A. Die Brachystochrone auf dem Rotationsparaboloid.

I.

Wenn ein materieller Punkt sich von einem Punkte des Rotationsparaboloids nach einem andern in der kürzesten Zeit bewegen soll, so muss er, falls er nur der Schwere unterworfen wird, die Brachystochrone zwischen beiden Punkten beschreiben.

Die Anfangslage des materiellen Punktes sei durch die Coordinaten $x = x_1$, $y = o$, $z = h$ und der Zielpunkt durch die Coordinaten $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ bestimmt. Da die Anfangsgeschwindigkeit gleich Null ist, so wird

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(h-z)}, \quad t = \int_h^{z_0} \frac{ds}{\sqrt{2g(h-z)}};$$

dieses Integral muss bei der vorgeschriebenen Bewegung ein Minimum werden.

Dies ist, wie die Variationsrechnung lehrt, der Fall, wenn die folgende Differentialgleichung erfüllt ist;

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{d\frac{\partial U}{\partial q}}{dz}\right) y - \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{d\frac{\partial U}{\partial q}}{dz}\right) x = o,$$

wobei

$$x^2 + y^2 = 2az \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

als Gleichung des Rotationsparaboloids zu Grunde gelegt ist, und $\frac{dx}{dz} = p$, $\frac{dy}{dz} = q$, $\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{\sqrt{2g(h-z)}} = U$ gesetzt sind.

Nun ist

$$\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{d\frac{\partial U}{\partial p}}{dz} = \frac{d}{dz} \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}\ \sqrt{2g\,(h-z)}}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{d\frac{\partial U}{dq}}{dz} = \frac{d}{dz} \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}\ \sqrt{2g(h-z)}};$$

mithin geht die obige Differentialgleichung über in:

$$y.d\frac{dx}{ds\sqrt{h-z}} - x.d\frac{dy}{ds\sqrt{h-z}} = 0,$$

und hierzu hat man als erstes Integral

$$ydx - xdy = ds\sqrt{(h-z)}\,.\,c, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wobei c eine von den Coordinaten der beiden gegebenen Punkte abhängige Integrationsconstante bedeutet.

Wenn die beiden gegebenen Punkte auf derselben Meridianparabel liegen, dann wird

$$\frac{x_0}{y_0} = \frac{x_1}{y_1}, \text{ also } \int d\frac{x}{y} = 0,$$

folglich, da nach Gleichung (2)

$$\frac{d\frac{x}{y}}{y^2} = ds\sqrt{(h-z)}\,.\,c \text{ ist, } \quad c\int ds.y^2\sqrt{(h-z)} = 0.$$

Dies ist nur möglich, wenn $c = 0$; mithin ist in dem beregten Falle

$$d\frac{x}{y} = 0, \ \frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_0}{y_0},$$

d. h. Wenn Ausgangs und Zielpunkt auf derselben Meridianparabel liegen, dann ist die Brachystochrone die Parabel selbst.

Durch Einführung von Polarcoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ geht die Gleichung (2) über in

$$r^2 d\varphi = \frac{c}{\sqrt{2g}} v^2 dt \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

d. h. die von der Projection des Radiusrector in jedem Augenblicke beschriebene Fläche ist dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional.

Da die Anfangsgeschwindigkeit gleich Null ist, folgt für den Anfang der Brachystochrone $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = 0$, mithin berührt die Brachystrochrone die durch den Ausgangspunkt bestimmte Meridianparabel.

Aus Gleichung (2) und aus der Differentialgleichung der Parabel ergeben sich

$$y^2dx^2 - dx\,dy + x^2dy^2 = ds^2(h-z)\,.\,c^2$$

$$x^2dx^2 + 2xydxdy + y^2dy^2 = a^2\,dz^2$$

$$\overline{(x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2) = a^2dz^2 + c^2ds^2(h-z),}$$

$$2az(-dz^2 + 2g(h-z)dt^2) = a^2dz^2 + c^2 2g(h-z)^2dt^2,$$

$$\frac{dz}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2g(h-z)\,[2az - c^2(h-z)]}{a^2+2az}} \quad . \; . \; . \quad (4)$$

Das positive Vorzeichen entspricht dem Steigen, das negative dem Fallen des beweglichen Punktes. Für Maxima und Minima von z muss $\frac{dz}{dt} = o$ sein, und dies ist nach Gleichung (4) der Fall, wenn $z = h$ und $z = \frac{c^2h}{2a+c^2}$ ist.

Nimmt man an, dass sich der materielle Punkt auf der Brachystochrone zwischen den beiden gegebenen Punkten bewegt und dann seine Bewegung nach den Bedingungen des zurückgelegten Weges fortgesetzt, so wird er schliesslich einen tiefsten Ort erreichen und von da vermöge der erlangten Geschwindigkeit wieder in die Höhe steigen. Ueberhaupt wird sich der materielle Punkt zwischen den beiden durch

$$z = h \text{ und } z = \frac{c^2h}{2a+c^2}$$

bestimmten Parallelkreisen bewegen, und es soll im folgenden unter Brachystochrone der ganze Verlauf der Curve auf dem Rotationsparaboloid verstanden werden.

II.

Aus Gleichung (4) ergibt sich

$$dt = \sqrt{\frac{a^2+2az}{2g(h-z)\,[2az - c^2(h-z)]}}\,dz = \sqrt{\frac{a^2+2az}{2g(2a+c^2)(h-z)\left(z - \frac{c^2h}{2a+c^2}\right)}}\,dz,$$

$$t = \int_h^z \sqrt{\frac{a^2+2az}{2g(h-z)\,[2az - c^2(h-z)]}}\,dz \; . \; . \; . \; (5).$$

Wir setzen

$$\cos\vartheta = \sqrt{\frac{\frac{c^2h}{2a+c^2} - z}{\frac{c^2h}{2a+c^2} - h}} = \sqrt{\frac{c^2h - z(2a+c^2)}{c^2h - h(2a+c^2)}},$$

was geschehen kann, weil $h > z > \frac{c^2h}{2a+c^2}$ ist; dann wird

$$z = \frac{c^2h + 2ah\cos^2\vartheta}{2a+c^2}, \quad dz = \frac{-4ah}{2a+c^2}\cos\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta, \quad h - z = \frac{2ah\sin^2\vartheta}{2a+c^2},$$

$$z - \frac{c^2h}{2a+c^2} = \frac{2ah\cos^2\vartheta}{2a+c^2}, \quad \frac{dz}{\sqrt{(h-z)\left(z-\frac{c^2h}{2a+c^2}\right)}} = -2d\vartheta.$$

Mithin

$$dt = -\sqrt{\frac{2a(a+2z)}{g(2a+c^2)}}\,d\vartheta;$$

folglich

$$-\sqrt{\frac{2a(a+2h)}{g(2a+c^2)}}\,d\vartheta > dt > -\sqrt{\frac{2a(2a^2+ac^2+2c^2h)}{g(2a+c^2)^2}}\,d\vartheta.$$

Ferner wird durch Substitution des Wertes für z:

$$dt = -\sqrt{\frac{2a(a+2h)}{g(2a+c^2)}}\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\vartheta}\;d\vartheta, \text{ wobei } \varkappa^2 = \frac{4ah}{(a+2h)(2a+c^2)} \text{ gesetzt ist.}$$

Für $z = h$, wird $\vartheta = 0$ und für $z = \frac{c^2h}{2a+c^2}$, wird $\vartheta = \frac{\pi}{2}$

Bezeichnet man mit T die Zeit, welche der bewegliche Punkt braucht, um das Stück der Brachystochrone von einem Parallelkreise zum andern zu durchlaufen, dann wird

$$T = \sqrt{\frac{2a(a+2h)}{g(2a+c^2)}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta\vartheta d\vartheta = \sqrt{\frac{2a(a+2h)}{g(2a+c^2)}}\,E \ldots (6)$$

und allgemein wird

$$t = \sqrt{\frac{2a(a+2h)}{g(2a+c^2)}}\,E\,(u), \ldots (7),$$

$$\text{wenn } u = \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\Delta\vartheta} \text{ ist.}$$

Vermehrt man das Argument um $\pm 2K$, so wird

$$E\,(u \pm 2K) = E\,(u) \pm E\,(2K) - \text{sinam}\,(u \pm 2K)\,\varkappa^2\,\text{sinam}\,u.\,\text{sinam}\,(\pm 2K),$$

oder, weil

$$\text{sinam}\,(\pm 2K) = -\text{sinam}\,u \text{ ist, } E\,(u \pm 2K) = E\,(u) \pm 2\,E\,(K),$$

$$\text{also } E\,(u \pm 2K) = E(u) \pm \frac{2T}{\sqrt{\frac{2a\,(a+2h)}{g\,(2a+c^2)}}},$$

$$\sqrt{\frac{2a(a+2h)}{g(2a+c^2)}}\ E(u+2K)=\sqrt{\frac{2a(a+2h)}{g(2a+c^2)}}\ E(u)+2T,$$

$$t+2T=\sqrt{\frac{2a(a+2h)}{g(2a+c^2)}}\ E(u+2K).$$

Wenn man also t um eine ganze Schwingungsdauer vermehrt oder vermindert, dann nimmt auch das Argument u in E (u) um eine doppelte Periode zu oder ab, folglich kommt der materielle Punkt, wie nicht anders zu vermuten war, nach einer ganzen Schwingung wieder auf den anfänglichen Parallelkreis zurück.

Aus Gleichung (3) ergibt sich $r^2 d\varphi = c\sqrt{h-z}\ ds$, $d\varphi = c\frac{\sqrt{h-z}}{2az}\ ds$,

oder da $ds=\sqrt{dz^2+dr^2+r^2d\varphi^2}$ und $dr=\frac{adz}{\sqrt{2az}}$ ist,

$$d\varphi = c\frac{\sqrt{h-z}}{2az}\sqrt{dz^2\left(1+\frac{a}{2z}\right)+2azd\varphi^2} = \frac{c}{2\sqrt{a\,.\,z}}\sqrt{\frac{(h-z)(a+2z)}{2az-c^2(h-z)}}\,dz$$

$$\varphi=\frac{c}{2\sqrt{a}}\int_h^z\frac{dz}{z}\sqrt{\frac{(h-z)(a+2z)}{(2a+c^2)z-c^2h}}=\frac{c}{2\sqrt{a}}\int_h^z\frac{dz}{z}\frac{ah+z(2h-a)-2z^2}{\sqrt{[(2a+c^2)z-c^2h](h-z)(a+2z)}}$$

$$=\frac{c}{2\sqrt{-2a(2a+c^2)}}\int_h^z\frac{dz}{z}\frac{ah+z(2h-a)-2z^2}{\sqrt{\left(z-\frac{c^2h}{2a+c^2}\right)(z-h)\left(z+\frac{a}{2}\right)}}$$

$$=\frac{hc}{2}\sqrt{\frac{a}{-(2a+c^2)}}J_1 \quad + \frac{c(2h-a)}{2\sqrt{-2a(2a+c^2)}}J_2 \quad - \frac{c}{\sqrt{-2a(2a+c^2)}}J_3,$$

wobei $J_1=\int_h^z\frac{1}{z}\frac{dz}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)}}$, $J_2=\int_h^z\frac{dz}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)}}$,

$J_3=\int_h^z\frac{zdz}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)}}$ und $\alpha=h$, $\beta=\frac{c^2h}{2a+c^2}$, $\gamma=-\frac{a}{2}$ gesetzt ist.

Nun wird, wenn $z - \alpha = y$ und dann $x^2 = y$ gesetzt wird,

$$J_1 = \int_{h-\alpha}^{z-\alpha} \frac{dy}{(y+\alpha)\sqrt{y(y+\alpha-\beta)(y+\alpha-\gamma)}} = \int_{\sqrt{h-\alpha}}^{\sqrt{z-\alpha}} \frac{2dx}{(x^2+\alpha)\sqrt{(x^2+\alpha-\beta)(x^2+\alpha-\gamma)}}$$

$$= \int_{\sqrt{h-\alpha}}^{\sqrt{z-\alpha}} \frac{2dx}{(x^2+\alpha)\sqrt{(\beta-\alpha-x^2)(\gamma-\alpha-x^2)}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}} \int_{\sqrt{h-\alpha}}^{\sqrt{z-\alpha}} \frac{dx}{(x^2+\alpha)\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{\beta-\alpha}\right)\left(1-\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}\cdot\frac{x^2}{\beta-\alpha}\right)}}$$

und für $\frac{x^2}{\beta-\alpha} = u^2$, $dx = \sqrt{\beta-\alpha}\, du$,

$$J_1 = \frac{2}{\alpha\sqrt{\gamma-\alpha}} \int_{\sqrt{\frac{h-\alpha}{\beta-\alpha}}}^{\sqrt{\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}}} \frac{du}{\left(\frac{\beta-\alpha}{\alpha}u^2+1\right)\sqrt{\left(1-u^2\right)\left(1-\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}u^2\right)}}$$

$$= \frac{2}{\alpha\sqrt{\gamma-\alpha}} \int \frac{d\psi}{(1+n\sin^2\psi)\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}} = \frac{2}{\alpha\sqrt{\gamma-\alpha}}\,\Pi_1(\psi,\, n), \text{ wobei}$$

$u = \sin\psi$, $n = \frac{\beta-\alpha}{\alpha}$, $\varkappa^2 = \frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}$ ist.

Bei denselben Substitutionen, wie vorher, erhält man ferner

$$J_2 = \int_{h-\alpha}^{z-\alpha} \frac{dy}{\sqrt{y(y+\alpha-\beta)(y+\alpha-\gamma)}} = \int_{\sqrt{h-\alpha}}^{\sqrt{z-\alpha}} \frac{dx}{\sqrt{(\beta-\alpha-x^2(\gamma-\alpha-x^2)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\gamma - \alpha}} \int\limits_{\sqrt{\frac{h-\alpha}{\beta-\alpha}}}^{\sqrt{\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}}} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-\varkappa^2 u^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma - \alpha}} \int \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\psi}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma - \alpha}} F(\psi).$$

Und drittens wird

$$J_3 = \int\limits_{h-\alpha}^{z-\alpha} \frac{(y+\alpha)\,dy}{\sqrt{y(y+\alpha-\beta)(y+\alpha-\gamma)}} = \int\limits_{\sqrt{h-\alpha}}^{\sqrt{z-\alpha}} \frac{2(x^2+\alpha)\,dx}{\sqrt{(x^2+\alpha-\beta)(x^2+\alpha-\gamma)}}$$

$$= \int\limits_{\sqrt{h-\alpha}}^{\sqrt{z-\alpha}} \frac{2x^2dx}{\sqrt{(\beta-\alpha-x^2)(\gamma-\alpha-x^2)}} + \int\limits_{\sqrt{h-\alpha}}^{\sqrt{z-\alpha}} \frac{2\alpha dx}{\sqrt{(\beta-\alpha-x^2)(\gamma-\alpha-x^2)}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}} \int\limits_{\sqrt{h-\alpha}}^{\sqrt{z-\alpha}} \frac{x^2dx}{\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{\beta-\alpha}\right)\left(1-\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}\frac{x^2}{\beta-\alpha}\right)}} + \frac{2\alpha}{\sqrt{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}} \times$$

$$\int\limits_{\sqrt{h-\alpha}}^{\sqrt{z-\alpha}} \frac{dx}{\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{\beta-\alpha}\right)\left(1-\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}\frac{x^2}{\beta-\alpha}\right)}}$$

$$= \frac{2(\beta-\alpha)}{\sqrt{\gamma-\alpha}} \int\limits_{\sqrt{\frac{h-\alpha}{\beta-\alpha}}}^{\sqrt{\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}}} \frac{u^2dx}{\sqrt{(1-u^2)(1-\varkappa^2 u^2)}} + \frac{2\alpha}{\sqrt{\gamma-\alpha}} \int\limits_{\sqrt{\frac{h-\alpha}{\beta-\alpha}}}^{\sqrt{\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}}} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-\varkappa^2u^2)}},$$

$$= \frac{2(\beta-\alpha)}{\sqrt{\gamma-\alpha}} \int \frac{\sin^2\psi d\psi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}} + \frac{2\alpha}{\sqrt{\gamma-\alpha}} \int \frac{d\psi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}}.$$

Nun ist $1 - \varkappa^2 \sin^2\psi = \Delta^2\psi$, $\sin^2\psi = \frac{1-\Delta^2\psi}{\varkappa^2}$, also

$$\int \frac{\sin^2\psi d\psi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}} = \frac{1}{\varkappa^2}\int\frac{d\psi}{\Delta\psi} - \frac{1}{\varkappa^2}\int\Delta\psi d\psi, = \frac{1}{\varkappa^2}\,F(\psi) - \frac{1}{\varkappa^2}\,E_1(\psi);$$

mithin

$$J_3 = \frac{2(\beta-\alpha)}{\varkappa^2\sqrt{\gamma-\alpha}}F(\psi) - \frac{2(\beta-\alpha)}{\varkappa^2\sqrt{\gamma-\alpha}}\,F_1(\psi) + \frac{2\alpha}{\sqrt{\gamma-\alpha}}F(\psi),$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\gamma-\alpha}}\left[\frac{\beta-\alpha}{\varkappa^2}+\alpha\right]F(\psi) - \frac{2(\beta-\alpha)}{\varkappa^2\sqrt{\gamma-\alpha}}E_1(\psi).$$

Demnach wird

$$\varphi = \frac{hc}{\alpha\sqrt{\gamma-\alpha}}\sqrt{\frac{a}{-2(2a+c^2)}}\,\Pi_1(\psi, n) + \frac{c(2h-a)}{2\sqrt{-2a(2a+c^2)(\gamma-\alpha)}}F(\psi)$$

$$-\frac{2c}{\sqrt{-2a(2a+c^2)(\gamma-\alpha)}}\left[\frac{\beta-\alpha}{\varkappa^2}+\alpha\right]F(\psi) - \frac{2c(\beta-\alpha)}{\sqrt{-2\alpha(2a+c^2)(\gamma-\alpha)}}E_1(\psi),$$

$$\varphi = \frac{c}{\sqrt{a(2a+c^2)(a+2h)}}\left[\frac{4ah}{\varkappa^2(2a+c^2)} - h - \frac{a^2}{2}\right]F(\psi)$$

$$+\frac{4ach}{(2a+c^2)\sqrt{a(2a+c^2)(a+2h)}}E_1(\psi) + \frac{c}{h}\sqrt{\frac{a}{(2a+c^2)(a+2h)}}\,\Pi_1(\psi, n).$$

Die Bahn des beweglichen Punktes besteht, ganz wie bei der einfachen Bewegung auf dem Rotationsparaboloid in Folge einer Anfangsgeschwindigkeit und unter dem Einflusse der Schwere, aus lauter congruenten Teilen. Wenn Φ der Winkel is, welcher den Grenzen $z = h$ und $z = \frac{c^2h}{2a+c^2}$ entspricht und wenn $\pi : \Phi$ ein rationales Verhältniss ist, wird der Punkt nach mehreren Schwingungen zu seiner Anfangslage zurückkehren. Die Schnittpunkte der Bahn mit den Parallelkreisen werden in der Richtung der Bewegung fortschreiten.

Es ist $ds = \sqrt{2g(h-z)}\,dt = \sqrt{2g(h-z)}\sqrt{\frac{a(a+2z)}{2g(h-z)(2az-c^2(h-z))}}dz = \sqrt{\frac{a(a+2z)}{2az-c^2(h-z)}}dz.$

Mithin $s = a\sqrt{a}\int\limits_h^z \frac{dz}{\sqrt{(a+2z)(2az-c^2(h-z))}} + 2\sqrt{a}\int\limits_h^z \frac{zdz}{\sqrt{(a+2z)(2az-c^2(h-z))}}$

$$= \quad a\sqrt{a}\int\limits_h^z \frac{dz}{\sqrt{-ac^2h+(2a^2+ac^2-2c^2h)z+(2c^2+4a)z^2}}$$

$$+ \quad 2\sqrt{a}\int\limits_a^z \frac{zdz}{\sqrt{-ac^2h+(2a^2+ac^2-2c^2h)z+(2c^2+4a)z^2}}$$

$$= \quad \frac{\sqrt{a}\sqrt{(a+2z)(2az-c^2(h-z)}}{2a+c^2} - \frac{(a^2+\frac{a}{2}c^2-c^2h)}{2a+c^2} \times$$

$$\sqrt{a}\int\limits_h^z \frac{dz}{\sqrt{-ac^2h+(2a^2+ac^2-2c^2h)z+(2c^2+4a)z^2}} = \frac{\sqrt{a(a+2z)(2az-c^2(h-z)}}{2a+c^2}$$

$$\frac{\left(a^2+\frac{a}{2}c^2-c^2h\right)\sqrt{a}}{(2a+c^2)\sqrt{4a+2c^2}} \quad 1\frac{2a+ac^2-2c^2h+4(2a+c^2)z+2\sqrt{4a+2c^2}\sqrt{(a+2z)(2az-c^2(h-z))}}{2a^2+ac^2+2c^2h+8ah+4\sqrt{(2a+c^2)(a+2h)ah}}$$

Bezeichnet man mit S die Länge der Brachystochrone zwischen den beiden Parallelkreisen, dann ist

$$S = \sqrt{\frac{a(a+2z_1)(2az_1-c^2(h-z_1)}{2a+c^2}} - \frac{(a^2+\frac{a}{2}c^2-c^2h)\sqrt{a}}{(2a+c^2)\sqrt{4a+2h^2}} \times$$

$$1\frac{2a^2+ac^2-2c^2h+4(2a+c^2)z_1+2\sqrt{(4a+2c^2)(a+2z_1)(2az_1-c^2(h-z^1))}}{2a^2+ac^2+2c^2h+8ah+4\sqrt{(2a+c^2)(a+2h)ah}.}$$