu bilden, also jede Combinationsform positiv oder negativ, je nachdem h gerade oder ungerade ist, und folglich jede einzelne Form in $(-1)^h \overset{h}{\alpha}$ stets positiv, und demnach lautet der unter Erstens aufgestellte Satz in diesem Falle so:

Die Summe der Combinationen mit Wiederholungen aus den natürlichen Zahlen $1, 2, 3 \ldots n$ zu einer beliebigen Classe ist der Summe der Combinationen ohne Wiederholungen aus den Zahlen $1, 2, 3 \ldots p-n-1$ zu derselben Classe nach dem Modul p congruent; also ihr Unterschied, aus welchem alle Combinationsformen verschwunden sind, die bloss aus verschiedenen Elementen gebildet werden, durch die Primzahl p theilbar.

Beispiel. Ist $p = 19$, $n = 7$, $h = 9$, so ist

$$\overset{9}{B} \text{ (aus } 1,2,3 \ldots 7) = 3281882604^{*}$$

$$\overset{9}{A} \text{ (aus } 1,2 \ldots 11) = 150917976$$

$$\overset{9}{B} - \overset{9}{A} = 3130964628 = 19 \,.\, 164787612.$$

In Folge dieses Satzes brauchen also, wenn man die Reste der Combinationssummen, die aus den natürlichen Zahlen gebildet sind, kennen lernen will, bloss die eine Gattung, die Combinationen mit, oder die ohne Wiederholungen untersucht zu werden, so lange die grösste zur Combination verwandte Zahl kleiner ist als die Primzahl p.

II.

Im Folgenden sollen zunächst die Combinationssummen mit Wiederholungen aus den natürlichen Zahlen hinsichtlich des Restes untersucht werden, den sie, durch eine gegebene Primzahl p dividirt, übrig lassen. Es wird sich hierbei ergeben: 1) dass, so lange der Classengrad kleiner ist als $p-1$, alle Summen in Perioden zerfallen, deren

* Diese so wie die in den folgenden Paragraphen vorkommenden Zahlen sind aus den Tabellen entnommen, die ich in meiner Abhandlung: „de evolvenda functione $\frac{yd.\, y\, d \ldots y\, d.\, X}{d\, x^n}$, Regiomonti apud fratres, Borntraeger 1824" berechnet habe.

Hälfte durch p theilbar ist, dass 2) wenn der Classengrad $= p - 1$, die Periodicität nicht mehr stattfindet, aber der Rest jeder Summe noch leicht angebbar ist, dass 3) wenn der Classengrad grösser als $p - 1$ ist, die Periodicität nur stattfindet, so lange die grösste zur Combination verwandte Zahl $= p$ ist, dass aber 4) wenn diese grösser als p, und der Classengrad grösser als $p - 1$ geworden ist, die Periodicität ganz aufhört.

1) Bezeichnet man nämlich die Summe der Combinationen mit Wiederholungen aus den Zahlen 1, 2, 3 ... k zur h^{ten} Classe, wie gewöhnlich durch C_k^h, wendet man ferner für das Product der natürlichen Zahlen 1 . 2 . 3 .... k das Gauss'sche Zeichen Πk und für den m^{ten} Binomialcoefficienten der n^{ten} Potenz das Bessel'sche Zeichen P_n^m an, so hat man die Gleichung*

$$C_k^h = \frac{1}{\Pi_{(k-1)}}\left\{k^{k+h-1} - P_{k-1}^1 (k-1)^{k+h-1} + P_{k-1}^2 (k-2)^{k+h-1} - \ldots (-1)^{k-1}\right\} \ldots (4)$$

Da nun für jeden Werth von k, und für $h = 0$, $C_k^h = 1$ und für jeden Werth von $h > 1$ und für $k = 0$, auch $C_k^h = 1$ ist, so betrachte man zunächst die innerhalb der Grenzen $h = 1$, $h = p - 2$ und $k = 2$, $k = p$ liegenden Combinationsformen.

Ist aber $k + h = p$, so sind nach dem Fermat'schen Satze

$$k^{p-1} \equiv (k-1)^{p-1} \equiv (k-2)^{p-1} \equiv \ldots \equiv 1 \text{ (mod. p.)}$$

Dies in die Gleichung (4) gesetzt, giebt $C_{p-h}^h = C_k^{p-k} \equiv \frac{(1-1)^{k-1}}{\Pi\,(k-1)} \equiv 0 \text{ (mod. p)}$ wo $k > 1$, also $h < p - 1$ ist.

Es ist also auch $C_{p-(h+1)}^{h+1} \equiv 0$, wo $h + 1 < p - 1$ ist, und da bekanntlich $C_{p-h}^{h+1} = C_{p-h-1}^{h+1} + (p-h)\, C_{p-h}^h$, so hat man auch $C_{p-h}^{h+1} \equiv 0$. Auf gleiche Weise erhebt man sich zu C_{p-h}^{h+2}, C_{p-h}^{h+3} .... C_{p-h}^{p-2}, die sämmtlich der Null congruent sind, also sind $C_k^{p-k} \equiv C_k^{p-k+1} \equiv C_k^{p-k+2} \equiv \ldots \equiv C_k^{p-2} \equiv 0$, wenn $p > k > 1$.

Dies ist offenbar der § I hergeleitete Satz für den Fall dass die Combinationen aus der natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3 ... k gebildet werden.

Aber dieser Satz gilt offenbar auch für $k = p$, da $C_p^h = C_{p-1}^h + p\, C_p^{h-1} \equiv C_{p-1}^h \equiv 0$ ist, wie so eben bewiesen worden.

---

* Diese Gleichung habe ich in der, in der vorigen Note erwähnten Abhandlung, dann auf einem anderen Wege in meinen „mathematischen Abhandlungen," Berlin 1825, in der Abhandlung: „über die numerischen Coefficienten der Secantenreihe," und endlich zum dritten Mal durch Zerlegung in Partialbrüche in dem Aufsatze: „Zwei Verallgemeinerungen des Wilson'schen Lehrsatzes" bewiesen, welcher im „Amtlichen Berichte über die Verhandlungen der 24ten Versammlung der Naturforscher und Aerzte in Kiel von Michaelis und Scherk, Kiel 1847" enthalten ist.

Es ist nun ferner $C^1_{p+1} = C^1_p + p+1 \equiv 1 \equiv C^1_1$

$$C^2_{p+1} = C^2_p + (p+1)\, C^1_{p+1} \equiv 1 \equiv C^2_1$$

u. s. f. bis $C^{p-2}_{p+1} = C^{p-2}_p + (p+1)\, C^{p-3}_{p+1} \equiv 1 \equiv C^{p-2}_1$

also $C^h_{p+1} \equiv C^h_1$ wenn $h < p-1$.

Auf gleiche Weise ist

$C^1_{p+2} = C^1_{p+1} + p+2 \equiv C^1_1 + 2\, C^0_2 \equiv C^1_2$

$C^2_{p+2} = C^2_{p+1} + (p+2)\, C^1_{p+2} \equiv C^2_1 + 2\, C^1_2 \equiv C^2_2$

u. s. f. bis $C^{p-2}_{p+2} = C^{p-2}_{p+1} + (p+2)\, C^{p-3}_2 \equiv C^{p-2}_{1+2} + 2C^{p-3}_2 \equiv C^{p-2}_2$

also ist auch $C^h_{p+2} \equiv C^h_2$, wenn $h < p-2$.

So erhebt man sich zu $C^h_{p+3} \equiv C^h_3$, $C^h_{p+4} \equiv C^h_4$ und in gleicher Weise fortschreitend, gelangt man offenbar zu dem Satze, dass

$$C^h_{np+k} \equiv C^h_k, \text{ wenn } p-1 > h > 0.$$

Es zerfallen also alle hier betrachteten Combinationssummen in congruente Perioden, deren Hälfte durch p theilbar ist.

2) Anders verhält es sich, wenn $h = p-1$ ist.

Setzt man nämlich diesen Werth in die Gleichung (4) und bemerkt, dass, wenn $k<p$ nach dem Fermat'schen Lehrsatze $k^{k-1+h} \equiv k^{k-1}$, $(k-1)^{k-1+h} \equiv (k-1)^{k-1}$ etc., so erhält man

$$C^{p-1}_k \equiv \frac{1}{\Pi(k-1)} \left\{ k^{k-1} - P^1_{k-1} (k-1)^{k-1} + P^2_{k-1} (k-2)^{k-1} - \ldots + (-1)^{k-1} \right\}$$

Die in den Klammern stehende Reihe ist aber die $(k-1)^{te}$ Differenz der Grössen k^{k-1}, $(k-1)^{k-1}$, $(k-2)^{k-1}$ etc. welche eine arithmetische Reihe $(k-1^{ter}$ Ordnung bilden; diese Differenz ist aber bekanntlich $= \Pi(k-1)$, also ist

$$C^{p-1}_k \equiv 1 \text{ (mod. p) wenn } k < p.$$

Dieser Satz gilt aber auch, wenn $k=p$. Denn dann wird in Folge der Gleichung (4)

$$C^{p-1}_p \equiv \frac{1}{\Pi(p-1)} \left\{ P^{2p-2} - P^1_{p-1} (p-1)^{2p-2} + P^2_{p-1} (p-2)^{2p-2} \ldots + 1 \right\}$$

$$\equiv \frac{1}{(\Pi p-1)} \left\{ - P^1_{p-1} + P^2_{p-2} - \ldots + 1 \right\} \equiv \frac{1}{\Pi(p-1)} \left\{ (1-1)^{p-1} - 1 \right\}$$

also $\Pi(p-1)\, C^{p-1}_p \equiv -1$; aber, nach dem Wilson'schen Satze ist

$$\Pi(p-1) \equiv -1, \text{ folglich } C^{p-1}_p \equiv 1 \text{ (mod. p.)}$$

und demnach ist $C_k^{p-1} \equiv 1$, (mod. p.) wenn $k <= p$.

Ferner ist $C_{p+1}^{p-1} = C_p^{p-1} + (p+1)\,C_{p+1}^{p-2} \equiv 1 + C_{p+1}^{p-2} \equiv 1 + C_1^{p-2} \equiv 2$ (nach Nr. 1)

$$C_{p+2}^{p-1} = C_{p+1}^{p-1} + (p+2)\,C_{p+2}^{p-2} \equiv 2 + 2\,C_{p+2}^{p-2} \equiv 2$$

so geht es fort bis: $C_{2p}^{p-1} \equiv 2$.

Ferner wird nun $C_{2p+1}^{p-1} \equiv C_{2p}^{p-1} + (2p+1)\,C_{2p+1}^{p-2} \equiv 2 + C_1^{p-2} \equiv 3$ u. s. f., woraus man ersieht, dass innerhalb der ersten Periode von $k = 1$ bis $k = p$, $C_k^{p-1} \equiv 1$, innerhalb der 2ten von $k = p+1$ bis $2p$, $C_k^{p-1} \equiv 2$, innerhalb der 3ten Periode $\equiv 3$, im Allgemeinen, dass

$$C_{np+k}^{p-1} \equiv n + 1 \text{ (für } k = 1, 2, 3 \dots . p)$$

wird, so dass also die verschiedenen Perioden einander nicht congruent sind, bis $m = p$ geworden ist, von wo an dann die p voriger Perioden wiederkehren.

3) Ist der Classengrad $> p - 1$, so sei er $= h' = m\,(p-1) + h$, wobei $h < p - 1$ ist. Setzt man aber diesen Werth statt h in die Gleichung (4) und bemerkt, dass nach dem Fermat'sche Lehrsatze

$$k^{m\,(p-1+k+h-1} \equiv k^{k+h-1}$$

$$(k-1)^{m\,(p-1)+k+h-1} \equiv (k-1)^{k+h-1}$$

u. s. f. so lange $k < p$ ist, so erhält man offenbar $C_k^{h'} \equiv C_k^h$. Dieser Satz gilt aber auch noch wenn $k = p$ ist. Denn es ist

$C_p^p = C_{p-1}^p + p\,C_p^{p-1} \equiv C_{p-1}^1 + p\,C_p^0$ (wie in Nr. 2 bewiesen ist) $\equiv C_p^1$

$C_p^{p+1} = C_{p-1}^{p+1} + p\,C_p^p \equiv C_{p-1}^2 + p\,C_p^1 \equiv C_{p-1}^2$

u. s. f. Demnach hat man

$$C_k^{m\,(p-1)+h} \equiv C_k^h, \text{ wenn } k < p + 1.$$

Es zerfallen also die Combinationssummen auch in corgruente Perioden, die sich für die angegebenen Werthe von k auf solche Werthe von h erstrecken, die um ein Vielfaches von $p - 1$ sich unterscheiden.

4) Ist aber endlich sowohl $h > p - 1$ als $k > p$, so hört die Periodicität auf, was daher rührt, dass sie für $h = p - 1$ aufgehört hat.

Es ist z. B. $C^p_{p+1} = C^p_p + (p+1\ C^{p-1}_{p+1} \equiv C^1_p + (p+1)\{C^0_p + 1\}$

$$\equiv C^1_{p+1} + 1.$$

$$C^p_{p+2} = C^p_{p+1} + (p+2)\ C^{p-1}_{p+2} \equiv C^1_{p+1} + 1 + (p+2)\{C^0_{p+2} + 1\}$$

$$\equiv C^1_{p+2} + 3;\ \text{u. s. f.}$$

also weder $C^p_{p+1} \equiv C^1_{p+1}$ noch $C^p_{p+2} \equiv C^1_{p+2}$ etc.

III.

Die bisherigen Resultate sind grösstentheils aus der Gleichung (4) hergeleitet; es lassen sich aber noch ganz andere analytische Ausdrücke für die Summen der Combinationen mit und ohne Wiederholungen angeben, die meines Wissens bisher noch nicht aufgestellt worden sind, und aus denen sich einige sehr merkwürdige Folgerungen über die Theilbarkeit jener Summen durch gegebene Primzahlen ziehen lassen.

Bezeichnet man nämlich die Summe der Combinationen ohne Wiederholungen zur h^{ten} Classe aus den Zahlen 1, 2, 3....k durch A^h_k, so hat man zwischen ihnen und den Binomialcoefficienten die von Lagrange angegebenen Gleichungen, auf welche bereits in § I hingewiesen ist:

$$\left.\begin{aligned}
A^1_k &= P^2_{k+1}, \\
2\ A^2_k &= P^3_{k+1} + P^2_k\ A^1_k \\
1\ 3\ A^3_k &= P^4_{k+1} + P^3_k\ A^1_k + P^2_k\ A^2_k \\
&\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
h\ A^h_k &= P^{h+1}_{k+1} + P^h_k\ A^1_k + P^{h-1}_k\ A^2_k + \ldots + P^2_{k-h+2}\ A^{h-1}_k
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass A^1_k eine ganze rationale Funktion des 2^{ten}, A^2_k des 4^{ten}, ... A^h_k des 2 h^{ten} Grades von k ist, welche sämmtlich die Factoren $(k+1)\ k$ haben, da P^2_{k+1} sie hat, und von denen überdies A^h_k, weil diese Grösse für $h = 1, 2, 3 \ldots. h-1$ verschwindet, noch ausserdem die Factoren $k-1$, $k-2$ $\ldots. k-h+1$ hat. Demnach ist der restirende Factor eine Function des $(h-1)^{ten}$ Grades von k. Ferner ist offenbar, wie aus den Gleichungen (5) hervorgeht, der grösste im Nenner von A^1_k, A^2_k, A^3_k .... A^h_k vorkommende Factor resp. 2, 3, 4 .... $h+1$, folglich ist

$$A^h_k = \frac{k+1.\ k.\ k-1.\ \ldots. k-h+1}{1.\ \ 2.\ \ 3. \ldots.\ \ h+1}\ \varphi\ (h, k,) = P^{h+1}_{k+1}\ \varphi\ (h, k) \ldots. \quad (6)$$

wo φ (h, k), wie erwähnt, eine ganze rationale Function von k ist, welche überdiess die Eigenschaft hat, dass sie, wenn in ihr $k = h$ gesetzt wird, $= 1.2.3\ldots h$ wird, weil A_h^h diesen Werth hat. Die successive Berechnung giebt z. B.

$$A_k^1 = \frac{(k+1)k}{1.\ 2}; \quad A_k^2 = \frac{k+1.\ k.\ k-1}{1.\ 2.\ 3} \cdot \frac{3\,k+2}{2.\ 2}; \quad A_k^3 = \frac{k+1.\ k.\ k-1.\ k-2}{1.\ 2.\ 3\ \ \ 4} \cdot \frac{k+1.\ k.}{1.\ 2}$$

Ist nun $h + 1 < k - h + 1$, also $h < {}^1/_2\, k$, so kann kein Primfactor des Zählers, der $= > k - h + 1$ ist, sich gegen einen aus dem Nenner wegheben, und folglich ist, wenn $h < {}^1/_2\, k$, die Summe der Combinationen ohne Wiederholungen aus den Zahlen $1, 2 \ldots k$ durch alle innerhalb der Grenzen $k - h + 1$ und $k + 1$ liegenden Primzahlen theilbar, und namentlich, wenn $k + 1 =$ einer Primzahl p, so ist jene Summe durch diese nicht zu ihrer Bildung verwandte Primzahl theilbar.

So ist z. B. $A_{12}^3 = 55770 = 11 . 13 . 390$. Hierbei muss man jedoch ausdrücklich bemerken, dass hinsichtlich der hier für die analytischen Werthe von A_k^h gefolgerten Sätze besondere Modificationen eintreten, sobald dem h und k specielle Zahlenwerthe gegeben werden, wodurch Factoren des Zählers sich gegen gleiche aus dem Nenner wegheben können. So ist z. B.: wenn $h = k$ geworden ist, $A_h^h = 1, 2, 3 \ldots h$, so dass der Factor $h + 1$ verschwunden ist, da er auch im Nenner enthalten war.

Aus den auf diese Weise sich ergebenden analytischen Werthen von A_k^h lassen sich auf folgende Weise analytische Werthe von C_k^1, C_k^2 etc. herleiten, die von den aus der Gleichung (4) hergeleiteten wesentlich verschieden sind. Setzt man nämlich $-(k+1)$ für k in den Ausdruck $P_{k+1}^{h+1}\ \varphi$ (h, k) und bezeichnet den resultirenden Ausdruck durch D_k^h, so dass also $D_k^h = P_{-k}^{h+1}\ \varphi\,(h, -k-1)$ ist, so geht die bekannte Recursionsgleichung

$$A_k^h = A_{k-1}^h + k\ A_{k-1}^{h-1}$$

in folgende

$$P_{-k}^{h+1}\ \varphi\,(h, -k-1) = P_{-(k+1)}^{h+1}\ \varphi\,(h, -k-1) - (k+1) P_{-k+1}^{h}\ \varphi\,(h-1, -k-2)$$

oder, wenn man hierin $k - 1$ statt k setzt, in folgende über:

$$D_{k+1}^h = D_k^h + (k+1)\ D_{k+1}^{h-1}$$

welche mit der Recursionsgleichung für die Combinationen mit Wiederholungen

$$C_k^h = C_{k-1}^h + k\ C_k^h$$

vollständig übereinstimmt, und zeigt, dass, wenn für Einen Werth von h, $C_k^h = D_k^h$ ist, dies immer stattfindet. Nun ist aber $A_k^1 = \frac{(k+1)k}{1\,2}$, also $D_k^1 = \frac{k(k+1)}{1\,2}$, und folgl.

$$D_k^1 = A_k^1 = C_k^1$$

und demnach ist

$$C_k^h = D_k^h = \frac{k \,.\, k+1 \,.\, k+1 \ldots . \, k+h}{1 \,.\, 2. \quad 3. \ldots . \, h+1} \Psi(h, k) \qquad (7)$$

wobei $\Psi(h, k) = (-1)^{h+1} \varphi(h, -k-1)$

eine ganze rationale Function des $(h-1)^{ten}$ Grades von k ist, da in deren Nenner keine grössere Primzahl als $h+1$ vorkömmt. — Die successive Berechnung giebt

$$C_k^1 = \frac{k \,.\, k+1}{1.\ 2.}; C_k^2 = \frac{k \,.\, (k+1.)\,(k+2) \,.\, (3k+1)}{1. \quad 2. \quad 3 \qquad 2 \,.\, 2}; C_k^3 = \frac{k^2 (k+1)^2 (k+2)(k+3)}{1^2.\ 2^2. \qquad 3.\ 4.} \text{ u.s.w.}$$

Ist nun $h+1 < k$, so werden die Primfactoren des Zählers, die $= > k$ sind, durch die Factoren des Nenners nicht weggehoben, und folglich ist in diesem Falle die Summe der Combinationen mit Wiederholungen aus den Zahlen 1, 2, 3....k durch alle innerhalb der Grenzen k und $k+h$ liegenden Primzahlen, (diese Grenzen mit eigentlichen), die zu ihrer Bildung nicht verwandt worden sind, theilbar. Ist $h+1 = > k$, so bleiben natürlich nur die Primzahlen als Factoren von C_k^h übrig, die grösser als $h+1$, und kleiner als $h+k+1$ sind.

Dasselbe Resultat hätte sich übrigens auch aus der Gleichung (4) folgern lassen. Denn setzt man $k+h-r =$ einer Primzahl p, welche $>h+1$, so dass also $k-1 > r$, so ist

$$C_k^h = \frac{1}{\Pi(k-1)} \left\{ k^{p-1+r} - P_{k-1}^1 \, (k-1)^{p-1+r} + \ldots + (-1)^{p-1+r} \right\}$$

$$\equiv \frac{1}{\Pi(k-1)} \left\{ k^r - P_{k-1}^1 \, (k-1)^r + \ldots + (-1)^r \right\} \text{ (mod. p.)};$$

Die Grösse in der Klammer ist aber die $(k-1)^{te}$ Differenz von k^r, $(k-1)^r$, $(k-2)^r \ldots 1$, welche eine arithmetische Reihe der r^{ten} Ordnung bilden, folglich $= 0$, da $r < k-1$, also ist $\Pi(k-1)\, C_k^h \equiv 0$ (mod. p.) und demnach C_k^h durch alle Primzahlen p theilbar, die grösser als die grössere der beiden Zahlen $h+1$ und $k-1$ und kleiner als $k+h+1$ sind, da nach § II. 1 derselbe Satz auch für $p = k+h$ gilt.

So ist z. B. $C_{13}^{10} = 401282560341390 =$

$$= 13 \,.\, 17 \,.\, 19 \,.\, 23 \,.\, 415083070$$

$$C_{10}^{10} = 5917584964655 = 13 \,.\, 17 \,.\, 19 \,.\, 14928435$$

$$C_{10}^{13} = 9593401297313460$$

$$= 17 \,.\, 19 \,.\, 23 \,.\, 1291344904740.$$

Hinsichtlich der Berechnung der hier angewandten Grössen C_k^h sei es mir erlaubt, die Bemerkung hinzuzufügen, dass die Lagrange'sche Interpretationsformel eine sehr bemerkenswerthe Recursionsformel für sie darbietet, die sich, von den mannigfachen bisher angegebenen, zu ihrem Vortheil unterscheidet. Da nämlich $\varphi(h, k)$ eine ganze rationale Function des $(h-1)^{ten}$ Grades von k ist, welche für $k = 1, 2, 3 \ldots h$ resp. $\varphi(1, h), \varphi(2, h), \ldots \varphi(h, h)$ wird, und $\Psi(h, k) = \frac{C_k^h}{P_{k+h}^{h+1}}$ ist, so hat man durch jene Formel

$$\Psi(h, k) = \frac{k-2.k-3.\ldots k-h}{(-1)(-2)-(h-1)} C_1^h + \frac{k-1.k-3\ldots k-h}{1.(-1)\ -(h-2)} \frac{C_2^h}{h+2}$$

$$+ \frac{(k-1)(k-2)(k-4)\ldots k-h}{2.\quad 1.\quad (-1)\ldots(h-3)} \cdot \frac{1.2\, C_3^h}{(h+2)(h+3)} + \ldots + \frac{(k-1)(k-2)\ldots k-h+1}{(h-1)(k-2)\ldots\quad 1} C_h^h$$

$$= (-1)^{h-1} \left\{ \frac{k-2.k-3\ldots k-h}{\Pi(h-1)} C_1^h - \frac{k-1}{h+2} \cdot \frac{k-3\ .\ k-4\ldots k-h}{\Pi(h-2)} C_2^h \right.$$

$$\left. + \frac{k-1.\ k-2.}{h+2.\ h+3} \frac{k-4.k-5.\ldots k-h}{\Pi(h-3)} C_3^h \ldots (-1)^{h-1} \frac{k-1\ k-2\ldots k-h+1}{h+2.h+3\ldots\quad 2h} C_h^h \right\}$$

also besteht $C_k^h = P_{h+k}^{h+1}\, \Psi(h\, k)$ aus h Gliedern, deren Coefficienten ausser den auf die angegebene Weise zu bildenden Produkten die von k unabhängigen h ersten Gliedern von C_k^h sind. Hiedurch wird es z. B. möglich den Werth dieses Ausdrucks für ein sehr grosses k, ohne dass alle Werthe für kleinere k bekannt sind, zu berechnen, was auf anderm Wege unausführbar wäre. Es ist z. B.

$$C_{1000}^5 = P_{1006}^6 \left\{ P_{998}^4 - 9\, P_{999}^1\ P_{997}^3 + \frac{69}{2} P_{999}^2\ P_{996}^2 - \frac{185}{2} P_{999}^3\ P_{995}^1 \right.$$

$$\left. + \frac{135}{16} P_{999}^4 \right\}$$

IV.

Aus den oben angegebenen speciellen Werthen von A_k^3 und C_k^3 ergiebt sich, dass beide durch k^2 und $(k+1)^2$ theilbar sind, so dass, wenn $k+1 =$ einer Primzahl p ist, sowohl A_{p-1}^3, wie bereits Steiner bemerkt hat, als auch C_{p-1}^3 dnrch das Quadrat von p theilbar ist. Es schien mir nun von Interesse, zu untersuchen, ob diese Eigenschaft nicht auch Combinationen von höheren Classen zukomme, und es hat sich ergeben

1) dass für einen ungeraden Werth von h, der grösser als 1 ist, sowohl C_k^h als A_k^h jedesmal durch $k^2\,(k+1)^2$ theilbar ist, so lange $h \angle k$ ist,

2) dass, für jeden Werth von h, $C_k^h + A_k^h$ durch $k^2\,(k+1)^2$ wenn $1<h<k$, und

3) für jeden Werth von $h < 2k$, $C_k^h - A_k^h$ durch $2k+1$ theilbar ist.

Beweis 1) Es ist $(e^x - 1)^k = e^{kx} - P_k^1 e^{(k-1)x} + P_k^2 e^{(k-2)x} -$ etc.

$$= 1 + kx + \frac{k^2 x^2}{1.2} + \frac{k^3 x^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$- P_1^k \left(1 + (k-1)x + \frac{(k-1)^2 x^2}{1.2} + \frac{(k-1)^3 x^3}{1.2.3} + \ldots\right)$$

$$+ P_k^2 \left(1 + (k-2)x + \frac{(k-2)^2 x^2}{1.2} + \frac{(k-2)^3 x^3}{1.2.3} + + \ldots\right)$$

$$= 1 - P_k^1 + P_k^2 - \ldots$$

$$+ \left\{k - P_k^1 (k-1) + P_k^2 - (k-2) - \ldots\right\} x$$

$$+ \left\{k^2 - P_k^1 (k-1)^2 + P_k^2 (k-2)^2 - \ldots\right\} \frac{x^2}{1.2} + \text{etc.}$$

Hier haben sämmtliche Coefficienten von x die Gestalt

$$k^h - P_k^1 (k-1)^h + P_k^2 (k-2)^h - \ldots$$

Multiplicirt man aber die Gleichung (4) mit Πk, so bemerkt man leicht, dass man ihr folgende Gestalt geben kann:

$$\Pi k\, C_k^{h-k} = k^h - P_k^1 (k-1)^h + P_k^2 (k-2)^h - \ldots$$

folglich ist der Coefficient von $\frac{x^h}{\Pi h}$, $= \Pi k\, C_k^{h-k}$

Da aber $C_k^{h-k} = 0$ ist, wenn $h < k$, so verschwinden die Coefficienten aller Potenzen, deren Exponent kleiner ist als k, und man erhält

$$\left\{\frac{e^x - 1}{x}\right\}^k = 1 + \frac{C_k^1 x}{k+1} + \frac{C_k^2 x^2}{(k+1)(k+2)} + \frac{C_k^3 x^3}{(k+1)(k+2)(k+3)} + \quad (8)$$

Diese Gleichung bietet ein neues Mittel dar, die analytischen Werthe von C_k^1, C_k^2 etc. zu finden, indem man sie logarithmisch differentiirt, für e^x seinen Werth setzt, und die Coefficienten gleicher Potenzen, wie gewöhnlich, vergleicht. Zur recurrirenden Berechnung des C_k^h ergiebt sich hieraus die neue Gleichung:

$$hC_k^h = \frac{k+h}{1.} \cdot \frac{k+h-1}{2.} C_k^{h-1} - \frac{k+h}{1.} \cdot \frac{k+h-1}{2.} \cdot \frac{k+h-2}{3.} C_k^{h-2} + \ldots \pm P_{k+h}^{h+1} \ldots \quad (9)$$

Setzt man nun die sich auf diese Weise ergebenden Werthe von C_k^1, $C_k^2 \ldots$ die mit den in § III gefundenen, völlig übereinstimmen, in die Gleichung (8), so erhält man

$$\left\{\frac{e^x - 1}{x}\right\}^k = 1 + \frac{kx}{2} + \frac{k(3k+1)}{2.\ 3.\ 4}\ x^2 + \frac{k^2(k+1)}{2.\ 3.\ 4.\ 2.}\ x^3 + \ldots \quad (10)$$

Diese Gleichung gilt nun, ihrer Herleitung nach, allerdings nur für positive Werthe von k; sie gilt aber auch für negative Werthe von k, wie man sich überzeugt, wenn man in der Gleichung

$$\left\{\frac{e^x - 1}{x}\right\}^k = 1 - Ax + Bx^2 - Cx^3 + \ldots .$$

wobei für k keine Annahme gemacht ist, die Coefficienten dadurch bestimmt, dass man sie logarithmisch differentiirt; hierbei erhält man dieselben Werthe der Coefficienten wie in der Gleichung (10).

Es sei ferner $\dfrac{x}{e^x - 1} = \dfrac{1}{1 + {}^1\!/_2 x + \dfrac{x^2}{2.3} + \ldots} = 1 - {}^1\!/_2 x + E_2 x^2 + E_3 x^3 + \ldots$

also $\dfrac{x}{e^x - 1} + {}^1\!/_2 x = {}^1\!/_2 x \dfrac{(e^x + 1)}{e^x - 1} = 1 + E_2 x^2 + E_3 x^3 + E_n x^n + \ldots .$

Setzt man hierin $-x$ für x, so erhält man wieder

$${}^1\!/_2\, x \frac{(e^x + 1)}{e^x - 1} = 1 + E_2 x^2 - E_3 x^3 + E_n x^n - \ldots .$$

also $0 = 2(B_3 x^3 + B_5 x^5 + B_7 x^7 + \ldots .$

so dass alle Coefficienten ungerader Potenzen von x verschwinden und folglich in der Gleichung

$$\left\{\frac{e^x - 1}{x}\right\}^{-1} = 1 - {}^1\!/_2\, x + E_2 x^2 + E_n x^n + E_6 x^6 + \ldots .$$

keine ungerade Potenz von x, ausser der ersten vorkömmt.

Nun ist aber in der Gleichung (8) der Coefficient von $x^{2h+1} = \dfrac{C_k^{2h+1}}{(k+1)(k+2)\ldots(k+2h+1)}$

welcher in Folge der Gleichung (7) folgende Gestalt hat: $\dfrac{k\,\Psi\,(2h+1\,k)}{1.\ 2.\ 3 \ldots 2h+2}$.

Dieser wird aber, wenn man $k = -1$ setzt, was, wie wir gezeigt haben, gestattet ist, nicht $= 0$, wenn $\Psi\,(2h+1, k)$ nicht den Factor $k+1$ enthält; demnach ist $\Psi\,(2h+1, k)$ von der Form $(k+1)\,F\,(2h+1, k)$ und endlich enthält

$$C_k^{2h+1} = \frac{k.\ k+1 \ldots (k+2h+1)}{1.\ 2. \ldots \ldots (2h+2)}\ (k+1)\ F\ (2k+1, k)$$

den Factor $(k+1)^2$, wenn $2h+1>1$ ist. Dies gilt, so lange $2h+1<k$ bleibt; von da an hebt sich der Factor $2h+2$, oder kleinere gegen $2k+1$ weg, und C_k^{2h+1} ist dann nicht weiter nothwendig durch $(k+1)^2$ theilbar.

In ähnlicher Weise lässt sich zeigen, dass C_k^{2h+1} auch den Factor k^2 enthält. Setzt man nämlich die Gleichung (8) unter der Form

$$\frac{\left\{\frac{e^x-1}{x}\right\}^k-1}{k}-{}^1/_2\,x=G_2\,x^2+G_3\,x^3+G_3\,x^4+\ldots.$$

und verwandelt x in $-x$, so erhält man

$$\frac{\left\{\frac{e^x-1}{x\,e^x}\right\}^k-1}{k}+{}^1/_2\,x=G_2\,x^2-G_3\,x^3+G_4\,x^4-\ldots$$

also durch Subtraction

$$\left\{\frac{e^x-1}{x}\right\}^k\left\{\frac{1-e^{-kx}}{k}\right\}-x=2\left\{G_3\,x^3+G_5\,x^5+G_7\,x^7+\ldots\right\}$$

Setzt man hierin $k=0$, so erscheint das erste Glied links unter der Form $\frac{0}{0}$, sein wahrer Werth ergiebt sich aber, wenn man e^{-kx} in seine Reihe $1-\frac{kx}{1}+\frac{k^2x^2}{1.\,2.}-$ entwickelt, offenbar $=x$, folglich verschwindet der erste Theil der Gleichung und demnach ist für $k=0$, $G_3=G_5=G_7=\ldots G_{2h+1}=0$; es enthält also jedes ungerade G den Factor k^2, und demnach in der Gleichung

$$\left\{\frac{e^x-1}{x}\right\}^k=1+{}^1/_2\,kx+kG_2x^2+kG_3x^3+\ldots.$$

der Coefficient jeder ungeraden Potenz von x, mit Ausnahme der ersten, den Factor k^2; also enthält in der Gleichung (8), die mit dieser identisch ist

$$C_k^{2h+1}=\frac{k(k+1)\ldots.(k+2h+1)}{1.\;\;2.\ldots..\,2h+2}(k+1)\,F\,(2h+1,k)$$

den Factor k^2 so lange, bis er sich nicht durch einen der Factoren des Nenners weghebt, was sicher geschieht, wenn $2h+2=k$ geworden ist, und da bereits bewiesen ist, dass C_k^{2h+1} auch den Factor $(k+1)^2$ enthält, so ist diese Grösse in $k^2\,(k+1)^2$ multiplicirt.

Da endlich A_k^h aus C_k^h erhalten wird, indem man $-(k+1)$ an die Stelle von k setzt, so enthält A_k^{2h+1} den Factor $(k+1)^2\,k^2$ w. z. b. w.

Die wesentlichste Folge dieses Satzes ist nun die, dass, wenn $k+1=$ einer Primzahl p ist, die Summe der Combinationen aus den Zahlen 1, 2, 3 .... $p-1$, sowohl ohne als mit Wiederholungen für jede ungerade Classe, (mit Ausnahme der ersten), deren Ordnungszahl p nicht übersteigt, durch das Quadrat von p theilbar ist.

Beispiel $A^3_{10} = 121.150$, $A^5_{10} = 121.7455$

$$A^7_{10} = 121.69500,\ A^9_{10} = 121.87840$$

$$C^3_{10} = 121.325,\ C^5_{10} = 121.194650.\ C^7_{10} = 121.22796150$$

$C^9_{10} = 121.3944603585$; dagegen C^{13}_{10} wohl durch 11, aber nicht durch 121 theilbar.

2) Es ist

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)(1-3x)\dots(1-kx)}$$

$$= \frac{1}{1-A^1_k x + A^2_k x^2 - A^3_k x^3 + \dots (-1)^k A^k_k x^k}$$

$$= 1 + C^1_k x + C^2_k x^2 + C^3_k x^3 + \dots + C^h_k x^h +$$

folglich erhält man durch Vergleichung der Coefficienten gleicher gerader Potenzen von x

$$C^2_k + A^2_k = A^1_k C^1_k$$

$$C^4_k + A^4_k = A^1_k C^3_k - A^2_k C^1_k + A^3_k C^1_k$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$C^{2h}_k + A^{2h}_k = A^1_k C^{2h-1}_k - A^2_k C^{2h-1}_k + \dots + A^{2h-1}_k C^1_k$$

Jeder Factor der auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens stehenden Producte enthält nun, wie wir in § III aus den Lagrange'schen Gleichungen ersehen haben, den Factor $(k+1)k$, so lange nicht $2h-1=k$ geworden ist; also enthält $C^{2h}_k + A^{2k}_k$ denselben Factor doppelt und da in $C^{2h-1}_k + A^{2h-1}_k$ jeder der beiden Summanden ihn nach Nr. 1) selbst enthält, so ist das Product $k^2 (k+1)^2$ in $C^h_k + A^h_k$ stets enthalten, wenn $1 < h < k$ ist.

Als besonderer Fall ergiebt sich hieraus, dass, wenn $k+1=$ einer Primzahl p ist, die Summe der Combinationen mit und der ohne Wiederholungen aus den Zahlen 1, 2, 3 ... $p-1$ zusammengenommen für jede Classe, mit Ausnahme der ersten, und der letzten, deren Grad $= p-1$ ist, durch das Quadrat von p theilbar ist.

Beispiel. $C_{10}^2 + A_{10}^2 = 121 . 25$; $C_{10}^4 + A_{10}^4 = 121 . 7525$

$C_{10}^6 + A_{10}^6 = 121 . 1629520$; $C_{10}^8 + A_{10}^8 = 121 . 306817499$.

3) Die Differenz der beiden Ausdrücke

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)(1-3x)\ldots(1-kx)}$$
$$= 1 + C_k^1 x + C_k^2 x^2 + C_k^3 x^3 + \ldots + C_k^k x^k + C_k^{k+1} x^{k+1} + \ldots$$

und $(1+x)(1+2x)(1+3x)\ldots(1+kx) = 1 + A_k^1 x + A_k^2 x^2 + A_k^3 x^3 + \ldots + A_k^k x^k$

lässt sich entweder direct, da $C_k^1 = A_k^1$ ist

$$= x^2 \left\{ C_k^2 - A_k^2 + \left(C_k^3 - A_k^3 \right) x + \ldots + \left(C_k^k - A_k^k \right) x^{k-2} + C_k^{k+1} x^{k-1} + \ldots \right\}$$

setzen, oder, indem man beide abzuziehenden Ausdrücke auf gleiche Benennung bringt,

$$(1-x^2)(1-4x^2)(1-9x^n)\ldots(1-k^2 x^2)$$
$$= 1 - Q^1 x^2 + Q^2 x^4 - \ldots (-1)^k Q^k x^{2k} \qquad (11)$$

setzt, wo also durch Q^1, $Q^2 \ldots Q^k$ die Summen der Combinationen ohne Wiederholungen aus den Quadraten der natürlichen Zahlen bezeichnet sind, unter die Form

$$\frac{Q^1 x^2 - Q^2 x^4 + Q^3 x^6 \ldots (-1)^{k-1} Q^k x^{2k}}{1 - A_k^1 x + A_k^2 x^2 - \ldots (-1)^k A_k^k x^k}$$

bringen.

Durch Vergleichung der Coefficienten gleicher Potenzen von x in beiden Entwicklungen erhält man nun, wenn man der Kürze halber

$C_1^2 - A_k^2 = D^h$, $C_k^3 - A_k^3 = D^3$ u. s. f. setzt

$$\left.\begin{aligned} D^2 &= Q^1 \\ D^3 &= A_k^1 D^2 \\ D^4 &= A_k^1 D^3 - A_k^2 D^2 - Q^2 \\ D^5 &= A_k^1 D^4 - A_k^2 D^3 + A_k^3 D^2 \\ D^6 &= A_k^1 - A_k^2 D^4 + A_k^3 D^3 - A_k^4 D^2 + Q^3 \quad \text{u. s. f.} \end{aligned}\right\} (12)$$

Nun lassen sich aber bekanntlich die Coefficienten einer Gleichung, deren zweites Glied $= 0$ ist, also auch die Coefficienten des zweiten Theils der $= 0$ gesetzten Gleichung (11), nachdem derselbe durch x^{2k} dividirt worden, durch die Summen der Potenzen der Wurzeln, also hier der Grössen 1^2, 2^2, $3^2 \ldots k^2$ rational vermittelst der bekannten Newton'schen Gleichungen ausdrücken. Bezeichnet man nämlich die Summe der Quadrate der natürlichen Zahlen durch S_2, die Summe ihrer 4ten Potenzen durch S_4 u. s. f., so hat man, in Folge jener Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} Q^1 &= S_2 \\ 2Q^2 &= Q^1 S_2 - S_4 \\ 3Q^3 &= Q^2 S_2 - Q^1 S_4 + S_6 \\ 4Q^4 &= Q^3 S_2 - Q^2 S_4 + Q^1 S_6 - S_8 \quad \text{u. s. f.} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Liesse sich nun beweisen, dass S_2, S_4, S_6, $S_{(2n)}$ innerhalb gewisser angebbarer Grenzen durch $2k+1$ theilbar sind, so wären, zufolge dieser Gleichungen auch Q^1, Q^2, Q^3, Q^n und folglich, in Gemässheit der Gleichungen (12) auch D^2, D^3, D^4... bis D^{2n} d. h. $C_k^2 - A_k^2$, $C_k^3 - A_k^3$, $C_k^4 - A_k^4$ u. s. f. bis $C_k^{2n} - A_k^{2h}$ innerhalb derselben Grenzen durch $2k+1$ theilbar.

Der erforderliche Beweis, dass die Summen der geraden Potenzen der natürlichen Zahlen 1, 2, 3...k durch $2k+1$ theilbar sind, lässt sich aber so führen:

Unter den vielen Ausdrücken, die sich für $S_{(2r)}$ angeben lassen, finden sich folgende beiden:

$$\begin{aligned} S_{(2n)} = {}& {}^1\!/_2\, C_k^{2n-1}\,(k+1)\,k + {}^1\!/_3\, C_2^{2n-2}\,(k+1)\,k\,(k-1) \\ & + {}^1\!/_4\, C_2^{2n-3}\,(k+1)\,k\,(k-1)\,(k-2) + \ldots \\ & \ldots + \frac{1}{h+1}\, C_h^{2n-h}\,(k+1)\,k\,(k-1)\ldots(k-h+1) + \ldots \\ & + \frac{1}{2n+1}\,(k+1)\,k\,(k-1)\ldots(k-2n+1)\ldots (14) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} S_{(2n)} = {}& -{}^1\!/_2\, C_1^{2n-1}\,k\,(k+1) + {}^1\!/_3\, C_2^{2n-2}\,k\,(k+1)\,k+2) \\ & - {}^1\!/_4\, C_3^{2n+3}\,k\,(k+1)\,(k+2) + \ldots \\ & \ldots + \frac{(-1)^h}{h+1}\, C_h^{2n-h}\,k\,(k+1)\,(k+2)\ldots(k+h) + \ldots \\ & + \frac{1}{2n+1}\,k\,(k+1)\,(k+2)\ldots(k+2n)\ldots (15)^* \end{aligned}$$

* Von diesen beiden Formeln habe ich die erste in meiner Abhandlung: „de evolvenda functione $\frac{yd.\,y\,d\ldots y\,d.\,X}{d\,x^n}$ pag. 34 angegeben; die zweite findet sich in Klügel's Lexicon, fortgesetzt von Grunert, 5r Bd., pag. 635.

Addirt man diese beiden Gleichungen, so erhält man folgende dritte:

$$2\,S_{(2n)} = k\,(k+1)\Big\{ \tfrac{1}{3}\,C_2^{2n-2}\;(2k+1) - \tfrac{1}{4}\,C_3^{2n-3}\;[(k+2)(k+3)-(k-1)(k-2)]$$

$$+ \tfrac{1}{5}\,C_4^{2n-4}\;[(k+2)(k+3)(k+4) + (k-1)(k-2)(k-3)] + \ldots$$

$$+ \frac{1}{2r+1}\,[(k+2)(k+3)\ldots(k+2r) + (k-1)(k-2)\ldots(k-2n+1)]\Big\} \quad (16)$$

Hiernach ist also der in $C_{2h-1}^{2n-2h+1}$ multiplicirte Factor

$$(k+2)(k+3)\ldots(k+2h-1) - (k-1)(k-2)\ldots(k-2h+2)$$

und der in C_{2h}^{2n-2h} multiplicirte Factor

$$(k+2)(k+3)\ldots(k+2h) + (k-1)(k-2)\ldots(k-2h+1)$$

Setzt man aber $2k+1 = p$, also $(k = \tfrac{1}{2}(p-1)$ so wird

$$(k+2)(k+3)\ldots(k+2h-1) = \frac{(p+3)}{2}\;\frac{(p+5)}{2}\;\ldots\;\frac{(p+4h-3)}{2}$$

$$(k-1)(k-2)\ldots(k-2h+2) = \frac{(p-3)}{2}\;\frac{(p-5)}{2}\;\ldots\;\frac{(p-(4h-3)}{2.}$$

Das erste dieser beiden Produkte hat aber, wie man es sich entwickelt gedenkt, die Form

$$\frac{1}{2^{2h-2}}\left\{p^{2h-2} + A\,p^{2h-3} + B\,p^{2h-4} + \ldots + H\,p + J\right\}$$

und das zweite die Form

$$\frac{1}{2^{2h-2}}\left\{p^{2h-2} - A\,p^{2h-3} + B\,p^{2h-4} - \ldots - H\,p + J\right\}$$

also ist der Unterschied beider Produkte

$$= \frac{p}{2^{2h-1}}\left\{A\,p^{2h-4} + C\,p^{2h-6} + \ldots + J\right\}$$

Eben so ist das Produkt

$$(k+2)(k+3)\ldots(k+2h) = \frac{(p+3)}{2}\;\frac{(p+5)}{2}\;\ldots\;\frac{(p+4h-1)}{2}$$

und das Produkt

$$(k-1)(k-2)\ldots(k-2h+1) = \frac{(p-3)}{2}\;\frac{(p-5)}{2}\;\ldots\;\left(\frac{p-(4h-1)}{2}\right)$$

Demnach erhält das erste Produkt die Form

$$\frac{1}{2^{2h-1}}\left\{p^{2h-1} + A'\,p^{2h-2} + B'\,p^{2h-3} + J'\,p + L'\right\}$$

und das zweite die Form:

$$\frac{1}{2^{2h-1}}\left\{p^{2h-1} - A'\,p^{2h-2} + B'\,p^{2h-3} + J'\,p - L'\right\}$$

also wird ihre Summe =

$$\frac{p}{2^{2h}}\left\{p^{2h-2} + B'\,p^{2h-4} + \ldots + J'\right\}$$

Demnach ist in der Gleichung (6) jede einzelne Combinationssumme in p multiplicirt, und folglich auch $S_{(2n)}$, so lange als $p = 2k + 1$ nicht durch die Nenner der Brüche $1/3$, $1/4 \ldots \frac{1}{2n+1}$ weggehoben wird, was, wenn p eine Primzahl ist, zuerst geschieht, wenn $n = k$ geworden ist, so dass also die Summe der $(2k)^{ten}$ Potenzen der natürlichen Zahlen $1, 2, 3 \ldots k$ nicht mehr in $2k + 1$ multiplicirt ist.

Hieraus folgt also, dass, wenn p eine gegebene Primzahl ist, zuerst die Differenzen der Summen der Combinationen aller gleichen Classen aus den Zahlen $1, 2, 3 \ldots 1/2\,(p-1)$ bis zur $\frac{(p-1)^{ten}}{2}$ und dann die Summen der Combinationen mit Wiederholungen aus denselben Zahlen von der $\frac{(p+1)^{ten}}{2}$ bis zur $(p-2)^{ten}$ Classe selbst durch p theilbar sind.

Beispiel. $C_5^2 - A_5^2 = 11.5$; $C_5^3 - A_5^3 = 11.75$; $C_5^4 - A_5^4 = 11.607$; $C_5^5 - A_5^5 = 11.3855$, $C_5^6 = 11.22430$, $C_5^7 = 11.125400$; $C_5^8 = 11.682591$; $C_5^9 = 11.3643185$.

Zuletzt will ich noch bemerken, dass aus dem so eben bewiesenen Satze, dass die Summen der geraden Potenzen der natürlichen Zahlen $1, 2 \ldots k$ durch $2k + 1$ und, wie aus den Gleichungen (14) und (15) folgt, auch $S_{(n)}$ durch $k+1$ theilbar ist, wenn $n < k$ ist, sich eine Reihe von Folgerungen über die Summen der Combinationen mit und ohne Wiederholungen aus den quadratischen, bequadratischen und den Resten höherer Potenzen ziehen lassen. Solche Sätze sind z. B. folgende: die Summe der ersten, zweiten.... $1/2\,(p-3)^{ten}$ Potenzen der quadratischen Reste der Zahlen $1, 2, 3 \ldots 1/2\,(p-1)$ sind jede einzeln durch die Primzahl p theilbar; dasselbe gilt für die Nichtreste; dieselben Sätze gelten für die Combinationssummen ohne und mit Wiederholungen, sowohl aus den Resten, als aus den Nichtresten; ist $p = 4n + 1$, so sind die Summen der Combinationen zur 1^{ten}, 2^{ten}, $3^{ten} \ldots (n+1)^{ten}$ Classe aus den bequadratischen Resten durch p theilbar u. s. f. Die Beweise dieser und ähnlicher Sätze ergeben sich aber aus dem Vorigen zu leicht, als dass es nöthig wäre, länger bei ihnen zu verweilen.