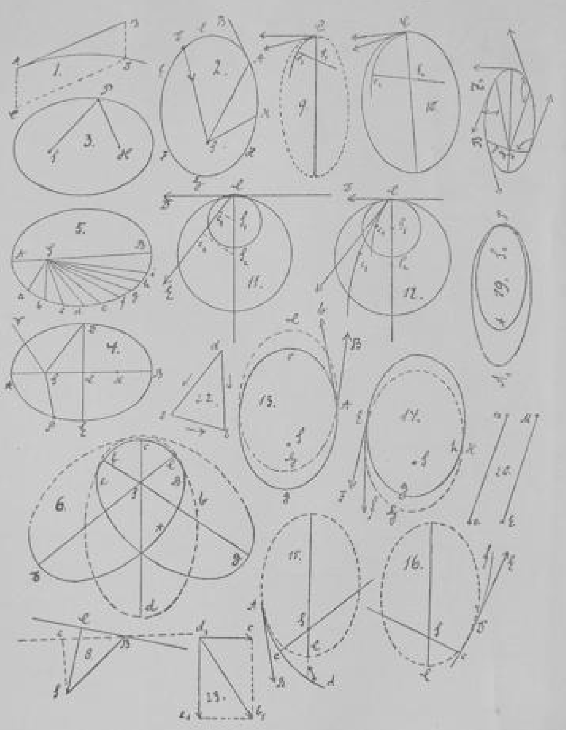
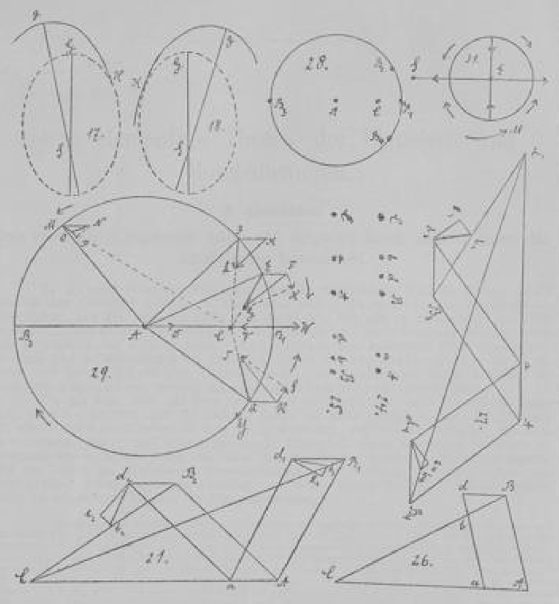
Figuren zur Abhandlung.





Airys elementare Theorie der Planeten- und Mondstörungen.*)

I. Abschnitt.

Das Gravitationsgesetz oder die Regeln, nach denen man die Anziehung berechnet.

1) An allen Orten der Erde macht man die Beobachtung, dass die Körper, sobald man sie ihrer Unterlage beraubt, in Richtungen fallen, die senkrecht zur Oberfläche der Erde stehen, und die, weil die Erde eine Kugel ist, sich alle im Mittelpunkte der Erde schneiden. Ueberall also beobachten wir, dass die Körper, ihrer Unterlage beraubt, nach dem Mittelpunkte der Erde zu fallen. Das zwingt uns, eine anziehende Kraft anzunehmen, die ihren Sitz im Mittelpunkte der Erde hat. Diese Anziehungskraft der Erde bewirkt, dass Körper, die auf einer Unterlage ruhen, auf dieselbe einen Druck ausüben; sie macht die Körper schwer, weshalb man sie auch Schwerkraft genannt hat.

Um das Jahr 1666 nun kam Newton auf den Gedanken, diese Schwerkraft möge nicht auf die Oberfläche und die höchsten Berge der Erde beschränkt sein, sondern sich mit abnehmender Kraft selbst bis zum Monde erstrecken und letzteren zwingen, die Erde zu umkreisen. Schon 1687 konnte Newton die Richtigkeit seiner Vermutung beweisen: er veröffentlichte in diesem Jahre das nach ihm so genannte Newtonsche Gravitationsgesetz oder das Gesetz der allgemeinen Massenanziehung, nach welchem sich alle Körper mit einer gewissen Stärke gegenseitig anziehen. Auf dieses Gesetz war Newton geführt worden durch die Keplerschen Gesetze der Planetenbewegung.

---

*) Die beigegebene Abhandlung ist eine Uebersetzung des englischen Werkes: „Gravitation: an elementary explanation of the principal perturbations in the solar system. By G. B. Airy. London 1834.“ Mit ausserordentlicher Einfachheit und Klarheit behandelt Airy in seiner Schrift die Störungen, welche die Himmelskörper, infolge ihrer gegenseitigen Anziehungen, in ihren Bewegungen erfahren; mit Hilfe der einfachsten Sätze der Mechanik, ohne Zuhilfenahme irgend welcher Rechnungen, leitet er alle die Resultate der Planeten- und Mondstörungen ab, denen man sonst nur durch schwierige Rechnungsoperationen sich nähern kann. — Vor 12 oder 14 Jahren sah ich das englische Original zum ersten Male. Ich konnte dasselbe nur für kurze Zeit geliehen erhalten; und da es mir auf keinem Wege möglich war, weder das Originalwerk selbst, noch die vor etwa 60 Jahren von Littrow besorgte Uebersetzung desselben zu erwerben, so übersetzte ich es selbst von neuem, mit der Absicht, die Uebertragung einst als Programmarbeit zu verwerten. Im vorigen Jahre erfuhr ich nun freilich, dass eine neue Uebersetzung von Herrn Professor Hoffmann erschienen ist. In dem kurzen Zeitraum, von da an, ist es mir nun nicht möglich gewesen, einen anderen Gegenstand für eine Programmabhandlung ausführlicher zu bearbeiten, und so habe ich mich entschliessen müssen, wenigstens einen Teil meiner Uebersetzung (falls der Raum hinreicht bis einschl. der Mondstörungen) dem Programm beizugeben, und zwar nunmehr mit einigen Erweiterungen und Aenderungen. Im 1. Abschnitt habe ich den Gedankengang des Verfassers beibehalten, aber doch völlig geändert ausgeführt, indem ich auf die Ableitung des Gravitationsgesetzes eingegangen bin. Auch bei den übrigen Abschnitten habe ich mir erlaubt, hie und da eine Figur oder eine geringe Rechnung zuzufügen. Möchten diese Aenderungen keine Erschwerung bedeuten für das Verständnis der schönen Airyschen Arbeit.

Aus den sorgfältigen Beobachtungen des Tycho de Brahe, wie aus seinen eigenen, hatte nämlich Kepler (1610) gefunden, dass die Bewegungen der Planeten nach den folgenden drei Gesetzen ausgeführt werden:

1) Die Planeten bewegen sich um die Sonne in Ellipsen, in deren einem Brennpunkte die Sonne steht;
2) der von der Sonne nach einem Planeten gezogene Leitstrahl streicht in gleichen Zeiten über gleiche Flächen hinweg;
3) die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten um die Sonne verhalten sich wie die dritten Potenzen der grossen Achsen ihrer Bahnen.

„Kepler fühlte sehr wohl, dass die drei von ihm entdeckten Gesetze noch etwas Unbefriedigendes haben, dass sie die Frage unbeantwortet lassen, weshalb denn die Planeten sich nach diesen Gesetzen bewegen. Hätte er die wichtigen Entdeckungen seines grossen Zeitgenossen Galilei gekannt, so würde sein Genius ihn vielleicht noch einen Schritt weiter geführt haben zu dem höheren Gesetze, von welchem jene drei Gesetze nur Folgen sind, zu dem Gravitationsgesetz.“ *)

Aus dem zweiten Gesetze schloss Newton, dass die Sonne infolge einer Anziehung, die sie auf die Planeten ausübe, dieselben um sich herumführe; nach dem dritten Gesetze berechnete er die Grösse dieser Anziehung.

2) Wir wollen die Berechnung durchführen, indem wir, der Einfachheit halber, die Bahnen der Planeten als Kreise annehmen, von denen sich die in Wirklichkeit beschriebenen Ellipsen thatsächlich auch sehr wenig unterscheiden.

Wenn der Radius vektor, nach dem 2. Keplerschen Gesetze, in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume, also gleiche Sektoren beschreibt, so müssen — da zu gleichen Sektoren gleiche Kreisbogen gehören — in diesen Zeiten auch gleiche Bogen beschrieben werden oder die Kreisbewegung ist gleichförmig. In der Mechanik wird nun gezeigt, dass eine gleichförmige Kreisbewegung nur möglich ist, wenn eine nach dem Mittelpunkt hin gerichtete Kraft, eine Centripetalkraft vorhanden ist von der Grösse $\frac{m \cdot v^2}{r}$, wobei r der Radius der Bahn, v die Geschwindigkeit oder der in 1" beschriebene Bogen, m die Masse des Planeten ist. Wird die ganze Bahn $2\pi r$ in t Sekunden durchlaufen, so ist $v \cdot t = 2\pi r$, $v = \frac{2\pi r}{t}$, und für die Centripetalkraft ergiebt sich durch Einsetzen der Wert $\frac{4\pi^2 m \cdot r}{t^2}$.

Ein anderer Planet von der Masse M, der in T" eine Bahn vom Radius R beschreibt, wird demnach eine Centripetalkraft $= \frac{4\pi^2 M \cdot R}{T^2}$ erfahren. Nach dem 3. Keplerschen Gesetze ist nun $t^2 : T^2 = r^3 : R^3$ oder $\frac{t^2}{r^3} = \frac{T^2}{R^3}$; d. h. für alle Planeten hat dieser Quotient den gleichen Wert, den wir durch k bezeichnen wollen, sodass $\frac{t^2}{r^3} = k$ und $t^2 = k \cdot r^3$. Für die Centripetalkraft des zuerst erwähnten Planeten erhalten wir dann, wenn wir den Wert von t^2 einsetzen: $\left(\frac{4\pi^2}{k}\right) \cdot \frac{m}{r^2}$, woraus man ersieht, dass die gleichförmige Kreisbewegung um die Sonne nur möglich ist, wenn eine nach der Sonne gerichtete Anziehungskraft da ist, welche dem Quadrate des Abstandes r von der Sonne umgekehrt proportional ist.

3) Die Planeten bewegen sich um die Sonne; daher muss letztere eine Anziehungskraft ausüben. Da der Mond sich um die Erde bewegt, so muss auch sie auf ihn anziehend wirken, und zwar mit einer Kraft, deren Stärke ebenfalls dem Quadrate der Entfernung von der Erde umgekehrt proportional ist, deren Sitz im Mittelpunkte der Erde anzunehmen ist. Denn, wenn die Erde von mehreren Monden umkreist würde (wie es bei dem Planeten Jupiter

*) Poggendorf, Geschichte der Physik. S. 163.

der Fall ist), so gälte für deren Bewegungen das 3. Keplersche Gesetz (wie es für die Trabanten Jupiters gilt). Die auf die Planetenbewegung angewendete Methode ergäbe dann, dass der Mond von der Erde mit einer Stärke angezogen wird, die dem oben angegebenen Gesetze unterworfen ist.

4) Newton zeigte nun auch, dass diese Anziehung, welche die Erde auf den Mond ausübt, von derselben Art ist, wie diejenige, welche die Körper auf der Erdoberfläche erfahren. An der Oberfläche der Erde, im Abstand 6370 km vom Mittelpunkt, erzeugt die Anziehungskraft, deren Sitz wir im Mittelpunkte der Erde annehmen dürfen (siehe 5), eine Beschleunigung von 9,81 m oder 9810 mm (Beschleunigung beim freien Falle der Körper). Nehmen wir an, die Erde ziehe die Körper an ihrer Oberfläche nach dem gefundenen Gesetze an, so würde im Abstande 1 km vom Mittelpunkte der Erde*) die Beschleunigung der Anziehung grösser sein wie zuvor, und zwar $9810 . (6370)^2$ Millimeter betragen; im Abstande des Mondes aber, der $= 51000$ Meilen oder $= 51000 . 7{,}5$ km, würde ein Körper nach der Erde hin nur mit dem $(51000 . 7{,}5)^2$ten Teil des vorigen Wertes beschleunigt, oder die Beschleunigung, die ein Körper in der Mondentfernung erführe, würde $\frac{9810 . (6370)^2}{(51000 . 7{,}5)^2}$ mm $= 2{,}72$ mm betragen — falls das gefundene Anziehungsgesetz gilt.

Untersuchen wir wie gross die Beschleunigung ist, welche die den Mond nach der Erde ziehende Kraft zu erzeugen vermag. Die Mondbahn ist ein Kreis (so wollen wir annehmen) vom Radius 51000 km. Die kreisförmige Bewegung ist nur möglich, wenn eine nach der Erde gerichtete Centripetalbeschleunigung von der Grösse $\frac{4 \pi^2 r}{T^2}$ vorhanden ist. Dabei ist der Radius der Bahn $r = 51000 . 7500000$ mm, die Umlaufszeit $T = 39343 . 60''$, sodass der Mond nach dem Mittelpunkt der Erde hin eine Beschleunigung der Grösse $\frac{4 \pi^2 51000 . 7500000}{(39343 . 60)^2}$ mm erfährt, was für $\pi = \frac{22}{7}$ nahe den Wert 2,72 mm ergiebt.

Wir sehen somit, dass diese Centripetalbeschleunigung 2,72 mm, welche nötig ist, um den Mond in seiner Bahn zu erhalten, gerade so gross ist wie die Beschleunigung der Erdschwere, berechnet nach dem angegebenen Gesetze für eine Entfernung gleich der des Mondes von der Erde.

Newton schloss daraus, dass die auf den Mond ausgeübte Anziehung keine besondere von der Erde ausgeübte Kraft, sondern nichts anderes als dieselbe Kraft sei, welche Körper, nahe der Erdoberfläche, veranlasst gegen die Erde zu fallen; dass die Schwere auf hohen Bergen kleiner sei als an der Erdoberfläche, dass sie mit wachsender Entfernung vom Erdmittelpunkt beständig abnehme derart, dass ihre Stärke oder Beschleunigung dem Quadrate dieser Entfernung umgekehrt proportional sei, und infolge davon jeder Körper, in eine Entfernung von der Erde gleich der des Mondes gebracht, eine Schwerebeschleunigung von nur 2,72 mm erfahre.

5) „Nachdem bewiesen war, dass die Kraft, durch welche die Himmelskörper, wie Erde und Mond, einander anziehen, von derselben Art ist, wie diejenige, durch welche Körper, mit denen wir hantieren können, von der Erde angezogen werden, blieb noch die Aufgabe, zu zeigen, dass Körper wie die, mit denen wir hantieren, einander anziehen.“ **)

Die merkwürdigsten Versuche, welche beweisen, dass alle Körper sich gegenseitig anziehen, sind die 1772 von Maskelyne und 1797 von Cavendish ausgeführten. Maskelyne fand, dass ein am Shehallienberge in Schottland aufgehängtes Pendel in der Richtung nach dem Berge hin von der Vertikalen abwich, dass also letzterer eine Anziehung auf das Pendel ausübe, die dasselbe aus seiner Gleichgewichtslage bringe. Die Versuche von Cavendish waren anderer Art. „Kleine Bleikugeln wurden an den Enden eines Stabes

*) d. h. vom Sitze der anziehenden Kraft.
**) Maxwell, Substanz und Bewegung. Deutsch v. Fleischl. S. 133.

angebracht, der an einem in seiner Mitte befestigten Faden hing; brachte man nun grosse Bleikugeln in die Nähe, so bewegten sich die kleineren Kugeln nach den grossen hin, indem sich der Stab um den Faden drehte": die grossen Kugeln zogen die kleinen an.

Mittelst der Drehwage (durch Schwingungen) hat man auch gefunden, dass die Kraft, mit der ein Körper irgend einen anderen Körper anzieht, dem Quadrate der Entfernung beider umgekehrt proportional ist.

Aus diesen und anderen Versuchen ergiebt sich, dass sich alle Körper gegenseitig anziehen, und zwar nach dem früher gefundenen Gesetze, nach welchem sich die Himmelskörper anziehen. Wenn wir beobachten, dass ein seiner Unterlage beraubter Körper nach dem Mittelpunkte der Erde zu sich bewegt, so wird diese Bewegung daher rühren, „dass alle Teile der Erde eine Anziehung ausüben, die Anziehungen aller dieser Teile zusammen aber an allen Orten eine nach dem Mittelpunkte der Erde hin gerichtete Wirkung ergeben." So ziehen alle kugelförmige Himmelskörper, wie Erde, Sonne, Planeten, Monde, so an, als wenn ihre ganze Masse in ihren Mittelpunkten vereinigt wäre. Unter der Entfernung der Himmelskörper von einander hat man daher auch nur die Entfernung ihrer Mittelpunkte zu verstehen; man kann die Himmelskörper wie anziehende Punkte betrachten.

Wenn die gegenseitige Anziehung eine allgemeine ist, so wird dann natürlich auch die Erde selbst von dem fallenden Körper angezogen und zu ihm hin gezogen, freilich aber — da die Masse des Körpers ausserordentlich gering ist im Vergleich zur Erdmasse — um ein so kleines Stück,*) dass man von einem Hingehen oder Hinfallen der Erde nach dem Körper unmöglich etwas wahrnehmen kann.

Die allgemeine Anziehung, von der wir jetzt gesprochen, ist durchaus verschieden von der magnetischen Anziehung; die erstere besteht zwischen allen Körpern, gasförmigen, flüssigen und festen, die letztere nur zwischen gewissen Körpern.

6) Für die Anziehung nun, die irgend zwei Körper auf einander ausüben, fand Newton das Gesetz:

Zwei Körper ziehen einander an mit einer Stärke, die dem Produkt ihrer Massen direkt proportional und dem Quadrate ihrer Entfernung umgekehrt proportional ist.

Diese Form des Gravitationsgesetzes, oder des Gesetzes der allgemeinen Schwere, lässt sich so herleiten. Seien m und M die Massen zweier Körper, r ihre Entfernung von einander und ist f die Anziehung, welche zwei Masseneinheiten in der Entfernung 1 m auf einander ausüben, so üben die m Masseneinheiten des ersten Körpers auf jede Masseneinheit des zweiten die Anziehung f . m aus; sie ziehen daher alle M Einheiten des zweiten mit der Stärke f . m . M an, vorausgesetzt, dass die gegenseitige Entfernung der Körper = 1 m. Nach dem früher gefundenen Gesetze wird dann, wenn die Körper um r Meter von einander entfernt sind, die Anziehung nur $\frac{f \cdot m \cdot M}{r^2}$ betragen. Dies ist das Gravitationsgesetz.

Unter Masse ist dabei der Quotient $\frac{Q}{g}$ aus Gewicht und Beschleunigung beim freien Fall (9,81 m) zu verstehen, sodass die Masse 1 in einem Körper enthalten ist, dessen Gewicht $Q = g$ ist, der an einem Orte, an dem die Beschleunigung der Schwere 9,81 m ist, das Gewicht 9,81 kg hat.

Für die vorhin genannte Grösse f hat man den Wert 0,06128 Milligramm gefunden**); diesen Zug übt die Masse 1 aus auf eine andere Masseneinheit im Abstande 1 m.

7) Da man Kräfte nur aus ihren Wirkungen messen kann, diese aber zweierlei Art sein können, so müssen wir uns entscheiden, welche Art von Wirkung wir künftig als Mass für die Gravitation benutzen wollen. „Die eine von diesen Wirkungen ist der Druck, den sie auf einen Körper ausübt, der einen andern Körper in Ruhe

*) Weil, wie weiter unten gezeigt wird, dieses Stück der Masse des anziehenden Körpers, die hier sehr klein, proportional ist.

**) Wüllner, Physik. 3. Aufl. Bd. I. S. 152.

erhält; er hat die gefundene Grösse $\frac{f.m.M}{r^2}$. Die zweite Wirkung besteht in dem Raume, durch welchen ein frei beweglicher Körper in gewisser Zeit, etwa in 1'', fortgetrieben wird"*) oder in der Beschleunigung, d. i. in dem Geschwindigkeitszuwachs in 1'', der dem Körper erteilt wird — da der Weg in der ersten Sekunde doch nichts weiter als die halbe Beschleunigung ist.

Diese zweite Wirkung kann aber wirklich auch als Mass der Kräfte (die in der elementaren Mechanik durch Kilogramme ausgedrückt werden) dienen, da sich die Kräfte zu einander verhalten wie die von ihnen erzeugten Beschleunigungen oder wie die von ihnen in 1'' hervorgebrachten Wege. Kennte man also den Weg, den eine gewisse Kraft, etwa die Masskraft, in 1'' einen Körper zurücklegen lässt, und erzeugte eine andere Kraft einen 3 mal so grossen Weg in derselben Zeit, so würde die letztere Kraft auch das Dreifache der Masskraft sein. Oder: will man Kräfte vergleichen, so braucht man thatsächlich nur die Strecken zu vergleichen, die sie einen Körper in einer Sekunde zu sich hin ziehen.

„Die Anziehungskraft der Erde werden wir hiernach messen können durch den Druck in Kilogrammen, den etwa eine in der Hand gehaltene Bleikugel auf die Hand ausübt, oder durch die Anzahl Meter, welche das Bleistück in einer Sekunde frei durchfällt. Zwischen beiden Massen besteht der folgende Unterschied: Nehmen wir den Druck als Mass an, so erhalten wir, da ein grosses Stück Blei mehr wiegt als ein kleines, verschiedene Werte für die Grösse der Anziehungskraft der Erde; benutzen wir aber den Fallraum als Mass, so erhalten wir für die Anziehung, die ein und derselbe Körper, etwa die Erde ausübt, stets nur einen Wert (siehe 8. und 9.), da man z. B. durch zahlreiche Versuche erwiesen hat, dass alle Körper, schwere wie leichte, in einer Sekunde denselben Raum durchfallen, die Beseitigung des Luftwiderstandes vorausgesetzt.

Die Gleichmässigkeit und Einfachheit der letzteren Messungsmethode lässt der letzteren den Vorzug vor der ersteren zukommen.

Jede Anziehungskraft wollen wir also durch den Raum messen, durch welchen sie einen frei beweglichen Körper in einer Sekunde zieht."

8) Nunmehr, bei Einführung dieses Masses für die Anziehung, kann man leicht angeben, wovon die Anziehung selbst abhängt. Bezeichnen wir nämlich durch m die Masse des anziehenden, durch M die des angezogenen Körpers, mit r die Entfernung beider, so hat nach dem Gesetze von Newton die Anziehung die Grösse $\frac{f.m.M}{r^2}$. Die Beschleunigung, die der erstere Körper dem zweiten erteilt, ist „Kraft dividiert durch die Masse des angezogenen", also $\frac{f.m}{r^2}$; der Weg, den der zweite in der 1." zurücklegt, ist daher $\frac{1}{2} f. \frac{m}{r^2}$, wobei die sich anziehenden Körper so weit entfernt zu denken sind, dass in einer Sekunde sich ihr Abstand im Vergleich zur ganzen Entfernung sehr wenig ändert, also die Stärke der Anziehung während dieser Zeit konstant bleibt. Da der Wert des zuletzt gefundenen Ausdrucks für den Weg, der unser Kraftmass ist, nur von m und r abhängt, $\left(\frac{1}{2}\right.$ f ist eine gewisse bestimmte Zahl$\left.\right)$, so sehen wir, dass die Anziehung selbst nur von m und r, nicht aber von M abhängt. Wir finden daher bei Zugrundelegung unseres Kraftmasses, aus dem Werte $\frac{1}{2} f. \frac{m}{r^2}$ für die Anziehung, die im folgenden hervorgehobenen drei Gesetze.

*) Airy.

9) Der Wert für die Anziehung enthält nicht M, die Masse des angezogenen Körpers; die Anziehung bleibt also die gleiche für jeden angezogenen Körper, wenn nur jedesmal die Entfernung r die gleiche ist.

Oder; die Anziehungskraft hängt nicht von der Masse des angezogenen Körpers ab.

„So zieht z. B. Jupiter die Sonne und ebenso die Erde an; aber obgleich die Masse der Sonne 355 000 mal so gross ist als die Erde*), so würde doch die Anziehung Jupiters auf die Sonne genau gleich der auf die Erde ausgeübten sein, wenn beide von Jupiter gleich weit entfernt wären. Mit andern Worten, wenn Sonne und Erde in gleichen Entfernungen von Jupiter sich befinden, so werden beide Körper in einer Sekunde um gleiche Stücke nach dem Jupiter hingezogen."

10) Zweitens ergiebt der für die Anziehung gefundene Wert $\frac{1}{2} f \frac{m}{r^2}$, dass die Anziehungskraft der Masse m des anziehenden Körpers direkt proportional ist, „sobald die Entfernungen der verschiedenen anziehenden Körper vom angezogenen gleich gross sind."

„Die Sonnenmasse ist z. B. (nahezu) 1050 mal so gross, als die Jupiters; nimmt man also an, dass beide Körper von Saturn gleich weit entfernt sind, so wird auch die Sonne den Saturn in einer Sekunde um eine Strecke fortziehen, welche 1050 mal so gross ist als die, um welche Jupiter in dieser Zeit den Saturn zu sich hinzieht."

11) Drittens endlich ist die Anziehungskraft dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional; wirkt also der anziehende Körper auf andere Körper in verschiedenen Entfernungen, so verhalten sich diese Anziehungen umgekehrt wie die Quadrate dieser Entfernungen vom anziehenden Körper.

„So zieht die Erde die Sonne, wie auch den Mond an, aber da die Sonne nahe 400 mal so weit entfernt ist als der Mond, so ist die Anziehung der Erde auf die Sonne nur der $(400)^2$te Teil oder $\frac{1}{160\,000}$ der Anziehung auf den Mond, und wenn die Erde den Mond in einer Sekunde um 1,36 mm zu sich hinzieht, wie es nahe der Fall ist, so wird sie die Sonne in dieser Zeit nur um $\frac{1{,}36}{160\,000}$ Millimeter aus ihrer Lage entfernen.

Ferner: „Jupiter ist dem Saturn 3 mal so nahe, wenn beide auf derselben Seite der Sonne stehen, als wenn sie auf entgegengesetzten Seiten sich befinden; folglich ist die Anziehung Jupiters auf Saturn, und ebenso die des Saturn auf Jupiter im ersten Falle 9 mal so gross als im zweiten Falle."

12) Auf Grund des Gravitationsgesetzes sind alle Berechnungen über die Bewegungen der Planeten angestellt. Man hat vorausberechnet die Orte, an denen sich die Himmelskörper zu einem bestimmten Augenblicke befinden müssen, und hat sie wirklich zu dieser Zeit an den berechneten Orten gefunden: ein Beweis dafür, dass das Gravitationsgesetz richtig ist. Die glänzendste Bestätigung der Richtigkeit dieses Gesetzes aber hat die im Jahre 1846 gemachte Entdeckung des Planeten Neptun geliefert. Aus gewissen Unregelmässigkeiten in der Bewegung des Planeten Uranus berechnete man nach dem Gravitationsgesetze, dass an bestimmter Stelle des Himmelsgewölbes ein noch nicht bekannter Himmelskörper stehen müsse, der diese Störungen hervorbringe; man richtete das Fernrohr gegen jene Stelle und fand dort thatsächlich einen bisher nicht gekannten Körper, einen neuen Planeten, den man Neptun nannte.

*) Die Sonnenmasse ist 355 000 mal so gross als die der Erde, d. h. die Sonne würde 355 000 mal so schwer sein als die Erde, wenn man sie auf einer und derselben Wage wiegen würde.

II. Abschnitt.

Ueber die Wirkungen der Anziehungskraft auf einen in Bewegung befindlichen Körper, und auf die in krummlinigen Bahnen einhergehenden Planeten und Satelliten.

13) Wir haben bisher nur von den einfachsten Wirkungen der Anziehungskraft gesprochen, nämlich von dem Drucke, den ein unterstützter Körper, z. B. ein in der Hand gehaltener Stein, auf seine Unterlage ausübt, und von der Bewegung, die eintritt, sobald derselbe seiner Unterlage beraubt ist, wie z. B. wenn man den Stein aus der Hand fallen lässt. Es ist nun leicht einzusehen, dass ein Körper, der in derselben Richtung geworfen wird, in welcher ihn die Kraft zieht — wie z. B., wenn man einen Stein abwärts wirft — sich mit grösserer Geschwindigkeit bewegen werde als die ist, die ihm jede der Ursachen für sich allein erteilt hätte; ebenso begreift man, dass der Körper sich immer langsamer und langsamer bewegen wird, und schliesslich eine Bewegung von gerade entgegengesetzter Richtung annehmen wird, falls man ihn in einer Richtung wirft, die derjenigen der Kraft gerade entgegengesetzt ist, wie z. B. wenn man einen Stein aufwärts wirft. In der Astronomie ist jedoch der Fall besonders wichtig, wo ein Körper in einer Richtung geworfen wird, die n i c h t zusammenfällt mit der der anziehenden Kraft.

14) Das einfachste Beispiel einer solchen Bewegung ist die Bewegung eines Steines, den man in horizontaler oder doch nahe horizontaler Richtung wirft. Wir wissen, dass der Stein bald auf den Boden fällt, und wenn wir seinen Lauf auch nur mit geringer Aufmerksamkeit beobachten, so sehen wir, dass er sich nicht in gerader Linie bewegt. Er bewegt sich zuerst in der Richtung, in der er geworfen wurde, doch ändert sich diese Richtung sehr bald, ja sie ändert sich beständig, bis der Stein den Boden erreicht in einer Richtung, die sehr von der ursprünglichen Richtung abweicht. Wir können den Körper unter kräftigen Anstrengungen, selbst mittelst künstlicher Hilfsmittel, wie z. B. bei einer Kanonenkugel, also mit noch so grosser Geschwindigkeit werfen, er fällt doch zuletzt auf die Erdoberfläche.

15) Die Natur dieser vom geworfenen Körper ausgeführten krummlinigen Bewegung lässt sich bestimmen mittelst des Satzes vom Parallelogramm der Bewegungen.

Der Körper werde vom Punkte A aus in der Richtung AB geworfen, so lässt sich der Ort, an dem sich der Körper zu irgend einer Zeit, etwa nach 3 Sekunden befindet, auf folgendem Wege bestimmen (Fig. 1):

Wenn die dem Körper erteilte Geschwindigkeit für sich allein ihn in 3" von A nach B bringt, und wenn infolge der Wirkung der Schwere allein er in dieser Zeit von A nach C kommt, so wird der Körper am Ende dieser 3" in Wirklichkeit, d. h. unter Einwirkung beider Bewegungen sich in D befinden, welchen Punkt man erhält, indem man BD gleich und parallel AC zieht; der Körper wird mit andern Worten in der vierten Ecke desjenigen Parallelogramms sich befinden, das durch AB und AC bestimmt ist. Man erhält also den wirklichen Ort D, indem man die Sache so ansieht, als wenn der Körper erst die eine Bewegung von A bis B, und darnach die zweite von B bis D ausgeführt hätte. Den Punkt D wird der Körper in einer krummen Linie AD erreichen, deren verschiedene Punkte, die ja anderen Zeiten als den 3 Sekunden entsprechen, sich ganz auf demselben Wege bestimmen lassen.

16) D e r s e l b e S a t z l ä s s t s i c h a u f e i n e n P l a n e t e n a n w e n d e n, w e n n m a n n u r d i e B e t r a c h t u n g a u f s e h r k l e i n e Z e i t r ä u m e e i n s c h r ä n k t.

Die Bestimmung der Bahn eines geworfenen Körpers ist deshalb leicht, weil die Schwere während der Bewegung stets mit derselben Stärke und in derselben Richtung wirkt. Für die Bewegung eines Körpers, der von einem Planeten oder der Sonne angezogen wird, gilt diese einfache Methode freilich nicht; denn hier ändert sich die Grösse der Kraft mit der Entfernung, da dieselbe dem Quadrate der letzteren umgekehrt proportional ist; die Kraft und ihre Richtung werden, wenn sich der Körper bewegt, immer andere sein, da der Körper in andere Lage und in andere Entfernung vom anziehenden Körper kommt. Wenn man aber die Bewegung für einen so kurzen Zeitraum betrachtet, dass während desselben Richtung und Grösse der Kraft sich nur sehr wenig ändern, so darf man doch dasselbe Verfahren von vorher anwenden. Wenden wir dieses letztere z. B. auf die Erde an, deren Bewegung von der Anziehung der Sonne beeinflusst wird: Wollten wir nach demselben den Ort ermitteln, an dem die Erde sich in Wirklichkeit etwa nach einem Monat von jetzt ab gerechnet befindet, (den man findet, wenn man den Weg angiebt, den die Frde infolge der Geschwindigkeit in ihrer Bahn allein, etwa von A aus in einem Monate zurücklegt, und dazu den, welchen sie infolge der in A (auf sie immer in der Richtung AC wirkenden Sonnenanziehung allein beschreibt), so würde der so berechnete Ort durchaus falsch sein, weil wir eben dann die Kraft von immer gleicher Stärke und stets in derselben Richtung AC wirkend angenommen hätten. Berechneten wir aber den wirklichen Ort für den Zeitraum einer Woche, so würden die Umstände der Bewegung denen der Bewegung des Steines ähnlicher geworden sein als vorher; denn die Richtung der Kraft, die ja stets die nach der Sonne hin ist, und die Grösse der Kraft, welche dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist, werden sich in einer Woche weniger ändern, als während eines Monates. Wenn wir weiter nach demselben Verfahren den Ort für den Zeitraum eines Tages oder gar einer Minute bestimmen, so wird der Fehler im ersten Falle nur bei genauester Beobachtung, im zweiten überhaupt nicht mehr bemerkt werden können.

17) Mittelst höherer Rechnungsarten kann man den Ort eines Planeten, der sich um die Sonne, oder den Ort eines Satelliten, der sich um einen Planeten bewegt, nach irgend welchem Zeitraum angeben. Man hat darnach auch die Bahnen oder die Linien, auf denen alle diese Orte liegen, bestimmt.

Zu den mittelst dieser höheren Wissenszweige gefundenen Resultaten gehören auch die früher genannten Keplerschen Gesetze, welche sich als notwendig bestehend ergeben, falls man das allgemeine Anziehungsgesetz zu Grunde legt. Im Folgenden wollen wir diese Resultate, auf deren Beweis einzugehen wir uns versagen müssen, angeben.

18) Ein Planet oder Satellit kann sich in einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel bewegen. Wenn ein Körper, z. B. ein Planet, von A aus (Fig. 2) durch eine Kraft in der Richtung AB gestossen wird, und wenn die Anziehung der in S befindlichen Sonne sofort anfängt, und darnach auch fortfährt den Körper nach S hin zu ziehen, mit einer Stärke, die dem Quadrate der Entfernung von S umgekehrt proportional ist, und wenn ausser dieser Anziehung keine andere Kraft auf den Körper wirkt, so muss sich der Körper — so hat man bewiesen — in einem Kreise oder in einer Ellipse oder in einer Parabel oder in einer Hyperbel bewegen.

Im Punkte A wird die krumme Linie die Richtung AB haben oder AB wird Tangente der krummen Linie sein im Punkte A.

Ein Kreis kann die krumme Linie nur sein, wenn AB senkrecht auf SA steht, und wenn ausserdem die Geschwindigkeit, mit welcher der Planet fortgestossen wird, weder grösser noch kleiner ist als eine gewisse Geschwindigkeit, die von der Länge SA und der Masse des Körpers S abhängt. Es muss ja die Centripetalkraft, welche da sein muss, falls der Körper einen Kreis beschreiben soll, gleich der Anziehung von S auf SA sein. Erstere ist $\frac{m \cdot v^2}{r}$, letztere $f.\frac{m \cdot m_1}{r^2}$, sodass $\frac{m \cdot v^2}{r} = f\,\frac{m\,m_1}{r^2}$ oder $\frac{v^2}{r} = f\,\frac{m_1}{r^2}$ und $v^2 = f.\frac{m_1}{r}$, wenn m_1 die Masse des anziehenden, m die des angezogenen Körpers, v die Geschwindigkeit des letzteren, $r = SA$ und f die frühere konstante Grösse ist. Die Wege, die die genannten

Kräfte in einer Sekunde erzeugen könnten, würden sein $\frac{1}{2}\frac{v^2}{r}$ und $\frac{1}{2} f \frac{m_1}{r^2}$; ihre Gleichsetzung würde ebenfalls ergeben $v^2 = f \frac{m_1}{r}$, wie vorher. Diese Gleichung aber lässt erkennen, dass, wenn die Bahn kreisförmig ist, für welchen Fall eben die Centripetalkraft den angegebenen Wert hat, auch v^2 durch m_1 und r vollständig bestimmt ist.

Ist die Geschwindigkeit auch nur um wenig grösser oder kleiner als diese ganz bestimmte, so wird sich der Körper in einer Ellipse bewegen; ist sie aber um vieles grösser, so wird die Bahn eine Parabel oder Hyperbel sein.

Ist AB schief gegen SA, und ist die Wurfgeschwindigkeit klein, so bewegt sich der Körper in einer Ellipse; ist die Geschwindigkeit gross, so kann er sich in einer Parabel oder Hyperbel, nie aber in einem Kreise bewegen.

Beschreibt der Körper einen Kreis, so steht die Sonne im Mittelpunkte desselben. Ist die vom Körper beschriebene Bahn eine Ellipse, so steht die Sonne nicht im Mittelpunkte, sondern in einem Brennpunkte.

Will man eine solche Ellipse konstruieren, so steckt man zwei Nadeln, etwa in S und H (Fig. 3) in ein Bret, befestigt in den Punkten S und H die Enden eines Fadens SPH, spannt diesen Faden durch die Spitze P eines Bleistiftes, und bewegt nun den Stift fort, sodass aber stets der Faden gespannt bleibt; die so vom Stifte aufgezeichnete Linie ist dann eine Ellipse, die Punkte S und H nennt man ihre Brennpunkte.

Beschreibt der Körper eine Parabel oder Hyperbel, so steht die Sonne ebenfalls im Brennpunkte dieser Linien.

19) Die Planeten beschreiben Ellipsen, die sehr wenig gestreckt, und Kreisen sehr ähnlich sind. Einige Kometen beschreiben sehr lange Ellipsen, die meisten aber bewegen sich in Linien, die man von Parabeln nicht unterscheiden kann. Von etwa fünf der beobachteten Kometen weiss man, dass sie in Hyperbeln einhergehen. Da es aber in dieser Abhandlung nicht unsere Absicht ist, auf die Bewegung der Kometen einzugehen, so werden wir uns auf die Betrachtung der Bewegung in einer Ellipse beschränken.

20) Alles, was wir bisher in Bezug auf die Bewegung eines Planeten oder irgend eines Körpers um die Sonne sagten, gilt ganz ebenso für die Bewegung eines Satelliten um einen Planeten, da der Planet, wenn auch mit geringerer Kraft, so doch mit einer solchen Kraft anzieht, die wie die Anziehung der Sonne, dem Gravitationsgesetze unterworfen ist. So beschreibt der Mond eine Ellipse um die Erde, in deren Brennpunkte die letztere steht; die Satelliten Jupiters bewegen sich alle in Ellipsen um Jupiter, und letzterer steht im Brennpunkte einer jeden von diesen Linien.

21) Unterschied zwischen Wurf- und Anziehungskraft. Als wir vorher die Berechnung der Bahnen auseinandersetzten, sprachen wir von einer Anziehungskraft, und von einer Kraft, durch welche der Planet geworfen wird. Diese Kräfte sind ihrer Natur nach gänzlich von einander verschieden. Die Anziehungskraft nämlich wirkt beständig, ohne Unterbrechung, wie wir ja wissen, dass z. B. die Schwere der Erde immerfort wirkt; die Kraft aber, durch welche der Körper geworfen wurde, hat nur ein Mal einen Augenblick eingewirkt; und wir müssen bei der Bewegung eines jeden Planeten, um sie überhaupt erklären zu können, voraussetzen, dass eine solche Wurfkraft zu irgend einer Zeit ein Mal für sehr kurze Dauer eingewirkt hat, gegenwärtig aber nicht mehr wirkt.

Dass die Planeten sich bewegen, wissen wir, wie sie diese Bewegung erhielten, ist für unsere Untersuchung gleichgiltig, aber für die Zwecke der Rechnung ist es eben von Vorteil anzunehmen, dass sie zu irgend einer Zeit einmal einen Impuls derselben Art erhielten, wie der ist, welchen ein Stein erhält, wenn er aus der Hand geworfen wird; einen solchen Impuls meinen wir, wenn wir von „Wurfkraft“ reden.

22) Aus denselben Betrachtungen sieht man, dass, wenn wir jemals nötig haben sollten, die Bahn zu bestimmen, welche ein Planet beschreibt, von da ab, wo er einen gewissen Punkt verlässt, für welchen uns Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung bekannt sind, wir gewiss annehmen könnten, der Planet sei von jenem Punkte aus mit jener Geschwindigkeit und Richtung geworfen worden. Denn es ist ja ganz ohne Bedeutung, auf welche Weise oder woher der Planet seine Geschwindigkeit erhalten hat.

23) Wir kommen nun zu einem Punkte, der bei oberflächlicher Betrachtung immer als eine der grössten Schwierigkeiten in der Theorie der elliptischen Bewegung galt, welcher sich aber, genau betrachtet, als eine der einfachsten und natürlichsten Folgen aus dem Gravitationsgesetze ergiebt.

24) Die Anziehungskraft, sagten wir, ist dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional, und ist daher am grössten, wenn die Entfernung am kleinsten ist. Nun könnte es beim ersten Anblicke scheinen, ein Planet müsse sicher auf die Sonne fallen, wenn er sich ihr am meisten genähert hat, und daher ihre Anziehung am grössten ist. Wir können und wollen aber zeigen, dass gerade dann der Planet wieder anfängt, sich wieder von der Sonne zu entfernen, zuletzt wieder in gleich grosse Entfernung wie zuvor kommt, und fortfährt, dieselbe Bahn zu beschreiben.

25) Wenn die Entfernungen der Planeten von der Sonne am kleinsten geworden sind, so laufen sie nicht Gefahr, auf die Sonne zu fallen, weil dann ihre Geschwindigkeiten sehr gross sind.

Bei den Auseinandersetzungen über die Bewegung eines geworfenen Steines, welcher ja die eines Planeten ähnlich ist, falls man sie für einen sehr kurzen Zeitraum betrachtet, haben wir gesehen, dass die Abweichung des Steines von derjenigen Geraden, in welcher er seine Bewegung anfing, genau dem Raume gleich ist, durch welchen ihn die Schwere in derselben Zeit aus dem Zustande der Ruhe hätte fallen lassen, und zwar ist das giltig, mit welcher Geschwindigkeit der Körper auch geworfen sein mag. Wird also der Stein mit sehr grosser Geschwindigkeit geworfen, so wird er eine grosse Strecke durchlaufen müssen, ehe er merklich von der geraden Linie abgelenkt ist, und seine Bahn wird daher sehr wenig gekrümmt sein. Dasselbe gilt nun auch von der Bewegung eines Planeten, sodass die Krümmung eines Teiles seiner Bahn nicht bloss von der Anziehungskraft der Sonne, sondern auch von der Geschwindigkeit abhängt, mit welcher sich der Planet bewegt. Je grösser diese Geschwindigkeit an irgend einer Stelle der Bahn ist, um so geringer wird dort die Krümmung sein.

Gehen wir jetzt auf Fig. 2 zurück. Der Planet gehe durch C mit kleiner Geschwindigkeit, so wird die Anziehung der Sonne die Bahn stark krümmen und daher den Körper zwingen, sich der Sonne zu nähern. Weiter aber wird dann dieselbe Anziehung seine Geschwindigkeit notwendig vergrössern müssen, während er durch die Punkte D, E und F geht. Denn die Anziehung der Sonne wirkt, wenn der Planet in D ist, in der Richtung DS, und man erkennt wohl aus der geringen Neigung von DE gegen DS, d. i. aus dem spitzen Winkel von DE gegen DS, dass die in Richtung DS wirkende Kraft den Planeten längs seiner Bahn von D über E nicht hemmt, sondern forttreibt, folglich seine Geschwindigkeit vergrössert.*) Gerade wie bei einer eine schiefe Ebene herabrollenden Kugel die Schwerkraft, deren Richtung dann doch auch nur eine geringe Neigung gegen die Ebene hat, das Herablaufen begünstigt und daher die Geschwindigkeit vermehrt.

So wird also die Geschwindigkeit des Planeten, während er durch D, E, F geht, beständig zunehmen, und wenn nun auch die anziehende Kraft der Sonne wegen der Nähe des Planeten viel stärker wirkt, und deshalb die Bahn mehr zu krümmen sucht, so ist doch die Geschwindigkeit so sehr angewachsen, dass die Bahn nicht mehr gekrümmt sein wird als vorher in C.**)

---

*) Wenn man die am Planeten, etwa in D, angreifende, nach S gerichtete Anziehung in eine Komponente in Richtung der Tangente und in eine senkrecht zur Tangente zerlegt, so fällt die tangentiale Komponente wegen des spitzen Winkels, den DE mit DS bildet, längs der ganzen Strecke von C bis G, mit der Bewegungsrichtung zusammen, vergrössert daher die Geschwindigkeit.

**) Die Komponente senkrecht zur Tangente sucht allein die Bahn zu krümmen. Je näher der Planet G kommt, um so grösser wird der erwähnte spitze Winkel zwischen Tangente und Leitstrahl, um so grösser

Durch genauere Berechnungen hat man gefunden, dass der Planet von C aus, während des vierten Teils seiner Umlaufszeit, sich der Sonne schneller und schneller nähert, während des folgenden Viertels dieser Zeit der Zuwachs der Geschwindigkeit kleiner wird, und er sich von jetzt an, nach Verlauf der halben Umlaufszeit seit dem Durchgange durch C, der Sonne nicht mehr nähert, sondern eine so grosse Geschwindigkeit erlangt hat, und deshalb die Krümmung der Bahn so gering ist, — indem sie thatsächlich dieselbe ist wie in C — dass er vielmehr beginnt, sich von der Sonne zu entfernen. Er entfernt sich nun von der Sonne in derselben Stufenfolge, in der er sich ihr vorher näherte.*)

26) In den Punkten der Bahn, wo die Planeten am weitesten von der Sonne entfernt sind, verlassen dieselben ihre Bahn nicht, weil ihre Geschwindigkeit hier klein ist.

Hat der Planet seine grösste Entfernung von der Sonne erreicht, wo ja deren Anziehung am kleinsten ist, so wird er sich nicht für immer von ihr entfernen. Denn, wenn der Planet durch die Punkte H, K, A (Fig. 2) geht, so verzögert die stets nach S gerichtete Anziehung der Sonne die Bewegung in seiner Bahn, weil — wie wir in der letzten Bemerkung zu 25 gesehen — die tangentiale Komponente der Anziehung der Bewegung entgegenwirkt, — gerade wie die Schwere eine Kugel verzögert, die in einer Rinne in die Höhe steigt — und wenn der Planet dann nach C gekommen, so ist seine Geschwindigkeit so klein, dass die Anziehungskraft der Sonne, obgleich sie hier in C nicht gross ist (aber doch ganz, in der Nähe von C fast gänzlich, senkrecht zur Bewegungsrichtung wirkt, daher fast ausschliesslich auf Abänderung der Richtung oder auf Vergrösserung der Krümmung gerichtet ist), wirklich vermag eine grosse Ablenkung des Planeten von seiner Bewegungsrichtung zu erzeugen, oder die Bahn bedeutend zu krümmen, sodass er wieder beginnt sich der Sonne zu nähern, und nun fort und fort ganz den früheren Weg einschlägt.

27) Erklärung einiger Ausdrücke.

Da die folgenden Ausdrücke später oft wiederkehren werden, so wollen wir sie hier erklären.

Es seien S und H (Fig. 4) die Brennpunkte der Ellipse AEBD; man ziehe durch S und H die Gerade AB, gebe die Mitte C von SH an, und ziehe durch C die Gerade DE senkrecht zu AB. Es sei S der Brennpunkt, in welchem die Sonne steht, wenn wir von der Bahn eines Planeten reden, oder der Hauptplanet, falls wir von der Bahn eines Satelliten sprechen.

Dann nennt man AB die grosse Achse, C den Mittelpunkt der Ellipse, AC und BC die halbe grosse Achse; letztere ist ebenso lang wie SD, und heisst wohl auch die mittlere Entfernung, weil sie das Mittel ist zwischen der grössten Entfernung SB und der kleinsten AS des Planeten $\left(SD \text{ oder } AC = \frac{SB + SA}{2}\right)$. DE wird kleine Achse, DC oder CE halbe kleine Achse genannt.

daher die senkrechte Komponente oder die die Krümmung anstrebende Kraft. In G selbst fällt die ganze Anziehung in die Richtung senkrecht zur Tangente; das Bestreben der Anziehung, die Bahn zu krümmen, ist hier am grössten.

*) Nach dem Durchgange durch C ist nämlich der Winkel zwischen Bewegungsrichtung und Radius Vektor ein spitzer, weshalb die tangentiale Komponente der Anziehung die Geschwindigkeit von C ab vergrössert. Da nun dieser Winkel auch noch immer kleiner wird, so wird dieser Zuwachs der Geschwindigkeit von C an beständig grösser. Nach ein Viertel der Umlaufszeit etwa wächst der Winkel wieder, so dass auch die tangentiale Komponente und damit der Geschwindigkeitszuwachs wieder geringer wird, bis nach der Hälfte der Umlaufszeit in G, wo jener Winkel auf 90° angewachsen ist, ein weiteres Zunehmen der Geschwindigkeit nicht mehr erfolgt. Von jetzt ab tritt eine Abnahme der letzteren ein, da nun Bewegungsrichtung (Tangente) und Radius Vektor einen stumpfen Winkel einschliessen, die tangentiale Komponente der Anziehung also der Bewegung entgegenwirkt. Da der Winkel zunächst immer grösser wird, schliesslich nach drei Viertel der Umlaufszeit abermals sich verkleinert, und nach einem ganzen Umlaufe, in C, wieder 90° beträgt, so wird jene Abnahme oder der Geschwindigkeitsverlust erst immer grösser werden, dann wieder kleiner, bis endlich kein Verlust mehr eintritt, in C, wo die Geschwindigkeit wieder auf den Wert gesunken ist, der früher, vor einem Umlaufe, in C da war. (Wegen der Grösse der genannten Winkel siehe Fig. 7.)

A heisst entweder das Perihelium oder die Sonnennähe, wenn von einem Planeten die Rede ist, oder Perigäum, wenn man von der Bahn des Mondes um die Erde redet, oder Perijovium oder Perisaturnium, sobald man von einem um Jupiter oder Saturn sich bewegenden Satelliten spricht.

B nennt man bei einer Planetenbahn Aphelium oder Sonnenferne, bei der Mondbahn Apogäum, in der Bahn eines Satelliten Jupiters Apojovium.

A und B heissen Apsiden, und die Gerade AB heisst deshalb auch wohl Apsidenlinie.

SC nennt man die lineare Excentricität; es ist jedoch gebräuchlicher, statt von SC, von dem Verhältnisse zwischen SC und AC zu reden, und dieses Verhältnis $\frac{SC}{AC}$, ausgedrückt durch eine Zahl, schlechthin mit dem Namen Excentricität zu belegen. Wäre also z. B. SC der dritte Teil von AC, so würde die Excentricität der Bahn $\frac{1}{3}$ oder 0,333 .... sein.

Zieht man von S nach einem gewissen Punkte ♈ am Himmel, den man Widderpunkt oder Frühlingsaequinoktialpunkt nennt, in welchem die Sonne am Himmelsgewölbe zu Frühlingsanfang, den 21. März, steht, so heisst der Winkel ♈ SA die Länge des Perihels oder des Perigäums oder Perijoviums u. s. w.

Bewegt sich der Planet, etwa die Erde, im Sinne von A nach P, und befindet er sich zu einer gewissen Zeit etwa in P, so nennt man den Winkel ♈ SP seine Länge für diese Zeit, und den Winkel ASP seine wahre Anomalie. Hiernach ist die Länge eines Planeten gleich der Summe aus der Länge des Perihels und aus der wahren Anomalie des Planeten. Die Linie SP heisst Radius Vektor oder Leitstrahl.

In allen unseren Figuren denken wir uns die Bewegung eines Planeten oder Mondes in einer Richtung ausgeführt, die der der Bewegung des Uhrzeigers entgegengesetzt ist. Es ist dieses die Richtung, in welcher sich alle Planeten und Satelliten bewegen, wenn man sie von einem Punkte aus betrachtet, der auf der nördlichen Seite ihrer Bahnebenen liegt.

Die Zeit, in welcher der Planet seine ganze Bahn ein Mal durchläuft, also von einem Orte bis wieder zu demselben zurück kommt, nennt man seine Umlaufs- oder Revolutionszeit.

28) Die grosse Achse ist unabhängig von der Richtung der Wurfkraft. Kennt man die Masse des Centralkörpers und die Geschwindigkeit und Richtung, mit welcher der revolvierende Körper von einem bestimmten Orte aus geworfen wurde, also die Geschwindigkeit und Richtung an einer bestimmten Stelle der Bahn, so kann man die Länge der grossen Achse, die Excentricität, die Lage der Apsidenlinie und die Umlaufszeit berechnen. Die Methoden und Formeln, die das ermöglichen, können wir hier nicht angeben, wohl aber wollen wir ein merkwürdiges Ergebnis derselben erwähnen. „Es hängt die Länge der grossen Achse nur von der Grösse der Wurfgeschwindigkeit und von dem Orte ab (d. h. von der Entfernung des Ortes vom Centralkörper), von welchem aus geworfen oder gestossen wurde, aber durchaus nicht von der Richtung des Wurfes."

29) Der sogenannte Flächensatz.

Wenden wir uns nun zu den Grundsätzen, nach denen man die Bewegungen der Planeten oder Satelliten berechnet.

Wir haben schon erwähnt, dass die Geschwindigkeit des Planeten in seiner Bahn nicht gleichförmig ist, dass sie ihren grössten Wert hat, wenn die Entfernung von der Sonne am kleinsten ist, oder der Planet sich im Perihel befindet. Es lässt sich denken, dass nun auch die Länge des Planeten unregelmässig zunimmt. Denn, steht der Planet nahe bei der Sonne, so ist seine wirkliche Bewegung sehr schnell, und deshalb auch die Zunahme der Länge eine rasche; ist er aber weit von der Sonne entfernt, so bewegt er sich langsam und die Länge nimmt folglich ebenfalls nur langsam zu. Für diese unregelmässige Bewegung hat nun die Theorie das Gesetz ergeben: Der Radius Vektor geht in gleichen Zeiten über gleiche Flächenräume hinweg. Dieses Gesetz steht mit den Beobachtungen völlig im Einklang, und es hat Giltigkeit, gleichviel ob die Kraft dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist, oder in irgend einem andern Verhältnisse von der Entfernung abhängt, vorausgesetzt nur, dass sie nach dem Centralkörper hin gerichtet ist.

30) Bewegt sich z. B. ein Planet oder Satellit in einem Tage von A bis a (Fig. 5), während des folgenden Tages von a bis b, am dritten Tage von b bis c, so werden nach diesem Gesetze, das man auch wohl „Flächensatz" nennt, die Flächenräume ASa, aSb, bSc einander gleich sein.

Es giebt Methoden, nach denen man auf Grund desselben Gesetzes den Ort eines Planeten oder Satelliten für jede beliebige Zeit berechnen kann. Auch diese Methoden sind zu schwierig, um hier auseinandergesetzt werden zu können; nur die Bedeutung zweier Ausdrücke, welche bei diesen Berechnungen häufig vorkommen, wollen wir hier erklären. Nehmen wir etwa an, der Planet oder Satellit brauche 10 Tage, um die Hälfte A a bc d e f g h i B der Bahn oder 20 Tage, um seine ganze Bahn zu durchlaufen, und denken wir uns die Aufgabe gestellt, den Ort des Körpers zu bestimmen, wenn seit seinem Periheldurchgange 3 Tage verflossen sind. Wäre die Bahn ein Kreis, und folglich die Bewegung eine gleichförmige (s. 2), so durchliefe der Körper täglich den 10. Teil von 180°, also einen Winkel von 18°, in drei Tagen einen von der Grösse 54°. Wäre die Excentricität gering, die Bahn also wenig vom Kreise verschieden, so würde auch der in 3 Tagen beschriebene Winkel sich wenig von 54° unterscheiden. In der That sind die Excentricitäten aller Planetenbahnen klein, weshalb wir aus dem Winkel von 54° den wirklich in 3 Tagen beschriebenen erhalten werden, wenn wir eine Korrektur zufügen, die nicht sehr gross sein wird. Dieser Winkel von 54° nun, welcher der Zeit proportional ist, wird die mittlere Anomalie genannt, und die Korrektur, welche man anbringen muss, um daraus den wirklich beschriebenen Winkel, d. i. die wahre Anomalie zu erhalten, heisst die Mittelpunktsgleichung.

Während der Bewegung von A bis B ist der wirklich beschriebene Winkel grösser als der, welcher der Zeit proportional ist oder wir müssen die Mittelpunktsgleichung zur mittleren Anomalie addieren, um die wahre Anomalie zu erhalten. Bewegt sich der Planet von B bis A, so ist während der Dauer dieser Bewegung der wirklich beschriebene Winkel kleiner als der der Zeit proportionale, oder wir müssen die Mittelpunktsgleichung von der mittleren Anomalie subtrahieren, um die wahre Anomalie zu erhalten. Denn in A ist die Geschwindigkeit gross, sodass der Körper von A bis B dem mittleren Orte voraus ist; in B ist die Geschwindigkeit klein, weshalb der wahre Ort von B ab hinter dem mittleren Ort zurück ist, obgleich die Geschwindigkeit von B bis A wächst, sodass in der That die Mittelpunktsgleichung von dem der Zeit proportionalen Winkel zu subtrahieren ist, um den wirklich beschriebenen zu erhalten.

32) Die Summe von mittlerer Anomalie und Länge des Perihels nennt man die mittlere Länge des Planeten. Man erkennt nun, dass man, um die wahre Länge des Planeten zu erhalten, die Mittelpunktsgleichung zur mittleren Länge addieren muss, während der Planet von A nach B geht, und dieselbe von der mittleren Länge zu subtrahieren hat, während sich der Planet von B nach A bewegt.

33) Weiter kann man sich wohl denken, dass, wenn man die wahre Anomalie des Planeten kennt, man aus den bekannten Eigenschaften der Ellipse die Länge des Radius Vektors wird berechnen können. Durch beides aber ist der Ort des Planeten für jede bestimmte Zeit ermittelt. Dieses Problem hat eine grosse Berühmtheit erlangt unter dem Namen des Keplerschen Problems.

34) Die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich wie die Kuben der mittleren Entfernungen bei allen um dasselbe Centrum sich bewegenden Körpern. Es bleibt uns nun für unsere Betrachtungen der unge störten Bewegung von Planeten und Satelliten noch ein Punkt zu erörtern übrig, nämlich der Zusammenhang zwischen der Umlaufszeit und den Dimensionen der Bahn.

Man hat aus dem Gravitationsgesetze den Nachweis erbracht und durch Beobachtungen vollständig bestätigt gefunden, dass die Umlaufszeit weder von der Exentricität, noch von der Entfernung des Perihels oder Aphels, sondern allein von der mittleren Entfernung oder von der halben grossen Achse abhängt. Bewegen sich also zwei Planeten um die Sonne, und zwar der eine etwa in einem Kreise oder doch in nahezu kreisförmiger Bahn, der andere in einer sehr flachen Ellipse, so werden ihre Umlaufszeiten gleich sein, falls nur auch ihre mittlere Entfernung dieselbe ist. Man hat weiter bewiesen, dass, wenn die mittleren Entfernungen zweier Planeten von der Sonne verschieden sind, sich die Quadrate der Anzahl Tage oder Stunden oder Minuten u. s. w., welche zu den Umlaufszeiten gehören, gerade so zu einander verhalten, wie die Kuben der Anzahl Meilen oder Kilometer u. s. w., welche die mittleren Entfernungen ausmachen.*)

35) Nehmen wir als Beispiel die Planeten Jupiter und Saturn. Die Umlaufszeit des ersteren beträgt 4332,6 Tage, die des letzteren 10759,2 Tage; die Quadrate dieser Zahlen sind 18771422 und 115760385. Die mittlere Entfernung des Jupiter von der Sonne ist 773,48 Millionen Kilometer, die Saturns 1418,09 Millionen Kilometer, die dritten Potenzen dieser Zahlen sind 462750893 Millionen und 2851749561 Millionen. Dividiert man nun die Zahlen 18771422 und 115760385 durch einander, so kommt fast genau dasselbe heraus, wie wenn man die Zahlen 462750893 und 2851749561 durch einander dividiert, d. h. das Verhältnis der beiden ersten ist dasselbe wie das der beiden letzten; unser Beispiel bestätigt somit das ausgesprochene Gesetz.

36) Als weiteres Beispiel wollen wir zwei Satelliten Jupiters, etwa den dritten und vierten betrachten. Die Umlaufszeiten beider sind 7,1545 und 16,689 Tage, und die Quadrate dieser Zahlen betragen 51,1868 und 278,522; die mittleren Entfernungen beider Satelliten haben die Werte 1063320 und 1870690 Kilometer, ihre dritten Potenzen sind 1202242 (mit 12 Nullen) und 6546434 (mit zwölf Nullen). Wiederum ergiebt die Division der beiden Quadrate fast genau so viel, wie die der Kuben, sodass auch hier die Quadrate der Umlaufszeiten sich wie die Kuben der mittleren Entfernungen verhalten.

37) Man muss aber wohl beachten, dass dieser Zusammenhang zwischen den Quadraten der Umlaufszeiten und den Kuben der mittleren Entfernungen nur gilt für solche Körper, welche sich um denselben Centralkörper bewegen. Daher lässt sich das Gesetz auf Jupiter und Saturn anwenden, da ja beide Körper sich um die Sonne bewegen; es gilt für den 3. und 4. Satelliten Jupiters, weil beide um Jupiter laufen; aber man kann es nicht auf den um die Sonne sich bewegenden Saturn und auf den um Jupiter laufenden dritten Satelliten anwenden.

Das angegebene Gesetz fand zuerst Kepler aus der Vergleichung der Elemente der Bahn des Mars mit denen der Erde.

38) Ausdehnung des Gesetzes auf Körper, die sich um verschiedene Centren bewegen.

Für solche Planeten und Satelliten, die sich um verschiedene Centralkörper bewegen, giebt die Theorie das folgende Gesetz: Die Kuben der mittleren Entfernungen verhalten sich zu einander, wie die Produkte aus den Massen der Centralkörper und den Quadraten der Umlaufszeiten der um sie sich bewegenden Planeten oder Satelliten.

Es seien M_1 und M_2 die Massen zweier Centralkörper, um die erstere beschreibe ein Körper der Masse m_1 in t_1" einen Kreis vom Radius r_1, um die zweite beschreibe ein anderer Körper der Masse m_2 in t_2" eine kreisförmige Bahn vom Radius r_2. Für jeden der umlaufenden Körper muss die vom Centralkörper ausgeübte Anziehung so gross sein, wie die zur Erhaltung in kreisförmiger Bahn notwendige Centripetalkraft (wie sie in 2. angegeben

*) Die Herleitung dieses Gesetzes s. unter 38 samt Anmerkung.

ist), oder es müssen die Stücke, um welche jede von diesen Kräften einen umlaufenden Körper in 1" fortziehen können, gleich sein. Aus der Gleichsetzung dieser Strecken ergiebt sich: für den ersten Körper $\frac{1}{2} f. \frac{M_1}{r_1^2} = \frac{2\pi^2 r_1}{t_1^2}$, für den zweiten Körper $\frac{1}{2} f. \frac{M_2}{r_2^2} = \frac{2\pi^2 r_2}{t_2^2}$, woraus durch Division beider Gleichungen durch einander folgt: $\frac{M_1 . t_1^2}{M_2 . t_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$. Das ist das vorhin genannte Gesetz.*)

Erproben wir das Gesetz, indem wir die Bewegung von Jupiters viertem Satelliten um Jupiter und die der Erde um die Sonne betrachten. Die mittlere Entfernung des 4. Satelliten von Jupiter beträgt 1870 690 Kilometer, seine Umlaufszeit 16,689 Tage; die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne ist 148,67 Millionen Kilometer, ihre Umlaufszeit 365,2564 Tage; endlich ist die Masse des Jupiter $\frac{1}{1050}$ der Sonnenmasse. Die Kuben der mittleren Entfernungen für den 4. Satelliten und die Erde sind: 6546434 (mit 12 Nullen) und 3286018 (mit 18 Nullen). Die Produkte aus den Massen und den Quadraten der Umlaufszeiten sind — die Masse der Sonne = 1, die des Jupiter = $\frac{1}{1050}$ genommen — 0,265259 und 133412, und diese zwei Zahlen stehen in demselben Verhältnisse wie die vorigen beiden dritten Potenzen.

39) Die angegebenen drei Gesetze, nämlich: „Die Planeten bewegen sich in Ellipsen, in deren einem Brennpunkte die Sonne steht; der Radius Vektor beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume; die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich wie die Kuben der mittleren Entfernungen" sind die von uns im I. Abschnitte zur Herleitung des Anziehungsgesetzes benutzten K e p l e r s c h e n G e s e t z e. Sie wurden, wie im I. Abschnitte schon angegeben, von Kepler aus Beobachtungen entdeckt, noch bevor die Gravitationstheorie oder die Theorie der allgemeinen Schwere erfunden war; wir haben sie hier als eine notwendige Folge dieser Theorie kennen gelernt. Sie wurden aus der Theorie zuerst hergeleitet von Newton um das Jahr 1680.

40) W e i t e r e A u s d e h n u n g d e s G e s e t z e s d u r c h R ü c k s i c h t n a h m e a u f d i e B e w e g u n g d e s C e n t r a l k ö r p e r s. Das dritte dieser Gesetze ist nur dann streng richtig, wenn der Centralkörper vollkommen unbeweglich ist. Letzteres ist nun aber nach den im I. Abschnitte angegebenen Grundsätzen, wonach jeder Körper den andern anzieht, nicht möglich. Betrachten wir z. B. die Bewegung Jupiters um die Sonne, so wird, wie die Sonne den Jupiter anzieht, gewiss auch Jupiter auf die Sonne eine Anziehung ausüben. Freilich sind die Massen der Planeten im Vergleich zur Sonnenmasse so klein, — indem z. B. die des Jupiter, des grössten Planeten, nur $\frac{1}{1050}$ von der Masse der Sonne ist — dass man bei den gewöhnlichen Erläuterungen die Anziehung, die ein Planet auf die Sonne ausübt, gar nicht zu berücksichtigen braucht; bei genauen astronomischen Untersuchungen aber muss man diese anziehende Kraft der Planeten in Rechnung ziehen, und zwar geschieht dies auf folgende Art.

Da die Anziehung nicht von der Masse des angezogenen Körpers, sondern nur von der des anziehenden abhängt (9., 10.), so zieht die Sonne den Jupiter (etwa in 1") um ein Stück zu sich hin, um das sie jeden andern Körper fortziehen würde; ebenso wird vom Jupiter die Sonne um ein Stück fortgezogen, um das jeder andere Körper (in der gleichen Entfernung) fortgezogen werden würde. Die Grösse der Annäherung von Sonne und Jupiter ist dann die Summe dieser Stücke, um welche jeder von diesen zwei Körpern irgend einen

---

*) Erfolgt die Bewegung um denselben Centralkörper, so ist $M_1 = M_2$, und man erhält dann, dass $\frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$ ist; d. i. das 3. Keplersche Gesetz in der ursprünglichen, in 34. angegebenen Form.

und denselben dritten Körper fortziehen kann, oder sie ist gleich der Strecke, um welche ein Körper fortbewegt wird durch eine einzige Masse, die so gross ist wie Sonnen- und Jupitermasse zusammen.

Eine kurze Rechnung ergiebt dasselbe Resultat. Nach 5. nämlich ist der von der Sonne in einer Sekunde, nach dem Jupiter hin, beschriebene Weg $\frac{1}{2}$ f. $\frac{m}{r^2}$, wenn m die Masse Jupiters ist, und der vom Jupiter nach der Sonne zu zurückgelegte Weg $=\frac{1}{2}$ f. $\frac{M}{r^2}$, wenn M die Sonnenmasse, r die Entfernung beider Körper bedeutet; die gesamte Annäherung der letzteren ist dann $\frac{1}{2}$ f. $\frac{M}{r^2} + \frac{1}{2}$ f. $\frac{m}{r^2}$. Das ist aber dieselbe, wie die, welche eine einzige feststehende Masse $M + m$ in der Entfernung r hervorbringen kann, da diese Annäherung dann ja $\frac{1}{2}$ f. $\frac{M+m}{r^2}$, also wirklich dasselbe betragen würde.

Die Grösse der Annäherung von Sonne und Jupiter, wenn beide frei sind, ist also dieselbe wie die, welche man erhält, wenn die Sonne feststehend und die Sonnenmasse um die Jupitermasse vermehrt angenommen wird.

Vergleichen wir also die Bahnen verschiedener Planeten mit einander, so müssen wir die Sache so ansehen, als wirkte auf den Planeten eine Centralkraft, die von einer Masse herrührt, welche gleich ist der Summe der Massen von Sonne und Planet. Bei verschiedenen Planeten ist es daher gerade so, als ob wir Körper vor uns hätten, die sich um verschieden grosse feststehende Centralmassen (jede = Sonnenmasse + Masse des betreffenden Planeten) bewegten, wie in 38. Dann lautet das 3. Keplersche Gesetz, das nun in aller Strenge gilt, so:

> „Für verschiedene Planeten, welche sich um die Sonne bewegen, verhalten sich die Kuben der mittleren Entfernungen wie die Produkte aus den Quadraten der Umlaufszeiten und den Summen der Massen von anziehendem und angezogenem Körper.“

Dieses selbe Gesetz gilt auch für Körper, die sich um verschiedene Kraftcentren bewegen.

III. Abschnitt.

Ueber Störungen im Allgemeinen und die Störungen in den Elementen der Bahnen.

41) In unseren bisherigen Betrachtungen sprachen wir von den Bewegungen zweier Körper, wie die Sonne und ein Planet, aber nur für den Fall, dass kein anderer dritter anziehender Körper existiere. Wir haben aber in Abschnitt I gesehen, dass jeder Planet und Satellit die Sonne und auch jeden anderen Planeten und Satelliten anzieht. Da nun die Stellungen der Planeten sich fortwährend ändern, so wird ein jeder Planet zu verschiedenen Zeiten mit ganz ungleichmässiger Stärke angezogen, und es erhellt, dass die wirkliche Bewegung eines Planeten nicht mehr dieselbe sein kann, wie die, welche er unter Einwirkung der Sonne allein ausführt. So kommt es, dass sich die Planeten nicht genau in Ellipsen bewegen, dass der Radius Vektor in gleichen Zeiten nicht genau gleiche Flächenräume beschreibt, und dass das Verhältnis der Kuben der mittleren Entfernungen nicht genau gleich ist dem Verhältnis aus den Produkten der Quadrate der Umlaufszeiten und den Summen der Massen von Sonne und Planet. Indes sind die störenden Kräfte der anderen

Planeten so klein im Vergleich zur Anziehung der Sonne, dass diese Gesetze sehr nahe wahr sind, und dass, mit Ausnahme unseres Mondes und der anderen Satelliten, die Wirkungen dieser Störungen nur bei sehr genauen und jahrelang fortgesetzten Beobachtungen wahrnehmbar sind.

42) Die Untersuchung der Wirkungen störender Kräfte zerfällt in zwei Teile: in die Untersuchung der Wirkungen störender Kräfte auf die Bewegung der Planeten im Allgemeinen, und in die Untersuchung derjenigen Art von störender Kraft, welche von der Anziehung eines andern Planeten herrührt. Wir werden mit dem ersten Teile beginnen, und dabei voraussetzen, dass die Sonne, um welche sich der Planet bewegt, feststehe, und dass eine Kraft da sei, welche auf den Planeten, nicht aber auf die Sonne einwirke, beides Annahmen, die wir nur vorläufig, der Einfacheit halber, machen, später aber wieder aufheben wollen.

A. Wirkungen störender Kräfte auf die Bewegung der Planeten im Allgemeinen.

43) Prinzip der Variation der Elemente; instantane Ellipse. Der Grundsatz, nach dem wir die Wirkungen einer störenden Kraft untersuchen werden, ist den Mathematikern bekannt unter dem Namen Variation der Elemente. Wie wir sagten, beschreibt der Planet eine krumme Linie, die nicht genau eine Ellipse, oder keine genau regelmässig gebildete Kurve ist. Er wird ferner in den verschiedenen Umläufen nicht immer dieselbe Bahn beschreiben, doch lässt sich seine Bewegung recht wohl dadurch darstellen, dass man annimmt, die Bahn sei eine Ellipse, deren Elemente sich beständig ändern. Durch diesen Kunstgriff lässt sich thatsächlich jedwede Bewegung darstellen.

Nehmen wir an, die störende Kraft höre in bestimmtem Augenblicke auf zu wirken, und sehen wir die Sache so an, als wäre der Planet mit der Geschwindigkeit, die er in diesem Augenblicke gerade besitzt, geworfen worden, so wird der Planet infolge der Anziehungskraft der Sonne oder des Centralkörpers eine ganz bestimmte Ellipse beschreiben. Wir wollen diese Ellipse, in welcher also von einem gewissen Orte aus der Planet einhergehen würde, wenn dort die störende Kraft aufhörte, in Zukunft mit dem Namen instantane Ellipse bezeichnen.

Diese instantane Ellipse nun lässt sich für jeden Augenblick, für jeden Ort angeben mittelst der Variation der Elemente. Haben wir z. B. diese Ellipse für irgend einen Augenblick oder Ort, so können wir durch Aenderung der grossen Achse, der Excentricität und der Länge des Perihels dieser Ellipse auf mehrfache Weise eine Ellipse erhalten, die durch einen andern bestimmten Ort des Planeten geht, und indem man auch diese Elemente wieder abändert, wird man auf vielfache Weise, also mehrere Ellipsen angeben können, die nicht nur durch jenen Ort des Planeten gehen, sondern an dieser Stelle auch dieselbe Bewegungsrichtung haben, die dem Planeten in seiner wirklichen Bahn zu eigen ist. Aber es giebt nur eine einzige Ellipse (unter diesen), welche genau durch den bestimmten Ort des Planeten geht, in welcher ferner die Richtung an dieser Stelle, d. i. die Richtung der Tangente, dieselbe ist wie die Bewegungsrichtung des Planeten, und in welcher auch noch die Geschwindigkeit, mit der auf ihr, von diesem Orte aus, der Planet sich um die Sonne bewegen kann, dieselbe ist, wie die wirkliche Geschwindigkeit des Planeten an diesem Orte seiner Bahn.

(Durch Ort und Geschwindigkeit daselbst ist nämlich nach 28. nur die grosse Achse der Bahn bestimmt; ist aber ausser diesen zwei Dingen noch die Richtung, in der sich der Körper an dieser Stelle bewegt, bekannt, so ist die ganze Bahn ihrer Lage und Grösse nach vollständig bestimmt.)

Man kann somit wirklich für jeden Ort der Bahn des Planeten die instantane Ellipse oder die Ellipse angeben, die er von da ab beschreiben würde, wenn die Störung aufhörte.

44) Hört die störende Kraft auf, so bewegt sich der Planet in derselben Ellipse weiter fort, und diese permanente Ellipse fällt mit derjenigen instantanen Ellipse zusammen, welche dem Augenblicke des Aufhörens der störenden Kraft entspricht.

45) Wenn die störende Kraft fortfährt zu wirken, so werden sich die Dimensionen der instantanen Ellipse beständig ändern, letztere wird eine immer andere sein; aber während eines einzelnen Umlaufs ändern sich, selbst für unsern Mond, die Dimensionen so wenig, dass die Bewegung in der zu einem gewissen Augenblicke gehörigen instantanen Ellipse während der Dauer eines Umlaufes sehr nahe mit der wirklichen Bewegung des Planeten übereinstimmt.

46) Nehmen wir an, die störende Kraft sei immer nach dem Centralkörper hin gerichtet. Ihre Wirkung wird dann nahe dieselbe sein, als wenn die Anziehungskraft oder Masse des Centralkörpers vergrössert worden wäre, und die Aenderungen der Dimensionen der Bahn werden verschieden ausfallen, je nach dem Teile der Bahn, an welchem die Kraft anfing zu wirken. Wir werden diese Aenderungen aus den einzelnen Fällen erhalten, welche wir später besonders behandeln werden; hier wollen wir nicht weiter darauf eingehen, da es im Planetensystem kein Beispiel eines so plötzlichen Auftretens einer Kraft giebt. Auf jeden Fall wird der Zusammenhang zwischen mittlerer Entfernung und Umlaufszeit nicht mehr derselbe sein wie früher; denn, wenn man die ungestörte und gestörte Bewegung betrachtet, so ist es etwa so, als hätte man denselben Planeten, der sich das eine Mal um eine gewisse Centralmasse, das andere Mal um eine andere, grössere, bewegte (wie in 38.). Es wird dann jedenfalls, nach 38., die Umlaufszeit bei derselben mittleren Entfernung kleiner, oder die mittlere Entfernung bei gleicher Umlaufszeit grösser sein, als sie es waren bei ungestörter Bewegung.

Sind nämlich R, R_1 die mittleren Entfernungen bei ungestörter und gestörter Bahn, T und T_1 die Umlaufszeiten, m die Masse des Centralkörpers, m_1 diejenige Masse, welche die gestörte Bewegung erzeugt, also jetzt grösser ist als m, so ist nach 38.:

$R^3 : R_1^3 = m \,.\, T^2 : m_1 \,.\, T_1^2$. Ist nun $R = R_1$, so muss auch sein $m \,.\, T^2 = m_1 \,.\, T_1^2$, und es muss, da hierin m_1 grösser als m ist, T_1 kleiner als T sein, oder die Umlaufszeit wird, bei derselben mittleren Entfernung, bei der gestörten Bewegung kleiner sein als bei der ungestörten.

Ist die störende Kraft stets vom Centralkörper weg gerichtet, so wird das Ergebnis der Wirkung dem vorigen gerade entgegengesetzt sein.

Aendert sich die störende Kraft nur mit der Entfernung des Planeten, so wird der Planet bei jedem Umlaufe eine Bahn derselben Grösse und Gestalt beschreiben, und zwar aus folgenden Gründen. Da auch die Anziehungskraft der Sonne nur von der Entfernung abhängt, so ist es genau so, als wäre nur die Kraft der Sonne vorhanden, aber wirkend nicht mit einer Stärke, die dem Quadrate der Entfernung proportional ist, sondern mit einer solchen, die auf andere Weise von der Entfernung abhängt. Dann aber, so wird in der Mathematik gezeigt, bewegt sich der Körper stets in einer und derselben Bahn.

47) Aendert sich die störende Kraft mit der Zeit, so werden sich auch die Dimensionen der Bahn ändern. Wenn die störende Kraft nach dem Centralkörper hin gerichtet ist, und während mehrerer Umläufe stufenweise und beständig zunimmt, so lässt sich ohne Schwierigkeit einsehen, dass der Planet in jedem Umlaufe näher an den Centralkörper gebracht wird, dass seine Bahn beständig kleiner und in immer kürzerer Zeit durchlaufen wird.

Nimmt die nach dem Centralkörper gerichtete störende Kraft beständig ab, so wird die Bahn immer grösser, und die Umlaufszeit immer länger werden.

Ebenso wird, wenn die störende Kraft vom Centralkörper weg gerichtet ist, ein beständiges Wachsen derselben die Dimensionen der Bahn und die Umlaufszeit vergrössern, und ein beständiges Abnehmen der störenden Kraft die Dimensionen der Bahn und die Umlaufszeit verkleinern.

48) Wirkt die störende Kraft in der Richtung, in welcher sich der Planet bewegt, so vergrössern sich fort und fort die Dimensionen der Bahn und die Umlaufszeit. Nehmen wir nun an, die störende Kraft wirke immer nach der Richtung, in welcher der Planet sich bewegt. Beim ersten Anblicke kann man vermuten, die Umlaufszeit müsste dadurch verkürzt werden, wird ja die Geschwindigkeit in seiner Bahn dadurch vergrössert; die Wirkung ist jedoch die gerade entgegengesetzte. Denn, wenn in Fig. 2 der Planet in A ist, so ist der Grund dafür, dass die Sonnenanziehung den Planeten nach C bringt, ihn somit der Sonne selbst nähert, nur der, dass seine Geschwindigkeit so klein ist, dass sie der anziehenden Kraft gestattet, die Bahn bedeutend zu krümmen. Wäre die Geschwindigkeit in A grösser als vorher ohne Störung, so wäre, wie wir auch schon in 25. sagten, die Bahn weniger gekrümmt, und würde daher die Bahn ACDEF von aussen umschliessen. Die Wirkung einer in der Richtung der Bewegung des Planeten wirkenden störenden Kraft, welche letztere also die Geschwindigkeit beständig wachsen lässt, besteht demnach in einer Vergrösserung der Dimensionen der Bahn und daher auch — weil zum Durchlaufen einer grösseren Bahn eine längere Zeit gehört (nach dem 3. Keplerschen Gesetze) — in einer Verlängerung der Umlaufszeit. Wirkt die störende Kraft beständig, so verlängert sich auch die Umlaufszeit beständig.

Wirkt die störende Kraft in einer Richtung, die der Bewegung des Planeten entgegengesetzt ist, so wird die Bahn immer kleiner, die Umlaufszeit kürzer. Eine solche Kraft haben wir z. B. vor uns, wenn sich ein Körper in dünner Luft bewegt. Ein anderes Beispiel einer solchen Kraft bietet sich bei der Betrachtung des Enckeschen Kometen. Dieser Körper bewegt sich in einer Ellipse, deren Hauptachse nicht viel grösser ist als der Durchmesser der Bahn des Planeten Mars, und zwar hat er (bis auf eine ein Mal vorgekommene Ausnahme) jeden neuen Umlauf in kürzerer Zeit vollendet als den vorhergehenden. Diese Verkürzung der Umlaufszeit lässt aber auf eine Verkleinerung der Entfernung von der Sonne (weil die Quadrate der Umlaufszeiten sich wie die Kuben der mittleren Entfernungen verhalten), daher auf stärkere Krümmung der Bahn, diese, da letzteres nicht anders erklärlich ist, weil doch die Sonnenanziehung sich nicht geändert hat, auf geminderte Geschwindigkeit, letztere endlich auf einen Widerstand schliessen, den die Bewegung des Kometen erfährt.

49) Die Wirkungen der behandelten störenden Kräfte zeigen sich besonders deutlich in der Aenderung der Länge eines Planeten.

Wir haben gesehen, dass die in 47. und 48. behandelten störenden Kräfte eine Aenderung der Dimensionen der Bahn herbeiführen. Diese Aenderung zieht aber wieder eine solche der Umlaufszeit nach sich, und dies ändert des Planeten mittlere Bewegung oder die Anzahl Grade, um welche die mittlere Länge desselben in einer gegebenen Zeit, etwa in einem Jahre zunimmt. Die Wirkungen dieser Aenderung summieren sich bei jedem folgenden Umlaufe, und können auf diese Weise in der mittleren Länge, welche bekanntlich von der wahren Länge nur um die Mittelpunktsgleichung verschieden ist, eine Aenderung hervorbringen, die viel bedeutender ist und weit eher in die Augen fällt als die Aenderung in den Dimensionen der Bahn.

Erläutern wir dies an einem Beispiele. Nehmen wir an, auf einen Planeten wirke eine störende Kraft so, dass die mittlere Entfernung desselben in 100 Umläufen um ihren zehntausendsten Teil vergrössert werde; es ist dabei gleichgiltig, ob diese Kraft eine konstante in der Richtung der Bewegung (48.) oder eine veränderliche in der Richtung des Radius Vektors wirkende ist. Diese Aenderung der mittleren Entfernung des Planeten von der Sonne würde man kaum durch die genauesten Beobachtungen wahrnehmen können. Allein mit der mittleren Entfernung ändert sich zugleich auch die Umlaufszeit (nach dem 3. Keplerschen Gesetze), und zwar in einem Verhältnisse, das sich folgendermassen bestimmen lässt:

Die ursprüngliche mittlere Entfernung sei gleich 10 000 angenommen, dann wird diese Entfernung nach den 100 Umläufen 10 001 sein; sind nun die Umlaufszeiten bei Beginn und nach Beendigung jener 100 Umläufe T und T_1, so wird sich verhalten müssen (nach dem 3. Kepl. Ges., da es so gut ist als hätte man statt der 2 Fälle 2 verschiedene Planeten): $\frac{T_1^2}{T^2} = \frac{(10\,001)^3}{(10\,000)^3}$ *), woraus $\frac{T_1}{T} = \frac{\sqrt{(10\,001)^3}}{\sqrt{(10\,000)^3}} = \frac{10\,001}{10\,000} \cdot \sqrt{\frac{10\,001}{10\,000}} = 1{,}0001 \,.$ $\sqrt{1{,}0001} = 1{,}0001 \,.\, 1{,}0000499 = 1{,}0001499$ oder $= 1{,}00015$. Das Verhältnis der Umlaufszeiten ist also nahe gleich 1,00015 oder $\frac{100015}{100000} = \frac{10001\frac{1}{2}}{10000}$ oder die ursprüngliche Umlaufszeit T verhält sich zur späteren T_1 wie $10000 : 10001\frac{1}{2}$. In demselben Verhältnisse, in welchem die Umlaufszeit wächst, wird nun die mittlere Bewegung kleiner oder die Umlaufszeiten verhalten sich umgekehrt wie die mittleren Bewegungen. Daher wird die mittlere Bewegung nahe im Verhältnisse von $10\,001\frac{1}{2} : 10\,000$ oder von $1 : 0{,}99985$ geändert. Ist diese Aenderung gleichförmig vor sich gegangen, so darf man annehmen, dass die ganze in den 100 Umläufen ausgeführte Bewegung des Planeten nahe dieselbe ist wie die, welche der Planet in derselben Zeit mit einer solchen mittleren Bewegung beschrieben haben würde, deren Wert in der Mitte liegt zwischen der mittleren Bewegung am Anfang und am Ende der ganzen Zeit. Das Verhältnis dieser beiden letzteren mittleren Bewegungen war $1 : 0{,}99985$; nimmt man also für die erstere den Wert 1 an, so hat die zweite die Grösse $0{,}99985$, und unsere mittlere wird demnach $\frac{1 + 0{,}99985}{2} = 0{,}999925$ oder das $0{,}999925$fache der anfänglichen mittleren Bewegung sein. In dem Augenblicke also, wo wir erwarten sollten, dass der Planet 100 Umläufe ausgeführt hat, wird er in Wirklichkeit nur das $0{,}999925$fache davon oder $100 \,.\, 0{,}999925 = 99{,}9925$ Umläufe gemacht haben oder er wird hinter dem Orte, an welchem wir ihn erwarteten, um $0{,}0075$ Umlauf, d. h. um $360 \,.\, 0{,}0075^0 = 2{,}7^0$ oder um nahe 3^0, um eine Grösse also zurück sein, die selbst der oberflächlichsten Beobachtung nicht entgehen kann. Wenn also auch die Aenderung der mittleren Entfernung eines Planeten sehr gering ist, sodass sie nicht leicht wahrnehmbar ist, so zieht sie doch eine andere wohl sichtbare Aenderung in der mittleren Bewegung nach sich. Etwas diesem Aehnliches können wir bei einem Pendel beobachten; ändert man die Länge desselben nur um so wenig, dass das Auge davon gar nichts wahrnehmen kann, so ist doch nach wenigen Tagen die Wirkung dieser Aenderung deutlich in der von der Uhr angegebenen Zeit sichtbar.

B. Störungen in den Elementen der Bahnen.

α) Wirkungen störender Kräfte, die in Richtung des Radius Vektors liegen.

1.) Einfluss dieser Kräfte auf die Lage der Apsidenlinie.

50) Eine in der Nähe des Perihels wirkende, nach dem Centralkörper hin gerichtete störende Kraft erzeugt ein Fortschreiten der Apsidenlinie. Nehmen wir jetzt an, auf einen Planeten oder Satelliten, der sich in einer Ellipse bewegt, wirke nur in der Nähe des Perihels eine nach dem Centralkörper hin gerichtete störende Kraft.

Es sei AB (Fig. 6) die krumme Linie, in welcher sich der Planet bewegt, und die Linie BCDA stelle die Bahn dar, in welcher er sich bewegt haben würde, wenn keine störende Kraft gewirkt hätte; ferner sei C der Ort des Perihels. In B fange die nach S hin gerichtete störende Kraft an zu wirken, übe diese Wirkung eine kurze Zeit hindurch aus, und höre dann auf. An diesem Orte nähert sich der Planet der Sonne und die Richtung seiner Bewegung bildet mit SB einen spitzen Winkel (vergl. Fig. 7). Da die störende

*) Oder $(M+m)\,T_1^2 : (M+m) \,.\, T^2 = (10\,001)^3 : (10\,000)^3$, nach 40.

Kraft stärker nach der Sonne hin zieht, so wird sie, ohne einen andern Einfluss auf seine Bahn auszuüben, die letztere stärker krümmen, also bewirken, dass der Planet sich in einer Richtung bewegt, die mit SB einen Winkel bildet, der noch spitzer ist als der, den vorher, ohne Störung, die Bewegungsrichtung mit SB bildete. Nun wird dieser spitze Winkel, den die Bewegungsrichtung mit SB bildet, immer grösser und kommt dem rechten Winkel immer näher, je näher B dem Perihel C liegt; in C selbst ist er ja ein Rechter oder 90°. Wird also dieser Winkel in B kleiner gemacht, so wird auch von B aus der Planet längere Zeit brauchen, um in das Perihel, d. h. an den Punkt zu kommen, wo dieser Winkel 90° beträgt; oder bei der Bahn, die nunmehr, nach Einwirkung der Kraft beschrieben werden wird, muss das Perihel weiter von B entfernt liegen als das Perihel C der früheren Bahn. — Noch leichter kann man den Vorgang einsehen, wenn man sich die Bahn statt als Kurve, als eine Gerade denkt, und das Perihel bestimmt durch den Fusspunkt des von S auf diese Gerade (Fig. 8) gefällten Lotes. Wird nun der Winkel dieser Geraden gegen SB spitzer — wie es die punktierte Linie angiebt —, so wird auch die Entfernung des Fusspunktes c des von S gefällten Lotes vom Punkte B grösser. — Es wird also der Planet, wenn die störende Kraft einwirkt, nicht BC, sondern Bc beschreiben, und das Perihel wird nicht nach C, sondern nach c fallen, wobei c weiter von B entfernt ist als C. Wirkt nun die störende Kraft nicht wieder ein, so wird sich der Planet in der Ellipse cdb weiter bewegen, und die Apsidenlinie wird die Linie cSd, nicht aber CSD sein. Die Apsidenlinie hat sich also in demselben Sinne herumgedreht, in dem sich der Planet bewegt; man sagt in diesem Falle, die Apsidenlinie schreitet fort, oder gehe vorwärts, bewege sich direkt oder habe eine progressive Bewegung.

Die störende Kraft wirke nun, nachdem der Körper c verlassen hat, wieder auf kurze Zeit ein; es geschehe das etwa in e. Wieder wird die Bahn stärker gekrümmt, die Entfernung von der Sonne verkleinert werden, die Bewegungsrichtung sich dem Radius Vektor mehr nähern. Nun steht die Bewegungsrichtung im Perihel auf dem Radius Vektor senkrecht und der Winkel zwischen beiden wird von da ab wieder grösser als 90° (Fig. 6 u. 7); wird daher in e der Winkel der Bewegungsrichtung gegen den Radius Vektor durch die störende Kraft kleiner gemacht, dem Winkel von 90° näher gebracht, so ist es so gut, als wäre der Planet noch nicht so weit entfernt vom Perihel wie ohne Störung. Er wird sich daher fortan in einer Bahn bewegen wollen, deren Perihel nicht in c, sondern noch weiter weg von C, in f liegt. Hört nun die störende Kraft auf zu wirken, so wird der Planet, der sich in e so bewegt, als käme er vom Perihel f, wirklich fortfahren eine elliptische Bahn zu beschreiben, von der fSg die Apsidenlinie ist; die letztere hat sich also in demselben Sinne gedreht, wie früher, oder sie ist wieder fortgeschritten. Die Wirkung einer nach dem Centralkörper hin gerichteten, eine kurze Zeit vor oder nach dem Periheldurchgange wirkenden störenden Kraft besteht also darin, dass sie der Apsidenlinie eine fortschreitende oder progressive Bewegung erteilt.

51) Auf demselben Wege wird man sich überzeugen können, dass eine von dem Centralkörper fort gerichtete, eine kurze Zeit vor oder nach dem Periheldurchgange wirkende störende Kraft, eine rückschreitende Bewegung der Apsidenlinie hervorbringt.

52) Die Bewegung eines Planeten, auf den solche Kräfte, wie die in 50. erwähnten, einwirken, wird also nahe dieselbe sein, als bewegte er sich in einer Ellipse, die sich gleichzeitig um einen ihrer Brennpunkte in derselben Richtung dreht, in der der Planet umläuft (Fig. 6). Dieser Weg ist wohl der einfachste, um eine Vorstellung von dem ganzen Vorgange zu gewinnen.

53) Dieselbe störende Kraft erzeugt in der Nähe des Aphels eine rückschreitende Bewegung der Apsidenlinie. Betrachten wir jetzt den Fall, wo eine störende Kraft vor und dann nach dem Durchgange durch das Aphel eine kurze Zeit hindurch einwirkt. Wenn der Planet nach dem Aphel zu geht, so entfernt er sich von der Sonne. Die störende Kraft vermindert dann den Grad des Entfernens von der Sonne, der Planet wird näher zur Sonne gezogen, die Bahn wird stärker gekrümmt und die

Neigung derselben gegen den Radius Vektor wird grösser, d. h. der Winkel zwischen beiden kleiner. Dieser Winkel ist vor dem Aphel einer von mehr als 90° (Fig. 7), wird dann kleiner, bis er im Aphel 90° beträgt. Der Winkel wird also durch die Kraft kleiner gemacht, dem Winkel von 90° näher gebracht, der Planet wird nicht mehr so weit wie vorher sich zu bewegen haben, um jenen Winkel von 90° zwischen Bewegungsrichtung und Radius Vektor herbeiführen; die Kraft führt das Senkrechtstehen der Bahn gegen den Radius Vektor früher herbei oder der Planet wird früher das Aphel erreichen, als es ohne störende Kraft geschehen wäre: das Aphel ist rückwärts gegangen. Hört nun die störende Kraft auf, so wird der Planet sich fortan in einer Ellipse bewegen, deren feststehendes Aphel das soeben gefundene sein wird. Die durch das Aphel und den Centralkörper gehende Apsidenlinie hat sich demnach in einer der Bewegung des Planeten entgegengesetzten Richtung gedreht oder die Apsidenlinie hat sich rückläufig bewegt, hat eine retrograde oder rückläufige Bewegung ausgeführt.

Die störende Kraft wirke nun eine kurze Zeit lang ein, nachdem der Planet das Aphel passiert hat. Jetzt nähert sich der Planet der Sonne wieder; durch die Störung wird er der Sonne noch näher gebracht. Seine Bewegungsrichtung wird mit dem Radius Vektor einen kleineren Winkel einschliessen als ohne Störung. Dieser Winkel ist im Aphel 90° und wird nach dem Passieren des letzteren zunächst immer kleiner (Fig. 7). Bewirkt also die Kraft ein Verkleinern dieses Winkels, so bewegt sich der Planet so, als wäre er von dem Aphel schon weiter entfernt als in der ungestörten Bahn oder als käme er von einem Aphel, das weiter rückwärts liegt wie das der ungestörten Bahn. Hört nun die Störung auf, so wird er fortan eine Ellipse beschreiben, deren unveränderliches Aphel eben jenes weiter rückwärts liegende ist. Das Aphel der Bahn, welche der Planet nach dem Einwirken der Kraft beschreibt, ist also nicht mehr das frühere, sondern es ist rückwärts gegangen oder die Apsidenlinie ist zurückgegangen.

Eine nach dem Centralkörper hin gerichtete störende Kraft, welche vor und nach dem Passieren des Aphels eine kurze Zeit lang einwirkt, verursacht also eine retrograde Bewegung der Apsidenlinie.

54) Ebenso lässt sich zeigen, dass eine vom Centralkörper fort gerichtete störende Kraft eine direkte Bewegung der Apsidenlinie erzeugt, wenn sie vor oder nach dem Apheldurchgange, also überhaupt in der Nähe des Aphels einwirkt.

55) Die Wirkungen der in Richtung des Radius Vektors liegenden störenden Kraft in den Punkten der Bahn, deren Radius Vektor senkrecht auf der grossen Achse steht.

Da eine nach dem Centralkörper hin oder eine von ihm weg gerichtete störende Kraft gerade entgegengesetzte Wirkungen in Bezug auf die Bewegung der Apsidenlinie hervorbringt, je nachdem sie in der Nähe des Perihels oder Aphels wirkt, so lässt sich denken, dass es zwischen Perihel und Aphel einen Punkt der Bahn geben muss, wo eine solche störende Kraft die Apsidenlinie ungeändert lässt. Durch genaue Untersuchungen hat man gefunden, dass dies diejenigen Punkte sind, deren Radius Vektor senkrecht zur Apsidenlinie steht.

56) Diese Wirkungen sind um so grösser, je kleiner die Excentricität ist. Die erwähnten Wirkungen sind am grössten, wenn die Excentricität klein ist. Nehmen wir z. B. die Bahn eines Körpers einmal von grösserer, dann von kleinerer Excentricität an, und denken wir uns in jedem Falle die störende Kraft in der Nähe des Perihels C eine kurze Zeit hindurch wirkend; machen wir dann die Annahme, diese störenden Kräfte hätten in beiden Fällen die neue Bahn von der alten um einen und denselben Winkel abgelenkt (d. h. die Tangenten in C, bei der alten und neuen Bahn, sollen beide Male gleiche Winkel einschliessen (Fig. 9 und 10), so ergiebt sich das Folgende.

Wir wollen uns die Bahnen so verschoben denken, dass die grossen Achsen und die Perihelien zusammenfallen. Im Perihel ist in beiden Bahnen die Bewegungsrichtung senkrecht zum Radius Vektor, vor demselben ist der Winkel zwischen beiden kleiner als 90°.

Nehmen wir der Einfachheit halber die Bahnen erst als gerade Linien an (Fig. 11); DC sei die ursprüngliche Bahn. In C wird die Bahn abgelenkt, und zwar für beide Fälle um denselben Winkel DCE, sodass beide Male der Körper dann in der Geraden CE fortgehen will. Man denke sich weiter um die Brennpunkte S_1 und S_2, in denen für den einen und andern Fall die Centralmasse steht, Kreise mit den Radien S_1C und S_2C konstruiert. Dieselben haben in C die gleiche Richtung wie die ursprüngliche Bahn DC, sie berühren also DC. Da die Richtung CE der neuen Bahnen eine andere ist, so werden die Kreise von CE geschnitten. In C der alten Bahn war der Planet der Centralmasse am nächsten, wird die Bahn nach CE abgelenkt, so ist die Bewegungsrichtung wieder unter einem kleineren Winkel als 90° gegen den Radius Vektor geneigt, und der Körper muss sich in jedem Falle um ein Stück weiter fortbewegen, um in die grösste Nähe des Centralkörpers zu kommen, wo der Radius Vektor wieder senkrecht zur Bahn steht. So werden die neuen Perihele in c_1 und c_2, und zwar in der Mitte der Stücke der Bahnen liegen, welche innerhalb der Kreise sich befinden, da ja dann S_1c_1 und S_2c_2 senkrecht zu CE stehen. Das neue Perihel wird für die Bahn, die die kleinere Excentricität hat, für welche der Centralkörper in S_2 steht, mehr vorgeschritten sein (nämlich von C nach c_2) als für die Bahn mit der grösseren Excentricität.

Sind nun die Bahnen keine Geraden (Fig. 12), so ist die Sache ganz ähnlich wie vorher. Die alten Bahnen haben in C die gleiche Richtung DC; nämlich die senkrecht zu S_1C oder S_2C, was auch von den Kreisen um S_1 und S_2 gilt. Die neuen Bahnen werden nun um einen, und zwar um denselben Winkel DCE gegen die Richtung DC geneigt, d. h. die in C an die neuen Bahnen gelegten Tangenten bilden mit DC denselben Winkel DCE; daher werden diese neuen Bahnen in C nicht mehr dieselbe Richtung haben wie die Kreise um S_1 und S_2 oder letztere werden von den ersteren geschnitten werden. Es wird von der Bahn mit der grösseren Excentricität ein Teil im Kreise vom Mittelpunkte S_1 liegen, von der anderen Bahn ein solcher im Kreise von Mittelpunkte S_2.

Da die Bahnen in C abgelenkt wurden, so ist dort ihr Winkel gegen den Radius Vektor kleiner als 90° geworden, und ehe dieser wieder 90° wird, ehe also die grösste Sonnennähe in der neuen Bahn erreicht wird, muss der Körper in jedem Falle sich erst noch ein Stück weiter bewegen.

Die neuen Punkte der Sonnennähe werden natürlich, da die Punkte ausserhalb weiter von S_1 und S_2 liegen, innerhalb der erwähnten Kreise liegen, und zwar nahe in den Mittelpunkten c_1 und c_2 der innerhalb derselben befindlichen Stücke der neuen abgelenkten Bahnen. Die Bahn von grösserer Excentricität ist mehr gestreckt, einer Geraden durch C ähnlicher als die von kleiner Excentricität; es wird daher das Stück der ersteren innerhalb des kleinen Kreises schon deshalb nicht gross sein, weil eben die erstere Bahn sehr gestreckt ist, während das Bahnstück im zweiten Kreise um S_2, schon weil es mehr gekrümmt ist (da die Bahn von kleinerer Excentricität nahe ein Kreis ist) grösser sein wird. Aber nicht nur deswegen, weil im 2. Falle die Bahn dem Kreise ähnlicher ist, sie ihn daher später schneidet, liegt ein grösseres Stück von ihr in diesem Kreise um S_2, sondern auch noch deshalb, weil der Kreis um S_2 einen grösseren Radius hat als der in S_1, er folglich erst recht später durchschnitten wird. Es werden also die Mitten der innerhalb der Kreise liegenden Bahnstücke verschieden weit von C entfernt sein oder das Perihel c_1 der Bahn im 1. Falle (bei grösserer Excentricität, wo die Centralmasse doch näher beim Perihel ist) liegt näher an C, als das c_2 im 2. Fall (bei kleinerer Excentricität). Die störende Kraft, die also beide Bahnen um gleich viel ablenkt, übt daher eine um so grössere Wirkung auf die Bewegung der Apsidenlinie aus, je kleiner die Excentricität ist. (In Fig. 9 und 10 sind ebenfalls c_1 und c_2 die neuen Perihelien, und zwar wird in Fig. 10, bei der Bahn mit kleinerer Excentricität, c_2 weiter von C weg liegen als c_1 in Fig. 9).

2.) Einfluss dieser Kräfte auf die Excentricität.

57) Wirkt eine solche störende Kraft, während der Planet vom Perihel zum Aphel geht, so vermindert sie die Excentricität. Um die Wirkung zu beurteilen, welche eine nach der Sonne gerichtete störende Kraft auf die Excentricität der Bahn eines Planeten ausübt, wollen wir zuerst annehmen, derselbe sei durch sein Perihel gegangen, und bewege sich soeben nach dem Aphel hin, entferne sich also von der Sonne und es wirke jetzt die störende Kraft eine kurze Zeit hindurch ein. Die Folge dieser Einwirkung ist zunächst die, dass der Planet sich langsamer von der Sonne entfernt, als er es ohne Störung gethan hätte. Eine wesentliche Aenderung wird die Geschwindigkeit allerdings nicht erfahren; denn die Bahnen, die wir hier betrachten, nehmen wir von geringer Excentricität an, sodass der Radius Vektor für jeden Punkt der Bahn als nahe senkrecht zur Bahnrichtung, also auch zur Geschwindigkeitsrichtung angesehen werden darf. Dann aber wird eine in Richtung des Radius Vektors wirkende Kraft die Geschwindigkeit nur wenig verändern, mehr aber die Krümmung. Aus 28. ergiebt sich aber, dass die grosse Achse nicht von der Wurfrichtung, sondern nur von der Grösse der Geschwindigkeit abhängt. Da hier in A (Fig. 13) die Richtung der letzteren, nicht aber ihre Grösse geändert wird, so wird auch der Planet eine Bahn mit einer solchen grossen Achse beschreiben, die gleich ist der früheren, bei ungestörter Bahn vorhandenen. Der Planet wird infolge der Störung also nicht in der Richtung AB, in der er sich ohne Störung bewegen würde, fortgehen, vielmehr in einer Richtung Ab*), die mit dem Radius Vektor SA einen kleineren Winkel bildet als AB, einen Winkel, der dem von 90° näher kommt als SAB, sodass das neue Aphel c nicht mehr so weit von S entfernt sein wird wie C. Wir dürfen dann die Sache so ansehen, als wäre der Planet von A aus mit der Geschwindigkeit, die er dort besitzt, aber nicht unter dem Winkel SAB, sondern unter Winkel SAb, also näher senkrecht zu SA geworfen worden. Das Aphel der neuen Bahn wird also nicht C, sondern c oder näher bei S sein; sie wird nicht bis C, sondern nur bis c reichen. Da aber ihre grosse Achse cg dieselbe ist wie früher CG, so wird die neue Bahn weiter unter die alte Bahn herunter, etwa bis g gehen. Das neue Perihel wird tiefer unter S liegen als das frühere, oder die Bahn wird von A ab innerhalb der alten liegen, aber auf der entgegengesetzten Seite ausserhalb. Die Sonne (d. i. der eine Brennpunkt) steht nunmehr dem Mittelpunkte der Bahn näher oder die Bahn ist weniger excentrisch als früher. Die Wirkung einer nach dem Centrum gerichteten störenden Kraft, während der Zeit, in welcher ein Planet sich vom Perihel zum Aphel bewegt, ist hiernach die, die Excentricität der Bahn zu vermindern.

58) Dieselbe Kraft verursacht eine Zunahme der Excentricität, wenn sie den Planeten beeinflusst, während er vom Aphel zum Perihel geht. Der Planet bewege sich soeben vom Aphel fort nach dem Perihel hin, so nähert er sich der Sonne, und die störende Kraft begünstigt diese Annäherung, die Bahn wird nach S zu sich neigen (Fig. 14), sie wird mit dem Radius Vektor nicht fernerhin den Winkel SEF, sondern den kleineren SEf bilden. Man kann sich die Sache so vorstellen, als werde der Planet von E, statt in der Richtung EF, in der Ef geworfen, welche mit dem Radius Vektor einen Winkel bildet, der noch spitzer ist, als der Winkel SEF, weshalb die neue Bahn dem Kreise weniger ähnlich oder excentrischer sein wird, als die ungestörte. Sie liegt von E an innerhalb der alten und geht später bei h über die alte hinaus, weil die grosse Achse die gleiche ist wie die der Bahn ohne Störung, da, wie im vorigen Paragraphen bemerkt, die Grösse der Geschwindigkeit in E nicht wesentlich durch die störende Kraft beeinflusst wird, sondern nur ihre Richtung. Der Planet wird nunmehr fortfahren, die Ellipse Egh zu beschreiben. Die Sonne (d. i. der eine Brennpunkt S) liegt jetzt vom Mittelpunkte weiter entfernt als früher oder die Bahn ist excentrischer geworden. Die Wirkung einer nach

*) Diese Richtung ist die Diagonale des Parallelogramms aus der Bewegung von A nach B und aus der Bewegung, die die nach S gerichtete Störung erzeugt.

dem Centralkörper hin gerichteten Kraft, in der Zeit, wo der Planet vom Aphel nach dem Perihel geht, besteht demnach in einer Vergrösserung der Excentricität.

59) Auf dieselbe Weise lässt sich zeigen, dass eine vom Centralkörper weg gerichtete störende Kraft die Excentricität vergrössert, wenn der Planet vom Perihel nach dem Aphel geht, und verkleinert, wenn er sich vom Aphel nach dem Perihel hin bewegt.

β) Wirkungen störender Kräfte, deren Richtung auf dem Radius Vektor senkrecht steht.

1.) Einfluss dieser Kräfte auf die Apsidenlinie.

60) Verlassen wir jetzt die in Richtung des Radius Vektors wirkenden störenden Kräfte und wenden wir uns nunmehr zur Betrachtung von störenden Kräften, die senkrecht zum Radius Vektor, und nach derselben Richtung hin wirken, nach welcher der Planet sich bewegt. Untersuchen wir zuerst die Einwirkung einer solchen Kraft auf die Lage der Apsidenlinie.

61) Eine solche Kraft erzeugt keine Aenderung in der Lage der Apsidenlinie, wenn sie in den Apsiden wirkt. Wirkt eine solche Kraft in einer der Apsiden, im Perihel oder Aphel, eine kurze Zeit hindurch, so wird sie die Geschwindigkeit in diesen Punkten vergrössern, die Richtung der Bewegung aber nicht ändern; der Planet wird sich also vom Perihel oder Aphel ab so bewegen, als wäre er mit einer grösseren Geschwindigkeit geworfen als ohne störende Kraft. Dies bringt aber keine Lageänderung der Apsidenlinie hervor; denn mit welcher Geschwindigkeit sich ein Planet auch bewegen mag, er wird doch an denselben Ort zurückkehren, von dem er ausging, und zwar auch mit der Geschwindigkeit und Richtung, die er beim Anfang der Bewegung dort hatte. Die Bewegungsrichtung am Anfang ist senkrecht zum Radius Vektor, da die Kraft in einer Apside der alten Bahn wirkt; kommt der Planet wieder an diesen Ort, so wird also wieder die Bahn senkrecht zum Radius Vektor stehen oder die alte Apside bleibt auch in der neuen Bahn Apside, und die Apsidenlinie, welche durch diesen Ort und durch die Sonne geht, wird dieselbe Lage haben wie früher.

62) Nähert sich der Planet seinem Perihel, so verursacht die senkrecht zum Radius Vektor, im Sinne der Bewegung wirkende störende Kraft ein Rückschreiten der Apsidenlinie. Die störende Kraft wirke eine kurze Zeit lang ein, bevor der Planet sein Perihel erreicht. Da wir bei allen Bahnen die Excentricität als gering voraussetzen, so wird der Radius Vektor überall nahe senkrecht zur Bahn, also zur Tangente stehen, sodass eine Kraft senkrecht zum Radius Vektor, wie wir sie jetzt vor uns haben, als in Richtung der Tangente wirkend angesehen werden kann. Hiernach wird unsere störende Kraft, die in A (Fig. 15) beginne zu wirken, die Geschwindigkeit des Planeten vergrössern; die Sonne wird dann die Bahn nicht so stark zu krümmen vermögen (25); die neue Bahn wird von A an ausserhalb der alten liegen. Der Planet wird, anstatt die Bahn ACG zu durchlaufen, fortan die Bahn Acd beschreiben, welche bei A dieselbe Richtung, also dieselbe Tangente hat wie die Bahn ACG. Der Punkt von Acd, welcher der Sonne S am nächsten liegt, wird nicht in der Richtung SC liegen, sondern links davon; denn AC steht senkrecht zu SC, während Acd mit SC einen stumpfen Winkel bildet, und da die Bahn mit dem Radius Vektor einen stumpfen Winkel erst nach dem Durchgange durch das Perihel bildet, während dieser Winkel im Perihel selbst 90°, vorher kleiner als 90° ist, so muss der Punkt von Acd, welcher auf der Verlängerung von SC liegt, ein solcher sein, der nach dem Passieren des Perihels erreicht wird. Das Perihel der neuen Bahn muss also vor SC liegen. Auch so lässt sich dies einsehen: Das Lot, welches man von S aus fällt, wird mit seinem Fusspunkte um so weiter nach links rücken, je weiter Acd nach dieser Seite rückt.

Das neue Perihel wird in c liegen, die Apsidenlinie die Lage Sc haben, sich also in einer Richtung gedreht haben, die der der Bewegung des Planeten entgegengesetzt ist; sie hat sich retrograd bewegt.

63) Das Gegenteil findet statt nach dem Durchgange durch das Perihel. Es wirke die Kraft, nachdem der Planet durch sein Perihel gegangen, etwa bei D (Fig. 16) kurze Zeit hindurch, so wird wieder die Geschwindigkeit vergrössert, die Sonne daher die Bahn nicht so stark zu krümmen vermögen und der Planet deshalb den Weg Df statt DF beschreiben, wo Df ausserhalb der alten Bahn DF, weniger gekrümmt ist, aber in D dieselbe Tangente hat wie DF. Der Planet wird nun fortan die Bahn cDf mit der grösseren Geschwindigkeit in D durchlaufen wollen. Es wird auch das Stück cD der neuen Bahn ausserhalb der alten liegen müssen; denn da die Geschwindigkeit in D bei der neuen Bahn grösser ist als bei der alten, so wird auch das Stück cD mit grösserer Geschwindigkeit beschrieben werden als CD, daher cD weniger gekrümmt sein als CD, und folglich, weil beide in D gleiche Richtung haben, cD ausserhalb CD liegen. Der der Sonne S nächste Punkt der neuen Bahn, das neue Perihel, wird dann ein Punkt c rechts von SC sein. Wie vorher (in 62.) nämlich wird der Fusspunkt des von S gefällten Lotes weiter nach rechts rücken, wenn CD weiter nach rechts, bis cD um D gedreht wird. Auch so lässt sich dies begründen: SC bildet mit cDf einen spitzen Winkel, da cD ausserhalb CD liegt; d. i. immer der Fall vor dem Perihel. Der Planet wird in der neuen Bahn über SC bis c gehen müssen, ehe der Winkel zwischen Radius Vektor und Bahn wieder $= 90^0$ wird, oder der Planet das Perihel erreicht; d. h. das Perihel und damit die Apsidenlinie hat sich rechtläufig oder direkt bewegt.

64) Die störende Kraft verursacht ein Vorschreiten der Apsidenlinie, falls sie vor dem Durchgange durch das Aphel wirkt, und ein Rückschreiten, wenn sie nach dem Apheldurchgange einwirkt. Durch die vorige Betrachtungsweise wird man finden, dass, wenn die Kraft vor dem Durchgange durch das Aphel eine kurze Zeit lang wirkt, sie eine fortschreitende Bewegung der Apsidenlinie hervorbringt. Man braucht nur zu berücksichtigen, dass die neue Bahn in H (Fig. 17), wo die Kraft zu wirken anfangen mag, dieselbe Richtung hat wie die alte, aber weniger gekrümmt ist, und deshalb ausserhalb der letzteren liegt, sodass der von der Sonne am weitesten weg liegende Punkt nicht mehr G, sondern g ist, somit die Apsidenlinie von SG nach Sg verschoben worden ist.

Wirkt die Kraft nach dem Durchgange durch das Aphel, etwa in K (Fig. 18), so wird die neue Bahn Kg vor- und rückwärts von K ausserhalb der alten KG liegen (siehe 63.), aber in K dieselbe Tangente mit letzterer haben; es wird g die grösste Entfernung von der Sonne haben und die Apsidenlinie wird Sg, nicht mehr SG sein, d. h. sie wird zurückgegangen sein. (Es wird so sein, als wäre der Planet von einem weiter entfernt liegenden Aphel g gekommen).

65) Fassen wir die in den Paragraphen 60 bis 64 gefundenen Resultate zusammen, so ergiebt sich:

> Eine störende Kraft, die senkrecht zum Radius Vektor im Sinne der Bewegung des Planeten wirkt, verursacht ein Vorschreiten der Apsidenlinie, wenn sie den Planeten beeinflusst, während er vom Perihel nach seinem Aphel geht, und ein Rückschreiten derselben Linie, wenn sie auf den Planeten einwirkt, während er vom Aphel nach dem Perihel sich bewegt.

66) Durch ähnliche Schlüsse wird man finden, dass eine störende Kraft, die senkrecht zum Radius Vektor, aber entgegengesetzt dem Sinne der Bewegung des Planeten wirkt, der Apsidenlinie eine rückschreitende Bewegung erteilt, wenn der Planet vom Perihel zum Aphel geht, und eine direkte Bewegung derselben hervorbringt, während er vom Aphel nach dem Perihel sich bewegt.

2.) Einfluss der störenden Kräfte auf die Excentricität.

67) Eine störende Kraft senkrecht zum Radius Vektor, im Sinne der Bewegung des Planeten wirkend, vergrössert oder verkleinert die Excentricität, je nachdem sie in der Nähe des Perihels oder Aphels auftritt. Nehmen wir an, die störende Kraft, welche, wie wir wiederholt erwähnt haben, die Geschwindigkeit vergrössert, wirke eine kurze Zeit hindurch im Perihel ein, so wird der Planet vom Perihel mit grösserer Geschwindigkeit fortgehen als die ist, infolge deren er die alte Bahn beschrieb; es ist so, als wäre er mit grösserer Geschwindigkeit vom Perihel, also senkrecht zum Radius Vektor, geschleudert worden. Die Anziehung der Sonne wird daher nicht im Stande sein, ihn in einer so engen Bahn herumzuziehen wie vorher, und er wird demnach auf der entgegengesetzten Seite seiner Bahn, im Aphel, sich weiter von der Sonne entfernen wie vorher (Fig. 19). Tritt aber keine Störung weiter auf, und so ist es ja hier vorausgesetzt, so wird er eine Ellipse beschreiben und zu demselben Perihel zurückkehren. (Der Planet wird ja, wenn er nach P zurückkommt, die frühere Geschwindigkeit und Richtung haben; letztere wird senkrecht zum Radius Vektor stehen, d. h. Punkt P wird wieder eine Apside sein). Da also die Periheldistanz dieselbe bleibt, die Apheldistanz zunimmt, so wird die Ungleichheit zwischen beiden Entfernungen vergrössert oder die Bahn wird excentrischer.

Dieselbe störende Kraft wollen wir uns jetzt im Aphel wirkend denken; sie wird wieder die Geschwindigkeit vergrössern, und die Anziehung der Sonne daher unfähig sein, den Planeten in eine Bahn zu zwingen, die so eng ist wie die frühere. Der Planet wird auf der entgegengesetzten Seite, im Perihel, in grössere Entfernung von der Sonne kommen als früher, wohl aber zu demselben Aphel zurückkehren. Die Periheldistanz wird also grösser, und da die Apheldistanz ungeändert bleibt, so wird die Ungleichheit zwischen beiden Entfernungen oder die Excentricität kleiner als früher.

68) Wir finden also, dass eine Kraft, die senkrecht zum Radius Vektor und im Sinne der Bewegung wirkt, die Excentricität vergrössert oder verkleinert, je nachdem sie den Planeten beeinflusst in der Nähe seines Perihels oder Aphels. Ganz ebenso findet man, dass eine solche Kraft, wenn sie im entgegengesetzten Sinne der Bewegung des Planeten, im Perihel oder Aphel wirkt, die Excentricität verkleinert oder vergrössert.

69) Fortwährend wirkende störende Kräfte. Bei allen unseren bisherigen Untersuchungen haben wir vorausgesetzt, dass die störende Kraft nur eine sehr kurze Zeit hindurch wirke und dann aufhöre. Künftig werden wir Kräfte zu betrachten haben, welche lange Zeit hindurch wirken, zwar ihre Intensität ändern, aber doch nicht aufhören. Um die Wirkungen solcher Kräfte zu beurteilen, müssen wir den langen Zeitraum in eine grosse Anzahl kleine Zeitteile geteilt denken, aus den hervorgegangenen Sätzen ableiten, wie in jedem solchen Teile durch die störenden Kräfte die Elemente der instantanen Ellipse (43) geändert werden, und dann bedenken, dass die instantane Ellipse am Ende der ganzen in Betracht gezogenen Zeit zugleich die permanente Ellipse ist, in welcher sich der Planet bewegen würde, wenn die störende Kraft hier zu wirken aufhörte (43.), und dass dieselbe jedenfalls sehr wenig von derjenigen Kurve sich unterscheiden wird, welche der Planet beim nächsten Umlaufe beschreibt, selbst wenn die störende Kraft noch weiter fortwirkte (41.).

IV. Abschnitt.

Ueber die Natur derjenigen störenden Kraft, welche ein Planet oder Mond durch die Anziehung eines anderen Körpers erfährt.

70) Nachdem wir die Wirkungen störender Kräfte auf die Elemente einer Planeten- oder Satellitenbahn untersucht haben, bleibt uns noch die Frage zu erörtern übrig, welcher Art die störende Kraft ist, welche von der Anziehung eines Körpers herrührt. Diese Untersuchung ist viel einfacher, als man beim Anblicke erwarten sollte, und zwar rührt diese Einfachheit zum Teile von dem Umstande her, dass, wie wir in 9. angegeben haben, die Anziehung eines Planeten auf die Sonne dieselbe ist wie die, welche er auf einen andern Planeten ausübt, wenn nur Sonne und angezogener Planet gleich weit vom anziehenden entfernt sind.

71) Vor allen Dingen müssen wir bemerken, dass die Kraft, welche störend wirkt, nicht die ganze Anziehungskraft ist. Die Sonne zieht z. B. den Mond an und stört seine elliptische Bewegung um die Erde; aber die störende Kraft ist nicht die ganze Anziehungskraft der Sonne auf den Mond. Denn diese Anziehungskraft zieht allerdings den Mond von der Stelle fort, an der er sich ohne Einwirkung der Sonne befinden würde, aber sie verändert ebenfalls den Ort der Erde; ist nun diese Ortsveränderung für die Erde dieselbe wie für den Mond, so behalten beide ihre frühere gegenseitige Stellung zu einander oder ihre relative Lage bleibt die frühere, und man kann von Störung nicht reden. Erläutern wir dies an Figur 20. Irgend eine Anziehungskraft habe die Erde von E nach e, und den Mond von M nach m gebracht, wobei Ee parallel und gleich Mm sei. Dann wird em gleich EM sein, d. h. Erde und Mond werden noch eben so weit von einander entfernt sein wie vorher ohne Störung; weiter wird auch em parallel zu EM sein, d. h. die Richtung em, in der der Mond von der Erde aus gesehen erscheint, ist noch dieselbe wie die frühere EM. Die Anziehungskraft verändert somit weder die Entfernung von Erde und Mond, noch die Richtung, in welcher der Mond von der Erde aus gesehen erscheint; mit anderen Worten, sie lässt die relative Lage beider Körper ungeändert. Eine Attraktionskraft also, welche auf zwei Körper mit gleicher Stärke und nach gleicher Richtung wirkt, stört ihre relative (gegenseitige) Bewegung nicht. Hieraus ziehen wir die folgenden wichtigen Schlüsse:

72) Erstens. Ein Satellit wird sich um einen um die Sonne kreisenden Planeten nahezu so bewegen, als stünde der Planet fest. Dieser Satz ist deswegen richtig, weil die Anziehung der Sonne auf den Planeten nahezu dieselbe ist, wie die, welche sie auf den Satelliten ausübt. Freilich vollkommen genau gleich sind diese beiden Anziehungskräfte nicht, und wir werden uns bald in die Lage versetzt sehen, die Wirkungen des Unterschiedes derselben zu untersuchen, aber im Ganzen sind sie sehr nahe dieselben. Betrachten wir z. B. den Mond; derselbe ist manchmal der Sonne näher als die Erde, manchmal ist er von ihr weiter entfernt als die Erde, sodass die Sonne den Mond bald stärker bald schwächer anzieht als die Erde, aber im Ganzen ist diese Ungleichheit sehr gering.

Diesem Umstande ist es zu verdanken, dass wir die relative Bewegung eines Satelliten um seinen Hauptplaneten nahe so betrachten können, als wäre die Sonne nicht vorhanden (weil eben die gegenseitige Lage von Sonne und Mond nur wenig geändert wird).

73) Zweitens. Die störende Kraft ist die Differenz der Kräfte, welche auf den Centralkörper und auf den revolvierenden Körper wirken, wobei wir, wie in 7., die Kräfte stets durch die Räume gemessen denken, um welche sie die Körper fortziehen, und wobei wir voraussetzen, dass der gestörte Körper zwischen seinem Centralkörper und dem störenden Körper steht. Nehmen wir als Beispiel wieder Sonne, Erde, Mond. Die Erde ist für den Mond Centralkörper, die Sonne störender Körper. Es stehe der Mond zwischen Sonne und Erde; zöge nun die Anziehungskraft der Sonne in einer gewissen Zeit die Erde um etwa 400 Centimeter fort, den Mond um 402 Centimeter, so würde die störende Kraft eine Kraft sein, welche den Mond in derselben Zeit um 2 Centimeter von der Erde entfernt.

74) Ermittelung der Grösse der störenden Kraft für den allgemeinen Fall. Der zuletzt behandelte Fall ist freilich der einfachste, welcher eintreten kann. Die Sache gestaltet sich ganz anders, wenn der Mond eine andere Stellung zur Erde hat als die vorher angenommene. Dann ist nicht allein des Mondes Entfernung von der Sonne eine andere als die der Erde, wodurch ja nach 11. eine Ungleichheit in der Grösse der Anziehungen der Sonne auf Mond und Erde herbeigeführt wird, sondern es ist auch die

Richtung, in welcher die Anziehungskraft auf die Erde wirkt, verschieden von der Richtung, nach welcher die Sonne den Mond anzieht, (insofern nämlich als die Anziehung stets in Richtung der Linie wirkt, die man zwischen anziehendem und angezogenem Körper zieht, und die jetzt von der Sonne nach Mond und Erde gezogenen Graden verschieden gerichtet sind). Diese Verschiedenheit zwischen Grösse und Richtung der Anziehungskraft haben wir natürlich nicht bloss bei Erde und Mond, sie wird ebenso auftreten, wenn ein Planet, der um die Sonne läuft, von einem andern gestört wird.

Um auch für den neuen, allgemeinen Fall die Grösse der störenden Kraft schätzen zu können, müssen wir geometrische Betrachtungen zu Hilfe nehmen.

Es sei B_1 (Fig. 21) ein um A revolvierender Körper und C ein anderer Körper, dessen Anziehungskraft die Bewegung von B_1 um A stört. Diese Anziehung bringe A in gewisser Zeit nach a und B_1 in derselben Zeit nach b_1. Man ziehe B_1d_1 gleich und parallel Aa, so wird auch ad_1 gleich und parallel AB_1 sein. Zöge nun die Kraft B_1 bis d_1, so würde sie die Bewegung von B_1 um A nicht stören; allein die anziehende Kraft bringt B_1 bis b_1. Da nun keine Störung vorhanden wäre, wenn B_1 nach d_1 gezogen würde, thatsächlich aber B_1 nach b_1 gebracht wird, so sieht man, dass die wirkliche störende Kraft eine solche ist, welche den umlaufenden Körper von d_1 nach b_1 bringt.

Ist der revolvierende Körper in B_2, und zieht ihn die Kraft um das Stück B_2b_2 fort, während A von A nach a gebracht wird, so werden wir die störende Kraft erhalten, wenn wir B_2d_2 gleich und parallel Aa machen, und d_2 mit b_2 verbinden: die wirklich störende Kraft ist alsdann eine solche, welche in derselben Zeit B_2 durch die Strecke d_2b_2 bewegen kann.

75) Grösse und Richtung dieser störenden Kraft ändern sich beständig, und wir müssen zusehen, ob wir einen Weg finden können, der uns über den Verlauf dieser Aenderung Aufschluss giebt. In Abschnitt III. haben wir nun nur von Kräften geredet, die in Richtung des Radius Vektors und senkrecht dazu wirken; sehen wir nach, ob wir nicht auch jetzt aus der störenden Kraft stets zwei solche Teile, welche im Radius Vektor und senkrecht dazu wirken, ausscheiden können. Wir müssen zu diesem Zwecke unsere Zuflucht nehmen zur „Zerlegung der Bewegungen". Wenn in der Figur 22 db den Raum darstellt, durch welchen eine Kraft den Körper in einer gewissen Zeit zieht, so kann dieselbe Wirkung von zwei Kräften hervorgebracht werden, deren eine den Körper in derselben Zeit von d nach e, deren andere ihn von e nach b bringen würde, und zwar gilt dies, gleichviel welche Grösse und Richtung de und eb haben mögen, wenn sie nur mit db ein Dreieck bilden (siehe 15. am Schlusse). Um nun die Resultate des III. Abschnittes hier anwenden zu können, wollen wir de senkrecht zum Radius Vektor und eb parallel zu demselben annehmen (oder wie man in der Mechanik sagt: wir wollen db in zwei Komponenten zerlegen, von denen die eine parallel, die andere senkrecht zum Radius Vektor ist). Ziehen wir also in der vorigen Figur 21 d_1e_1 senkrecht zu AB_1 oder ad_1 und b_1e_1 parallel zu AB_1 oder ad_1, so können wir nunmehr sagen: Die durch die Anziehung von C erzeugte störende Kraft d_1b_1 besteht einmal aus einer Kraft, welche durch das Stück d_1e_1 senkrecht zum Radius Vektor, und zweitens aus einer Kraft, die durch e_1b_1, welches parallel zum Radius Vektor liegt, dargestellt wird.*)

76) Wollen wir nun die Resultate von Abschnitt III anwenden, so erübrigt uns noch Schätzungen anzustellen über die Grösse dieser Kräfte. Gegenwärtig müssen wir uns begnügen mit der Erörterung einiger der interessantesten Fälle.

77) 1. Der gestörte Körper steht zwischen störendem und Centralkörper: die störende Kraft ist vom Centralkörper weg gerichtet und ist gross.

Es liege der störende Körper ausserhalb der Bahn des gestörten, wie das z. B. der Fall ist bei der Störung der Mondsbewegung durch die Sonne, bei der

*) Die störende Kraft d_1b_1 ist mit anderen Worten in zwei Kräfte d_1e_1 und e_1b_1 oder d_1e_1 und d_1c_1, senkrecht und parallel zum Radius Vektor, zerlegt. (Fig. 23).

Störung der Bewegung der Erde durch Jupiter, oder der Venus durch die Erde u. s. w., und nehmen wir da zuerst an, der revolvierende Körper B stehe zwischen dem störenden C und dem Centralkörper A (Fig. 24). Die Anziehungskraft von C bringe in gewisser Zeit A nach a, und in derselben Zeit B nach b, wo aber Bb viel grösser sein wird als Aa, weil ja B näher an C liegt als A; macht man dann Bd gleich Aa, so ist db die Wirkung der störenden Kraft; denn, wenn A nach a, B nach d gezogen würde, so wäre gar keine Störung da, die Abweichung von dieser gegenseitigen Stellung ad ist aber db. Die störende Kraft liegt also in diesem Falle gänzlich in Richtung des Radius Vektors und ist vom Centralkörper weg, nämlich von d nach b hin, gerichtet. Es ist dies die grösste störende Kraft, welche C ausüben kann.

78) 2. Der störende und gestörte Körper stehen auf entgegengesetzten Seiten des Centralkörpers: die störende Kraft ist immer noch vom Centralkörper weg gerichtet.

Es mögen wiederum A, B, C in derselben Geraden liegen, doch störender Körper C und gestörter B auf entgegengesetzten Seiten vom Centralkörper A (Fig. 25). Die Anziehung von C bringe wieder A nach a und B nach b, wobei natürlich Bb kleiner ist als Aa. Macht man Bd gleich Aa, so wird die störende Kraft durch db dargestellt sein. Man sieht, dieselbe fällt wieder ganz in die Richtung des Radius Vektors und ist vom Centralkörper weg, nämlich von d nach b hin, gerichtet. Dieser Fall ist ganz besonders merkwürdig, weil doch die Anziehungskraft, die ja die Störung erzeugt, die gerade entgegengesetzte Richtung hat, also von B nach C hin wirkt.

79) 3. Im vorigen Falle 2. (78.) ist die störende Kraft viel kleiner wie im Falle 1. (77.), ausgenommen, wenn der störende Körper sehr weit entfernt ist, wo dann beide nahe gleich sind. Die im Falle 1. vorhandene störende Kraft ist wirklich viel grösser wie die im Falle 2. auftretende. Um dies zu zeigen, nehmen wir an, es sei AB die Hälfte von AC (Fig. 24). Nach dem Gravitationsgesetze ist dann die Anziehung (welche ja nicht von der Masse des angezogenen Körpers abhängt) auf B im Falle 1. 4 mal so gross wie die auf A, weil A doppelt so weit von C entfernt ist wie B, und folglich die störende Kraft, die ja die Differenz der Kräfte ist, 3 mal so gross wie die Anziehung auf A. — Nennen wir die Anziehung auf A: 1, so wird also die auf B = 4 sein, und die störende Kraft, welche die Differenz der Kräfte ist, die Grösse 3 haben. —

Im Falle 2. (78.) ist die Entfernung des B von C (Fig. 25) das $\frac{3}{2}$fache der Entfernung des A von C, demnach die Anziehung auf B das $\frac{4}{9}$fache von der auf A, und die störende Kraft das $\left(1-\frac{4}{9}\right)$ fache $= \frac{5}{9}$fache der Anziehung auf A. — Oder wenn die Anziehung auf $A = 1$ ist, so ist die auf $B = \frac{4}{9}$, daher die Störung $= 1-\frac{4}{9} = \frac{5}{9}$. —

Im Falle 1. (77.) ist die störende Kraft das 3fache, im Falle 2. (78.) nur das $\frac{5}{9}$fache der Anziehung auf A; es stehen daher die störenden Kräfte für beide Fälle im Verhältnis von 3 zu $\frac{5}{9}$ oder 27 : 5, d. h. es ist die Störung im 1. Falle weit grösser als im zweiten.

Dies letztere gilt für fast alle Fälle, in denen ein Planet durch einen andern, ausserhalb seiner Bahn liegenden, gestört wird, wenn die Entfernungen zwischen störendem (C) und gestörtem Planeten (B) von der Sonne (A) nicht sehr verschieden sind, also wenn der störende Körper nicht sehr weit vom gestörten entfernt ist.

Anders ist es freilich bei dem Monde: die Entfernung der Erde (A) von der Sonne (C) ist nahezu das 400fache der Entfernung des Mondes (B) von der Erde; steht der Mond also zwischen Erde und Sonne, und nennt man die Entfernung von Erde und Sonne 400, die des Mondes von der Sonne demnach 399, so ist die Anziehung der Sonne auf den Mond das $\left(\frac{400}{399}\right)^2$fache oder das $\frac{160000}{159201}$fache oder $\left(1 + \frac{799}{159201}\right)$fache von der Anziehung der Sonnne auf die Erde, die störende Kraft daher das $\frac{799}{159201}$fache dieser Anziehung der Sonne auf die Erde. (Oder: Ist die Anziehung auf die Erde $= 1$, so ist sie für den Mond $1 + \frac{799}{159201}$, also die störende Kraft, d. i. die Differenz der Kräfte, $= \frac{799}{159201}$). Stehen aber Sonne und Mond auf entgegengesetzten Seiten der Erde, so ist die Entfernung des Mondes von der Sonne das 401fache seiner Entfernung von der Erde (d. h. ist die Entfernung des Mondes von der Erde $= 1$, so ist die der Erde von der Sonne $= 400$, die des Mondes von der Sonne $= 401$), demnach die Anziehung der Sonne auf den Mond das $\left(\frac{400}{401}\right)^2$fache oder $\frac{160000}{160801}$fache oder $\left(1 - \frac{801}{160801}\right)$fache der Anziehung der Sonne auf die Erde; somit die störende Kraft das $\frac{801}{160801}$fache der Anziehung der Sonne auf die Erde. (Oder: Ist die Anziehung auf die Erde $= 1$, so ist die auf den Mond $1 - \frac{801}{160801}$, und die störende Kraft, die die Differenz beider Kräfte ist, $= 1 - \left(1 - \frac{801}{160801}\right) = \frac{801}{160801}$). Diese störende Kraft ist von der vorigen, welche das $\frac{799}{159201}$fache der Sonnenanziehung auf die Erde war, in der That sehr wenig verschieden, sodass unsere Behauptung erwiesen ist. Die Wirkungen dieser geringen Verschiedenheit sind freilich doch merklich. Ist also der störende Körper weit entfernt, so sind die störenden Kräfte im Falle 1. und 2. nahe gleich, wie eben beim Monde; ist der störende Körper nahe, so ist die Kraft im Falle 1. weitaus die grössere.

80) 4. Sind Central- und gestörter Körper gleich weit vom störenden entfernt, so ist die störende Kraft nach dem Centralkörper hin gerichtet. Der um A revolvierende Körper befinde sich an dem Orte B seiner Bahn (Fig. 26), welcher die gleiche Entfernung von C hat wie A. Die Anziehungen Aa und Bb des störenden Körpers auf A und B werden dann, da die Abstände von C dieselben sind, gleich gross, aber verschieden gerichtet sein. Da nun BC gleich AC ist und auch Bb gleich Aa ist, so muss ab parallel zu Ab sein; verlängert man ab über b und zieht Bd parallel Aa, so ist Bd $=$ Aa, also auch gleich Bb. Würde B nach d gezogen, so wäre keine Störung da; die Abweichung von d ist db, welches die Richtung von AB, d. h. die des Radius Vektors hat. Die störende Kraft liegt daher in diesem Falle ganz in Richtung des Radius Vektors, ist aber nicht wie früher von dem Centralkörper weg, sondern nach ihm hin gerichtet, nämlich von d nach b. (Man kann auch Bb in zwei Bewegungen zerlegen, deren eine Bd ist, deren andere von B nach A hin wirkt.)

Die Grösse dieser störenden Kraft steht zur ganzen Attraktion im Verhältnis von bd zu Bb oder von AB zu AC. In unserem ersten numerischen Beispiele war AB $= \frac{1}{2}$ AC, also AB : AC $= 1 : 2$; die störende Kraft würde daher $\frac{1}{2}$ der Anziehung auf A sein. Im zweiten Zahlenspiele (vom Monde) war AB $= \frac{1}{400}$ AC, daher würde in dem betrachteten Punkte B der Bahn die störende Kraft $\frac{1}{400}$ der Attraktion auf A sein.

Vergleichen wir diese nach dem Centralkörper hin gerichteten Kräfte mit den früheren, vom Centralkörper weg gerichteten: die vom Centralkörper weg gerichteten, im Radius Vektor liegenden, Kräfte waren

das 3fache der Anziehung auf A, im 1. Zahlenbeispiel unter 79 für die in 77 behandelte Stellung,

das $\frac{5}{9}$fache der Anziehung auf A, im 1. Zahlenbeispiele unter 79 für die in 78. behandelte Stellung,

das $\frac{1}{200}$fache der Anziehung auf A, im 2. Zahlenbeispiele unter 79 (vom Monde) und zwar sowohl für die in 77. und 78. besprochene Lage,

weil ja für beide letzteren Lagen die Störungen das $\frac{799}{159201}$ resp. $\frac{801}{160801}$fache oder beide Male das nahe $\frac{1}{200}$fache der Anziehung auf A betragen.

Die nach dem Centralkörper hin gerichteten Kräfte aber betragen:

das $\frac{1}{2}$fache der Anziehung auf A, im 1. Zahlenbeispiele,

das $\frac{1}{400}$fache der Anziehung auf A, im 2. Zahlenbeispiele (vom Monde), wie in diesem Paragraphen gefunden.

Es ergiebt sich also das bemerkenswerte Resultat, dass im ersten wie im zweiten Zahlenbeispiele die störende Kraft, wenn sie ganz zum Centralkörper hin wirkt, viel kleiner ist, als wenn sie ganz von demselben weg gerichtet ist.

Für das 2. Zahlenbeispiel vom Monde ist die von A fort gerichtete Kraft $\frac{1}{200}$, die nach A hin gerichtete $\frac{1}{400}$ der Anziehung auf A, also letztere fast genau die Hälfte der ersteren.

81) Ist der störende Körper sehr weit entfernt, so ist der Punkt B, welcher von C eben so weit entfernt ist wie A, sehr nahe derjenige, welcher auf der in AC errichteten Senkrechten liegt, für welchen also AB senkrecht zu AC steht.

82) 5. Die bisher betrachteten störenden Kräfte verhalten sich nahe wie die Entfernungen des gestörten Körpers vom Centralkörper, falls der störende Körper weit entfernt ist.

Ist C weit entfernt, wie z. B. in dem Falle des durch die Sonne gestörten Mondes, so sind die in 3. und 4. (in 70 und 80) betrachteten, in Richtung des Radius Vektors liegenden, störenden Kräfte nahezu proportional der Entfernung des Mondes von der Erde. Für die in Fall 4. behandelten, nach dem Centralkörper hin gerichteten Kräfte ist dies genau richtig, und zwar gleichviel, ob C nahe oder fern ist; denn wir fanden ja, dass in diesem Falle 4. die störende Kraft zur ganzen Attraktion im Verhältnis von AB : AC stehe. Aenderte sich also die Entfernung AB, würde sie etwa 2 mal so gross gemacht, so würde auch der Wert des Verhältnisses AB : AC der doppelte sein gegen den früheren oder die störende Kraft würde 2 mal so gross werden.

Wenden wir uns nun zu den in 3. betrachteten, vom Centralkörper weg gerichteten Kräften. Als Beispiel diene uns der Mond. Nehmen wir die Entfernung des Mondes von der Erde $= \frac{1}{400}$ der Entfernung der Erde von der Sonne, so ist, wenn der Mond zwischen Erde und Sonne steht, die störende Kraft $= \frac{799}{159201}$ oder nahe $\frac{1}{200}$ der Anziehung der Sonne auf die Erde. Nähmen wir aber für die Entfernung des Mondes von der Erde den Wert $\frac{1}{200}$ der Sonnenentfernung an, so würde die Anziehung auf den Mond, falls er zwischen Erde und Sonne steht, das $\left(\frac{200}{199}\right)^2$ oder $\left(\frac{40000}{39601}\right) = \left(1 + \frac{399}{39601}\right)$fache der Anziehung der Sonne auf die Erde sein und die störende Kraft, d. i. die Differenz beider Anziehungen würde das $\frac{399}{39601}$ oder nahe $\frac{1}{100}$fache der Anziehung der Sonne auf die Erde sein. Verdoppelt man also die Entfernung des Mondes von der Erde, so wird auch die störende Kraft nahe doppelt so gross; und änderten wir die Entfernung in irgend einem andern Verhältnisse, so würden wir die störende Kraft in demselben Verhältnisse geändert finden.

83) 6. Dieselben störenden Kräfte sind umgekehrt proportional dem Kubus der Entfernung des störenden Körpers.

Aendert sich die Entfernung der Erde von der Sonne, während die Entfernung des Mondes von der Erde nahe dieselbe bleibt, so vermindert sich die störende Kraft nahe in demselben Verhältnisse, in welchem der Kubus der Entfernung von der Sonne wächst. Unser Zahlenbeispiel mag uns das wieder erläutern.

Ist die Entfernung der Sonne von der Erde 400 mal so gross wie die des Mondes, und steht letzterer zwischen Erde und Sonne, so ist die störende Kraft, wie wir gesehen, nahe $\frac{1}{200}$ der „Anziehung der Sonne auf die Erde in dieser Entfernung von der Sonne."

Nehmen wir jetzt die Entfernung der Sonne doppelt so gross an als früher, also 800 mal so gross wie die Entfernung des Mondes von der Erde, so ist die Entfernung der Sonne vom Monde 799 mal so gross wie die der Erde vom Monde (die noch die frühere ist); letztere war früher $\frac{1}{400}$ der Sonnenentfernung, *die Entfernung von Sonne und Mond wird daher jetzt $\frac{799}{400}$ der früheren Entfernung der Erde von der Sonne sein.**)

Da die Entfernung der Sonne verdoppelt ist gegen früher, so ist ihre Anziehung auf die Erde jetzt $\frac{1}{4}$ der früheren; da die Entfernung der Sonne vom Monde das $\frac{799}{400}$fache *der früheren Entfernung der Sonne von der Erde ist*, so wird die Anziehung auf den Mond das $\left(\frac{400}{799}\right)^2$ oder $\frac{160000}{638401}$fache der früheren Anziehung der Sonne *auf die Erde* sein. [Die Anziehung hängt nicht von der Masse des angezogenen Körpers ab.] Die jetzigen Anziehungen auf Erde und Mond sind somit $\frac{1}{4}$ resp. $\frac{160000}{638401}$ mal so gross wie die frühere Anziehung auf die Erde. Die störende Kraft ist die Differenz dieser Anziehungen, ist also das $\left(\frac{160000}{638401} - \frac{1}{4}\right)$fache oder $\left(\frac{640000 - 638401}{2553604}\right)$fache oder nahe $\frac{1}{1600}$fache der früheren Anziehung auf die Erde. Ursprünglich war die Störung das $\frac{1}{200}$ fache derselben Anziehung. Durch Verdoppeln der Sonnenentfernung sinkt also die störende Kraft auf $\frac{1}{8}$ ihres früheren Wertes; ein ähnliches Resultat wird man finden, wenn man die Entfernung der Sonne in irgend einem andern Verhältnisse ändert.

84) 7. *Zwischen den Stellungen, in welchen die drei Körper in einer Geraden liegen, und denen, in welchen gestörter und Centralkörper gleich weit vom störenden entfernt sind, giebt es immer eine Kraft senkrecht zum Radius Vektor, welche den gestörten Körper beschleunigt oder verzögert, je nachdem er sich von den Punkten, in denen er und der Centralkörper gleich weit vom störenden abstehen, fort oder zu ihnen hin bewegt.* Nehmen wir an, es bewege sich B von dem Teile seiner Bahn, wo die Entfernung von C gleich der des A von C ist, fort nach dem Teile hin, welcher zwischen A und C liegt. Da im ersteren Teile, in dem Punkt also, wo B und A gleich weit von C abstehen, die störende Kraft in Richtung des Radius Vektors wirkt und zwar *nach A hin*, im zweiten dagegen, d. h. im Punkte zwischen A und C, diese Kraft zwar in Richtung des Radius Vektors liegt, aber *von A fort* gerichtet ist, so muss es zwischen diesen zwei Punkten eine Stelle geben, an welcher keine störende Kraft in Richtung des Radius Vektors wirkt. Wir wollen vorläufig nicht weiter darauf eingehen, wollen aber bemerken, dass es in einer jeden solchen Zwischenlage eine Kraft senkrecht zum Radius Vektor giebt. Es lässt sich das leicht aus dem 2. Fall von 74 (Fig. 21), aus der Lage B_2, ersehen. Aus dem dort Gesagten erkennt man, dass es zwischen den eingangs erwähnten beiden Punkten stets eine störende Kraft $d_2 e_2$ giebt, welche senkrecht zum Radius Vektor und in derselben Richtung wirkt, nach welcher sich der Körper bewegt. Führen wir eine ähnliche Konstruktion wie dort durch für *die Lage* B_3 (Fig. 27), in welcher sich B von dem Punkte zwischen C und A nach dem anderen Punkte hin bewegt, dessen Entfernung von C gleich der des A von C ist, so finden wir, dass es eine störende Kraft $d_3 e_3$ senkrecht zum Radius Vektor giebt, welche entgegengesetzt gerichtet ist von der Bewegung des B, nämlich die Richtung von d_3 nach e_3 hat. Konstruieren wir jetzt dieselbe Figur für *die Lage* B_4 (Fig. 27), in welcher B von dem Punkte der gleichen Entfernungen fort nach der Stelle seiner Bahn hin geht, welche von C am weitesten entfernt ist, wo also B und C auf

*) Die Entfernung des Mondes von der Erde sei $= 1$, die der Sonne von der Erde $= 400$. Im anderen Falle sei die letztere $= 800$, so wird dann die Entfernung der Sonne vom Mond sein 799, und da die frühere Entfernung von Sonne und Erde $= 400$ war, so beträgt die Entfernung von Sonne und Mond im 2. Fall $\frac{799}{400}$ der früheren Entfernung von Sonne und Erde.

entgegengesetzten Seiten von A liegen, so erkennen wir, dass es hier eine störende Kraft $d_4 e_4$ senkrecht zum Radius Vektor giebt, welche im Sinne der Bewegungsrichtung von B wirkt. Ebenso giebt es in der Lage B_1 (Fig. 21), wo B sich von dem Punkte, der mit C auf entgegengesetzten Seiten von A liegt, nach dem nächsten Punkte der gleichen Entfernungen hin bewegt, eine störende Kraft $d_1 e_1$, welche senkrecht auf dem Radius Vektor steht und entgegengesetzt gerichtet ist zur Bewegung von B.

85) Fassen wir die so gefundenen Resultate zusammen:

Steht der störende Körper ausserhalb der Bahn des umlaufenden Körpers, so ist eine störende Kraft, die nur in Richtung des Radius Vektors wirkt, vorhanden 1. in dem Punkte zwischen Central- und störendem Körper, 2. auf dem gerade entgegengesetzt liegenden Punkte, und 3. an den Stellen, welche vom störenden Körper dieselbe Entfernung haben wie der Centralkörper; in den beiden ersten Punkten, die mit störendem und Centralkörper in einer Geraden liegen, ist die störende Kraft vom Centralkörper fort gerichtet, und ist im ersten dieser Punkte grösser als im zweiten. An den unter 3. angegebenen Orten dagegen ist diese Kraft nach dem Centralkörper hin gerichtet, ist aber viel geringer als die in den vorigen beiden Punkten von ihm fort wirkende.

Zwischen diesen 4 Punkten giebt es vier andere Punkte, in welchen gar keine in Richtung des Radius Vektors liegende störende Kraft existiert.

Bewegt sich der revolvierende Körper von dem Punkte zwischen störendem und Centralkörper, oder von dem in Bezug auf den Centralkörper gerade entgegengesetzt liegenden Orte nach einem der gleich weit abstehenden Punkte, so wirkt stets eine zum Radius Vektor senkrechte, den Körper verzögernde Kraft ein.

Geht dagegen der Körper von einem der äquidistanten Punkte nach einem von den Punkten, welche auf derselben oder entgegengesetzten Seite des Centralkörpers wie der störende liegen, so wirkt immer eine störende Kraft senkrecht zum Radius Vektor, die den Körper beschleunigt. (Ueber die Richtung dieser Kräfte siehe Fig. 31.)

86) 8. Der störende Körper liegt innerhalb der Bahn des gestörten. Verschiedene Fälle, welche von dem Umstande abhängen, ob des störenden Körpers Entfernung grösser oder kleiner ist als die halbe Entfernung des gestörten.

Nehmen wir nun (Fig. 28) den störenden Körper innerhalb der Bahn des gestörten an, wie dies der Fall ist, wenn die Erde durch die Venus gestört wird. Wieder sei B der revolvierende, C der störende, A der Centralkörper. Ist B in B_1, so wird B_1 wie A stark nach C hingezogen, beide, A und B_1, werden sich nähern, es wird also eine bedeutende, von B_1 nach A hin ziehende, störende Kraft geben. Steht B in B_3, so zieht die Attraktion von C den Körper A bedeutend von B_3 fort und den Körper B viel schwächer nach A hin; daher existiert hier eine schwache störende Kraft, welche B_3 von A fort treibt. In gewissen Punkten zwischen B_1 und B_3 wird gar keine störende Kraft in Richtung des Radius Vektors da sein.

Hinsichtlich der senkrecht zum Radius Vektor wirkenden Kraft können wir das folgende angeben. Ist AC grösser als $\frac{1}{2}$ AB_1, so lassen sich zwei Punkte B_2 und B_4 angeben, die von C so weit entfernt sind wie A es ist, und hier giebt es nach früherem keine zum Radius Vektor senkrechte Störung oder die ganze störende Kraft fällt hier in die Richtung des Radius Vektors. Geht man nun so vor, wie wir es in 75. und 84. gethan, so wird man finden, dass die senkrecht zum Radius Vektor wirkende Störung die Bewegung von B verzögert, während B von B_1 nach B_2 und von B_3 nach B_4 geht, und dass sie diese Bewegung beschleunigt, wenn B von B_2 nach B_3 oder von B_4 nach B_1 geht. Ist nämlich (Fig. 29) AC grösser als $\frac{1}{2}$ AB, und ist das Stück, um welches die Anziehung von C den Centralkörper A fortzieht AD, das Stück, um welches der gestörte in derselben Zeit fortgetrieben wird, falls er in B_1. E, J, M, Q ist, resp. B_1 V, E G, J L, M O, Q T, und zieht man B_1 W, E F, K J, M N, Q R gleich und parallell AD, so erhält man als Störungen resp.: WV, F G, K L, N O, R T, und wenn man jede Störung (z. B. F G, die von F nach G gerichtet ist) in zwei Bewegungen (F H, H G) zerlegt, (wo F H senkrecht zum Radius Vektor und der Bewegungsrichtung entgegengesetzt ist, H G im Radius Vektor liegt und nach A gerichtet ist), so findet man aus der Figur, dass von B_1 bis J (früher B_2) eine Kraft senkrecht zum Radius Vektor da ist, welche den gestörten Körper verzögert, dass dieselbe Kraft von J bis B_3 beschleunigt, dann von B_3 bis Y (früher B_4) verzögert, von da bis B_1 beschleunigt.

Ist aber AB kleiner als $\frac{1}{2}$ AB_1, so giebt es keine solchen Punkte B_2, B_4 (oder J, Y), wie die zwei vorher betrachteten, und die senkrecht zum Radius Vektor wirkende störende Kraft beschleunigt B, während er von B_1 nach B_3, und verzögert, während derselbe von B_3 nach B, sich bewegt. Es ergiebt dies Figur 30. Man bedenke nur dabei immer, dass derjenige Körper um das grössere Stück aus seiner Lage gebracht wird, welcher dem störenden Körper am nächsten steht.

Wir wollen nun zur Anwendung der allgemeinen Grundsätze auf besondere Fälle übergehen.

V. Abschnitt.

Theorie des Mondes.

87) Das unterscheidende Kennzeichen der Theorie des Mondes liegt in der allgemeinen Einfachheit, welche dadurch herbeigeführt wird, dass die Sonne, welche allein merkliche Störungen erzeugt, welche also als der einzige störende Körper angesehen werden kann, eine sehr grosse Entfernung hat im Vergleich mit der Entfernung des Mondes von der Erde (Gründe hierfür ergeben sich z. B. aus 81. und 82). Dazu kommt, dass diese Störungen viel wahrnehmbarer, als andere im Sonnensystem, auftreten, weil der störende Körper sehr gross ist. Mit Rücksicht hierauf sowohl, als wegen der Genauigkeit, mit der man sie beobachten kann, waren diese Störungen seit der Entdeckung des Gravitationsgesetzes als die besten Beweise für die Wahrheit desselben angesehen worden.

Einige dieser Störungen sind unabhängig von der Excentricität, d. h. sie sind vorhanden, gleichviel ob die Bahn excentrisch ist oder nicht; andere hängen von derselben auf eine sehr merkwürdige Art ab.

Wir beginnen mit den ersteren.

A. Störungen, die von der Excentricität unabhängig sind.

88) Untersuchen wir zunächst, welcher Art die auf den Mond wirkenden störenden Kräfte sind. Aus den Paragraphen 77 bis 86 ergiebt sich folgendes:

„Wenn der Mond zwischen Sonne und Erde, oder in Bezug auf die Erde entgegengesetzt mit der Sonne steht, welche beiden Punkte Syzygien heissen, so fällt die störende Kraft ganz in die Richtung des Radius Vektors und ist von der Erde weg gerichtet.

Ist der Mond in den Stellungen, in welchen der Radius Vektor senkrecht zur Verbindungslinie von Erde und Sonne steht, welche beiden Punkte Quadraturen genannt werden, so fällt die störende Kraft gänzlich in Richtung des Radius Vektors und ist nach der Erde hin gerichtet. Nach 81 ist dies richtig, weil der störende Körper, die Sonne, weit entfernt ist.

An gewissen Punkten, die zwischen den vier genannten liegen, giebt es keine störende Kraft in Richtung des Radius Vektors.

In allen Punkten aber, ausgenommen in den Syzygien und Quadraturen, ist stets eine auf dem Radius Vektor senkrecht stehende störende Kraft vorhanden, welche die Bewegung des Mondes verzögert, während er von einer Syzyge zu einer Quadratur geht, und die diese Bewegung beschleunigt, während der Mond von einer Quadratur nach einer Syzygie hin geht."

Figur 31 giebt an, in welchem Sinne die Kräfte wirken. Der Pfeil M stellt dabei die Bewegungsrichtung des Mondes dar. S bedeutet die Sonne, E die Erde, der Kreis die Mondbahn.

Nach den in den vorherigen Paragraphen gefundenen Resultaten lassen sich nun die Wirkungen dieser Kräfte angeben, und zwar ergeben sich so für die Mondbewegung die folgenden, wichtigsten Störungen oder Ungleichheiten:

1) die elliptische Ungleichheit oder Mittelpunktsgleichung,
2) die jährliche Gleichung,
3) die Variation und parallaktische Ungleichheit,
4) das Vorschreiten des Mondperigäums,
5) die Unregelmässigkeit in der Bewegung des Perigäums,
6) das abwechselnde Wachsen und Abnehmen der Excentricität.

Nach der Betrachtung der Störungen des Erdmondes wendet sich Airy zu den Störungen der Jupitermonde und der Planeten.

Der Raum genügt leider nicht, um auch nur die ersteren, die Mondstörungen, herzuleiten.

Anmerkung. Fig. 30 ist fortgelassen worden, da sie ganz wie Fig. 29 hergestellt werden kann.