Der goldne Schnitt.

Beitrag zur Geschichte der Mathematik und ihrer Anwendung.

I.

‚Auch ich spiele mit Symbolen, aber ich vergesse doch nicht, dass ich spiele.‘ Mit diesen Worten entschuldigt der wackre Kepler[1]) seine Phantasieen über eine geometrische Construction, von der er glaubt, dass sie am besten die Erzeugung der Organismen nach ihrer Art in einer Reihe, bei welcher jedes folgende Glied dem vorhergehenden ähnlich ist, versinnbildliche.

Kepler spricht im Verfolg der angeführten Stelle so ausführlich über die Construction, welche er im Sinne hat, dass man nicht zweifeln kann, es sei dies dieselbe Construction, welche in jüngster Zeit auf den deutschen Schulen und in den deutschen Lehrbüchern die Teilung nach dem goldnen Schnitte oder auch kurz der goldne Schnitt genannt wird.

Dieser nur bei uns gebräuchliche Name ist ganz neuen Ursprungs. Man findet ihn weder in den verbreitetsten mathematischen Compendien des vorigen Jahrhunderts noch in Klügels mathematischem Wörterbuche. Er verdankt seine Entstehung wahrscheinlich einer Verwechselung mit der Regeldetri oder vielmehr einer teilweisen Übertragung der für diese Rechnungsart gebräuchlichen Bezeichnung auf die geometrische Construction.

Kepler, der eigentliche Erfinder der Symbolik des goldnen Schnittes und im Grunde auch wohl der Vorgänger derjenigen, welche gegen die Mitte des neunzehnten Jahrhunderts dieser Construction eine Art mystischer Bedeutung zu geben versucht haben, nennt weder den deutschen Namen noch auch die lateinische Übersetzung desselben. Er be-

---

1) ‚Ludo quippe et ego symbolis et opusculum institui, cabbalam geometricam, quae est de ideis rerum naturalium in geometria, sed ita ludo, ut me ludere non obliviscar.‘ Aus einem Briefe Keplers an Joachimus Tanck 1608, in: Ioannis Kepleri astronomi opp. ed. Chr. Frisch, I p. 377. Über die Orthographie des Namens Kepler, ebendas. Vorrede p. XIV.

zeichnet die Construction mit dem von ihm selbst eingeführten Namen sectio divina. Daneben braucht er auch die Bezeichnung proportio divina, ohne zu bedenken, dass dieselbe früher in einer andern viel allgemeinern und nicht vollständig bestimmten Bedeutung gebraucht worden war. Solche Oberflächlichkeit in Dingen, welche die Geschichte der Mathematik betreffen, ist eine leicht begreifliche Erscheinung bei mathematischen Schriftstellern. Sie ist auch die Ursache, weshalb man jetzt in vielen Lehrbüchern bei der Erwähnung des Namens goldner Schnitt den ganz ungegründeten Zusatz findet: ‚So nannten die alten Geometer diese Construction.'

In den für den Volksunterricht bestimmten Rechenbüchern des 16. und 17. Jahrhunderts wird die Regeldetri durch den Beinamen die goldne Regel ausgezeichnet.

Das Rechenbuch von Böschensteyn[1]) giebt auch den Grund an: ‚umb irer subteyligkeit und artlicher Kunst willen'. Der sehr kurz gefasste Wortlaut der goldnen Regel heisst: ‚das mittel mit dem dritten multiplicir, dasselbig mit dem vordern dividir.' Derartige nicht grade empfehlenswerte Kürze wird auch jetzt noch in manchen Rechenbüchern nachgeahmt. In Koburgk's Rechenbuche[2]) wird ausführlich der Name besprochen: ‚Woher hat die Regel Detri die andern Namen?' ‚Proportionum wirdt sie darum genannt, weil ihr Process durch die Proportion vermehrt worden ist. Aurea aber oder die gulden Regel, weil sie von wegen ihres brauchs, under den Regeln der Arithmetik so kostbarlich, als das Gold unter den Metallen ist.' Und in einem andern[3]) Rechenbuche des 17. Jahrhunderts: ‚Regula-De-Tri auch eigentlich Proportionum, Vornemblich aber bey den Alten Aurea genannt, und ist ein sonderbahre köstliche Regul, so von dreyen bekannten Zahlen redt, daraus jedesmal die vierte erlehrnet und offenbar wirdt.' Das lateinische Rechenbuch[4]) von Clavius enthält zur Regeldetri die Bemerkung: ‚Diese niemals genug zu preisende Regel, welche um ihres unermesslichen Nutzens willen Aurea genannt zu werden pflegt.'

Die Frage, wer die Regeldetri zuerst so benannt hat oder wie der Name aufgekommen sei, lässt sich wohl nicht beantworten. In mehr wissenschaftlich gehaltenen Lehrbüchern findet sich derselbe nicht, und die gewöhnlichen Rechenbücher jener Zeit sind fast ausschliesslich für die Belehrung angehender Kaufleute verfasst, für welche die Regeldetri allerdings eine so zu sagen goldne Regel ist.

Vielleicht sind arabische oder jüdische Rechenlehrer die ersten Erfinder des Namens gewesen; die Orientalen lieben die Überschwenglichkeit im Ausdruck und ähnliche Bezeichnungen finden sich vielfach in ihren nicht mathematischen Schriften. Aber das Eigenschaftswort golden ist auch bei Griechen und Römern als Ausdruck der Emphase im gewöhnlichen Gebrauche gewesen und konnte ja auch bei uns ohne besondre Veranlassung von aussen für eine wichtige, dem unausgebildeten Verstande nicht beweisbare

---

1) Treutlein, Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik 1877 Heft I p. 86.

2) Rechenbuch auf den Linien und mit Ziffern durch Simon Jakob Koburgk 1600 p. 31.

3) Wolgegründetes Rechenbuch, auf der Zieffer etc. durch Mauritium Zonsz; gedruckt zu Cöllen, bei Johannes Langenberg, gegen der Laurentianer Bursch 1672 p. 34.

4) Christophori Clavii Bambergensis Epitome Arithmetica. Coloniae 1607.

Rechenregel in Aufnahme kommen. Es handelt sich dabei immer nur um den mündlichen Unterricht und um Lehrbücher niederer Stufe.

Betrachtet man, wie es in mathematischen Aufgaben geschieht, die geometrische Proportion, welche ein unbekanntes, zu bestimmendes Glied enthält, als eine einfache Gleichung zwischen zwei unbenannten Zahlen-Brüchen, dann braucht man keine goldne Regel. Der unbezweifelte Satz, zwei Zahlen von gleichem Werte, wenn auch von verschiedener Form, geben, mit derselben unbenannten Zahl multipliciert, als Producte wieder zwei Zahlen von gleichem Werte, dieser Satz, der in seiner verkürzten Form jedem Schüler geläufig ist, löst auf die bequemste Weise die ganze Schwierigkeit. Diese Art an der goldnen Regel vorbei zu kommen wird auch von Manchen, die freilich von den bösen Schwierigkeiten des Elementar-Unterrichtes in der Mathematik wenig wissen, den Lehrern empfohlen.

Seit dem Anfange unseres Jahrhunderts wurde besonders durch die Bemühung der Lehrer aus Pestalozzi's Schule zum grossen Vorteile des Elementar-Unterrichtes, aber nicht ganz ohne Nachteil für den Anfang des höheren Unterrichtes in der Mathematik die Proportion als Auflösungsmittel der sogenannten bürgerlichen Rechnungsarten beseitigt und durch den bei uns jetzt allgemein eingeführten Einheits-Ansatz ersetzt. Damit verschwand die goldne Regel aus dem Rechenunterrichte in unsern Schulen und der inhaltlos gewordene Name übertrug sich zum Teil auf die geometrische Construction, welche von Kepler zuerst sectio divina genannt worden war und in den darauf folgenden zwei Jahrhunderten, wie auch früher, gar nicht durch einen besondern Namen ausgezeichnet wurde, weil die Keplersche Ansicht keine weitere Aufnahme fand. Erst gegen die Mitte unseres Jahrhunderts kommt der Name goldner Schnitt als neue Bezeichnung in den verbreitetern Lehrbüchern der Elementar-Geometrie vor, offenbar nicht ganz ohne Zusammenhang mit der um dieselbe Zeit aufgebrachten Betrachtung dieser geometrischen Construction als eines allgemeinen formbestimmenden Naturgesetzes und eines ersten oder obersten Satzes im Schönheits-Canon der bildenden Künste.

Es ist der Zweck dieses Beitrages zunächst zu zeigen, auf welchen historischen Vorgängen diese Ansicht beruht, und dann zu begründen, dass dieselbe in der Weise, wie es von Kepler geschieht, unter geeigneten Umständen als Anregungsmittel beim planimetrischen oder arithmetischen Unterrichte nicht geradezu verwerflich, aber für die Erkenntnis der Natur oder für die Erzeugung und Beurteilung von Kunstwerken ganz wertlos ist.

II.

Platon symbolisiert im Timaeus die regelmässigen Körper der Geometrie mit den sogenannten vier Elementen. Nach einer sehr verständlichen geometrischen Auseinandersetzung über die Construction von vieren dieser Körper sagt er aber nicht ein Wort über die Construction des fünften, dem er doch die allgemeinste und höchste

Bedeutung[1]) zuschreibt. Dieser fünfte Körper ist der regelmässige Zwölfflächner, das Dodekaeder der Geometrie, dessen Construction auf dem goldnen Schnitte beruht. Mit grosser Ausführlichkeit bespricht dort Platon die Dreiecke, welche er zur Construction der Flächen der vier ersten regelmässigen Körper verwendet wissen will, die beiden Dreiecke aber, die dann später in den Elementen des Euclid für die dem geometrischen System entsprechende Herstellung des Dodekaeders construiert sind, werden nicht erwähnt, obgleich auch diese von sehr einfacher Bildung sind; nämlich ein rechtwinkliges, dessen eine Kathete doppelt so lang ist als die andre, um die Teilung nach dem goldnen Schnitte auszuführen, und ein gleichschenkliges, dessen Basiswinkel doppelt so gross ist als der an der Spitze.

Wenn richtig ist, was Vitruv und Proclus und andre Schriftsteller der nachklassischen Zeit erzählen, und was allgemein geglaubt wird, dass von Pythagoras oder zur Zeit desselben der erste systematische geometrische Beweis des Satzes, der den Namen des Pythagoras trägt, gefunden worden ist; dann ist nach dem Vorhergehenden mit grosser Wahrscheinlichkeit anzunehmen, dass die Teilung nach dem goldnen Schnitte, welche eine zwar einfache aber doch nicht ganz naheliegende Folgerung aus dem pythagoreischen Lehrsatze ist, dem Pythagoras und auch Platon nicht bekannt war.

In dem lebhaften Verlangen diesem Bedürfnisse der phantasiereichen Symbolik durch eine methodische Auflösung der geometrischen Frage abzuhelfen und in der darauf folgenden Befriedigung und Freude über den glücklichen Fund kann man wohl den ersten Anfang der emphatischen Auffassung des goldnen Schnittes zu sehen versucht sein. Leider ist nichts darüber aus dem Altertume berichtet, nicht einmal der Name des Erfinders ist irgendwo aufbewahrt.

Vielleicht bestätigt sich noch, was Cantor[2]) zu einer Stelle des Proclus[3]): ‚Eudoxus führte weiter aus, was von Plato über den Schnitt begonnen worden war', als Erklärung angiebt. ‚Der Schnitt, über welchen Untersuchungen von Platon begonnen worden waren, muss, wie in richtigem Verständnis dieses lange für unerklärlich dunkel gehaltenen Ausspruches von Bretschneider[4]) erkannt worden ist, ein ganz bestimmter gewesen sein, ein solcher, dem die damalige Zeit die grösste Bedeutung beilegte. Das war aber der Fall mit dem Schnitte der Graden nach stetiger Proportion, mit dem sogenannten goldenen Schnitte, wie die spätere Zeit ihn genannt hat.'

Mit Übergehung anderer dort ausgesprochener Vermutungen sei noch erwähnt, dass nach einem dem Proclus zugeschriebenen[5]) Scholion zu Euclid der wesentliche Inhalt des fünften Buches der Euclidischen Elemente dem Eudoxus angehört. Nun folgt im sechsten

---

1) Platon Timaeus p. 55 C: ἔτι δὲ οὔσης ξυστάσεως μιᾶς πέμπτης, ἐπὶ τὸ πᾶν ὁ θεὸς αὐτῇ κατεχρήσατο. Hierzu gehört dann in dem für unecht erklärten Timaeus Locr. der Satz (p. 98 E) τὸ δὲ δωδεκάεδρον εἰκόνα τοῦ παντὸς ἑστάσατο.

2) M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik 1880 I p. 208.

3) Proclus p. 67, 6 (Friedlein).

4) Die Geometrie und die Geometer vor Euclides p. 167.

5) Knoche, Untersuchungen über die neu aufgefundenen Scholien des Proclus Diadochus 1865.

Buche der Elemente als 30. Protasis die Teilung nach dem goldnen Schnitte. Hier steht die Aufgabe in der noch jetzt ausserhalb Deutschlands einzig gebräuchlichen Fassung, die man die klassische nennen kann; nämlich eine begrenzte Grade im äussern und mittlern Verhältnisse zu teilen. Aber die Auflösung derselben Aufgabe in einer andern Form, nämlich eine begrenzte Grade so zu teilen, dass das Quadrat über dem grösseren Teile gleich sei dem Rechtecke aus dem kleineren Teile und der ganzen Linie, bildet nebst Auflösung schon im zweiten Buche die 11. Protasis und wird schon in der 10. Protasis des vierten Buches zur Construction des regelmässigen Zehnecks und Fünfecks, also zur Auflösuug der Hauptfrage, verwendet.

Die Angabe des Scholions, dass Euclid den Inhalt des fünften Buches seiner Elemente aus den Schriften des Eudoxus entnommen habe und die Annahme, dass Eudoxus der Erfinder des goldnen Schnittes gewesen sei, lassen sich mit den obigen Thatsachen in Einklang bringen, wenn man zugleich annimmt, Euclid habe von der lange bekannten Erfindung in der ihm geeignet erscheinenden Form nach seiner Anordnungsweise Gebrauch gemacht, die wichtige Aufgabe aber später in der Form des Erfinders und nach der Anordnungsweise desselben noch einmal aufgeführt.

Derselbe Eudoxus wird auch von Eratosthenes [1]) und von Archimedes [2]) als Mathematiker gerühmt. Es ist also wohl gegen die Annahme, er sei der Erfinder der Teilung nach dem goldnen Schnitte gewesen, nichts andres zu sagen, als dass eine directe Mitteilung darüber aus dem Altertume nicht bekannt ist.

Dies ist um so befremdlicher, als diese Teilung den unentbehrlichen Schlüssel zur geometrischen Construction des fünften und wichtigsten der Weltkörper bildet, auf die sich das Interesse der pythagorischen und platonischen Naturphilosophie concentriert. Proclus, der neuplatonischen Richtung angehörig, kennt auch nichts höheres als diese Symbolik. Von Pythagoras rühmt er als ein besonderes Werk, dass er diese Zusammenstellung der Weltkörper gefunden habe, von Euclid sagt er, dass er ein Platoniker gewesen und dass ihm das höchste Ziel der Bearbeitung seiner Elemente die Construction der platonischen Körper gewesen sei; eine seltsame Ansicht, die auch Kepler teilt.

Gegen die Angabe des Proclus, es habe Euclid zur platonischen Schule gehört, spricht eine sehr wohl begründete Äusserung von F. August [3]) im Leben des Euclid: ‚Es kann niemand behaupten, dass man in den Werken des Euclid eine Andeutung finde, aus der man schliessen könnte, derselbe habe zu irgend einer bestimmten Philosophenschule gehört. An Versuchung, den Weg der Philosophen zu betreten, hätte es ihm nicht gefehlt; man lese nur in dem Commentar des Proclus zum ersten Buche der Elemente, was für sinnlose Träumereien über Punkte, Linien, über die Einheit und andere mathematische Begriffe die berühmtesten Philosophen vorgebracht haben.‘

Um zu erklären, warum über die Erfindung und den Erfinder einer Construction, welche den Alten so wichtig erscheinen musste, gar keine Nachricht auf uns gekommen

---

1) Eratosthenica compos. Bernhardy p. 180. E. Hiller, Eratosthenis carm. p. 130.

2) Archimedis opp. ed. Heiberg 1880 I p. 4.

3) Euclidis elementa graece ed. August 1826 I p. 296.

ist, muss man wohl annehmen, dass Platons Nachfolger ihren Schriften ganz besonderes Ansehen und weiteste Verbreitung zu verschaffen in der Lage waren und dass bei ihrem Eifer für die naturphilosophische Speculation das Interesse für die Arbeit der Geometrie, welche den beschwerlichen Pfad (die ἀτραπὸς μὴ βασιλική) herzustellen hatte, ein untergeordnetes war. Andrerseits müssen wohl auch die alten Geometer, wenngleich die erhabene Anregung durch Pythagoras und Platon ihnen ehrwürdig war, bald die Unmöglichkeit eingesehen haben, auf dem Wege derselben ihr Wissen zu fördern. Zum Teil mag es der Einfluss des Aristoteles gewesen sein, dessen strenge und nüchterne Denk- und Sprechweise der mathematischen Geistesarbeit besser entsprach; in den mathematischen Schriften der klassischen und nachklassischen Zeit und ganz besonders bei Euclid erinnert nichts an den liebenswürdigen Umgang des Platon mit seinen Lesern, Symbole und Ideale sind verbannt. Der goldne Schnitt und die Weltkörper werden mit derselben, man möchte sagen, gleichmütigen Einfachheit und auf das Notwendigste beschränkten Kürze behandelt, wie jeder andre Satz und jede andre Frage.

Durch Socrates, Platon und Aristoteles war die Äusserung freier Geistesthätigkeit zu einer vorher unbekannten Entwickelung gelangt. Bald jedoch überflutete, besonders seit Alexanders Siegen, die Barbarei der morgenländischen Höfe die noch nicht erstarkte geistige Freiheit und zuletzt brachte das Vordringen der zum freien Denken und Wissen noch ganz unfähigen Völkermassen aus Osten und Norden ihr auch von unten aus tödliches Verderben. So ist es gekommen, dass die abendländischen Völker den jetzigen Besitz des geistigen Erwerbes ihrer Vorfahren, das Product ihres Bodens, ihres Himmels und ihres Strebens, zum grössten Teil den halbbarbarischen Arabern verdanken.

Auch der Euclid tritt erst mit festem Fusse in die abendländischen Schulen durch die noch jetzt geschätzte Übersetzung des Clavius. Dieser aber arbeitete nach der lateinischen Übersetzung und Bearbeitung des Campanus von Novara, der den griechischen Text noch nicht besass. Campanus lebte um die Mitte des dreizehnten Jahrhunderts, zur Zeit Friedrichs des Zweiten von Hohenstaufen, der als Freund maurischer Wissenschaft nicht ganz ohne Einfluss auf die Beförderung des mathematischen Unterrichtes im damaligen Reiche gewesen ist. Campanus' Übersetzung und Bearbeitung des arabischen Euclid war zwar nicht die allererste aber doch mehrere Jahrhunderte hindurch die am meisten verbreitete lateinische Ausgabe der Elemente und wurde wenigstens bei uns in Deutschland erst durch die Baseler griechische Ausgabe und besonders durch Clavius abgelöst. Doch bedauert schon Kepler[1]), dass er sie nicht zur Hand habe.

Die Teilung nach dem goldnen Schnitte wird von diesem Campanus, weil sie ein unentbehrliches Hülfsmittel für die Construction der regelmässigen Körper sei, als eine bewundernswerte geometrische Leistung hervorgehoben. Ob derselbe darin einem arabischen Lehrer oder Vorgänger folgt, liess sich mit den vorhandenen Hülfsmitteln nicht entscheiden. Petrus Ramus[2]) bemerkt in seiner Geometrie zur Construction des goldnen Schnittes: ‚Proportioni autem sectionis huius a Campano (comment. 10 p. 14) mirabilis

1) Kepleri opp. VI p. 567.

2) Petri Rami Geometriae libri a Lazaro Schonero recogniti Francf. 1699 p. 94.

potentia tribuitur in adscriptionibus ordinatorum solidorum: cui cum plurima philosophantium admiratione digna conveniant, hoc principium vel praecipuum ex superiorum invariabili procedit natura, ut tam diversa solida, tum magnitudine tum basium numero tum etiam figura irrationali, quadam symphonia rationabiliter conciliet. Haec Campanus alioquin orator laudum parcissimus.' Dieser Satz, der zugleich als mathematische Sprachprobe aus jener Zeit dienen kann, enthält die älteste zugängliche Angabe von der emphatischen Auffassung des goldnen Schnittes in Bezug auf seinen geometrischen Wert. In demselben Sinne fügt Clavius[1]) der Auflösung dieser Aufgabe das Scholium bei: ‚Die wunderbare Teilung einer Linie nach dem äussern und mittlern Verhältnis hat vorzügliche Eigenschaften, wie es in den Büchern von den Körpern deutlich werden wird; so dass von manchen Mathematikern gesagt wird, eine so geteilte Linie habe gewissermassen wegen ihrer wunderbaren Kraft und Natur göttliche Proportion.' Diese rein geometrische Entzückung teilt auch Kepler[2]), wenn er ganz unabhängig von der symbolischen Bedeutung, die er dieser Construction beilegt, über dieselbe sagt: ‚Die Geometrie hat zwei grosse Schätze, einer ist der Satz des Pythagoras, der andre die Teilung einer Linie im äussern und mittlern Verhältnis, den erstern kann man einer Masse Goldes vergleichen, den andern kann man einen kostbaren Edelstein nennen.'

Die Nachfolger des Euclid haben in dem hohen Interesse für die Construction der regelmässigen Körper, deren genaue Kenntnis, freilich in einer selbst von Kepler noch gar nicht geahnten Weise, den Anfang der heutigen Krystallographie bildet, eine Menge zum Teil untergeordneter, zum Teil für den weiteren Fortschritt unentbehrlicher Lehrsätze aufgestellt, in denen ausgiebigster Gebrauch vom goldnen Schnitte gemacht wird. Aus diesen Bemühungen sind die beiden Bücher über die regelmässigen Körper hervorgegangen, die dem Alexandriner Hypsikles aus dem Anfange des zweiten Jahrhunderts vor Chr. zugeschrieben werden und die von Campanus und wahrscheinlich schon vor den Arabern als vierzehntes und fünfzehntes Buch den Elementen des Euclid beigefügt wurden. Sie bilden einen Ersatz für das in der 2. Protasis des vierzehnten Buches der Elemente, des ersten von Hypsikles, erwähnte Werk über die Vergleichung der fünf Körper von Aristäus dem älteren, welchen Cantor vor Euclides setzt, und für das Werk des Apollonius über denselben Gegenstand, welches in der an Protarchus gerichteten Vorrede zu den beiden Büchern des Hypsikles erwähnt wird. Im sechzehnten Jahrhundert (1578) hat Franciscus Flussas Candalla den Elementen noch drei Bücher über denselben Gegenstand hinzugefügt und so die Zahl der Bücher der der behandelten Körper gleich gemacht. Alle diese Arbeiten beruhen zum grossen Teil auf der Anwendung des goldnen Schnittes, der aber darin ohne jede Auszeichnung vor andern geometrischen Constructionen behandelt wird.

Die erste Erwähnung einer kühn symbolisierenden Verwendung des goldnen Schnittes findet man in einem andern mathematischen Lehrbuche des Petrus Ramus[3]). Dort wird

1) Zu Euclid VI prop. 30.

2) Kepleri opp. I p. 140 und 145.

3) Petri Rami Veromandui schol. math. libri triginta. Francof. ad Moenum 1627 p. 191.

in Bezug auf eine nach dem äussern und mittlern Verhältnis geteilte Linie ausdrücklich gesagt: ‚Denique Christianis quibusdam divina quaedam proportio haec animadversa est, ut inde una trinitas et unitas trina conciperetur, quae tota sit in toto et in parte qualibet, totum in magno, totum in parvo, principium unicum et beatissimum.‘ Das magnum und das parvum in dieser Angabe sind die beiden ungleichen Teile der nach dem goldnen Schnitt geteilten Linie, welche jetzt in den Schriften vom goldnen Schnitte der Major und der Minor genannt werden. Eine in Bezug auf diese Äusserung vorgenommene Durchsicht theologischer Schriften über Symbolik und Mystik ergab kein hier verwendbares Resultat. Die ganze Angelegenheit scheint wohl beim mündlichen Unterrichte in der Elementar-Geometrie Gegenstand der Besprechung gewesen zu sein, da die meisten Lehrer geistlichen Orden angehörten; in wissenschaftlichen Arbeiten findet man nichts darüber. Auch was Ramus hinzufügt: ‚Atque inde et coelestium rerum praecipua mysteria a Ptolemaeo repetuntur‘, bestätigt sich nicht. Als Amulett oder Talisman verwendet zu werden wie die pythagoreischen Zahlen-Combinationen, die Zauberquadrate und Trudenfüsse war der goldne Schnitt auch nicht geeignet, weil das durch denselben dargestellte Bild eines Punktes auf einer begrenzten Graden der sinnlichen Anschauung gar zu wenig bietet, und so blieb es der neuesten Zeit vorbehalten die mystische Kraft desselben durch Versuche in einer andern Weise zu erproben.

Für den eigentlichen Vorgänger unserer heutigen Enthusiasten des goldnen Schnittes gilt der Mathematiker Pacioli (Frater Lucas de Burgo Sancti Sepulcri, Ordinis minorum) aus Burgo in Toscana, welcher 1509 dem Gonfaloniere der damaligen Republik Florenz ein mathematisches Werk in italienischer Sprache ‚Divina proportione‘ widmete. Aber dies Werk handelt nicht vom goldnen Schnitte und überhaupt nicht von einer bestimmten Proportion, sondern von der Proportionalität der Dinge im allgemeinen als einer göttlichen Eigenschaft. Der Name mag wohl als Seitenstück zu divina comedia gewählt sein, aber der Gegenstand vertrug die Vergleichung mit einem solchen Kunstwerke nicht, welches durch unmittelbare Wirkung ohne Anstrengung des Nachdenkens befriedigt. Die ganze Arbeit hat kaum noch historisches Interesse; sie muss, wenn auch von geringem Umfange, doch jetzt sehr wertvoll sein, da Leonardo da Vinci selbst die Figuren dazu gezeichnet und gestochen hat. Der bekannte Libri, welcher darüber ausführlich berichtet, sagt nicht, dass er das Originalwerk in Händen gehabt habe. Er giebt [1]) eine Probe daraus als Beleg, dass Pacioli der erste gewesen sei, welcher die kleinen lateinischen Buchstaben zur Bezeichnung unbestimmter oder beliebiger Zahlen angewendet habe. Über den Inhalt des Buches sagt Libri: ‚Dans la Divina proportione Pacioli a voulu faire servir de base à toutes les sciences une proportion connue depuis long-temps des géomètres. Il en a déduit les principes de l'architecture, les proportions de la figure humaine et même celles qu'il faut donner aux lettres de l'alphabet.‘ Das wäre also die Quelle der neuern Chryseotomologie. Aber die Proportion, die Libri anführt, nämlich $4:6 = 6:9$ enthält nicht den goldnen Schnitt, der überhaupt nicht durch eine Proportion in rationalen Zahlen ausdrückbar ist. Bei einer richtigen geometrischen Proportion nach

1) Libri, Histoire des Sciences mathém. en Italie 1840 III p. 144 Anm. 2.

dem goldnen Schnitte muss die Summe des ersten und zweiten Gliedes gleich dem vierten Gliede sein. Die obige Proportion stellt einen sehr einfachen Fall einer rationalen mittlern geometrischen Proportionale dar. Diese Art von Proportionen unterscheidet Euclid nicht durch einen besondern Namen, man brauchte aber schon im Altertume für dieselbe den noch jetzt üblichen, nicht ganz unzweideutigen Namen stetige Proportion. In dem Briefe des Eratosthenes[1]) an König Ptolemäus, in welchem das bekannte Problem der Verdoppelung des Würfels als gleichbedeutend mit der Bestimmung zweier mittlern Proportionalen erklärt wird, heisst die Aufstellung derselben συνεχὴς ἀναλογία. Der goldne Schnitt ist ein specialisierter Fall der mittlern Proportionale.

Über die Divina proportione sagt Suter[2]): ‚Wir haben von Pacioli eine Abhandlung de proportione divina, welchen erhabenen Titel er dem heutzutage unter dem Namen harmonische Teilung bekannten Verhältnisse von vier Punkten einer Graden beilegte'.

Der Begriff harmonische Teilung als Verhältnis von vier Punkten war aber den Alten unbekannt und zur Zeit des Pacioli noch gar nicht entwickelt. Die harmonische Proportion als eine Beziehung zwischen drei Zahlen wurde schon von den Pythagoreern studiert, sie verstehen aber darunter immer nur den besondern Fall, der die Zahlen 3, 4 und 6 betrifft. Nach Cantor[3]) betrachteten sie aber auch die Verallgemeinerung. In den Elementen des Euclid, in denen für Proportionalitäts-Fragen nicht geringer Aufwand gemacht wird, kommt die harmonische Proportion nicht vor, desto fleissiger haben die Commentatoren sich damit beschäftigt. Clavius unterscheidet den Fall, der die Alten besonders interessierte, durch den Namen musicalische Proportion, weil drei Saiten von gleicher Dicke und Spannung, deren Längen sich wie $3:4:6$ verhalten die consonierenden Intervalle der Octave, Quint und Quart geben. Von dieser musicalischen Proportion, die man nach dem Schema der allgemeinen harmonischen Proportion in der Form $3:6 = 4-3:6-4$ oder mit vertauschten innern Gliedern in der Form $3:4-3 = 6:6-4$ aufstellt, haben die Wörter Harmonie und harmonisch wohl seit Platon die mannigfaltigen Bedeutungen bekommen, auf deren Verwandtschaft in der Angabe von Suter die Verwechselung beruht. Eine sehr naheliegende Verbindung der musicalischen Proportion mit der harmonischen Beziehung von vier Punkten einer Graden bildet eine Eigenschaft des Dreiecks.

Wenn man die Mittelpunkte der drei Seiten eines beliebigen Dreiecks sowohl unter sich als auch mit den gegenüberliegenden Dreiecksspitzen verbindet, dann wird jede der drei letztern Verbindungslinien nach musicalischer Proportion geteilt, so dass jedes obere Stück zur Summe dieses obern und des mittlern und diese zur Ganzen sich verhält wie $3:4:6$. Diese Eigenschaft des Dreiecks ist ein Corollar zu der bekannten harmonischen Eigenschaft des vollständigen Vierseits, auf welche Steiner seine Linear-Construction gegründet hat. Nach Chasles[4]) bildet dieser schöne Satz der neuern Geometrie die 131.

1) Eratosthenis carminum reliquiae ed. Hiller p. 125, 17.

2) Suter, Geschichte der mathematischen Wissenschaften, Zürich 1872 p. 149.

3) a. a. O. p. 140.

4) Chasles, Aperçu historique 2. éd. 1875 p. 36.

Proposition im siebenten Buche der Sammlungen des Pappus, freilich in einem zur ferneren Entwickelung nicht ohne weiteres fähigen Zustande. Bei den harmonischen Proportionen der Alten sind drei Zahlen oder auch drei Strecken durch die in der Proportion ausgesprochene Bedingung arithmetisch so mit einander verbunden, dass man eine derselben durch einfache Rechnung oder durch Construction einer vierten Proportionale aus den beiden andern bestimmen kann. Clavius giebt[1]) für die verschiedenen Fälle der Aufgabe die sehr umständlichen und unbeholfenen Constructionen seiner Zeit. Die harmonische Proportion und die daraus abgeleitete harmonische Reihe scheinen einer weiteren Entwickelung nicht fähig zu sein, sie stehen noch auf demselben Standpunkte, auf dem man sie bei Clavius findet.

Bei dem harmonischen Verhältnisse von vier Punkten einer Graden sollen die Verhältnisse der Abstände von vier in bestimmter Zuordnung betrachteten Punkten einer gewissen einfachen Proportionalität unterworfen sein. Dieser Bedingung wird nicht durch Rechnung oder Messung genügt, sondern durch perspectivische Projection, wobei man sich wegen der Einfachheit der Bedingung des unendlich fernen Punktes der Graden als eines gegebenen Punktes bedienen darf. Die Zahlenfrage existirt dabei gar nicht, es handelt sich um die Anordnung der Punkte und nur um die relative Länge ihrer Abstände, die Constructionen sind vom Kreise oder irgend einer gemessenen Strecke ganz unabhängig. Das Wesen dieser durchaus der neuern Zeit angehörigen Betrachtungsweise wird ganz verdunkelt, wenn man dieselbe mit der harmonischen Proportion der Alten in Verbindung bringt. Die Arbeiten des Apollonius und Pappus über das Auftreten der harmonischen Proportion an geometrischen Gebilden betrachtet Chasles als die Anfänge der neuern Geometrie, er sagt aber auch selbst[2]), es scheine, dass die Allgemeinheit dieser Beziehungen den Alten nicht bekannt gewesen sei.

Suters Angabe, die Divina proportione beschäftige sich mit dem harmonischen Verhältnisse von vier Punkten, beruht also auf einer Verwechselung. Diese Beziehung kannten die Alten nicht und Pacioli konnte ebensowenig etwas davon wissen; das Studium derselben beginnt erst mit dem Anfange des neunzehnten Jahrhunderts. Die Divina proportione beschäftigt sich natürlich mit der musicalischen Proportion und mit der mittleren Proportionale; Ramus giebt auch an, dass darin bei der Construction der regelmässigen Körper die geometrische Wichtigkeit des goldnen Schnittes hervorgehoben werde.

So viel ersieht man aus diesen Angaben über das leider nicht zu beschaffende Original der Divina proportione, dass der Name derselben nicht für den goldnen Schnitt erfunden worden ist, und dass ihr Verfasser Pacioli nicht der Urheber der Emphase des goldnen Schnittes ist.

Der erste, der ausdrücklich diese bestimmte Teilung mit dem Nimbus tiefsinniger Natur-Symbolität, ganz in der Weise der Pythagoreer, zu umgeben versucht hat, war Kepler. Er war aber weit davon entfernt der Natur oder gar der Kunst, an die er gar nicht dachte, damit ein Gesetz geben zu wollen. Der ganze Begriff Naturgesetz

1) Zu Euclid VI 17.

2) Aperçu historique p. 40.

existierte überhaupt, wie es scheint, vor der Verbreitung des Gravitations-Gesetzes gar nicht in einer so entwickelten Weise, dass er hätte Gegenstand einer geordneten Gedankenfolge sein können.

III.

Nach Kepler kam die ganze Sache ins Vergessen. Man fand in den Arbeiten desselben einen so wichtigen und reellen Inhalt, dass man die Phantasieen und geistreichen Einfälle auf sich beruhen lassen konnte. Später findet sich in den Elementen des Euclid von Tacquet[1]) wieder die Bemerkung: ‚Der Nutzen dieser Teilung bei der Construction und Vergleichung der regelmässigen Körper ist bewunderungswürdig'.

Erst gegen Ende des vorigen Jahrhundert als Gnuss[2]), Eigenschaften der algebraischen Gleichungen, der Primzahlen und der Kreislinie in eine einzige Schlussfolge zusammenfassend, zeigte, dass der goldne Schnitt nicht das letzte Hülfsmittel in der Teilung des Kreises mit Zirkel und Lineal sei, wurde dieser Construction neues Interesse zugewendet. Denn die Teilung des Kreises in fünf gleiche Teile mit Hülfe des goldnen Schnittes bildete als der schwierigste und letzte der schon den Alten bekannten Fälle den natürlichen Ausgangspunkt für das Verständnis der neuen Theorie. Bei dieser ist aber die geometrische Construction nur eine ihrer Anschaulichkeit wegen interessante Nebenfrage; mit den schwärmerischen Ansichten von der nichtmathematischen Bedeutung des goldnen Schnittes hat dieselbe absolut nichts zu thun.

Nicht lange nach den Befreiungskriegen entwickelte bei uns die sogenannte speculative Naturphilosophie einen überraschenden Einfluss auf den denkenden Teil des Volkes. In die Mitte dieser Zeit fällt das Wiederaufleben der Keplerschen Phantasieen.

‚Die Pflanzenwelt,' sagt einer der Vertreter jener Richtung, ‚wird bald das Gesetz ihrer Bildung unter einen mathematischen Ausdruck gebracht sehen und dieses Gesetz wird dann als der wundersame Schlüssel erscheinen, der uns zu den Urtypen des Gewächsreiches einführen und das Getriebe seiner Entwickelung bis ins Besonderste vor uns blos legen wird.' Aber nicht allein in der Pflanzenwelt, auch in allen Teilen des tierischen und menschlichen Körpers, bei allen Gebilden der Baukunst, der Plastik und Malerei, bei allen Producten der Technik von der Robe nach Mass und Schnitt bis zur Axt des Ansiedlers im fernen Westen sollte alle Schönheit und Brauchbarkeit auf der Anwendung des goldnen Schnittes beruhen. Selbst in der Metrik musste der Hexameter darnach geteilt sein.

Um die Fähigkeit zu solchen Leistungen an dieser einfachen Construction hervortreten zu lassen, muss man dieselbe einer arithmetischen Behandlung unterziehen. Auf

1) Elementa Euclideae geometriae auctore Andrea Tacquet. Amstelod. 1725 p. 201.

2) Die erste Nachricht von dieser Entdeckung findet man im Intelligenzblatte der allgemeinen Litteraturzeitung 1796 p. 554.

das Resultat derselben wird von denen, die an die Sache glauben, das grösste Gewicht gelegt. Aber durch eine genauere Betrachtung des Weges, auf dem man zu den Resultaten gelangt, kann man sich überzeugen, dass dieselben weder mit der Natur noch mit der Kunst etwas zu thun haben können, und die Beschaffenheit derselben zeigt auch, dass die Anwendungen des goldnen Schnittes ausserhalb der Mathematik ein blosses Spiel mit Worten sind.

Wenn man die Aufgabe, eine begrenzte grade Linie so in zwei ungleiche Teile zu teilen, dass der kleinere Teil sich zum grössern verhält, wie dieser grössere zur ganzen Linie, arithmetisch aufstellt, indem man die Zahl 1 statt der zu teilenden Strecke wählt und den gesuchten grösseren Teil durch x bezeichnet, so erhält man die Proportion

$$1 - x : x = x : 1$$

und hieraus die Gleichung

$$x^2 + x = 1$$

Die Auflösung derselben ergiebt für den grösseren Teil die Zahl

$$\frac{\pm\sqrt{5} - 1}{2}$$

Es ist leicht zu sehen, dass das Minuszeichen vor der Wurzelgrösse eine Zahl ergeben würde, welche der in der Aufgabe gestellten Forderung nicht entsprechen kann, wenn sie auch die unmittelbar aus der Aufgabe abgeleitete Gleichung befriedigt. Die Gleichung ist durchaus nicht identisch mit der Aufgabe. Es kann gar keine allgemeine Methode geben, den ganzen Inhalt einer jeden Aufgabe durch eine Gleichung identisch wiederzugeben. Das Aufstellen der Gleichung geschieht unter der Annahme, dass die in der Aufgabe enthaltene Frage eine Antwort im Sinne des Fragenden haben müsse. Die Umformung und Auflösung der Gleichung beruht auf den Annahmen, dass die mathematischen Grundsätze unbedingt gültig seien und dass jede Rechnung auch umgekehrt ausführbar sei und dann wieder das früher Vorhandene hervorbringe. Was hernach aus den Resultaten der Rechnung für den Zweck einer Anwendung gefolgert wird, ist keine rein mathematische Frage mehr, und die sogenannte mathematische Richtigkeit findet dabei nur cum grano salis statt.

Von den beiden durch die Gleichung bestimmten Zahlen für den grösseren Teil der nach dem goldnen Schnitt geteilten Zahl 1 passt die eine durchaus nicht zur Aufgabe, und die andre nämlich

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

ist keine angebbare Zahl. Denn es giebt weder eine ganze noch eine gebrochene Zahl, welche mit sich selbst multipliciert die ungebrochene Zahl 5 zum Producte geben könnte. Die Aufgabe vom goldnen Schnitt hat also gar keine wirkliche arithmetische Lösung. Sie setzt voraus, dass die zu teilende Grösse stetig zusammenhängend sei wie der abstracte Raum, und das ist gegen den Begriff der Zahl.

Die geometrische Begründung dieser Eigenschaft steht schon in den Elementen des Euclid (XIII 6), gestützt auf die künstlichen Propositionen des zehnten Buches, welche für uns durch die jetzt gebräuchliche arithmetische Behandlung der Geometrie fast ganz wertlos geworden sind. Man sollte glauben, diese Eigenschaft hätte die Naturforschung von der Annahme, dass der goldne Schnitt in der Natur existieren könne, unbedingt abhalten müssen. Wenn Kepler in der Form der dodekaedrischen Schwefelkies-Krystalle einen Beweis für das unmittelbare Vorkommen des goldnen Schnittes in der Natur zu sehen glaubte, so war sein Irrtum verzeihlich. Er konnte nicht wissen, dass ein sorgfältiges Studium der Krystallformen zu der Überzeugung führt, das regelmässige Dodekaeder könne als natürliche Krystallgestalt gar nicht[1]) existieren, weil seine Krystall-Axen incommensurabel, ihr Verhältnis irrational sei. Das war aber bekannt, als die neue Lehre über die Bedeutung des goldnen Schnittes in der Natur aufkam, und ebenso auch, dass die scheinbar regelmässigen Fünfecke und Zehnecke an Tier- und Pflanzenkörpern ebenso wie die Dodekaeder der Pflanzenzellen und der cylindrisch gebauten, erst nach dem Trockenwerden fast regelmässig sechsseitig erscheinenden Bienenzellen mit der geometrischen Construction dieser Formen nichts zu thun haben. Man nahm aber auf diese Resultate sorgfältiger Beobachtungen und Studien keine Rücksicht und betrachtete die arithmetische Behandlung des goldnen Schnittes von einer andern Seite. Die mit der scheinbar natürlichen Einfachheit dieser Betrachtungsweise verbundene arithmetische Schlauheit war ganz geeignet die Inhaltslosigkeit der Grundlagen aller vom goldnen Schnitte ausgehenden Phantasieen zu verdecken.

Die aus der ursprünglichen Proportion

$$1 - x : x = x : 1$$

hervorgehende Gleichung für den Major des goldnen Schnittes

$$x^2 + x = 1$$

lässt sich in die Form bringen

$$x = \frac{1}{1+x}$$

Wenn man in dieser Gleichheit das im Nenner der rechten Seite stehende x in Gedanken mit dem x auf der linken Seite des Gleichheitszeichens vertauscht und dieses wieder mit seinem durch das Gleichheitszeichen angegebenen Werte, so erhält man

$$x = \frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}$$

Ein solches Vertauschungs-Verfahren darf man so oft wiederholen, als man will, und erhält auf diese Weise den Wert der Zahl x, des grösseren Teiles der nach dem goldnen Schnitte geteilten Zahl 1 in Form eines beliebig langen aus lauter Einheiten gebildeten Kettenbruches.

Betrachtet man irgend einen dieser Kettenbrüche, etwa den viergliedrigen

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}}$$

1) Naumann, Anfangsgründe der Krystallographie p. 63.

so erkennt man bald, dass der Wert desselben kleiner sein muss als der des Bruches $\frac{1}{1}$, denn man mag der noch unbekannten Zahl x am Ende desselben irgend einen noch so grossen oder noch so kleinen positiven Wert beilegen, immer wird das Resultat der Ausrechnung der drei letzten Glieder des Kettenbruches eine positive Zahl sein. Wenn man diese vernachlässigt, so erhält man $\frac{1}{1}$, welches grösser sein muss als jeder andre durch weiter fortgesetzte Rechnung zu findende Wert; denn, wenn man den Nenner eines Bruches verkleinert, den Zähler aber unverändert lässt, dann vergrössert man den Wert.

Lässt man erst am zweiten Gliede des Kettenbruches den Summanden des Nenners fort und setzt

$$x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}$$

so erhält man das ungenaue Resultat

$$x = \frac{1}{2}$$

Es ist aber leicht zu erkennen, dass der weiter ausgerechnete Bruch einen grössern Wert haben muss, denn man hat am Nenner des Nenners einen positiven Summanden weggelassen, den Nenner also vergrössert und den Wert verkleinert.

Setzt man in dem bis zum dritten Gliede fortgesetzten Kettenbruche

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}$$

statt der beiden letzten Glieder den gleichen Wert $\frac{1}{2}$, welcher nach der vorigen Überlegung wegen Vernachlässigung eines Summanden im Nenner seines Nenners zu klein ist, so erhält man den Wert $x = \frac{2}{3}$, welcher also wieder grösser sein muss als der eigentliche Wert der Zahl x.

Verlängert man aber das erste Glied $\frac{1}{1}$ um drei hinzugefügte Glieder, so tritt wieder der Umstand ein, dass man seinen Nenner zu gross nimmt und das jetzt hervorgehende Resultat $\frac{3}{5}$ wieder kleiner sein muss als der wahre Wert.

Da die Glieder des Kettenbruches immer dieselben bleiben und eine Grenze der Verlängerung nicht in der Sache liegt, so bilden also alle diese Näherungswerte eine unbegrenzte Reihe von Brüchen, welche abwechselnd grösser und kleiner sind als der wahre in Zahlen gar nicht angebbare Wert der gesuchten Zahl. Da der erste Näherungsbruch grösser ist als jeder folgende, der zweite kleiner als jeder folgende und ebenso wieder der dritte grösser, der vierte kleiner als jeder folgende und so weiter; so bilden also die grösseren Werte eine abnehmende, die kleineren eine zunehmende und alle zusammen eine gegen den gesuchten Grenzwert convergierende Folge von Näherungswerten.

Bei der Aufstellung dieser Reihe

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \dots$$

ersieht man, dass man jeden folgenden Bruch erhält, wenn man die Summe der Zähler der beiden vorhergehenden als Zähler und die Summe der Nenner derselben beiden vorhergehenden als Nenner nimmt. Dies ist eine einfache Folge des Umstandes, dass der Kettenbruch keine andre Zahl als die Zahl 1 enthält. Daraus folgt auch, dass er der einzige ist, dessen Näherungsbrüche aus möglichst kleinen Zahlen bestehen für einen bestimmten Stellenzeiger in ihrer Reihenfolge. Man kann diese Eigenschaft auch so aussprechen: wenn man irgend einen dieser Näherungsbrüche in einen Kettenbruch verwandelt, so erhält man einen längern Kettenbruch, als wenn man irgend einen andern Bruch verwandelt, dessen Zähler und Nenner zwischen dem Zähler und Nenner des gewählten Näherungsbruches und des auf ihn folgenden beziehungsweise liegen. Oder auch: wenn man zwischen dem Zähler und Nenner eines dieser Näherungswerte den grössten gemeinschaftlichen Teiler suchen wollte; so müsste man mehr Divisionen machen, als für irgend zwei andre Zahlen, die kleiner sind als Zähler und Nenner des nächstfolgenden Näherungswertes.

Die Beziehung dieser Näherungsbrüche zum goldnen Schnitt tritt hervor, wenn man für irgend einen derselben die Proportion aufstellt

Zähler : Nenner = Nenner : (Summe aus Zähler und Nenner).

Wählt man einen Bruch aus der Reihe derer, welche grösser sind als der gesuchte Wert, nämlich einen mit ungradem Stellenzeiger z. B. $\frac{5}{8}$, so erhält man die nur annäherungsweise richtige Proportion

$$5 : 8 = 8 : 13,$$

bei welcher das Product der äussern Glieder um 1 grösser ist als das Product der innern.

Wählt man irgend einen Bruch aus der andern Reihe, z. B. $\frac{3}{5}$, so erhält man die Proportion

$$3 : 5 = 5 : 8,$$

bei welcher das Product der äussern Glieder um 1 kleiner ist als das der innern.

Diese Eigenschaft der Näherungsbrüche für den Major des goldnen Schnittes ist von Kepler in dem eingangs angeführten Briefe durch eine Zeichnung anschaulich gemacht. Sie bildet die einfachste Anwendung des Satzes, dass die Differenz zweier auf einander folgenden Näherungswerte eines gewöhnlichen Kettenbruches jedesmal einen Stammbruch giebt, eines wichtigen Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen, von welcher im Vorhergehenden gezeigt ist, wie sich dieselbe in der primitivsten Weise behandeln lässt.

Die in den Näherungsbrüchen auftretenden Zahlen kann man in einfacher Reihenfolge auch als die Coefficienten einer recurrenten Reihe erhalten, wenn man den Bruch:

$$\frac{1}{1-x-x^2}$$

durch algebraische Division in eine Reihe entwickelt.

Man erhält dann:

$$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + \ldots\ldots,$$

worin der Coefficient jedes folgenden Gliedes mit Ausschluss des ersten gleich ist der Summe der Coefficienten der beiden vorhergehenden Glieder. Auch die Zahlenreihe

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 \ldots$$

spielt in den sogenannten Blattstellungsgesetzen eine Rolle. Die Begründung eines solchen Gesetzes mit Hülfe dieser Zahlen, welche den Kettenbruch-Näherungswerten des goldnen Schnittes angehören, hat Schleiden [1]) vom botanischen Erfahrungsstandpunkte aus gründlich zurückgewiesen. Er wusste aber offenbar nicht den wahren Namen der Sache, denn er geht mit dem mittlern Divergenzwinkel, welchen zwei durch die Axe eines Pflanzenstengels und je einen Anheftungspunkt zweier benachbarten Blätter gelegte Ebenen aus dem teleologischen Grunde, damit diese Blätter möglichst viel Licht und Luft erhalten, mit einander bilden sollen, ziemlich rücksichtsvoll um. Auch Albert Sonnenburg [2]), der in einem nachher wenig beachteten Buche diese Verhältnisse mit grossem Fleisse im Geiste der Pythagoreer behandelt, scheint nichts vom goldnen Schnitte, der dahinter steckt, zu wissen. Erst Nees von Esenbeck [3]) sagt es ausdrücklich: ‚Der Divergenzwinkel ist nichts anderes als der Minor der nach dem äussern und mittlern Verhältnis geteilten Kreisperipherie'. Aber schon die Angabe dieses Winkels zu $137^0\,30'\,28''$ in Einheiten der Bogen-Secunde bei einem Gegenstande, der kaum mit einer Genauigkeit von 5 zu 5 ganzen Graden zuverlässig gemessen werden kann, zeigte ziemlich verständlich, dass eine mathematische Spielerei hinter dem Naturgesetze stecke. Für Schleiden wurde das Auffassen des eigentlichen Kernes der Sache besonders erschwert, man könnte sagen, unmöglich gemacht durch einen eigentümlichen Sprachgebrauch. In den meisten naturwissenschaftlichen Schriften nennt man nämlich ein Zahlen-Verhältnis rational, wenn dasselbe wie z. B. $6:2$ einen ganzzahligen oder ungebrochenen Quotienten hat. Ein Verhältnis, wie z. B. $5:3$, welches einen gebrochenen Quotienten hat, nennt man kurzweg irrational und benimmt sich dadurch die Möglichkeit, ein wirklich irrationales Verhältnis durch einen kurzen Ausdruck zu bezeichnen und es begrifflich zu unterscheiden. Das wirklich irrationale (welches die Alten ἄῤῥητον unsagbar, oder auch ἄλογον verhältnislos, lateinische Schriftsteller surdum nennen) ist das arithmetische Abbild des geometrisch Incommensurabeln und kann nur durch ein Symbol und nicht durch wirkliche Zahlen angegeben werden. Dagegen ist die reine Geometrie, deren Gegenstände stetig zusammenhängen, wie der abstracte Raum, wohl im Stande das incommensurable wirklich darzustellen, sie braucht keine für sich gegebene Einheit in ihren Constructionen. Eine jede Zahl aber, ein Vielfaches irgend einer, wenn auch noch so kleinen, endlichen Einheit kann

1) Grundzüge der wissenschaftl. Botanik 1846 II p. 174—177.

2) Arithmonomia naturalis seu de numeris in rerum natura tentamen autore Alberto Sonnenburg 1838 p. 53 sqq.

3) Allgemeine Formenlehre der Natur. Breslau 1861 p. 35.

also eine Grösse, die von jeder solchen Einheit wie eine beliebig begrenzte Gerade unabhängig ist, nicht ausdrücken oder darstellen.

Freilich kann das wirklich irrationale, wie die Chemiker und Krystallographen lehren, in der reellen Natur gar nicht existieren, es gibt aber doch Grenzgebiete, Anwendungen des pythagoreischen Lehrsatzes auch sogar in der Biologie, wie z. B. die vorliegende Frage, und dann wird die sprachliche Bequemlichkeit zum wirklichen Hindernisse des Verstehens.

Es ist sehr wahrscheinlich, dass Schleiden den Divergenzwinkel, wenn er bemerkt hätte, dass derselbe nichts anderes sei als der Minor des goldnen Schnittes, also eine wirklich irrationale, in der Natur unmögliche Grösse, mit hinweggefegt hätte.

Weit über Kepler hinaus zurück gehen die Anwendungen, welche Zeising[1]) vom goldnen Schnitte gemacht hat. Das erinnert an die ‚Divina proportione' des Lucas Pacioli.

Die neue Lehre beruht in der Hauptsache auf der Anwendung der Näherungswerte, benutzt aber auch vielfach eine rein geometrische Eigenschaft des goldnen Schnittes, auf der besonders Keplers Symbolik begründet war. Von Euclid[2]) ist dieselbe bereits bewiesen: ‚Wenn man eine nach dem goldnen Schnitt geteilte Strecke von dem äussern Endpunkte des kleineren Teiles aus um den grössern Teil verlängert, dann ist die ganze verlängerte Strecke wieder nach dem goldnen Schnitte geteilt, so dass die Verlängerung den kleinern Teil ausmacht.' Natürlich lässt sich der Satz von einer einmal als Anfang gewählten Strecke aus sowohl durch Verlängerung als auch durch Verkürzung bis zum Entstehen einer beliebig grossen Ganzen und eines beliebig kleinen kleinern Teiles ohne weiteres verallgemeinern, wie schon Campanus und dieser wohl nicht zuerst bemerkt hat. Auf diesen Satz gründet Kepler seine bewundernde Betrachtung des goldnen Schnittes. Aber man kann unzählig viele solche Sätze über incommensurable mittlere Proportionalen, mit den verschiedenartigsten Resultaten aufstellen, die alle auch eine ähnliche Berücksichtigung beanspruchen könnten. Die alten Geometer aber scheuten[3]) jede Verallgemeinerung und Kepler dachte bei seinen gemütlichen Auseinandersetzungen über diese Sache gar nicht an ein ästhetisch-morphologisches Proportional-Gesetz[7]) für Natur und Kunst.

Dieses ist zum Teil auf den obigen Satz, zum Teil auf die Näherungswerte gegründet. Da aber die Näherungswerte:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \text{ und } \frac{1}{3}; \quad \frac{3}{5} \text{ und } \frac{2}{5}$$

nach Belieben gebraucht werden und als Resultate einer mehr oder weniger willkürlichen arithmetischen Operation Zahlen für die Längen der Teile mit dem oben ausgesprochenen Satze gar keinen notwendigen Zusammenhang haben, auch ein tieferer mecha-

1) Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers. Leipzig 1854.

2) Elem. XIII 5.

3) Hankel, zur Gesch. der Mathematik 1874 p. 392.

4) Ästhetische Forschungen von Zeising 1855 §. 168 ff.

nischer oder chemischer Grund für die Geltung des Satzes in der Natur nicht angegeben wird und, so viel man urteilen kann, nicht existiert, so bleibt das Ganze doch nur eine mit Geist ausgeführte subjective Ansicht ohne reelle Basis. Alle die zahlreichen Angaben von Messungen an Bildsäulen und Gruppen, an Tempeln und Palästen, an Skeleten und Präparaten sind wertlos, weil sie mit der Voreingenommenheit für ein solches naturwidriges Gesetz enge verbunden sind.

Wenn man die aus vorurteilsfreien Messungen der Teile des menschlichen Körpers in den verschiedenen Altersstufen und Lebensverhältnissen beider Geschlechter, wie sie für den Gebrauch ausübender Künstler in grösseren Werken zusammengestellt sind, näher betrachtet, kann man wohl leicht zu der Äusserung[1]) kommen: ‚Die Proportionen des menschlichen Körpers gehören zu den hässlichsten Fragen der Schönheitslehre‘; aber die Teilung nach dem goldnen Schnitt wird man, ohne den Zahlen Gewalt anzuthun, nicht darin finden. Die Aufstellung von Bildsäulen wurde, wie bekannt, im Altertum mit einem für uns ganz unverständlichen Luxus betrieben. Dabei muss natürlich auch viel nach Schablonen gearbeitet worden sein. Es ist aber wenig darüber bekannt, in wie weit diese Schablonen aus Zahlen-Verhältnissen bestanden haben. Der bekannte von Cicero[2]) und Plinius[3]) erwähnte Kunst-Kanon des Polyclet war die bei den Künstlern als Muster für jugendlich-männliche Figuren in Aufnahme gekommene Statue eines Speerträgers[4]). Was Galen[5]) über Polyclets Lehre von den Proportionen erwähnt, wird von den Altertumskennern auf mündliche Äusserungen des berühmten Bildhauers bezogen. Man versuche nur selbst am lebenden Körper eine Messung der Länge des Oberarmes oder der Mittelhand, und man wird bald begreifen, warum die Alten aus solchen Messungen hervorgegangene Zahlenangaben für Bildhauerzwecke wenig geschätzt haben. Winckelmann[6]) sagt mit Recht: ‚Es ist aus den Versuchen, die Verhältnisse des Körpers unter die Regeln der allgemeinen Harmonie und der Musik zu bringen, wenig Erleuchtung zu hoffen für Zeichner und für diejenigen, welche die Kenntnis des Schönen suchen: die arithmetische Untersuchung würde hier weniger als die Schule des Fechtbodens in einer Feldschlacht helfen.‘

Ausser der musicalischen Proportion der Pythagoreer kommen Zahlen-Verhältnisse in nicht mathematischen Schriften des Altertums nur selten vor. Dennoch ist sogar der in den Blattstellungsgesetzen und in der Zeisingschen Proportionslehre wichtigste Näherungswert des goldnen Schnittes schon beachtet gewesen, freilich in einer sehr beschränkten Anwendung und ohne jede andere Beziehung. Aristoteles[7]) stellt die Affen als Mittelform (ἀμφοτερίζοντα) zwischen die Menschen und die Vierfüssler und sagt, sie wären

1) Köstlin, Ästhetik p. 714.
2) Cic. Brut. 86. 296.
3) Plin. nat. hist. XXXIV 19. 2.
4) Overbeck, Gesch. d. griech. Plastik[3] 1881 I p. 389 und p. 478.
5) Galeni opp. V p. 449 (Kühn).
6) Gesch. d. Kunst d. Alterthums 1764 I p. 176.
7) Arist. de anim. hist. II p. 502 b, 14 sqq. (Bekker).

auch darin von den Menschen verschieden, dass bei ihnen der obere Teil des Körpers (indem wie bei Bildsäulen der Nabel als Teilpunkt der Länge genommen wird) sich zum untern verhalte wie 5 : 3, und setzt dabei voraus, jeder wisse, dass dieses Verhältnis beim Menschen ganz anders sei.

Ob diese Stelle von den Verehrern des goldnen Schnittes übersehen worden ist oder ihnen nicht geeignet erschien, mag unentschieden bleiben. Da sich keine Parallele dazu auffinden liess, so ist sie wahrscheinlich die einzige, wenn auch schwache Stütze für das Zurückreichen der neuen Lehre bis ins klassische Altertum. Das Verhältnis 5 : 3 oder die Näherungsproportion $3:5 = 5:(3+5)$ ist nämlich gewissermassen die Angel, an welcher die ganze Lehre vom goldnen Schnitte hängt.

Trotzdem ziehen wir den Schluss: Die neue Lehre vom goldnen Schnitt ist eine subjective Ansicht, eine solche Beziehung zwischen Mathematik einerseits und Natur und Kunst andererseits existiert nicht, und fassen die Gründe dafür in folgende fünf Punkte zusammen:

1. Weil die Alten der klassischen und nachklassischen Zeit, die für solche Dinge mehr Interesse, Fleiss, Zeit und in jeder Beziehung auch intensivere Kenntnisse hatten, als wir beim jetzigen Zustande unserer Wissenschaft haben können — das zeigen ebensowohl ihre zahllosen und unübertrefflichen Kunstwerke als der vollkommene Zustand der euclidischen Elemente — nirgends auch nur eine Andeutung davon hinterlassen haben.

2. Weil die geometrische Teilung nach dem goldnen Schnitte, und eine andere gibt es nicht, voraussetzt, dass die zu teilende Länge eine stetig zusammenhängende Grösse sei, wie der abstracte Raum, solche Grössen aber in der Natur, wie wir mit Grund annehmen, nicht existieren.

3. Weil die Näherungswerte, die man an die Stelle der wirklichen Teilung setzt, ein mehr oder weniger willkürliches arithmetisches Gebilde sind und, wenn dieselben in beliebiger Auswahl, wie es geschieht, zugelassen werden, verbunden mit beliebiger Wahl von Minor, Major und Ganzem, mit beliebiger Wahl von Anfangs- und Endpunkt der Messung und mit einer aus Billigkeit zu bewilligenden Latitude für die Genauigkeit, alle Bestimmtheit der Längen aufhört und das Ganze nur als Mystification erscheint.

4. Weil die Teilung nach dem goldnen Schnitte, man mag dieselbe ihrem Wesen entsprechend geometrisch oder auch arithmetisch auffassen, mit keinem der mechanischen Grundgesetze in irgend einem naheliegenden Zusammenhange steht; dieselbe also für die einzig mögliche Erklärung der Naturerscheinungen, nämlich die mechanische, einen Wert nicht haben kann.

5. Weil eine jede solche Lehre, wenn sie ernsthaft genommen wird, in grellem Widerspruche steht mit dem Grundsatze der unbegrenzten Variabilität der Organismen, der von dem Newton der Biologie aufgestellt und durch die Arbeit eines langen erfolgreichen Naturforscherlebens begründet, allgemein angenommen ist, selbst von denen, welche die letzten Consequenzen desselben aus sehr gewichtigen äusseren Gründen bedenklich finden.

Was von der Natur gilt, wird nicht in geringerem Grade von der Kunst gelten; ein solches Gesetz wäre fähig die Kunst auf die Nachahmung byzantinischer Schablonen-

Bilder oder chinesischer Zopfgestalten hinzuweisen, woran wohl die Bearbeiter der Lehre gar nicht gedacht zu haben scheinen.

Diese fünf Gründe sind fast solidarisch wie Bürgen, von denen jeder für das Ganze haftet. Und so wäre die Bedeutung des goldnen Schnittes für Natur und Kunst abgethan, und wir kehren wieder zu Keplers Symbolik zurück, die uns um ihres grossen Erfinders willen ehrwürdig ist. Kepler hat, von den wissenschaftlichen Männern aller Völker bewundert, den Schlüssel zum Makrokosmus mit deutschem Fleiss und Geist geschmiedet. Vom Mikrokosmus hatte er, nach heutigem Massstab nur eine kindliche Kenntnis. Er half sich mit dem goldnen Schnitt, den er aber als ein Symbol, nicht als ein Gesetz auffasste. Und so darf man wohl, von dankbarer Anerkennung des unaussprechlichen Nutzens, den Keplers Arbeiten unmittelbar oder mittelbar jedem geistigen Streben gebracht haben, erfüllt, auch den goldnen Schnitt mit seinen Näherungswerten, die schon Kepler ergötzten, gelten lassen als mnemotechnische Brücke für das Behalten jener Zahlen-Verhältnisse, als ideologische Curiosität oder sogar in der Natur, wie Kepler, als Symbol, denn Symbole aller Art kann man nicht entbehren; wenn man mit gutem Gewissen wie Kepler sagen kann: ‚Auch ich spiele mit Symbolen, aber ich vergesse doch nicht, dass ich spiele‘.