

MESURE
DE LA MÉRIDIENNE.

OBSERVATIONS GÉODÉSIQUES.

MESURE DES BASES.

DANS le volume précédent nous avons donné les angles de position entre tous les signaux, et les distances de ces mêmes signaux au zénith les uns des autres. Nous avons réuni dans un tableau général tous les triangles nécessaires au calcul de la méridienne, quelques triangles de vérification, et même plusieurs triangles secondaires qui serviront à donner les positions géographiques de plusieurs points intéressans. Le discours préliminaire contient les méthodes de calcul et les formules de toutes les réductions dont ces angles avoient besoin. Pour tous ces calculs nous trouvions dans l'opération de 1740 des bases d'une exactitude plus que suffisante; mais, pour avoir la longueur véritable de tous nos

côtés, et celle de la méridienne, il falloit de nouvelles bases déterminées avec plus de soin et par des moyens susceptibles d'une plus grande précision. J'en ai mesuré deux, l'une auprès de Melun, l'autre auprès de Perpignan. On verra ci-après, dans un mémoire de Borda, la construction des règles de platine qui ont servi à ces mesures, et les expériences auxquelles ces règles ont été soumises; mais nous devons placer ici tout ce qui est nécessaire à l'intelligence des opérations.

Description des instrumens qui ont servi à la mesure des bases.

LES règles sont au nombre de quatre, et marquées chacune de leur numéro, qui sert à les distinguer. En outre, les pièces de bois sur lesquelles elles portoient étoient peintes de couleurs différentes, qui dispensoient de regarder le numéro.

Elles sont de platine, ont deux toises de longueur, environ six lignes de largeur et près d'une ligne d'épaisseur.

Chacune de ces règles de platine est recouverte d'une autre règle qui est de cuivre, et plus courte de six pouces à peu près.

La règle de cuivre est fixée par un bout, au moyen de trois vis, à la règle de platine; mais par l'autre bout, et dans toute sa longueur, elle est libre, et peut, en vertu de sa dilatation relative, s'avancer plus ou moins le long de la règle de platine. Un vernier placé vers

l'extrémité libre de la règle de cuivre, indique avec une grande précision l'allongement relatif du cuivre, d'où l'on peut conclure l'allongement absolu du platine. On verra dans le mémoire déjà cité qu'une variation d'une partie du vernier indique 0'00000.9245 de dilatation dans la règle de platine.

L'extrémité, qui n'est point recouverte par la règle de cuivre, est garnie d'une languette ou petite règle de platine glissant à léger frottement entre deux coulisses. Cette languette est divisée en dix-millièmes de toise; un vernier tracé sur l'une des coulisses donne les cent-millièmes.

La languette, en glissant entre les coulisses, forme à la règle un prolongement dont la quantité exacte est indiquée par le vernier.

Ce vernier, comme celui du thermomètre métallique, est garni d'un microscope, pour plus d'exactitude et de facilité dans l'observation; en sorte que dans la lecture, outre les cent-millièmes que le vernier donne sans équivoque, on peut encore estimer les moitiés, les tiers ou les quarts des cent-millièmes de toises, et mes registres portent par-tout les millionièmes, sur lesquels il ne faut pourtant compter qu'à deux ou trois près.

Avec aussi peu d'épaisseur, nos règles de platine sont trop flexibles pour être employées seules et sans garniture. Chacune de ces règles étoit portée sur une pièce de bois bien dressée, sur laquelle elle étoit contenue entre de petites montures qui l'empêchoient de s'écarter de la ligne droite, sans gêner en rien la dilatation.

Un toit recouvroit les pièces de bois, afin de garantir les règles des rayons du soleil, qui auroient produit dans la règle de cuivre une dilatation rapide, tandis que le platine, abrité par le cuivre, se seroit échauffé beaucoup plus lentement; en sorte que la marche du vernier eût indiqué pendant quelques instans une dilatation absolue, et non plus l'allongement relatif. Mais sous ce toit on avoit laissé quelques pouces de jour, afin que l'observateur eût continuellement la vue des règles, et qu'il pût s'apercevoir du moindre dérangement qu'elles pourroient éprouver. Il en résulta cet inconvénient, que le matin et le soir, quand le soleil avoit peu de hauteur, les rayons trop obliques n'étoient plus arrêtés par le toit, et, pour en préserver les règles, je faisois alors tendre, du côté du soleil seulement, une bande de toile qui s'attachoit au toit et réfléchissoit les rayons ou les arrêtoit.

Chaque pièce de bois portoit sur deux trépieds de fer qui se caloient au moyen de trois vis.

Le jeu de ces vis n'étoit que de quelques pouces, pour plus de solidité. Ces trépieds portoient à leur tour sur des soles de bois dont la surface inférieure étoit armée de trois pointes de fer qui, enfonçant en terre, les empêchoient de glisser et maintenoient tout l'appareil dans une position invariable, à moins que le vent ne fût excessif; mais dans ce cas on interrompoit la mesure.

Les trépieds étoient placés sous la règle, à deux pieds et demi des extrémités.

Pour aligner les règles, on avoit implanté dans le

toit, vers les deux extrémités, des pointes verticales de fer dont l'axe, prolongé dans sa partie inférieure, auroit coupé en deux également la largeur de la règle. Ainsi, quand les deux pointes étoient dans l'alignement de la base, on étoit sûr que sa règle de platine y étoit également.

Tout ceci s'entendra mieux encore à l'inspection des planches *I* et *II*.

La *fig. 1, pl. I*, représente une des quatre règles placée sur ses supports exactement comme elle étoit sur le terrain au temps de la mesure de la base.

On voit d'abord les deux soles *SS, SS*, armées chacune de trois pointes qui, entrant dans la terre, empêchoient tout l'appareil de charrier.

Sur les soles on aperçoit les triangles de fer *TT, TT*, avec les trois vis qui leur servoient de pied, et qu'on employoit pour les caler. La tête de la troisième vis est cachée par la règle de bois.

Sur cette pièce est étendue la règle de platine, recouverte de la règle de cuivre. On distingue de distance en distance les montures destinées à maintenir ces règles bien droites latéralement, et des brides dont l'office est d'empêcher la règle de cuivre de se séparer de la règle de platine, et de prévenir le dérangement des règles pendant leur transport.

Vers l'extrémité antérieure on voit les microscopes *m, m*, du thermomètre et de la languette.

La règle est recouverte d'un toit *ttt* élevé d'un décimètre environ au-dessus de la pièce de bois.

Vers les deux bouts de ce toit sont les pointes *pp* qui servoient à l'alignement.

Enfin, vers le tiers de la longueur, on voit, à droite et à gauche du milieu, deux supports qui traversent le toit et sont terminés par une tête de vis qui y fixe une garniture destinée à les protéger dans les transports, et qui s'ôtoit pour la mesure.

Ces supports servoient à placer le niveau pour la mesure de l'inclinaison. La surface supérieure des deux supports étoit dans un plan bien parallèle à celui de la règle.

La *fig. 2* représente la surface supérieure de la règle de bois.

Les brides *bbbb* contenoient la règle dans le sens vertical, sans la serrer pourtant, et sans nuire à la dilatation.

En *P, P, P, P*, sont quatre doubles équerres traversées de deux vis horizontales destinées à ajuster la règle et la maintenir bien droite dans le sens latéral.

Enfin, en *S* et *S* sont les supports du niveau. La vis qui tient la garniture destinée à les défendre en est retranchée, et l'on voit l'écrou destiné à la recevoir.

La *fig. 3* représente la règle de platine et de cuivre dans le sens de son épaisseur. Vers la partie antérieure on distingue le petit bouton *b* qui sert à pousser la languette. A peu de distance du bouton on voit l'extrémité de la règle de cuivre qui, comme nous l'avons déjà dit, est de six pouces environ plus courte que celle de platine.

A l'autre extrémité on reconnoît au changement d'épaisseur l'endroit où commence la règle de cuivre.

La *fig. 4* montre la surface supérieure de la règle.

A l'un des bouts *b* on voit les trois vis qui attachent la règle de cuivre à celle de platine.

Vers l'autre extrémité *b'* l'on voit dans la règle de cuivre un vide de figure rectangulaire qui encadre, avec des interstices aux deux bouts, une petite règle de cuivre fixée sur le platine : c'est le thermomètre métallique.

Plus loin est le bouton *b''* de la languette, laquelle glisse entre deux coulisses *cc*.

La *fig. 5* représente la partie d'avant de la règle; la *fig. 6* la partie de l'arrière. A l'une et à l'autre on voit dans la monture une ouverture à travers laquelle passe l'extrémité de la règle de platine. Du côté de l'avant, cette extrémité peut s'allonger au moyen de la languette, qu'on pousse doucement en appuyant contre le bouton jusqu'à ce qu'elle vienne heurter l'arrière de la règle suivante.

La *fig. 7* est la moitié antérieure du toit; l'autre moitié est toute semblable, à l'exception de l'échancrure *chr*, qui n'est là que pour laisser passer les microscopes.

En *P* est une des pointes, en *S* l'un des supports du niveau.

Les *fig. 8* et *9* sont deux différentes vues de la sole de bois.

La *fig. 10* est le trépied ou *T* de fer, à côté duquel on voit une de ses vis dont la partie supérieure, *fig. 11*,

est un carré qui entre dans une tête ronde de bois, à l'aide de laquelle on tourne la vis, quand il faut caler la règle. On voit en *mm* la tête de bois dans laquelle entre le carré *c* de la vis; mais pour fixer cette tête à la vis, il y a une autre petite vis qu'on voit en *a* et *b*, et qui entre dans le carré de la grande.

La *fig.* 12 est le trépied vu de profil.

La *pl. II* contient les développemens de plusieurs des parties dont la *pl. I* fait voir l'ensemble.

La *fig.* 13 nous montre le vernier 0...10 qui, par l'allongement relatif du cuivre, glisse le long de la division 0, 10, 20, 30, etc., tracée sur une petite règle de cuivre fixée invariablement sur le platine.

Plus loin on voit la languette avec ses divisions 0...300, et le petit vernier 0...10 tracé sur l'une des coulisses qui sert à sous-diviser les parties marquées sur la languette.

Dans la figure la languette est entièrement rentrée, et son zéro coïncide avec celui du vernier. Quand on pousse la languette en dehors, le vernier indique la partie saillante; il est propre par conséquent à mesurer le vide resté entre deux règles consécutives.

La *fig.* 14 montre en *rr* l'épaisseur de la règle, et en *cc* celle des coulisses et de la languette *L*. Ces épaisseurs sont égales entre elles.

La *fig.* 15 représente les pointes d'alignement; *h* est la coupe horizontale d'une de ces pointes, qui sont toutes des cônes tronqués. Les vis *vv* servent à fixer sur le toit *tt* la base courbe *bb* de la pointe.

La *fig.* 16 est la vis qui fixe la garniture destinée à garantir les supports de niveau.

La *fig.* 17 montre en détail les différentes parties qui composent les microscopes. La *fig.* 18 montre le porteloupe ou le pied du microscope de la languette. Ce pied est échancré en *abcd*, afin d'embrasser la règle au long de laquelle il est quelquefois utile de le faire glisser. Le microscope du thermomètre demeurant toujours fixe au même point, son pied est attaché par les vis *vv*, *fig.* 19.

La *pl. III* montre le niveau tel qu'il est dans la mesure de l'inclinaison des règles, *fig.* 20.

On remarque d'abord l'équerre *ABD* en bois ;

La règle fixe *fix* arrêtée sur l'équerre par différentes vis, *fig.* 21 ;

La rainure *rain* ménagée pour conduire la règle mobile au point qui doit marquer l'inclinaison ;

Un arc de cercle de 10° , divisé en cent vingt parties, qui valent par conséquent $5'$ chacune. Cette règle est en cuivre, aussi bien que l'alidade ou règle mobile.

L'alidade, mobile autour du centre *C*, *fig.* 20, glisse dans la rainure pour arriver au point où l'on veut l'avoir, et s'y fixe au moyen de la vis de pression *a*. Il seroit bien long de l'amener ainsi au point bien juste ; mais quand on y est à peu près, on serre la vis de pression, et l'on achève, avec autant de facilité que d'exactitude, au moyen du levier *lv*.

Au-dessus de ce levier on voit le niveau qui tient à l'alidade ou règle mobile au moyen de deux vis qu'on

peut serrer et desserrer à volonté, pour rendre l'axe du niveau perpendiculaire ou oblique à celui de l'alidade.

L'axe du niveau étant bien perpendiculaire à celui de l'alidade, si l'on place les deux pieds *A*, *D* de l'équerre sur un plan bien horizontal, et que l'on amène l'alidade au milieu de l'arc, sur le point 60, la bulle du niveau se trouvera juste entre ses deux repères.

Dans cet état, supposons qu'il faille mesurer l'inclinaison d'un plan, transportez-y l'équerre. S'il y a inclinaison, la bulle se dérangerá. Mettez l'alidade en liberté, et reconduisez-la au point où il faut pour que la bulle soit entre ses repères; quand vous y serez parvenu à peu près, serrez la vis de pression, et achevez au moyen du levier: alors lisez ce que donne le vernier, et la différence à 60^p sera l'inclinaison. Supposons que vous ayez trouvé 75^p 4', ôtez-en 60, il restera 15^p 4' = $15 \times 5' + 4' = 79' = 1^{\circ} 19'$; c'est l'inclinaison.

Si vous avez trouvé 45^p 4', l'inclinaison sera (60—45) $\times 5' - 4' = 15 \times 5' - 4' = 75' - 4' = 71' = 1^{\circ} 11'$.

Dans le premier cas le plan s'abaisse de 1° 19' dans le sens où vont les divisions.

Dans le second, il s'élève de 1° 11' dans le même sens. Généralement les parties du limbe valant chacune cinq minutes, et celle du vernier chacune une minute, on multipliera par cinq les parties du limbe; au produit on ajoutera celles du vernier, de la somme on retranchera 300', le reste sera l'abaissement du plan.

Si la somme est moindre que 300', le reste sera né-

gatif, et montrera l'élevation du plan toujours dans le sens des divisions, ou de gauche à droite.

Il n'est pas très-aisé d'amener l'axe du niveau à une situation bien perpendiculaire à l'axe de l'alidade, ou de faire que le point du niveau soit juste à 60 parties; mais il y a un moyen bien simple de connoître de combien il s'en faut.

Quand vous avez fait l'observation de la manière qui vient d'être indiquée, retournez l'instrument bout pour bout, c'est-à-dire mettez le pied *A* où étoit le pied *D*, et réciproquement, l'inclinaison agira en sens contraire. Notez la seconde observation, la différence des deux arcs sera la double inclinaison, et la demi-somme sera le point du niveau.

Ainsi à Melun, à la mesure de l'inclinaison pour la première règle, on avoit lu	53 ^p 2'
A la seconde	66 ^p 2'
La différence ou la double inclinaison étoit	+ 13 ^p 0'
Ou	65' 0"
Donc l'inclinaison étoit	+ 32' 30"

Et la règle alloit en montant, ce qui a lieu toutes les fois que l'arc est plus petit dans l'observation directe qu'après le retournement. En général, l'élevation de la partie de l'avant au-dessus du niveau de la partie de l'arrière, est égale à la moitié de l'excès du second arc sur le premier $= \frac{1}{2}(A'' - A')$.

A la neuvième règle le premier arc étoit	60 ^p 3'
Le second arc	59 ^p 1'
La double inclinaison étoit	- 1 ^p 2'
L'inclinaison	- ($\frac{1}{2}$ ^p + 1') = - 3' 30"
La règle alloit en descendant.	
La somme des deux arcs	119 ^p 4'
Le point du niveau	59 ^p $\frac{1}{2}$ + 2' = 59 ^p 4' $\frac{1}{2}$

Un peu plus loin, le premier arc	77 ^p 2'
Le second	42 ^p 3'
	<hr/>
La différence	34 ^p 4'
L'inclinaison	— 17 ^p 2' = — 37' = — 1° 27'
La règle alloit en descendant.	
La somme	119 ^p 5' = 120' = 2° 0'
Le point de niveau	= 60' = 1° 0'

Nous trouvons donc pour le point de niveau, par le premier exemple, 59^p 4' 30"

Pour le second 59^p 4' 30"

Pour le troisième 59^p 5' 0"

L'instrument étoit donc très-passablement rectifié. Il ne donne pas les fractions de minutes, et elles sont inutiles pour notre objet. En effet, le cosinus d'un petit angle est sensiblement le même, soit qu'on augmente ou diminue l'angle de quelques minutes.

L'instrument ainsi rectifié ne peut mesurer que des inclinaisons de 3°. Il est arrivé quelques circonstances fort rares, c'est-à-dire une fois à Melun et une à Perpignan, où l'inclinaison alloit à 3° $\frac{1}{2}$ environ.

Dans ce cas je déserrerois l'une des vis qui attachent le niveau à l'alidade : le niveau cessoit d'être perpendiculaire à l'alidade, le point de niveau n'étoit plus à 59^p 4' $\frac{2}{3}$. Voici le procédé que je suivais, et qui servira d'exemple pour les cas pareils.

Après avoir déserré la vis, l'observation directe étoit impossible ; mais le retournement a donné 85^p 4'. Il s'agit d'en conclure l'inclinaison de la règle. Cette inclinaison sera 85^p + 4' — N , N étant le point encore inconnu du niveau.

La règle suivante, beaucoup moins inclinée, pouvoit se mesurer dans les deux sens.

Dans le premier sens elle donna	73 ^p 6'
Et dans le second	15 ^p 3'
La somme est	88 ^p 3'
La demi-somme ou $N =$	44 ^p 1' ⁵
	85 ^p 4'
L'inclinaison, 85 ^p 4' - $N =$	41 ^p 2' ⁵

La règle, très-inclinée, alloit donc en montant de $41^{\text{p}} 2' \frac{1}{2} = 207' \frac{1}{2} = 3^{\circ} 27' \frac{1}{2}$. La règle suivante avoit pour inclinaison

$$\begin{aligned} -\frac{73^{\text{p}} - 15^{\text{p}} 3'}{2} &= -\frac{57^{\text{p}} 2'}{2} = -28^{\text{p}} \frac{1}{2} + 1' \\ &= -143' \frac{1}{2} = -2^{\circ} 23' 30'' \end{aligned}$$

elle alloit en descendant.

Après ces observations je ramenai le point de niveau vers 60^p, comme il étoit auparavant.

Quoique l'arc divisé fût de 10° et s'étendît de part et d'autre à 5° du point de niveau, cependant la rainure n'étant pas assez prolongée, l'alidade n'avoit guère que 3° de jeu de chaque côté.

La *fig.* 22 montre l'alidade suivant son épaisseur et suivant sa largeur. Suivant l'épaisseur, il n'y a rien de remarquable que le biseau *b* qui la termine et qui porte le vernier.

Suivant la largeur, on voit, en commençant par le haut, un trou rond qui donne passage à une vis ou cylindre autour duquel se fait le mouvement. Plus bas on voit la pièce à laquelle est fixé le niveau et les deux vis qui attachent cette pièce à la règle mobile; plus bas, une espèce de bride ou de double équerre dans laquelle se ment le levier qui donne le mouvement lent à l'alidade; plus bas, une ouverture ménagée pour laisser à la règle mobile la liberté de se mouvoir d'une petite quantité quand la vis de pression est serrée, afin qu'on puisse au moyen du levier, amener la règle à la position dans laquelle la bulle sera contenue entre ses repères. Enfin, tout au bas, est le vernier.

La *fig. 23*, *pl. IV*, représente le cylindre autour duquel tourne l'alidade. Ce cylindre est vu de front en *A*, de côté en *B*; en *C*, *D*, *E*, *F* et *G* sont les parties qui servent à visser ce cylindre à l'équerre.

La *fig. 24* nous montre le niveau et sa monture. On y voit deux trous par lesquels passent les vis qui attachent le niveau à la règle mobile. Le trou d'en haut est plus large, afin qu'en desserrant la vis qui le traverse, on puisse incliner le niveau comme nous avons dit ci-dessus. La *fig. 25* représente ce niveau de côté.

La *fig. 26* représente le levier qui donne le mouvement lent. En *A* est une vis qui entre dans la règle mobile, à l'endroit marqué *a'*, *fig. 22*, et qui fait qu'en tournant le levier autour de la vis de pression arrêtée sur le limbe, on donne nécessairement un petit mouvement à la règle mobile.

Ce levier est échancré par le bout *echr*, et cette échancrure embrasse la vis de pression.

La *fig. 27* est ce même levier vu de côté. On y remarque en *a* la vis qui entraîne dans son mouvement l'alidade, en *b* le bouton par lequel on saisit le levier pour le faire mouvoir.

Enfin la *fig. 28* représente la vis de pression et ses développemens. *A* est la tête de la vis vue de face ; *B* la même vis vue de profil ; *mn* est la partie du levier qui embrasse la vis ; *pq* est la partie qu'on voit dans la rainure, *fig. 21*, où l'on peut remarquer l'ouverture de l'écrou dans lequel entre la vis de pression. La vis, en tournant, presse la pièce *pq* contre la surface intérieure de la règle fixe, et arrête par ce moyen le levier qui embrasse cette vis. Si l'on pousse ce levier par un bouton *b*, *fig. 27*, le levier ne peut que tourner autour de la vis de pression. Dans ce mouvement la vis *a* décrit autour de la vis de pression un petit arc, et entraîne la règle mobile qui tourne autour du centre *C* au haut de l'équerre ; par l'effet de ce mouvement la ligne qui joint *CaV* n'est plus une ligne droite, elle devient brisée, et plus longue par conséquent que la ligne droite. On doit concevoir la lettre *V* placée sur la vis. La partie de l'échancrure qui embrasse la vis *V* n'est plus la même ; elle est plus loin de *C* et plus près de l'extrémité du levier : voilà pourquoi on y a fait une échancrure au lieu d'un trou rond.

Les *fig. 29* et *30* représentent de face les parties *mn* et *pq*. Enfin la *fig. 31* montre un ressort à boudin qui

est placé entre la tête de la vis et la partie mn , et fait que mn serre la partie supérieure du limbe, tandis que pq presse la partie inférieure de ce même limbe; ce qui produit un frottement et suffit pour maintenir l'alidade sur le point où on l'a amenée. Ce frottement cède pourtant à l'effort que l'on fait au moyen du levier.

Les lignes CV et Ca sont constantes, et leur différence est peu considérable; Va est variable, mais de peu de chose, et elle est toujours fort petite. L'angle CVa est beaucoup plus grand que VCa : ainsi un mouvement considérable du levier autour de la vis V ne produit qu'un petit mouvement VCa dans l'alidade Ca .

Réduction de la ligne brisée à la ligne droite.

Nos bases n'étoient ni l'une ni l'autre des lignes parfaitement droites; elles étoient composées chacune de deux parties rectilignes qui formoient un angle très-approchant de 180° . La même chose, à très-peu près, avoit eu lieu dans l'opération de 1740, à la base de Perpignan. On voit dans la *Méridienne vérifiée*, p. XLIX, que cette base, à 4760 pieds du terme austral, formoit un angle de $179^\circ 56' 51''$, ou, si l'on veut, la déviation de la ligne droite étoit de $3' 9''$. Dans nos bases la déviation étoit de $49'$ à Melun, et de $23'$ à Perpignan; mais il n'en peut résulter aucun inconvénient, et la réduction est très-facile.

Soient en effet b et c deux lignes inclinées dont on

veut connoître l'excès sur la droite d qui joint leurs extrémités, et A l'angle formé par ces deux lignes, on aura généralement

$$d^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos. A = (b+c)^2 - 2bc(1 + \cos. A) \\ = (b+c)^2 - 4bc \cdot \cos^2. \frac{1}{2} A$$

$$d = (b+c) \left(1 - \frac{4bc \cdot \cos^2. \frac{1}{2} A}{(b+c)^2} \right)^{\frac{1}{2}} = (b+c) (1-x)^{\frac{1}{2}} \\ = (b+c) \left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8}x^3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8}x^4 - \text{etc.} \right) \\ = (b+c) \left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8}x^3 - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8}x^4 - \text{etc.} \right) \\ = (b+c) - (b+c) \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8}x^3 + \text{etc.} \right)$$

On fera donc

$$x = \frac{4bc \cdot \cos^2. \frac{1}{2} A}{(b+c)^2}$$

Un calcul fort simple donnera les différens termes de la série qui exprime l'excès de la somme des deux côtés sur le troisième, c'est-à-dire ce qu'il faut retrancher de la base brisée pour avoir la base en ligne droite.

Quand l'angle approche très-fort de 180° , la série est fort convergente; il suffit d'un très-petit nombre de termes.

A Melun, le second terme étoit de 000000 3; à Perpignan il étoit de 000000.0096. On pourroit donc très-bien s'en tenir au premier terme, qui se réduit à

$$\frac{2bc \cdot \cos^2. \frac{1}{2} A}{(b+c)}$$

Soit K le module, et l'on aura généralement

$$\log. d = \log. (b+c) - \frac{1}{2}K \left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \text{etc.} \right)$$

2.

3

Opérations préparatoires.

Au coude formé par les deux parties de la base j'ai fait enfoncer en terre un pieu de trois pieds de longueur et de six pouces de diamètre. La tête de ce pieu étoit de quelques pouces au-dessous du sol. C'est en partant de l'axe de ce pieu, et en me dirigeant successivement sur les signaux placés aux deux termes, que j'ai tracé l'alignement des bases. Voici l'ordre suivi dans cette opération fondamentale.

La colonne du cercle étant mise dans une situation verticale au moyen du petit niveau, et l'axe de rotation étant perpendiculaire à la direction de la base, je plaçois le fil vertical sur le signal du terme vers lequel je me dirigeois, celui de Melun, par exemple; et pour m'assurer que la position de l'instrument étoit en effet bien verticale, je donnois un mouvement de rotation au cercle, et dans ce mouvement je voyois si le sommet du signal répondoit successivement à tous les points du fil. Alors je faisois placer sur le terrain, de 100 en 100 toises, une barre de fer bien verticale, et quand, d'après les signaux que je faisois, on étoit parvenu à la mettre bien exactement sous le fil de ma lunette, on l'enfonçoit dans le terrain à coups de marteau. Quand on avoit ainsi fait un trou suffisant, on retiroit la barre de fer, et l'on y substituoit un piquet de bois de 15 à 18 pouces de longueur et de trois pouces d'écartissage par la tête; l'autre bout finissoit en pointe. On enfonçoit ce pieu à

grands coups de marteau jusqu'à ce qu'il fût à fleur de terre. Pendant cette opération j'observois si le pieu continuoit d'être bien coupé par le fil. Quelquefois, en l'enfonçant, on le dérangeoit à droite ou à gauche d'une quantité qu'il étoit aisé d'estimer en parties du diamètre du pieu même; j'en tenois note, pour y avoir égard au temps de la mesure. Mais toutes ces déviations se sont trouvées trop foibles pour produire aucun effet sensible sur la longueur des bases. En effet, aucune des déviations ne passe $\frac{1}{2}$ pouce ou $\frac{1}{144}$ de toise. La distance d'un piquet à l'autre est de 100 toises: le sinus de la déviation est donc $\frac{1}{14400}$. Soit a l'angle dont le sinus est $\frac{1}{14400}$, la partie de la base qui aura la déviation sera trop grande de

$$200^t. \sin^2. \frac{1}{2} a = 50^t. \sin^2. a = \frac{50^t}{(14400)^2} = \frac{1^t}{4800}$$

et quand on supposeroit une pareille déviation à toutes les parties pareilles de la base, qui sont au nombre de soixante, l'erreur totale ne seroit encore que $\frac{60}{4800} = \frac{1}{80}$.

J'ai donc pu négliger toutes ces petites déviations qui, loin d'être au nombre de 60, n'alloient pas à 10 pour chaque base.

Il eût été trop incommode de diriger ainsi, du même point et du coude de la base, toutes les opérations par lesquelles on plantoit tous ces piquets qui devoient nous conduire dans la mesure. Quand il y en avoit trois ou quatre de placés, je transportois le cercle au dernier de tous, et de cette nouvelle station j'en déterminois trois

ou quatre autres ainsi, de proche en proche, jusqu'à la conclusion.

Remarquez que, dans toutes ces stations, ce n'étoit pas la colonne de l'instrument qu'il falloit placer perpendiculairement au-dessus du piquet, mais le plan même du cercle, ou plutôt l'axe de la lunette, de manière qu'en la dirigeant au nadir, le rayon visuel passât par l'axe du piquet.

L'alignement ainsi tracé dans toute son étendue, on commençoit la mesure; mais avant tout on avoit fait au coude les observations nécessaires pour déterminer l'angle que formoient les deux parties de la base brisée.

Ordre suivi dans les mesures.

Voici l'ordre qu'on a suivi de la manière la plus invariable dans la mesure des deux bases.

La règle n° I étoit d'abord placée dans la direction de la base de manière qu'un fil à plomb tangent à l'extrémité de la règle, tomboit exactement sur le point de départ: ainsi il faudra tenir compte de la demi-épaisseur du fil au point de contact.

Cette première règle avoit été mise dans la direction convenable, au moyen des deux pointes de fer implantées dans le toit. Pour se diriger, on avoit placé une mire ou règle bien verticale au-dessus du premier piquet, à cent toises de là; un observateur, couché sur le terrain, en arrière de la règle, examinoit si les deux pointes se projettoient bien sur le milieu de la mire.

A la suite de la première règle, on plaçoit dans la

même direction la règle n° II, ayant soin de laisser entre les deux un petit intervalle qui devoit ensuite être mesuré par la languette.

La règle n° III étoit mise de même à la suite du n° II, et le n° IV à la suite du n° III.

Les quatre règles ainsi placées, je vérifiois si les huit pointes se projettoient bien sur le milieu de la mire.

Alors on posoit le niveau sur la règle n° I, la face tournée d'abord vers l'orient; je lisois l'observation, et elle étoit à l'instant inscrite sur deux registres différens qui étoient collationnés aussitôt. On posoit le niveau une seconde fois, mais la face vers l'occident, et cette seconde observation étoit de même lue, inscrite et collationnée.

On en faisoit autant aux trois règles suivantes.

Alors je me couchois sur le terrain pour lire le vernier du thermomètre métallique du n° I; je pouissois doucement la languette, pour la mettre en contact avec la règle n° II. Ces deux observations s'inscrivoient à mesure, comme toutes les autres, sur le double registre, après quoi on venoit voir au microscope de la languette si je ne m'étois pas trompé dans l'observation. Après la lecture, je faisois rentrer la languette dans sa coulisse. La même opération avoit lieu successivement sur les règles II et III.

Les quatre règles étoient, comme j'ai dit ci-dessus, portées chacune sur deux trépieds de fer, et les trépieds sur leurs soles, dont les pointes entroient dans la terre; en sorte que les règles n'éprouvoient aucun mouvement, même quand on posoit le niveau.

Des supports, c'est-à-dire des trépieds sur leurs soles, étoient d'avance placés sur le terrain pour recevoir la règle n° I, qui étoit alors transportée à la suite du n° IV. J'en mesurois l'inclinaison au moyen du niveau, et je lisois le thermomètre et la languette du n° IV.

La règle n° II étoit alors portée à la suite du n° I, et toutes les observations se succédoient dans le même ordre jusqu'à la fin de la journée, c'est-à-dire que toutes les fois qu'une règle étoit ainsi transportée, je commençois par en mesurer l'inclinaison, après quoi je lisois le thermomètre et la languette de la règle précédente. Ainsi, l'inclinaison mesurée, on s'abstenoit scrupuleusement de toucher à la règle, dans la crainte d'altérer le moins du monde les intervalles que la languette devoit mesurer.

Quand on voyoit la nécessité de s'arrêter, c'est-à-dire une demi-heure avant l'instant où la lecture des verniers devoit être impossible, on présentoit d'une manière provisoire la règle par laquelle on vouloit recommencer le lendemain (c'étoit toujours le n° I); on marquoit ensuite sur le terrain l'endroit où elle devoit aboutir. On la retiroit ensuite pour faire un trou en terre. Dans le fond de ce trou on enfonçoit un pieu sur lequel on attachoit une plaque de plomb avec deux ou trois clous.

Ces préparatifs achevés, on replaçoit la règle n° I, sa languette rentrée dans sa coulisse; on mesuroit l'inclinaison; on lisoit le thermomètre et la languette du n° IV, le thermomètre du n° I, après quoi, de l'extrémité antérieure de la règle, on descendoit un fil à plomb

dont la pointe laissoit une marque sur la plaque du piquet. Par ce point on traçoit sur le plomb deux lignes qui se coupoient à angles droits; l'une dans le sens de la base, et l'autre dans la direction perpendiculaire; on recouvroit la plaque de plomb d'une pièce de bois dont la base étoit creusée en calotte, afin qu'elle ne touchât aucunement la plaque. On rebouchoit le trou en y remettant toute la terre qu'on en avoit tirée.

Le lendemain on découvroit la plaque, on plaçoit la règle n° I dans la même position que la veille, c'est-à-dire de manière que le fil à plomb tombât exactement sur le même point.

Cette règle étoit la première de la nouvelle journée; on mettoit ensuite les trois autres comme on avoit fait le premier jour; on en observoit l'inclinaison, le thermomètre et la languette, et la journée continuoit comme la précédente.

L'inclinaison et la température de la règle n° I pouvoient être et sans doute étoient un peu différentes le matin de ce qu'elles avoient été la veille: mais peu importoit; il suffisoit que l'extrémité antérieure de la règle se trouvât au même point, et c'est ce qu'on obtenoit par le fil à plomb.

J'appelle, comme on voit, extrémité antérieure celle qui étoit la plus avancée, c'est-à-dire plus éloignée du point où l'on avoit commencé la mesure.

Pour peu que l'air fût agité, l'on s'entouroit de toiles pour garantir le fil à plomb, et dans tous les cas on répétoit l'épreuve plusieurs fois.

Jamais on n'a eu la moindre incertitude sur le départ d'aucune journée. Nos piquets, leurs plaques et le pied de la perpendiculaire ont toujours été retrouvés intacts.

Il resteroit à dire comment s'est terminée la mesure des deux bases; car on imagine bien que la dernière règle n'est pas arrivée juste au second terme. On verra dans les articles particuliers aux bases de Melun et de Perpignan, les moyens divers dont nous nous sommes servis dans des circonstances tout-à-fait différentes.

Quatre personnes étoient employées à placer d'avance les supports et à transporter les règles quand on leur en donnoit l'ordre.

Aussitôt que la règle étoit sur les trépieds, M. Tranchet la faisoit aligner, puis il aidait à caler la règle par un bout.

M. Bellet la caloit par l'autre, et l'amenoit à la hauteur nécessaire pour que l'arête horizontale supérieure de la règle pût être rencontrée par la surface inférieure de la languette, ou du moins par la partie inférieure de l'épaisseur. Nous dirons tout-à-l'heure la raison de cette pratique.

Cette partie de l'opération étoit sans contredit la plus longue et la plus fatigante de toutes par la position de l'observateur, qui étoit obligé d'être continuellement courbé et un genou en terre.

M. Tranchot tenoit en outre l'un des deux registres où tous les détails de la mesure sont consignés.

L'autre registre étoit tenu par Leblanc de Pommard, aujourd'hui auditeur au Conseil d'État, et mon beau-

beau-fils. Il se chargeoit en outre de vérifier après moi l'observation microscopique de la languette.

Pour moi, je me proménois continuellement le long des règles, pour surveiller toutes les parties de l'opération, et je n'avois d'ailleurs d'autre besogne que celle de lire les verniers, de pousser la languette, de la faire rentrer, et enfin celle de dicter les notes où sont exposées toutes les circonstances de la mesure. Ces notes sont peu nombreuses, ou du moins peu étendues; elles ne sont presque rien qu'un journal météorologique, car rien d'ailleurs n'a été plus uniforme et moins fécond en événemens que la mesure de nos deux bases.

Chaque soir, en rentrant, je consignoïis dans mon registre une copie des observations et de toutes les mesures de la journée, et cette copie, soigneusement collationnée, étoit ensuite revêtue de la signature de MM. Tranchot et Pommard. Le but de ces registres où, depuis le mois de juin 1792 jusqu'au dernier complémentaire an 6, toutes les observations ont été consignées jour par jour et dans l'ordre où elles ont été faites, étoit de me mettre dans l'impossibilité de rien altérer et de rien supprimer, comme on le pourroit soupçonner si les observations n'eussent été consignées que sur des feuilles volantes ou dans des registres formés long-temps après, et sans aucune authenticité.

La surface inférieure des languettes doit être considérée comme un prolongement de la surface supérieure des règles, en conséquence il faut que la partie inférieure de la languette vienne joindre la partie supérieure

de la règle suivante, et, si l'on pouvoit suivre rigoureusement ce précepte, la partie supérieure des règles, depuis un terme de la base jusqu'à l'autre, formeroit une ligne ou surface mathématique et sans épaisseur sensible, et c'est un nouvel avantage de ces languettes que celui de faciliter les moyens d'éviter l'épaisseur d'ailleurs si peu considérable de nos règles.

Mais il y auroit eu quelque danger à vouloir suivre trop exactement ce précepte. En effet, quand une règle n eût été plus élevée par le second bout que par le premier, si, par mégarde, on eût placé le premier bout un peu trop bas, la languette de la règle précédente ($n - 1$), au lieu de remplir exactement l'intervalle, eût empiété sur la règle n , et le vernier eût indiqué pour la languette une saillie trop considérable. Pour éviter cet inconvénient, on tenoit donc la surface supérieure de la règle n un peu plus élevée que la surface inférieure de la languette ($n - 1$).

De cette précaution il résulte une erreur qu'il s'agit d'estimer. Il peut arriver différens cas. (*Pl. V, fig. 12*)

1°. La règle n peut être placée entre deux règles ($n - 1$) et ($n + 1$), qui toutes deux vont en descendant plus que la règle n , en sorte que les deux extrémités a et b soient en contact avec les épaisseurs des règles voisines. Dans ce cas, en nommant I l'inclinaison de la ligne ab , qui est celle que mesure l'équerre, on aura de cette partie de la base l'expression

$$ab \cdot \cos. I = (r + l) \cdot \cos. I$$

r étant la longueur de la règle, et l celle de la languette. Alors il n'y a nulle erreur, nul besoin de correction.

2°. La règle n peut être entre les règles $(n-1)$ et $(n+1)$, inclinées dans des sens différens (*fig. 13*), en sorte que les points de contact soient distans, non plus de la quantité $ab = (r+l)$, mais de $ac = \frac{(r+l)}{\cos. bac}$, dont l'inclinaison est $(I+bac) = (I+a)$. Cette partie de la base est donc

$$\begin{aligned} & \frac{r+l}{\cos. a} (\cos. I. \cos. a - \sin. I. \sin. a) \\ &= (r+l). \cos. I - (r+l). \sin. I. \text{tang. } a \\ &= (r+l). \cos. I - (r+l). \sin. I \left(\frac{bc}{ab} \right) \\ &= (r+l). \cos. I - bc. \sin. I \end{aligned}$$

Au lieu donc de n'employer, comme on fait, que

$$(r+l). \cos. I$$

il faut encore la petite correction

$$- bc. \sin. I = - (r+l). \sin. I. \text{tang. } a$$

3°. La règle n peut être placée entre deux règles $(n-1)$ et $(n+1)$, qui vont toutes deux en montant plus que la règle n (*fig. 14*); en sorte que la distance des points de contact est

$$cd = \frac{ab}{\cos. u}$$

et cette partie de la base

$$= \frac{(r+l). \cos. (I+u)}{\cos. u} = (r+l). \cos. I - (r+l). \sin. I. \text{tang. } u$$

Or

$$\text{tang. } u = \frac{ad}{au} = \frac{bc}{ub} = \frac{ad+bc}{au+ub} = \frac{ad+dc}{ab}$$

donc cette partie de la base

$$\begin{aligned} &= (r+l). \cos. I - (r+l). \sin. I. \text{tang. } u \\ &= (r+l). \cos. I - (ad+bc). \sin. I \end{aligned}$$

La correction est donc, en ce cas,

$$- (ad+bc). \sin. I$$

Le point *c* étant toujours plus élevé que le point *b*, et le point *d* toujours au-dessous du pont *a*, les quantités *bc* et $(ad+bc)$ sont toujours censées positives; mais *sin. I* sera négatif si *b* est plus bas que *a*. Ainsi ces corrections peuvent être positives ou négatives; elles seront soustractives tant que la base ira en montant, additives dans le cas contraire. Or nos deux bases vont le plus souvent en montant: donc nous aurons plus de corrections soustractives que de positives.

$(r+l). \sin. I$ est évidemment la quantité dont l'extrémité *b* de la règle est plus élevée que l'extrémité *a*; c'est la différence de niveau. Soit donc *dN* cette quantité, la correction deviendra

$$-dN. \text{tang. } u = - \frac{dN. (ad+bc)}{r+l}$$

Cette quantité, dans le premier cas, se réduit à $\frac{bc}{r+l}$
 Dans le second, à $\frac{bc}{r+l}$
 Dans le troisième elle est $\frac{ad+bc}{r+l}$
 La quantité moyenne sera $= \frac{1}{3}(3bc) = bc = \frac{1}{3}(ad+2bc) : (r+l)$

bc est probablement toujours au-dessous de $\frac{1}{2}$ ligne, et certainement au-dessous de 1^1 ; ainsi la valeur moyenne de tangente u est très-probablement moindre que $\frac{1}{3456}$, et certainement moindre que $\frac{1}{1728}$.

Nos registres donnent pour chaque règle une valeur approximative de dN ; ainsi la somme des corrections sera

$$-\sum \frac{dN}{1728} \text{ ou } -\sum \frac{dN}{3456}$$

Suivant nos registres, $\sum dN$ est de 6 à 7 toises; suivant les distances au zénith, $\sum dN$ est de 8 à 9 toises: d'où il suit que -4^15 est la limite que ne peut atteindre la somme des corrections, et -2^125 celle qu'elle n'atteint probablement pas.

Ainsi nos bases sont trop fortes de 2 à 3 lignes au plus; on peut donc les diminuer de 0'002 ou 0'003.

Il y a une autre cause d'erreur qui est commune à toutes les bases qu'on a mesurées, et qui le sera pareillement à toutes celles qu'on pourra mesurer par la suite; c'est l'erreur de l'alignement, qui ne sera jamais une ligne parfaitement droite, mais un composé de lignes inégalement brisées qui approchera plus ou moins de la ligne droite, et qui sera toujours trop long.

Soit A l'angle d'inclinaison d'une règle sur la véritable

base rectiligne, $2 r. \cos. 2^{\circ} \frac{1}{2} A$ sera la réduction à la ligne droite, ou $4^{\text{t.}} \sin^2. \frac{1}{2} A$, ou $1^{\text{t.}} \sin^2. A$.

Supposons qu'en alignant nous nous soyons trompés de l'épaisseur de l'une des pointes verticales qui nous dirigeoient, c'est-à-dire de 2 lignes, le sinus de A sera de

$$\frac{2}{1728} = \frac{1}{864}; \quad 1^{\text{t.}} \sin^2. A = \frac{1^{\text{t.}}}{864^2} = \frac{1^{\text{t.}}}{864}$$

Trois mille règles donneroient à ce compte une erreur de $\frac{30001}{864}$ pour toute la base, c'est-à-dire un peu plus que 3 lignes.

Cette correction seroit encore dans le même sens que la précédente, et de même valeur moyenne, à peu près. En les réunissant, on auroit probablement 0'005 à retrancher de chacune de mes bases.

Une source d'erreurs particulière à nos règles seroit la correction du zéro de la languette. Quand deux règles sont en contact immédiat, si l'on pousse la languette contre la règle suivante, le vernier devoit marquer zéro, puisque l'intervalle est nul entre les deux règles.

Suivant les expériences de Borda, qu'on verra ci-après, la correction moyenne des verniers étoit — 0'00000.15.

Suivant celles que j'ai faites immédiatement avant la mesure de Melun, elle étoit — 0'00000.3644; en frimaire an 7, au retour de Perpignan, elle étoit — 0'00000.66. Il paroît que cette correction va en augmentant. De l'an 6 à l'an 7, on peut l'attribuer à l'usage fréquent qu'on a fait des languettes; mais, entre les expériences de Borda et les miennes, je ne sais quelle en peut être la

raison. La plus grande variation est donc $0^{\circ}00000.5$. En me servant de la correction de Borda, la base de Melun seroit de $0^{\circ}006$ plus grande que je ne l'ai faite; celle de Perpignan plus grande de $0^{\circ}015$. Voilà donc jusqu'ici la plus grande cause d'incertitude.

J'ai cru devoir employer pour Melun la correction déterminée immédiatement auparavant $0^{\circ}00000.3644$; pour Perpignan, je me suis servi de la correction $0^{\circ}00000.66$, déterminée immédiatement après.

Pendant les deux mesures, j'ai tenté plusieurs vérifications qui m'ont donné des quantités différentes le plus souvent, mais toujours fort petites. Je n'en ai donc fait aucun usage, et je m'en suis tenu aux corrections que j'avois trouvées par des moyens beaucoup plus sûrs et plus susceptibles de précision, dans l'atelier de M. Lenoir, et de concert avec lui.

L'incertitude que nous examinons en ce moment ne monte donc guère qu'à un pouce, en mettant tout au pis; au reste, Borda lui-même n'a jamais prétendu qu'on pût arriver à une précision plus grande sur une base de 6000 toises.

Après ces notions générales également applicables à nos deux bases, passons à ce qui les regarde chacune en particulier.

Base de Melun.

ON a vu aux stations de Melun et Lieursaint, p. 142 et 145, la manière dont on a marqué les deux termes, et les précautions prises pour les conserver.

Mon premier soin a été ensuite de choisir le point où il seroit plus avantageux de briser la base, de marquer ce point d'une manière qui fût long-temps reconnoissable, et d'y faire les observations suivantes pour déterminer l'angle.

A l'angle de la base de Melun.

DISTANCES AU ZÉNITH.

Signal de Melun.

10 998^e172 998^e172 = 89° 50' 7" 728 (dans le ciel.)
D. et B. n° 4. 30 germinal an 6, à 0^h 30'.

Signal de Lieursaint.

10 997^e838 997^e838 = 89° 48' 19" 512 (dans le ciel.)
D. et B. n° 4. Fini à 1^h. Ces deux distances ont été prises à 10 pieds $\frac{1}{2}$ du poteau, en allant vers Melun.

Signal de Malvoisine.

10 997^e478 997^e478 = 89° 46' 22" 872 (dans le ciel.)
D. et B. n° 4. Fini à 1^h $\frac{1}{2}$. Cette distance a été prise à 8 pieds $\frac{1}{2}$ du poteau, et plus loin de Malvoisine.

ANGLES.

Entre les signaux de Lieursaint et Malvoisine.

20 1705^e45025 35^e2725125 = 76° 44' 42" 948
+ 2" 18
Horizon 76° 44' 45" 12

Entre les signaux de Malvoisine et Melun.

20	2276 ^s 29025	113 ^s 3145125	=	102° 25' 59"0205
				+ 2"95
	Horizon			102° 26' 1"97
	Angle précédent			76° 44' 45"12
	Angle entre les deux parties de la base .			179° 10' 47"09
	P = 3945'	Q = 2134'		- 6"18
	Angle des cordes			179° 10' 40"91

Immédiatement après ces observations, nous avons, à partir du piquet planté au coude de la base, commencé le tracé de l'alignement, en nous dirigeant d'abord sur Melun, et deux jours après sur Lieursaint, mais toujours en partant du même piquet.

La mesure de la base a commencé le 5 floréal (24 mai 1798); elle a continué sans un seul jour d'interruption, et elle a été terminée le 15 prairial (3 juin), après quarante-cinq jours de travail.

Il seroit trop long de rapporter des observations qui tiennent plus de cent vingt pages dans mes registres; mais pour qu'on soit en état de juger de la sûreté de la méthode qu'on a suivie et des soins qu'on a pris pour rendre les erreurs pour ainsi dire impossibles, on va donner la copie figurée de la première page, qui est aussi le tableau de la première journée.

N° I. Base de Melun.

N° des régles	Thermom. métallique	Languettes	Niveau vers		Inclin. double.	Réduct. à l'horizon	dN +	dN -	
			Bre.	Malvois					
1	416.0	409.8	53.0	66.2	13.0	9.0	189		
2	416.5	235.9	81.4	38.0	43.4	101.4		637	
3	415.0	346.4	50.4	68.4	18.0	17.3	262		
4	420.4	506.6	72.1	48.1	24.0	30.5		349	
1	418.1	461.3	83.3	35.0	47.3	119.8		692	
2	420.0	495.7	72.1	47.4	24.2	31.5		355	
3	417.0	415.7	66.4	48.4	13.0	9.0		189	
4	424.1	494.7	75.0	41.3	30.4	50.2		416	
1	424.3	418.8	60.3	59.1	1.2	0.1		20	
2	422.8	529.2	51.1	60.3	1.2	0.1		20	
3	421.4	410.2	63.4	54.4	10.2	5.7		151	
4	430.7	609.3	75.0	45.2	29.3	46.3		430	
1	426.1	487.1	53.4	66.4	13.0	9.0	189		
2	427.2	492.2	77.0	42.3	34.4	64.0		506	
3	424.6	481.9	61.1	59.1	2.0	0.2		29	
4	432.7	465.7	64.1	56.0	8.1	3.6		119	
1	425.5	669.8	70.0	44.3	31.2	52.2		457	
2	427.4	492.6	72.4	47.3	25.1	33.6		500	
3	420.3	441.0	71.1	48.4	22.2	26.5		325	
4	425.3	495.9	72.5	47.2	25.1	33.6		366	
1	430.6	394.6	63.0	57.1	5.4	1.8		84	
2	422.0	451.3	77.0	43.2	33.3	59.7		489	
3	426.5	621.4	66.2	54.0	12.2	8.1		180	
4	426.8	506.1	79.0	41.1	37.4	75.6		550	
1	422.3	365.6	61.4	55.4	8.0	3.4		110	
2	428.3	628.6	71.4	46.0	27.4	40.9		494	
3	431.3	683.9	63.0	57.3	5.2	1.6		78	
4	427.3	753.4	60.0	59.4	0.1	0.0		3	
1	424.7	582.0	70.1	43.3	32.3	56.2		474	
2	423.7	519.0	67.3	52.3	15.0	11.9		218	
3	418.8	928.4	68.4	51.4	17.0	15.3		247	
4	420.9	489.3	67.3	52.3	15.0	11.9		218	
1	416.6	601.3	63.3	56.2	7.1	2.8		103	
2	421.4	531.5	73.4	46.4	26.4	38.2		306	
3	416.8	480.0	65.4	54.4	11.0	6.4		160	
4	419.3	627.0	82.5	31.4	40.4	38.0		500	
1	414.6	609.1	60.4	59.3	1.1	0.1		17	
2	420.0	215.0	89.4	34.3	51.0	137.5		742	
3	412.4	453.5	60.0	60.3	0.3	0.0		9	
4	415.7	627.8	79.2	41.1	38.1	77.2		555	
1	411.0	415.9	60.1	57.4	1.0	0.1		15	
2	416.4	372.4	66.8	58.2	13.1	0.2		192	
3	401.5	614.5	75.1	44.4	30.2	48.9		442	
4	401.5	1207.2	68.4	56.2	7.2	2.9		103	
1	408.0	602.0	71.4	47.2	24.2	31.5		355	
2	409.6	534.8	78.1	40.3	37.3	74.8		517	
3	405.3	617.5	67.3	51.1	16.2	14.2		239	
4	412.5	944.0	60.4	49.3	19.1	19.5		279	
48									- 13230
96	20182.3	25736.1				1481.2	+ 669		- 12561

REMARQUES. 5. Foréal. La mesure a commencé vers 11 heures du matin, et n'a fini qu'après le coucher du soleil. Temps superbe; soleil sans le moindre nuage; un peu de vent, qui a cessé vers le soir.

La première colonne est remplie des numéros indicatifs des règles; ils se succèdent invariablement dans le même ordre, qui recommence à chaque case de quatre lignes.

Au bas est la somme 48. C'est le nombre des règles posées dans cette journée; et comme chaque règle vaut 2 toises, on voit au-dessous le nombre 96, qui est celui des toises.

Dans la seconde colonne on voit, sous le titre de *thermomètre métallique*, ce que le vernier a donné pour le thermomètre de chaque règle. En comparant ce que la même règle a donné dans les différentes cases, on y voit une marche assez régulière pour prouver qu'il n'y a pas eu d'erreur sensible, et cette probabilité s'augmente quand on voit que la marche des quatre thermomètres est à peu près la même, malgré la différence des nombres. Au bas de la colonne est la somme des quarante-huit observations thermométriques.

La colonne des languettes vient ensuite, et donne en cent millièmes de toise la quantité qu'il faut ajouter à chaque règle. La somme est pareillement au bas de la colonne.

Ces quantités n'offrent pas les mêmes vérifications que les précédentes, mais elles ont été observées avec un soin particulier, et vérifiées par un second observateur; d'ailleurs elles sont si petites qu'il y faudroit des erreurs absolument invraisemblables pour que la longueur de la base en fût altérée sensiblement.

La quatrième colonne renferme les observations du

niveau dans les deux sens. Elle offre une excellente vérification, en ce que la somme des deux nombres est à peu près constante, et de 119^p4 le plus souvent.

La colonne suivante est la différence des deux observations de niveau : ainsi, à la première ligne, 13.0 = 66.2 — 53.2. Ces treize parties valent $\frac{130'}{2} = 65' = 1^{\circ} 5'$. C'est la double inclinaison, et l'inclinaison simple est par conséquent 32' 30".

A la seconde ligne, la double inclinaison est 43^p 4', et l'inclinaison simple

$$= \frac{430' 8'}{4} = 107' 30'' + 2' = 109' 30'' = 1^{\circ} 49' 30''$$

En supposant la règle de 2 toises, la réduction à l'horizon sera

$$2.2^t. \sin^2. \frac{1}{2} \text{ inclin.} = 4^t. \sin^2. \frac{1}{4} \text{ (double inclin.)}$$

Sur cette formule j'ai construit une table où l'on prenoit à vue la réduction à l'horizon qui se trouve dans la sixième colonne. Cette table a pour argument la double et non la simple inclinaison, afin d'épargner une division à chaque ligne, et rendre l'opération plus courte et plus sûre.

Les languettes exigent une réduction analogue; leur formule est

$$2l. \sin^2. \frac{1}{4} (2I) = \frac{2l}{4} [4^t. \sin^2. \frac{1}{4} (2I)] = \frac{1}{2} l. 4^t. \sin^2. \frac{1}{4} (2I) \\ = \text{réduct. de la règle} \times \text{la demi-longueur} \\ \text{de la languette.}$$

Une seconde table, ayant pour argumens le nombre pris dans la première et la longueur de la languette, donnoit encore à vue la correction de la languette. Cette correction a été calculée ainsi pour chaque règle, et la somme s'est trouvée — 0'00178.8. On trouveroit — 0'00185 en la calculant tout d'un coup par la formule suivante, qui seroit un peu moins exacte :

$$\text{réduct. des lang.} = \frac{\text{somme des lang.} \times \text{réduct. des règles}}{\text{nombre des règles}}$$

La différence est insensible; en conséquence on s'est dispensé de mettre sur le registre les réductions partielles à la suite de chaque languette.

Les deux dernières colonnes contiennent, sous le titre de dN , ou différence de niveau, la quantité $(r+l) \cdot \sin. I$. Ces différences, additionnées successivement, donneroient le nivellement de toute la base; mais elles ne sont qu'approchées, parce qu'elles supposent le point de contact dans la surface inférieure de la languette n et dans la surface supérieure de la règle $(n+1)$, et parce que la règle $(n+1)$ étoit constamment plus haute que n d'une quantité inconnue. Ainsi le nivellement par la somme des dN doit donner pour la différence de niveau des deux termes une quantité trop petite. En effet, elle a donné 7'4, au lieu que les distances au zénith ont donné 9'0. L'erreur est d'environ 1'6. 3020 règles, toutes plus élevées de $\frac{1}{2}$ ligne que ne suppose le calcul des dN , donneroient 1510 lignes, c'est-à-dire 128^l de plus que nous n'avons trouvé. Il faudroit donc

supposer que chacune de ces règles eût été tenue presque $\frac{1}{2}$ ligne plus haut que la précédente; ce qui me paroît un peu fort, mais n'est pourtant pas impossible. Il en résulte que la base de Melun a besoin de la correction — $2^{\prime}25 = 0^{\prime}0026$, que nous avons indiquée ci-dessus comme possible.

Quand la base va en montant, la seconde observation de niveau donne un nombre plus fort que la première, et dN est marquée du signe +; dans le cas contraire, dN a le signe —.

Après cette première page, donnée avec tous les détails possibles, nous ne présenterons dans le tableau II que les sommes qui se trouvent au bas des soixante-une pages qu'a fournies la base de Melun. Toutes les additions et tous les calculs qu'elles supposent ont été faits triples par Tranchot, Pommard et moi, à l'exception des dN , qui n'ont été calculés que par Tranchot.

Il n'est pas inutile de remarquer que les additions ayant été faites sur des registres dont la pagination étoit différente, les sommes partielles qui formoient la somme totale n'étoient pas les mêmes, et qu'ainsi la vérification étoit plus certaine encore que si toutes les pages eussent été du même nombre de règles.

Ces registres sont au nombre de quatre. Les deux premiers sont les originaux écrits par Tranchot et Pommard sur le terrain; le troisième est la copie que je faisais chaque soir; le quatrième est une copie faite par Tranchot. Tous ces registres seront déposés à l'Observatoire.

La réunion de toutes ces sommes donne, pour résultat général :

Toises	6042	
Languettes	34.26068.3	
Épaisseur du fil à plomb	+ 0.00057.8	
Réduction à l'horizon	- 0.32711.0	
Réduction des languettes	- 178.8	
	<hr/>	
Base mesurée	6075.93236.3	
Thermomètres	12.75863.8	
Somme des <i>dN</i>	7 ³ 364	

La base mesurée a besoin de plusieurs corrections.

1°. La dernière règle ou la 3021^e dépassoit un peu le terme austral. De l'extrémité de cette règle on avoit abaissé, comme à la fin d'une journée, un fil à plomb sur une plaque de plomb clouée dans un mastic qui recouroit le massif de pierre du terme boréal.

Entre ce point et le terme l'intervalle s'est trouvé de 48¹/₅; mais cette longueur étoit l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont la hauteur étoit 10 lignes. La différence horizontale étoit donc de 47¹/₅8 = - 0⁰5492.8. Cette différence est trop forte d'une demi-épaisseur du fil qui soutenoit le plomb : ainsi, après l'avoir retranchée, il faut ajouter une demi-épaisseur du fil. On avoit déjà une demi-épaisseur à ajouter pour le commencement; c'est au total une épaisseur du cordonnet qui soutenoit le plomb ou le perpendicule, on peut l'évaluer à une demi-ligne ou 0⁰0057.8. Cette petite correction est déjà employée ci-dessus; reste donc - 0⁰5492.8.

2°. Notre mesure est celle d'une ligne brisée dont les

deux parties font à l'horizon un angle de $179^{\circ} 10' 47'' 09$; les deux parties étant, l'une de 3945^t et 2131^t , la réduction aux cordes est de $6'' 18$, et par conséquent l'angle des cordes $= 179^{\circ} 10' 40'' 91 = A$. On a donc

$$\frac{1}{2} A = 89^{\circ} 35' 20'' 5$$

d'où l'on conclut pour la réduction à la ligne droite (page 17):

Premier terme	— 0.142369
Second terme	— 0.000002
	— 0.142371
Total	— 0.142371

3°. Outre cette correction, le coude de notre base en exige encore une autre dont il faut que je rende compte, quoiqu'elle soit assez petite pour être négligée.

Entre la dernière règle lue le 17 floréal et le centre du poteau où se faisoit le coude, il restoit $1^p 7^p 8^l$ à très-peu près. Au lieu de mesurer exactement cette longueur EP (*fig. 15*), j'ai fait aligner vers le point L sur la règle de mire placée en I , à $100^t 1^p 7^p 8^l$; en sorte qu'au lieu de mesurer $EP + PL$, j'ai mesuré EL , qui est un peu trop court. La différence, suivant la formule, est

$$\left(\frac{2 EP \cdot PL}{EP + PL} \right) \cdot \cos^2 \frac{1}{2} P = \frac{100^t \times 0^t 27315 \cdot \cos^2 \frac{1}{2} (179^{\circ} 10' 40'' 91)}{100^t 27315} \\ = + 0^t 0000278$$

L'angle ELP est de $8''$; la ligne ELI est donc aussi brisée: elle auroit donc besoin d'une correction

$$\frac{2 EL \cdot LI \cdot \cos^2 \frac{1}{2} L}{EL + LI} = \frac{200^t 5463 \cdot \sin^2 4''}{3945} = 0^t 00000.00000.19.$$

4°. Chacune des parties de la base est un arc. Soit R le rayon de la terre, la différence de la corde à l'arc

$$\text{sera } - \frac{(\text{arc})^3}{24 R^2}.$$

Cette formule donne :

Pour la partie 3945'	- 0.0002388
Pour la partie 2131'	- 376
Réduction aux cordes	- 0.00027.64
Correction du vernier des languettes	- 0.01100.48
Réduction des articles précédens	$\left\{ \begin{array}{l} 1^{\circ} . . . - 0.05492.8 \\ 2^{\circ} . . . - 0.14237.1 \\ 3^{\circ} . . . + 0.00002.78 \end{array} \right.$
Somme	- 0.20855.24
Résultat immédiat	6075.93236.35
Base corrigée	6075.72381.11

Il faut la réduire au niveau de la mer.

Le sol du terme austral est élevé de . . 36'11 au-dessus de la mer.
Celui du terme boréal est élevé de . . 45'91

Moyenne entre les deux termes . 41'00

Le sol au coude est élevé de . . 42'00

En regardant l'élévation moyenne entre les deux termes comme l'élévation moyenne de la base, la réduction au niveau de la mer seroit — 0'07615. En partageant la base en sept arcs différens, j'ai trouvé — 0'07735.

La différence vaut une ligne, et pour chaque toise dont on changeroit la hauteur moyenne, on auroit

1¹⁵ de variation dans la réduction au niveau de la mer.

Je m'en tiens à	— 0.07735
	<u>6075.72381</u>
Base au niveau de la mer	6075.64646

La somme 12.75863.8 des thermomètres métalliques, divisée par le nombre 3021 des observations, donne le quotient 0.00422.33, qui nous montre la température moyenne de nos règles.

Le point de la glace à ces mêmes règles est	0.00383.3
Dix degrés du thermomètre de Réaumur valent	23.16
Par conséquent 3° donnent	<u>6.948</u>
Ainsi, à 13° de Réaumur répondent	413.408
Nous avons	<u>422.3</u>
Différence	+ 8.9
Alongement de la règle de platine pour une partie du thermomètre	<u>0.9245</u>
Alongement pour 8.9 parties	8.228
Ces parties sont des deux cent-millièmes de la règle.	
En les multipliant par 3038, nombre des règles, on aura pour la réduction à 13° de Réaumur.	0 ²⁴⁹⁹⁷ (1)
Avec cette correction la base	<u>6075.64646</u>
donnera pour la base réduite à la mer, à 13°, à une ligne droite	6075.89643
Différence de la corde à l'arc	87
Arc de la base	6075.89730

Cette valeur est donnée en parties d'une toise qui seroit égale au huitième de nos quatre règles.

(1) En général, soit R le nombre des règles, T la somme des thermomètres, G le point de la glace sur ces thermomètres, $+$ $\left(\frac{T}{R} - G\right) 0.9245 R$ sera la réduction à la température de la glace; ce qui revient à $0.9245 (T - G.R)$. Mais si G est le terme qui sur ces règles répond à 13° de Réaumur, la réduction sera pour 13°, et ainsi de toute autre température.

Le 6 frimaire an 7, au retour de Perpignan, l'excès de cette toise moyenne sur la toise moitié du n° I est de 0.0000.10.

La réduction sera donc + 608
 6075.89730
 —————
 6075.90338

Pour les petites erreurs inévitables dans l'alignement, et pour l'épaisseur des règles, j'ai dit qu'on pourroit retrancher 0.003 ou 0.005, et je supposerai en nombre rond 6075.9

J'ai successivement présenté à la commission, pour cette base, les valeurs 6075.921077 et 6075.89197; il faut donner la raison de cette différence. D'abord on peut remarquer que si je propose ce changement, ce ne peut être que pour l'intérêt de la vérité; car il diminuera un peu l'accord entre mes deux bases.

En faisant sur le registre l'addition de toutes les réductions à l'horizon, celle de la vingt-deuxième page fut omise, je ne sais comment. Cette page nous avoit occupés plus que les autres, parce que c'est celle où le coude exige deux réductions particulières. En les calculant avec soin on oublia la réduction ordinaire, et c'est en faisant ensuite l'opération sur un autre registre où les pages étoient autrement divisées, qu'on trouva dans la somme totale des réductions une différence de 0.02188 dont il fallut chercher la cause. Sur quoi il faut observer que la base adoptée par la commission est une ligne droite, et que, pour la changer en arc, il faut y ajouter 0.000872; ce qui donne 6075.900069 quand on a retranché les 0.02188. C'est sur cette base que tous mes derniers calculs ont été faits.

N^o III.

Base de Perpignan.

Pag.	NOMBRE des règles.	SOMME des thermomètres.	SOMME des languettes.	SOMME des réduct. à l'horizon.	SOMME des différences de niveau.	
1	52	22664.7	63381.8	418.1	+	13
2	48	20727.2	57123.9	852.2	+	1211
3	52	22300.5	61113.9	533.1	+	2735
4	48	20774.0	58100.1	242.9	+	2132
5	52	22841.5	62728.8	1352.5	+	1679
6	48	21033.7	56344.1	237.3	+	1980
7	52	23022.6	63665.5	351.5	+	297
8	48	21649.3	59688.2	377.9	+	1933
9	52	23331.6	62558.3	348.1	+	351
10	48	20914.5	55234.7	227.6	+	262
11	52	22695.1	60264.9	208.7	+	1118
12	48	20588.3	55449.2	224.6	+	1612
13	52	22918.0	63507.4	300.1	+	670
14	48	21235.1	56209.5	231.5	+	775
15	48	21246.0	56130.3	374.2	+	3927
16	52	22682.4	59573.6	503.5	+	2912
17	52	22708.7	60114.6	521.1	+	2991
18	48	21092.0	55495.5	207.6	+	647
19	52	22931.7	58355.3	1001.3	+	8684
20	48	21338.5	54509.3	495.3	+	3979
21	52	22819.6	61659.2	343.8	+	3203
22	48	21101.5	56589.4	298.3	+	1851
23	52	22813.1	60024.4	413.2	+	3618
24	48	20087.1	55536.3	400.7	+	3778
25	52	22816.5	61613.8	536.2	+	2234
26	48	21051.7	56327.5	452.4	+	1590
27	52	23162.2	58266.7	837.2	+	7941
28	48	21109.8	53942.1	414.8	+	4160
29	52	22771.6	63076.5	479.1	+	3407
30	48	20709.8	54711.6	1627.9	+	5386
1500		6.58429.3	17.61692.4	14881.5	+	53392
					-	23851

Pag.	NOMERE des règles.	SOMME des thermomètres.	SOMME des languettes.	SOMME des réduct. à l'horizon.	SOMME des différences de niveau.	
31	52	22692.3	59554.6	1576.1	- 1.2901
32	48	21244.1	57961.5	1358.7	- 6265
33	52	23356.4	62407.2	1708.4	+	919
34	48	21734.6	56236.1	471.4	- 3878
35	52	22832.2	60150.5	313.8	- 719
36	48	21202.1	56545.5	321.6	- 1337
37	52	22725.2	61183.3	256.0	- 293
38	48	20739.6	57076.7	313.3	- 965
39	52	22224.3	64397.9	305.0	- 1126
40	48	20938.9	58861.9	257.5	+	859
41	52	22396.8	61185.4	649.8	+	3.1429
42	48	20684.1	56792.3	570.0	+	2.8257
43	52	22419.2	62854.7	143.9	- 116
44	48	20545.7	57824.8	5183.9	- 2.7331
45	52	22176.7	65583.1	1351.0	+	2853
46	48	20572.8	60135.7	934.2	+	1.0411
47	48	20428.4	58637.2	651.1	+	1814
48	48	18815.8	52580.9	285.8	+	4668
49	52	20803.9	58409.3	697.2	+	2529
50	48	18813.5	52968.3	521.5	+	4805
51	52	20897.4	57845.0	419.7	+	1570
52	44	16981.0	40484.5	416.7	+	4054
53	52	18948.7	50011.9	330.8	+	4157
54	48	16949.4	40156.3	243.5	+	3500
55	52	18611.1	50642.0	244.8	+	3461
56	48	16839.6	46551.7	366.5	+	2787
57	52	18921.1	54808.1	293.6	+	2502
58	48	17523.0	45490.9	241.2	+	1017
59	52	19553.6	48812.9	128.0	- 637
60	43	51329.3	1.39655.7	1193.5	- 1971
1487	6.44112.8	17.63167.9	32908.5	+	11.2132	- 5.7609
1500	6.58429.3	17.61092.4	14881.5	+	5.3392	- 2.3854
2987	13.02542.1	35.24860.3	0.47790.0	+	16.5524	- 8.1463
					-	8.1463
					+	8.4051

Base de Perpignan.

Le troisième tableau, pages 46 et 47, est absolument semblable au second, et ne demande aucune explication.

La base de Perpignan a été mesurée sur la grande route de cette ville à Narbonne.

On a vu, tome I, page 408, les raisons qui ont déterminé le choix de M. Méchain, et celles qui l'ont empêché de placer les deux termes sur la route même. Ils sont au-delà du fossé, à l'ouest.

La route n'a que 8 toises dans sa plus grande largeur; on se propose même de la réduire à 6, et ce retranchement est déjà exécuté en plusieurs endroits. Le pont de l'Agly, qui se trouve vers le milieu de la base, n'a que 12 pieds de largeur intérieurement, et les bornes réduisent l'espace libre à 9 pieds.

La route fait un coude très-sensible au Vernet, qui est à une demi-lieue de Perpignan; c'est là qu'est le terme sud. Il est marqué par un massif en briques qui s'élève de quelques pouces au-dessus du terrain. De là jusqu'à Salces la route est sensiblement droite; cependant elle a une légère déviation près du mas de la Garrigue.

On ne pouvoit conduire l'alignement aux deux termes, parce qu'il auroit traversé le fossé très-obliquement et dans une longueur qui auroit rendu la mesure impossible. J'ai pris le parti de faire placer un signal sur la hauteur du Vernet, dans l'alignement de la route, à quelque distance du terme sud, et un autre signal sur

la route même, vers Salces, à quelque distance du terme nord.

Il falloit un point d'où l'on aperçût ces deux signaux; je l'ai rencontré à 300 toises environ du pont de l'Agly, vers Salces. J'y ai fait enfoncer en terre, quelques pouces au-dessous du niveau de la route, un piquet de 2 pieds de longueur et de 6 pouces d'écartissage.

L'alignement a été tracé d'ailleurs comme celui de Melun.

Le 12 thermidor an 6, nous avons fait au coude de la base les observations suivantes.

DISTANCES. AU. ZÉNITH.

Signal de Salces.

10 1000^s759 100^s0759 = 90° 4' 59" (en terre.)
 D. et B. n° 4. 11^h $\frac{1}{2}$ du matin. Ondulations. Ce signal a depuis été déplacé.

Tour de Tautavel.

10 974^s442 97^s4442 = 87° 41' 59" 2 (dans le ciel.)

Signal du Vernet.

10 998^s368 99^s8368 = 89° 51' 11" 232 (en terre.)
 Le signal du Vernet avoit 28 pieds de hauteur, et il étoit placé sur un terrain qui s'élevoit de 1^t. au-dessus de la route.

A N G L E.

Entre la tour de Tautavel et le signal du Vernet.

20 2046^s340 102^s3170 = 92° 5' 7" 08
 + 26" 98
 Horizon 92° 5' 34" 06

Ondulations, sur-tout au Vernet. Toutes ces observations ont été faites sans interruption, avec le même instrument.

DISTANCE AU ZÉNITH.

Nouveau signal de Salces.

10 1000^s668 100^s0668 = 90° 3' 36"⁴³²
 D. et T. n° 4. 14 thermidor. Beaucoup d'ondulations. Le signal de Salces
 étoit haut de 4 toises.

A N G L E.

Entre le signal de Salces et la tour de Tautavel.

20 1962^s121 98^s10605 = 88° 17' 43"⁶⁰²
 13^s58

Horizon 88° 17' 36"⁰²

Entre Tautavel et le Vernet . . 92° 5' 34"⁰⁶

Angle au coude 180° 23' 4"⁰⁸

$P = 3358^s$; $Q = 2648^s$ 12^s97

Angle au coude = A 180° 23' 17"⁰⁵

$\frac{1}{2} A = 90° 11' 38"⁵$

La *fig.* 16 représente le chemin de Perpignan à Salces; *V* est le signal du Vernet, *S* le signal de Salces, *abcd* le pont de l'Agly, *BCA* est l'alignement qui fait en *C* un angle saillant du côté des signaux. Les points *A* et *B* sont déterminés par les perpendiculaires abaissées de *S* et de *V* sur *CA* et *CB*.

L'alignement, commencé le 12, ne fut terminé que le 18 thermidor. Le 19 nous commençâmes la mesure du côté de Salces, en plaçant la première règle en *nm*, en sorte que $Sn = Sm = 6^t 3^p 2^o 1^l = 6^t 52894$; d'où $nA = 1^t$. La réduction à l'horizon pour la règle

n° I étoit en ce moment 0^t00038, dont la moitié 19 doit se retrancher de nA , qui devient = 0.99981. C'est ce qu'il faut retrancher de la mesure commencée en n pour la réduire au point A .

$$SA = (\overline{Sn} - \overline{nA})^{\frac{1}{2}} = \overline{(Sn + nA) (Sn - nA)}^{\frac{1}{2}} \\ = (7^t52894 \times 5^t52894)^{\frac{1}{2}} = 6^t4519$$

Cette valeur m'a paru sûre à quelques lignes, ce qui est plus que suffisant pour l'usage qu'on en doit faire. On s'est attaché sur-tout à rendre bien égales les distances Sn et Sm ; l'épreuve, répétée plusieurs fois avec un cordeau bien tendu, n'a jamais donné une ligne de différence.

On a planté un piquet en n , comme à la fin d'une journée.

Le premier jour complémentaire, la mesure finit au terme sud.

Le côté $pV = qV$ du triangle isocèle est de 16^{pi} 3^{po} 8^{l5} = 2^t71817.13.

La base pq du même triangle = règle n° II + règle n° III + languettes n°s 1 et 2 = 13^{po} 10^{l5} = 4^t02576.9 - 166^{l5} = 4^t02576.9 - 0^t19270.8 = 3^t83306.1.

Ainsi, de la base terminée au point q , il faut retrancher (13^{po} 10^{l5} + $\frac{1}{2}pq$) = 0^t19270.8 + 1^t91653.05 = 2^t1093387.

$$VB = (4^t63470.1 \times 0^t80164.1)^{\frac{1}{2}} = 1^t92753.1$$

Pour prendre ces mesures on a découvert momentanément les deux termes; on les a trouvés tels que Méchain

les a décrits aux articles du Vernet et de Salces, tome I. Tranchot, qui avoit coopéré à l'établissement de ces termes, et qui coopéroit à la mesure des bases, les reconnut parfaitement. La plaque de cuivre étoit recouverte d'une plaque de plomb au-dessus de laquelle la maçonnerie formoit une petite chambre.

Le terme sud n'étoit pas aussi bien conservé que le terme nord. On voyoit quelques traces d'humidité au pourtour du pieu et même de la plaque de cuivre; mais le centre et les deux cercles étoient parfaitement visibles. On a bien essuyé avant de recouvrir, et la maçonnerie a été rétablie comme auparavant. La conservation des massifs a été instamment recommandée à l'administration départementale et à l'ingénieur en chef.

La mesure totale a donné	5974 ^o
Languettes	35.248603
Réduction à l'horizon	— 0.477900
Réduction des languettes	— 0.002862
Longueur mesurée	6008.767841
Thermomètres . 13.02532.1	Différ. de niveau 8.4063
La première partie, de Salces au coude, étoit de . .	2632.0
Languettes	15.49671
Réduction à l'horizon	— 0.116923
Réduction des languettes	— 706
Première partie, règles entières	2647.379081
Fraction de la 2633 ^e règle	1.542824
Réduction	— 311
De Salces au coude	2648.921594
Longueur totale	6008.767841
Du coude au Vernet	3359.846247

De la première partie	2648.921594
Retranchez nA	0.999810
<hr/>	
Il restera	2647.921784
Différence de l'arc à la corde	— 72
<hr/>	
Première corde	2647.921712
<hr/>	
De la seconde partie mesurée	3359.846247
Retranchons $\frac{1}{2} pq$	— 1.916530
Et uq	— 0.192708
<hr/>	
Il restera	3357.737009
Différence de l'arc à la corde	— 147
<hr/>	
Seconde corde	3357.736862
Première corde	2647.921712
<hr/>	
Ligne brisée, ou somme des deux cordes	6005.658574
Réduction à la ligne droite	— 0.033955
Autre petite corr. au coude $\frac{0.45718 \times 99^{\circ}54'28\frac{1}{2} \cos^2 \frac{1}{2} A}{100'}$	— 0.000010
<hr/>	
Ligne droite mesurée	6005.624609

Cette ligne n'est pas encore la base véritable. Soient CA et CB les deux lignes droites mesurées, AB sera la droite dont on vient de trouver la valeur 6005'624609, S et V les deux termes de la base, l'un vers Salces, l'autre vers le Vernet. C'est la ligne SV qu'il faut connoître. Nous avons vu que SA est perpendiculaire sur CA , VB sur CB ; abaissons les perpendiculaires Sa et Vb , nous aurons

$$aSA + SaA + SAa = 180^\circ = CAB + CAS + SAa$$

d'où

$$aSA + SaA = CAB + CAS$$

ou

$$aSA + 90^\circ = CAB + 90^\circ \quad \text{et} \quad aSA = CAB$$

On trouvera de même que $bVB = CBA$,

$$\left(\frac{CA - CB}{CA + CB}\right) \cot. \frac{1}{2} ACB = \text{tang.} \frac{1}{2} (CBA - CAB) = \frac{799.815. \text{ tang. } 11' 38'' 3}{6005.659}$$

ou

$$\frac{1}{2} (CBA - CAB) = \frac{795.815 \times 11' 38'' 5}{6005.659} = 1' 22'' 6$$

$$\frac{1}{2} (CBA + CAB) = \dots \dots \dots = 11' 38'' 5$$

d'où

$$CAB = ASa = \dots \dots \dots = 13' 1'' 1$$

$$CBA = bVB = \dots \dots \dots = 10' 15'' 9$$

$$Aa = SA. \sin. aSA$$

$$= 6'45.1900. \sin. 13' 1'' 1 = 0'024432 \quad Sa = SA. \cos. aSA = 6'45.185$$

$$bB = VB. \sin. bVB$$

$$= 1.927531. \sin. 10' 15'' 9 = 0.0057574 \quad Vb = VB. \cos. bVB = 1.927518$$

$$SA - Vb = Sa' = 4.524332$$

$$Aa + bB = 0.0301894$$

$$AB = 6005.624609$$

$$ab = 6005.6547984 \dots \dots \dots 6005.6547984$$

$$\text{tang. } SVa' = \frac{Sa'}{Va'} = \frac{Sa'}{ab'} = \frac{4.524332}{6005.654788}$$

$$VS = Va'. \sec. SVa' = Va' + Va'. \text{tang. } SVa'. \text{tang.} \frac{1}{2} SVa'$$

$$= Va' + \frac{1}{2} Va'. \text{tang.}^2. SVa' = 0.00170.34$$

$$\text{Base véritable} \dots \dots \dots 6005.65650.14$$

Suivant un nivellement exécuté par M. Méchain le premier ventose an 4, le terme nord étoit élevé au-dessus de l'étang de Leucate de . . . 6'14

L'étang de Leucate communiquoit à la mer par la coupure au château Saint-Ange, qui étoit ouverte depuis quelque temps.

Par un grand nombre de distances au zénith observées et calculées par Méchain, la différence de niveau entre les deux termes étoit de 9.57

Ainsi l'élevation du terme austral est de 15.71

L'élevation moyenne entre les deux termes 10.92

Et la réduction au niveau de la mer 0'020048

Au lieu de 9'57 de différence entre les deux termes, les dN de la base ne donnent que 8.41, environ $\frac{1}{4}$ de moins.

Ajoutons $\frac{1}{4}$ à tous les dN , et calculons l'élévation moyenne de chaque page, en partant de 6'14 pour le terme nord, nous trouverons pour la somme des réductions - 0.01734 89

La base véritable étoit 6005.65650.18

La base au niveau de la mer sera 6005.63915.29

La somme des thermomètres 13.025321 donne par un milieu 436.07

13 degrés de Réaumur répondent à 413.41

La température excédoit 13 degrés de 22.66

0.00022.66 x 0.9245 x 3002.818, donne + 0.62906

Base à 13 degrés de Réaumur 6006.26821.29

L'erreur du vernier, au retour de Perpignan, étoit 0.00000.66

Cette quantité multipliée par 2987, nombre des règles, donne pour correction de la base - 0.01971.42

Base en toises moyennes 6006.24849.87

Réduction au n° I 608

Base définitive en corde 6006.25458

Différence de la corde à l'arc 87

Base en arc 6006.25545

La base présentée à la commission étoit 6006.247848

Pour l'épaisseur des règles et les erreurs dans l'alignement, il faut, comme à la base de Melun, retrancher 0.003 ou 0.005; ce qui nous réduit à 6006^e25.

Le changement que des calculs plus approfondis me fournissent, va encore à rendre moindre l'accord entre les deux bases; mais c'est de si peu de chose que l'effet

n'en sera pas sensible. Ces légères différences sont des quantités dont il nous est impossible de répondre; ainsi, sans chercher une précision imaginaire, on peut se borner aux quantités suivantes.

Base de Melun en arc	6075'90
Base de Perpignan en arc	6006'25

Ces bases sont exprimées en toises qui sont la moitié de la règle n° 1, de cette règle qu'on a désignée plus particulièrement sous le nom de module, et sur laquelle on a définitivement construit le mètre prototype déposé aux archives nationales. Voyez le rapport de M. Van-Swinden, tome II des *Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques*, p. 43.

Opérations faites le premier ventose an 4, pour déterminer la différence de niveau de l'étang de Leucate ou de Salces, et du signal de l'extrémité nord de la base près de Salces.

Je donne les calculs de cet article tels que je les trouve dans les papiers de M. Méchain. Il a publié lui-même, tome I, page 421, la distance du signal de Salces au zénith du point *O* (*fig. 17*).

Cette distance est	89° 31' 3''5625
Demi-épaisseur du fil	3''00
Réfraction	6''00
Distance vraie au zénith	89° 31' 12''56

Au bord de l'eau, en *B*, à 5 toises 2 pieds du centre du cercle *O*, on avoit placé une mire élevée de 6 pieds

au-dessus de l'eau, et l'on en a pris la distance au zénith du point *O*; savoir,

$$4 \quad 401^s284 \quad 100^s3210 = 90^{\circ} 17' 20''04$$

On en a conclu que le centre du cercle étoit au-dessus du niveau de l'étang de 1' 0^{pi} 1^{re}936

La distance *OS* du centre du cercle au centre du signal, mesurée en ligne droite, et avec une chaîne, a été trouvée de 1123' 2^{pi}; en conséquence le bord du signal étoit plus élevé que le centre du cercle de 9' 2^{pi} 5^{re}628

Donc la base supérieure du signal étoit au-dessus du niveau de l'étang de 10' 2^{pi} 7^{re}564

Sa hauteur au-dessus de la plaque de cuivre où l'on avoit marqué le terme nord de la base, étoit de 4' 1^{pi} 9^{re}25

Donc le terme nord est au-dessus de l'étang de 6' 0^{pi} 10^{re}31

Pour la différence de niveau entre le terme nord et le terme sud de la base.

PAR les observations réciproques faites au terme nord et au mont d'Espira, on a trouvé la différence de niveau de ces deux points 226'84724

Par de semblables observations entre le Vernet et Espira l'on a trouvé 217.2823

Donc entre le terme nord et le terme sud 9.56494

Pour le terme nord et Forceral 254.2100

Pour le terme sud et Forceral 244 6871

Donc entre le terme nord et le terme sud 9.5229

Par les observations réciproques aux deux termes 9.22466

Par les observations des deux termes au pont de l'Agly 9.76667

De pareilles sur la tour de Rivesaltes 9.66667

Par un milieu entre toutes ces valeurs 9.56917

Terme nord 6.14

Terme sud 15.71

Ce sont les quantités que nous avons employées dans

les dernières lignes de la page 54 et dans les premières de la page 55.

Pour terminer ce qui concerne la mesure des bases, et donner une idée de l'exactitude des opérations dans les circonstances même les plus défavorables, j'ai cru devoir transcrire ici le passage suivant, que je tire de mes registres :

Le 7 fructidor, à la base de Perpignan, un vent impétueux venoit à chaque instant déranger les règles. Malgré leur poids et le frottement qu'elles éprouvoient sur leur trépied de fer, nous ne pouvions les conserver long-temps dans la direction de la base. Le vent les faisoit charrier sur leurs supports, en sorte, qu'après avoir lutté contre ces difficultés une partie de la journée, nous primes le parti d'interrompre la mesure, que nous recommençâmes en entier le 11, par un temps beaucoup plus calme.

Journée du 8. 68 règles valent . . .	136 0	
Languettes	0.79755.7	Thermom. 0.30015.7
Réduction à l'horizon	— 437.6	
Réduction pour les languettes . . .	— 2.6	
Résultat définitif	<u>136.79315 5</u>	
Journée du 11. 68 règles	136.0	
Languettes	0.80229.6	0.29599.7
Réduction à l'horizon	— 466.3	
Réduction pour les languettes . . .	— 3.0	
	<u>136.79760 3</u>	0.00416.0
Réduction à la température du 8 . .	— 00384.6	Différence de température à multiplier par
Mesure exacte	136.79375.7	0.9245.
Mesure du 8	<u>136.79315 5</u>	
Différence	0.00060.2	

c'est-à-dire $\frac{6}{100}$ de millimètre = 0.266. C'est à cette petite fraction que se réduit la différence entre deux mesures dont l'une nous avoit parfaitement contentés, et l'autre nous avoit paru assez incertaine pour devoir être recommencée en entier.

Soins pris pour la conservation des deux termes de la base de Melun.

ON a vu, tome I, p. 142, que chacun de ces termes est un point marqué à la surface supérieure d'un cylindre de cuivre, scellé en plomb dans un massif construit en pierres de taille; ce massif est fondé sur le roc, et la coupe horizontale est un carré de 2.43 mètres de côté.

Pour mieux désigner et conserver plus sûrement ce point, on en a fait le centre commun de plusieurs cercles décrits sur la surface supérieure du cylindre.

Au temps de la mesure de la base, on avoit recouvert le cylindre d'une plaque de plomb, et en outre d'une pierre taillée en calotte sphérique, fixée et défendue seulement par un peu de maçonnerie; précaution suffisante alors, parce que les termes étoient enfermés dans d'énormes signaux qui empêchoient les voitures et les animaux d'en approcher.

On avoit laissé subsister ces signaux pour le cas où la commission des poids et mesures jugeroit à propos de vérifier la direction aussi bien que la longueur de la base mesurée, ainsi que les triangles subsidiaires qui joignoient la base aux triangles principaux.

D'après l'examen des instrumens qui ont servi à la mesure de la base, et celui des registres où j'ai consigné tous les détails et les attentions scrupuleuses que j'ai eues pendant toute l'opération, la commission a jugé inutile toute recherche ultérieure sur une longueur

confirmée d'ailleurs d'une manière si satisfaisante par l'autre base mesurée près de Perpignan. En conséquence je me suis déterminé à faire abattre les deux signaux; mais auparavant il falloit pourvoir à la conservation des cylindres qui fixent les termes de la base. M. d'Herbelot, ingénieur en chef du département de Seine-et-Marne, qui avoit bien voulu diriger toutes les constructions précédentes, se prêta avec la même complaisance à ce que je désirois en cette occasion. Dans un voyage qu'il fit à Paris il nous apporta un plan qui fut vu et approuvé par plusieurs membres de la commission, et notamment par MM. Laplace et Méchain.

Ce plan arrêté, M. d'Herbelot se chargea de faire tailler les pierres et les bornes, afin que, trouvant tout préparé quand j'arriverois à Melun, je ne fusse pas obligé de m'absenter si long-temps.

Le 9 octobre 1799, je me suis rendu à Melun avec M. Bellet, qui avoit placé les cylindres et pris une part si active à la mesure des bases, ainsi qu'à toutes les opérations faites depuis Dunkerque jusqu'à Rodez.

Le 10, en présence de M. d'Herbelot, nous avons fait lever la calotte sphérique et la plaque de plomb qui recouvroit le terme sud, près de Melun. Nous avons retrouvé tout au même état qu'au temps de la mesure. Alors nous avons placé sur le cylindre une nouvelle plaque de plomb plus grande que la première, et, pour empêcher l'humidité d'en approcher, nous avons fait verser dessus quelques litres de machefer; après quoi, sur le cadre qui forme autour du massif une bordure

élevée de 22 centimètres, on a placé devant nous deux pierres épaisses qui, entrant à feuillure dans ce cadre, le recouvrent en entier et y laissent dans l'intérieur un vide dont la hauteur est d'un décimètre.

Ces deux pierres, scellées avec soin en ciment, ont été recouvertes ensuite d'une pierre unique, égale aux deux autres prises ensemble, et dont la surface supérieure est taillée en pyramide quadrangulaire très-écrasée, comme on peut le voir dans la *fig. 18, pl. VI.*

Le lendemain, MM. Laplace et Prony, venus exprès de Paris, ont examiné le travail, l'ont trouvé conforme au plan arrêté, et ils en ont approuvé l'exécution.

Ce jour et les suivans, jusqu'au 13, ont été employés à placer les seize bornes qui environnent le massif et une partie circulaire du pavé, avec une pente suffisante pour l'écoulement des eaux.

Ces ouvrages terminés au terme sud, le 14 j'ai fait découvrir le terme nord, près de Lieursaint; il s'est trouvé tout aussi bien conservé que le terme sud. On l'a recouvert avec les mêmes précautions. Toutes les constructions sont aussi les mêmes. Quand j'ai quitté Lieursaint, le 17, il ne restoit plus à faire que le pavé. M. Bellet y est resté jusqu'à l'entier achèvement, c'est-à-dire jusqu'au 20 octobre.

Avec ces précautions on pourroit pendant bien longtemps reconnoître sans la moindre incertitude les termes de la base et recommencer la mesure; mais on se propose d'élever à chaque extrémité un monument plus

durable et plus digne de l'opération dont il conservera la mémoire.

Les plans et les devis en ont été approuvés depuis long-temps : plus anciennement encore, M. Méchain avoit envoyé le projet des pyramides qui doivent assurer la conservation des termes de la base de Perpignan ; mais le discrédit des assignats en fit différer l'exécution. Les précautions prises dans le temps et décrites aux pages 409 et 415 du premier volume, et ci-dessus, page 52, ne peuvent entrer en comparaison avec ce qu'on a fait à Melun et Lieursaint ; mais les termes du Vernet et de Salces sont placés de manière à courir peu de risques, à moins que la pluie ne vienne à filtrer, malgré le ciment, à travers les faces de la pyramide écrasée qui les recouvre : mais, dans ce cas même, on pourroit toujours retrouver les deux extrémités, à quelques lignes près, à moins que le propriétaire du terrain ne s'avisât de le retourner et de disperser les briques dont les deux massifs sont composés. Les pyramides sont donc bien plus nécessaires à Perpignan qu'à Melun. M. Méchain avoit proposé, pour plus de solidité, de les construire en marbre du pays, ce qui n'auroit pas augmenté considérablement la dépense.

FIN DES OBSERVATIONS GÉODÉSIQUES.