APPENDICE

Contenant la résolution de divers cas particuliers de la Trigonométrie.

XCVI. La résolution des triangles, telle qu'on vient de l'exposer, ne laisse rien à desirer du côté de la généralité Il est néanmoins quelques circonstances où l'on peut, avec avantage, substituer des solutions particulieres aux solutions générales, soit pour abréger les calculs, soit pour en rendre les résultats plus exacts et plus indépendants de l'erreur des tables. Nous allons résoudre quelques-uns de ces cas particuliers, en choisissant ceux qui sont de l'usage le plus fréquent, ou qui conduisent aux formules les plus remarquables.

Nous continuerons de désigner par A, B, C, les angles du triangle proposé, rectiligne ou sphérique, et par a, b, c, les côtés qui leur sont respectivement opposés. Nous supposerons de plus lerayon des tables $=1$, ce qui n'altere pas la généralité des résultats. Les angles A, B, C, sont exprimés dans le calcul, soit par les degrés, soit par les longueurs absolues des arcs qui les mesurent, ces arcs étant pris dans le cercle dont le rayon est 1. Si un angle ou un arc x est très-petit, on pourra mettre, au lieu de $\sin x$, et $\cos x$, leurs valeurs en séries ; savoir : $\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \text{etc.}$; mais alors x doit être exprimé en parties du rayon. Un arc étant trouvé en parties du rayon, pour avoir sa valeur en minutes, il faut le multiplier par le nombre de minutes comprises dans le rayon ; ce nombre est $\frac{20000}{\pi} = 6366.1977237$, et son logarithme $= 3.80388012297$.

§. I. *Des triangles rectilignes dont deux angles sont très-petits.*

XCVII. Supposons que les angles A et B soient très-petits et par suite C très-obtus, on pourra faire $sin\ A = A - \frac{1}{6}A^3$, $sin\ B = B - \frac{1}{6}B^3$, et $sin\ C = sin\,(A+B) = A+B - \frac{1}{6}(A+B)^3$ Si donc on connaît le côté c avec les angles adjacents A et B, on trouvera les deux autres côtés par les formules $a = \frac{c\ sin\ A}{sin\,(A+B)}$, $b = \frac{c\ sin\ B}{sin\,(A+B)}$, lesquelles, en substituant les valeurs précédentes et réduisant, deviennent

$$a = \frac{c\,A}{A+B}\left(1 + \frac{2\,AB + B^2}{6}\right)$$
$$b = \frac{c\,B}{A+B}\left(1 + \frac{A^2 + 2\,AB}{6}\right),$$

et de là résulte $a + b - c = \frac{1}{2}c\,AB$. Ces valeurs sont exactes, aux termes près qui contiennent quatre dimensions en A et B.

XCVIII. Supposons en second lieu qu'on donne les deux côtés a et b, avec l'angle compris $C = \pi - \theta$, θ étant très-petit. On aura d'abord $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\ cos\ \theta = a^2 + b^2 + 2ab\,(1 - \frac{1}{2}\theta^2) = (a+b)^2 - ab\,\theta^2$; donc

$$c = a + b - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{ab\,\theta^2}{a+b}.$$

Ensuite l'angle A se trouvera par l'équation $sin\ A = \frac{a}{c}\,sin\ C = \frac{a}{c}\,sin\ \theta$, d'où l'on tire, en substituant la valeur de c et celle de $sin\ \theta$, $sin\ A = \frac{a}{a+b}\left(\theta + \frac{1}{2}\cdot\frac{ab}{(a+b)^2}\,\theta^3 - \frac{1}{6}\theta^3\right) = \frac{a\theta}{a+b}\left(1 + \frac{ab - a^2 - b^2}{(a+b)^2}\cdot\frac{\theta^2}{6}\right)$.

Donc $A = sin\ A + \frac{1}{6}sin^3\ A = \frac{a\theta}{a+b} + \frac{ab\,(a-b)}{(a+b)^2}\cdot\frac{\theta^3}{6}$. De là on déduirait la valeur de B en permutant entre elles les lettres a et b; mais A étant connu, on a immédiatement $B = \theta - A$. Si θ est donné en minutes, pour avoir A exprimé aussi en minutes, il faudra, dans les formules précédentes, substituer, au lieu de A et θ, les rapports $\frac{A}{R}$, $\frac{\theta}{R}$, R étant le nombre de minutes comprises dans le rayon. On aura ainsi

$$c = a + b - \frac{\frac{1}{2}ab}{a+b}\cdot\left(\frac{\theta}{R}\right)^2$$

$$A = \frac{a\theta}{a+b}\left[1 + \frac{b(a-b)}{6(a+b)^2}\left(\frac{\theta}{R}\right)^2\right]$$

XCIX. Pour donner un exemple de ces formules, soit $a = 1000^m$, $b = 2400^m$, $C = 199^o 32'$ ou $\theta = 68'$, on aura $a+b-c = \frac{1200000}{3400}\cdot\left(\frac{68}{R}\right)^2 = 0.037806$, d'où $c = 3399^m, 962194$. Ensuite on a par une premiere approximation $A = \frac{a\theta}{a+b} = 20'$, et $B = \theta - A = 48'$; mais la formule entiere donne $A = 20' \left[1 - \frac{2400 \times 1400}{6(3400)^2}\left(\frac{68}{R}\right)^2\right] = 19'.99988946$, et par suite $B = 48'.00011054$, valeurs qui doivent être exactes jusque dans la derniere décimale.

§. II. *Résolution du troisieme cas des triangles rectilignes par la voie des séries.*

C. Etant donnés les deux côtés a et b et l'angle compris C, pour trouver l'angle B, on a la proportion $b : a :: \sin B : \sin(B + C)$, laquelle donne $a \sin B = b(\sin B \cos C + \cos B \sin C)$, et par conséquent $\frac{\sin B}{\cos B} = \frac{b \sin C}{a - b\cos C}$. Si dans cette équation on met à la place des sinus et cosinus leurs

XXXV. valeurs en exponentielles imaginaires*, on aura

$$\frac{e^{B\sqrt{-1}} - e^{-B\sqrt{-1}}}{e^{B\sqrt{-1}} + e^{-B\sqrt{-1}}} = \frac{b(e^{C\sqrt{-1}} - e^{-C\sqrt{-1}})}{2a - b(e^{C\sqrt{-1}} + e^{-C\sqrt{-1}})};$$

d'où l'on tire

$$e^{2B\sqrt{-1}} = \frac{a - b e^{-C\sqrt{-1}}}{a - b e^{C\sqrt{-1}}}.$$

Prenant les logarithmes de chaque membre et développant le second en série d'après la formule connue $L(a-x)=$

$La-\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}-\frac{x^3}{3a^3}-$ etc., on aura

$$2B\sqrt{-1}=\frac{b}{a}e^{C\sqrt{-1}}+\frac{b^2}{2a^2}e^{2C\sqrt{-1}}+\frac{b^3}{3a^3}e^{3C\sqrt{-1}}+\text{etc.}$$
$$-\frac{b}{a}e^{-C\sqrt{-1}}-\frac{b^2}{2a^2}e^{-2C\sqrt{-1}}-\frac{b^3}{3a^3}e^{-3C\sqrt{-1}}-\text{etc.}$$

Donc en divisant par $2\sqrt{-1}$, et observant que $e^{mC\sqrt{-1}}$ $e^{-mC\sqrt{-1}}=2\sqrt{-1}\,\sin m\,C$, on aura

$$B=\frac{b}{a}\sin C+\frac{b^2}{2a^2}\sin 2C+\frac{b^3}{3a^3}\sin 3C+\frac{b^4}{4a^4}\sin 4C+\text{etc.}$$

C'est la valeur de l'angle B, exprimée en parties du rayon, par une suite dont la loi est très-simple, et qui sera d'autant plus convergente que b sera plus petit par rapport à a.

La valeur qu'on vient de trouver doit satisfaire aussi à l'équation $tang(B+\frac{1}{2}C)=\frac{a+b}{a-b}tang\frac{1}{2}C$, qui est la même que $tang\frac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}cot\frac{1}{2}C$, et qui ne differe que par la forme, de l'équation $\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{b\sin C}{a-b\cos C}$.

CI. L'angle B étant connu, on aura le troisieme angle $A=200^\circ-B-C$. Quant au troisieme côté c, il dépend de l'équation $c^2=a^2-2ab\cos C+b^2$, laquelle donne par l'extraction de la racine,

$$c=a-b\cos C+\frac{b^2}{2a}\sin^2 C+\frac{b^3}{2a^2}\sin^2 C\cos C-\text{etc.}$$

Mais cette série n'a pas une marche réguliere, et ne peut pas être continuée à volonté. Au contraire, on peut trouver une série fort simple pour la valeur du logarithme hyperbolique de c. En effet, il est facile de voir que la quantité $a^2-2ab\cos C+b^2=(a-be^{C\sqrt{-1}})(a-be^{-C\sqrt{-1}})$; car le produit développé de ces deux facteurs donne
$a^2-ab\,(e^{C\sqrt{-1}}+e^{-C\sqrt{-1}})+b^2$, ou $a^2-2ab\cos C+b^2$.
On a donc $c^2=(a-be^{C\sqrt{-1}})(a-be^{-C\sqrt{-1}})$;
prenant les logarithmes de chaque membre, il viendra

$$2\,\mathrm{L}\,c = \mathrm{L}\,a - \frac{b}{a}e^{\mathrm{C}\sqrt{-1}} - \frac{b^2}{2a^2}e^{2\mathrm{C}\sqrt{-1}} - \frac{b^3}{3a^3}e^{3\mathrm{C}\sqrt{-1}} - \text{etc.}$$
$$+\mathrm{L}\,a - \frac{b}{a}e^{-\mathrm{C}\sqrt{-1}} - \frac{b^2}{2a^2}e^{-2\mathrm{C}\sqrt{-1}} - \frac{b^3}{3a^3}e^{-3\mathrm{C}\sqrt{-1}} - \text{etc.}$$

Donc en réduisant de nouveau à l'aide de la formule $e^{m\mathrm{C}\sqrt{-1}} + e^{-m\mathrm{C}\sqrt{-1}} = 2\cos m\,\mathrm{C}$, on aura

$$\mathrm{L}\,c = \mathrm{L}\,a - \frac{b}{a}\cos\mathrm{C} - \frac{b^2}{2a^2}\cos 2\,\mathrm{C} - \frac{b^3}{3a^3}\cos 3\,\mathrm{C} - \text{etc.}$$

série non moins élégante que celle qui donne la valeur de B; il faudra multiplier les termes algèbriques par le module 0.43429448, si on veut que les logarithmes soient ceux des tables ordinaires.

§. III. *Résolution du troisieme cas des triangles sphériques par la voie des séries.*

CII. On a fait voir dans le paragraphe précédent que la valeur de x tirée de l'équation $\tang x = \frac{m+n}{m-n}\tang\frac{1}{2}\mathrm{C}$, peut s'exprimer par cette série

$$x = \tfrac{1}{2}\mathrm{C} + \frac{n}{m}\sin\mathrm{C} + \frac{n^2}{2m^2}\sin 2\,\mathrm{C} + \frac{n^3}{3m^3}\sin 3\,\mathrm{C} + \text{etc.}$$

Or dans un triangle sphérique où l'on connaît les deux côtés a et b et l'angle compris C, on a par les analogies de
*LXXXVI Néper *.

$$\cot\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2} = \frac{\sin(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b)}{\sin(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b)}\tang\tfrac{1}{2}\mathrm{C}$$
$$= \frac{\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b + \cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b - \cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b}\tang\tfrac{1}{2}\mathrm{C}$$
$$\cot\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2} = \frac{\cos(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b)}{\cos(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b)}\tang\tfrac{1}{2}\mathrm{C}$$
$$= \frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b - \sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b + \sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b}\tang\tfrac{1}{2}\mathrm{C}$$

Donc, en vertu de la formule précédente et supposant toujours $b > a$, on aura

$$\frac{A-B}{2} = 100^{\circ} - \tfrac{1}{2}C - \frac{tang\,\frac{1}{2}b}{tang\,\frac{1}{2}a}\,sin\,C - \frac{tang^2\,\frac{1}{2}b}{2\,tang^2\,\frac{1}{2}a}\,sin\,2\,C$$
$$- \frac{tang^3\,\frac{1}{2}b}{3\,tang^3\,\frac{1}{2}a}\,sin\,3\,C - \text{etc.}$$

$$\frac{A+B}{2} = 100^{\circ} - \tfrac{1}{2}C + \frac{tang\,\frac{1}{2}b}{cot\,\frac{1}{2}a}\,sin\,C - \frac{tang^2\,\frac{1}{2}b}{2\,cot^2\,\frac{1}{2}a}\,sin\,2\,C$$
$$+ \frac{tang^3\,\frac{1}{2}b}{3\,cot^3\,\frac{1}{2}a}\,sin\,3\,C - \text{etc.}$$

Suites dont la loi est très-simple, et qui seront d'autant plus convergentes que b sera plus petit. La premiere est toujours convergente, puisqu'on suppose $b<a$; la seconde le sera aussi, si on a $tang\,\frac{1}{2}b < cot\,\frac{1}{2}a$, ou $a+b<200^{\circ}$. Elle serait divergente et fausse si on avait $a+b>200^{\circ}$, mais ce cas peut toujours s'éviter; car la résolution du triangle BCA dans lequel on aurait $CA+CB>200^{\circ}$, se réduit toujours à celle du triangle $A'CB'$ dans lequel on a $CA'+CB'<200^{\circ}$. Au reste, la seconde série est dans sa plus grande convergence, lorsque a et b sont tous deux très-petits; alors le troisieme côté c est très-petit aussi, puisqu'on doit avoir $c<a+b$, et le triangle sphérique differe très-peu d'un triangle plan; dans ce cas l'excès de la somme des trois angles sur deux angles droits, s'exprime ainsi: fig. 11.

$$A+B+C-200^{\circ} = \tfrac{2}{1}\,tang\,\tfrac{1}{2}a\,tang\,\tfrac{1}{2}b\,sin\,C - \tfrac{2}{2}\,tang^2\,\tfrac{1}{2}a\,tang^2\,\tfrac{1}{2}b\,sin\,2\,C$$
$$+ \tfrac{2}{3}\,tang^3\,\tfrac{1}{2}a\,tang^3\,\tfrac{1}{2}b\,sin\,3\,C - \text{etc.}$$

CIII. Pour trouver le troisieme côté c du triangle proposé, on a l'équation $cos\,c = cos\,a\,cos\,b + sin\,a\,sin\,b\,cos\,C$, de laquelle il est aisé de déduire les deux suivantes:

$$sin^2\tfrac{1}{2}c = sin^2\tfrac{1}{2}a\,cos^2\tfrac{1}{2}b - 2\,sin\tfrac{1}{2}a\,cos\tfrac{1}{2}b\,cos\tfrac{1}{2}a\,sin\tfrac{1}{2}b\,cos\,C + cos^2\tfrac{1}{2}a\,sin^2\tfrac{1}{2}b$$
$$cos^2\tfrac{1}{2}c = cos^2\tfrac{1}{2}a\,cos^2\tfrac{1}{2}b + 2\,cos\tfrac{1}{2}a\,cos\tfrac{1}{2}b\,sin\tfrac{1}{2}a\,sin\tfrac{1}{2}b\,cos\,C + sin^2\tfrac{1}{2}a\,sin^2\tfrac{1}{2}b.$$

Par la forme de ces valeurs on voit que $sin\,\frac{1}{2}c$ peut être regardé comme le troisieme côté d'un triangle rectiligne dans lequel on aurait les deux côtés connus $sin\,\frac{1}{2}a\,cos\,\frac{1}{2}b$, $cos\,\frac{1}{2}a\,sin\,\frac{1}{2}b$ et l'angle compris C; de même $cos\,\frac{1}{2}c$ est le troisieme côté d'un triangle rectiligne, dont deux côtés seraient $cos\,\frac{1}{2}a\,cos\,\frac{1}{2}b$, $sin\,\frac{1}{2}a\,sin\,\frac{1}{2}b$ et l'angle compris 200° — C. Donc on a par la formule trouvée pour les triangles rectilignes*.

* CI.

$$log\, sin \tfrac{1}{2} c = log(sin \tfrac{1}{2} a \cos \tfrac{1}{2} b) - \frac{tang \tfrac{1}{2} b}{tang \tfrac{1}{2} a} \cos C - \frac{tang^2 \tfrac{1}{2} b}{2\, tang^2 \tfrac{1}{2} a} \cos 2C - \text{etc.}$$

$$log \cos \tfrac{1}{2} c = log(\cos \tfrac{1}{2} a \cos \tfrac{1}{2} b) + \frac{tang \tfrac{1}{2} b}{cot \tfrac{1}{2} a} \cos C - \frac{tang^2 \tfrac{1}{2} b}{2\, cot^2 \tfrac{1}{2} a} \cos 2C + \text{etc.}$$

Il est à remarquer ultérieurement que comme chacun des triangles rectilignes dont nous venons de parler peut se résoudre par le moyen d'un triangle rectiligne rectangle, on peut directement réduire la résolution du triangle sphérique proposé à celle d'un triangle rectiligne rectangle.

On trouve par ce moyen que $sin \frac{1}{2} c$ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés sont $sin \frac{1}{2} (a+b)\ sin \frac{1}{2} C$ et $sin \frac{1}{2} (a-b) \cos \frac{1}{2} C$. De même $\cos \frac{1}{2} c$ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés seraient $\cos \frac{1}{2} (a-b) \cos \frac{1}{2} C$ et $\cos \frac{1}{2} (a+b)\ sin \frac{1}{2} C$.

De plus, si on appelle M l'angle qui dans le premier triangle est opposé au côté $sin \frac{1}{2} (a-b) \cos \frac{1}{2} C$, et dans le second, N l'angle opposé au côté $\cos \frac{1}{2} (a-b) \cos \frac{1}{2} C$, il résulte des analogies de Néper qu'on aura $\frac{A-B}{2} = M$, et $\frac{A+B}{2} = N$ ou $= 200^\circ - N$; savoir : $\frac{A+B}{2} = N$ si $a + b < 200^\circ$, et $\frac{A+B}{2} = 200^\circ - N$ si $a + b > 200^\circ$. Donc dans tout triangle sphérique où l'on connaît deux côtés a et b et l'angle compris C, on peut trouver directement chacune des quantités $\frac{1}{2} c$, $\frac{A+B}{2}$, $\frac{A-B}{2}$, par la résolution d'un triangle rectiligne rectangle où l'on connaît les deux côtés de l'angle droit.

Il résulte aussi de là qu'après avoir trouvé l'angle M ou $\frac{A-B}{2}$ par la formule $tang\, M = \frac{sin \frac{1}{2} (a-b)}{sin \frac{1}{2} (a+b)} cot \frac{1}{2} C$, on peut calculer le troisième côté par la formule $sin \frac{1}{2} c = \frac{sin \frac{1}{2} (a-b) \cos \frac{1}{2} C}{sin\, M} = \frac{sin \frac{1}{2} (a+b)\ sin \frac{1}{2} C}{\cos M}$.

N. B. Les formules trouvées dans ce paragraphe s'appliqueront aisément à la résolution du cinquième cas des triangles sphériques, puisque celui-ci peut se rapporter au troisième par la propriété du triangle polaire.

§. IV *Résolution d'un triangle sphérique dont deux côtés sont peu différents de 100°*

CIV. Soient a et b les deux côtés donnés peu différents de 100°, on propose de déterminer l'angle C par le moyen des trois côtés a, b, c.

Si les côtés a et b étaient exactement égaux à 100°, on aurait $C=c$; donc a et b différant très-peu de 100°, l'angle C aura pour mesure un arc très-peu différent de c. Soit $a=100^\circ+\alpha$, $b=100^\circ+\beta$, $C=c+x$; si on substitue ces valeurs dans l'équation $\cos C=\dfrac{\cos c-\cos a\cos b}{\sin a\sin b}$, on aura

$\cos(c+x)=\dfrac{\cos c-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$. Mais puisque α et β sont supposés très-petits, on peut en négligeant seulement les termes où α et β montent au quatrieme degré, faire $\sin\alpha\sin\beta=\alpha\beta$, $\cos\alpha\cos\beta=1-\dfrac{\alpha^2}{2}-\dfrac{\beta^2}{2}$, ce qui donnera

$$\cos(c+x)=\frac{\cos c-\alpha\beta}{1-\frac{1}{2}\alpha^2-\frac{1}{2}\beta^2}=(1+\tfrac{1}{2}\alpha^2+\tfrac{1}{2}\beta^2)\cos c-\alpha\beta$$

Or, en négligeant le quarré de x, on a $\cos(c+x)=\cos c-x\sin c$; donc

$$x=\frac{\alpha\beta-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)\cos c}{\sin c}.$$

Et puisque x est du second ordre par rapport à α et β, on voit qu'il n'y a de négligées dans cette valeur que les quantités du quatrieme ordre. Soit $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=p$, $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=q$, ou $\alpha=p+q$, $\beta=p-q$, on aura sous une forme plus simple

$$x=p^2\left(\frac{1-\cos c}{\sin c}\right)-q^2\left(\frac{1+\cos c}{\sin c}\right)=p^2\tang\tfrac{1}{2}c-q^2\cot\tfrac{1}{2}c.$$

Cette valeur est exprimée en parties du rayon; mais comme dans la pratique p et q sont données en secondes, si l'on veut que x soit exprimé aussi en secondes, il faudra faire

$$x=\frac{p^2}{R}\tang\tfrac{1}{2}c-\frac{q^2}{R}\cot\tfrac{1}{2}c,$$

R étant le nombre de secondes contenues dans le rayon, nombre dont le logarithme $= 5.8038801$. Connaissant x, on aura l'angle cherché $C = c + x$.

La formule que nous venons de trouver est utile dans les opérations géodésiques pour réduire à l'horizon les angles observés dans des plans inclinés; elle est plus expéditive et demande des tables moins étendues que la formule du cas premier des triangles sphériques, dont nous avons donné un exemple (n° 93). Cependant, si les élévations ou dépressions α et β étaient de plus de 2 ou 3 degrés, il serait plus sûr de se servir de la méthode générale.

§. V. *Résolution des triangles sphériques dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphere.*

CV. Lorsque les côtes a, b, c, sont très-petits par rapport au rayon de la sphere, le triangle proposé est peu différent d'un triangle rectiligne; et, en le considérant comme tel, on peut en avoir une premiere solution approchée, mais on néglige de cette maniere l'excès de la somme des angles sur 200°. Pour avoir une solution plus approchée, il faut tenir compte de cet excès, et c'est ce qu'on peut faire très-aisément, au moyen d'un principe général que nous allons démontrer.

Soit r le rayon de la sphere sur laquelle est situé le triangle proposé, si l'on imagine un triangle semblable tracé sur la sphere dont le rayon est 1, les côtés de ce triangle seront $\frac{a}{r}, \frac{b}{r}, \frac{c}{r}$, et on aura $\cos A = \dfrac{\cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}}$. Mais puisque r est fort grand par rapport à a, b, c, on aura d'une

* XXXV. maniere très-approchée * $\cos\frac{a}{r} = 1 - \frac{a}{2r^2} + \frac{a^4}{2.3.4r^4}$, $\cos\frac{b}{r} = 1 - \frac{b^2}{2r^2} + \frac{b^4}{2.3.4r^4}$, $\cos\frac{c}{r} = 1 - \frac{c^2}{2r^4} + \frac{c^4}{2.3.4r^4}$, $\sin\frac{b}{r} = \frac{b}{r} - \frac{b^3}{2.3r^3}$, $\sin\frac{c}{r} = \frac{c}{r} - \frac{c^3}{2.3r^3}$. Substituant ces

valeurs dans l'équation précédente, et négligeant les termes de plus de quatre dimensions en a, b, c, on aura

$$\cos A = \frac{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2r^2} + \dfrac{a^4-b^4-c^4}{24r^4} - \dfrac{b^2c^2}{4r^4}}{\dfrac{bc}{r^2}\left(1 - \dfrac{b^2}{6r^2} - \dfrac{c^2}{6r^2}\right)}.$$

Multipliant les deux termes de cette fraction par $1 + \frac{b^2+c^2}{6r^2}$ et réduisant, on aura

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2}{24bcr^2}.$$

Soit maintenant A' l'angle opposé au côté a, dans le triangle rectiligne dont les côtés seraient égaux en longueur aux arcs a, b, c; on aura $\cos A' = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ et $4b^2c^2\sin^2 A'$ $= 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$. Donc

$$\cos A = \cos A' - \frac{bc}{6r^2}\sin^2 A'.$$

Soit $A = A' + x$, on aura en rejetant le quarré de x, $\cos A = \cos A' - x \sin A'$, d'où l'on voit que $x = \frac{bc}{6r^2}\sin A'$; et puisque x est du second ordre par rapport à $\frac{b}{r}$ et $\frac{c}{r}$, il s'ensuit que ce résultat est exact aux quantités près du quatrieme ordre. On aura donc

$$A = A' + \frac{bc}{6r^2}\sin A'.$$

Mais $\frac{1}{2}bc \sin A'$ est l'aire du triangle rectiligne dont a, b, c sont les trois côtés, laquelle ne differe pas sensiblement de celle du triangle sphérique proposé. Donc, si l'une ou l'autre aire est appelée α, on aura $A = A' + \frac{\alpha}{3r^2}$, ou $A' = A - \frac{\alpha}{3r^2}$.

On aurait semblablement $B' = B - \frac{\alpha}{3r^2}$, $C' = C - \frac{\alpha}{3r^2}$, et il en résulte $A' + B' + C'$ ou $200^\circ = A + B + C - \frac{\alpha}{r^2}$. On peut donc considérer $\frac{\alpha}{r^2}$ comme étant l'excès de la somme des trois angles du triangle sphérique proposé sur deux angles droits. Cela posé, on a ce théorême remarquable qui réduit la résolution des triangles sphériques très-petits, à celle des triangles rectilignes.

Etant proposé un triangle sphérique dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphere, si de chacun de ses angles on retranche le tiers de l'excès de la somme des trois angles sur deux droits, les angles ainsi diminués pourront être pris pour les angles d'un triangle rectiligne, dont les côtés sont égaux en longueur à ceux du triangle sphérique proposé, ou en d'autres termes :

Le triangle sphérique très-peu courbe dont les angles sont A, B, C, *et les côtés opposés* a, b, c, *répond toujours à un triangle rectiligne qui a les côtés de même longueur* a, b, c, *et dont les angles opposés sont* $A - \frac{1}{3}\varepsilon$, $B - \frac{1}{3}\varepsilon$, $C - \frac{1}{3}\varepsilon$, ε *étant l'excès de la somme des angles du triangle sphérique propose sur deux angles droits.*

CVI. L'excès ε ou $\frac{\alpha}{r^2}$, qui est proportionnel à l'aire du triangle, peut toujours se calculer *a priori* par les données du triangle sphérique considéré comme rectiligne. Si deux côtés b, c, sont donnés avec l'angle compris A, on aura l'aire $\alpha = \frac{1}{2} b\, c \sin A$; si on donne un côté a et les deux angles adjacents B, C, on aura l'aire $\alpha = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin B \sin C}{\sin (B+C)}$.

Ensuite on aura $\varepsilon = \frac{\alpha}{r^2} R$, R étant le nombre de secondes comprises dans le rayon, et de cette maniere ε sera exprimé en secondes.

Pour appliquer ces formules aux triangles tracés sur la surface de la terre, considérée comme sphérique (1), il

(1) Dans les opérations géodésiques les triangles sont le plus souvent formés entre trois stations inégalement éloignées du centre de la terre; mais, par des réductions convenables, on substitue aux triangles observés les triangles qui résultent de la projection des stations sur une même surface sphérique perpendiculaire à la direction de la pesanteur.

faudra supposer que les côtés a, b, c, ainsi que le rayon de la terre r sont exprimés en metres. Or, puisque le quart du méridien $\frac{1}{2}\pi r$ est égal à 10000000 metres, on en conclut $\log r = 6.8038801$; d'un autre côté le rayon R exprimé en secondes, a pour logarithme 5,8038801. Donc si au logarithme de l'aire α exprimée en metres quarrés, on ajoute le logarithme constant 2.196119, et qu'on retranche dix unités de la somme, on aura le logarithme de l'excès ε exprimé en secondes.

Connaissant ε on retranchera ou on supposera retranché $\frac{1}{3}\varepsilon$ de chaque angle du triangle sphérique proposé, et alors dans le triangle rectiligne formé par les côtés a, b, c, et les angles $A' = A' - \frac{1}{3}\varepsilon$, $B' = B - \frac{1}{3}\varepsilon$, $C' = C - \frac{1}{3}\varepsilon$, on aura les données nécessaires pour en déterminer toutes les parties. Ainsi on connaitra en même temps celles du triangle sphérique proposé.

CVII. *Exemple.* Soient donnés l'angle C et les deux côtés a et b, savoir :

$$C = 123^\circ\ 19'\ 99''.23$$
$$\log a = 4.5891503$$
$$\log b = 4.5219271$$

la quantité $\frac{1}{2}ab\sin C$ qui représente l'aire du triangle, aura pour logarithme 8.78055, à quoi ajoutant 2.19612, on aura $\log\varepsilon = 0.97667$, partant $\varepsilon = 9''.48$ et $\frac{1}{3}\varepsilon = 3''.16$. Cela posé, il faut résoudre le triangle rectiligne dans lequel on a les deux côtés a et b comme ci-dessus, et l'angle compris $C' = 123^\circ\ 19'\ 96''.07$. Pour cet effet, nous suivrons la méthode du n° 56,

$$\begin{array}{ll} a\ldots\ldots & 4.5891503 \\ b\ldots\ldots & \underline{4.5219271} \\ \operatorname{tang}\varphi\ldots & 0.0672232 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \varphi = & 54^\circ\ 90'\ 74''.72 \\ 100^\circ\ \frac{1}{2}C' = & 61\ \ 59\ \ 98\ .03 \\ \frac{1}{2}C' = & 38\ \ 40\ \ \ 1\ .97 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \operatorname{tang}(\varphi - 50^\circ)\ldots\ldots & 8.8878392 \\ \cot\frac{1}{2}C'\ldots\ldots\ldots\ldots & \underline{9.8381110} \\ \operatorname{tang}\frac{A'-B'}{2}\ldots\ldots\ldots & 8.7259502 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \frac{A'-B'}{2} = & 3^\circ\ 38'\ 39''.27 \\ \frac{A'+B'}{2} = & 38\ \ 40\ \ \ 1\ .97 \\ A' = & 41\ \ 78\ \ 41\ .24 \\ B' = & 35\ \ \ 1\ \ 62\ .70 \end{array}$$

Il reste à déterminer le troisieme côté c, ce qui se fera par l'équation $c = \frac{a \sin C'}{\sin A'}$.

a	4·5891503		
$\sin A'$ ...	9·7854893		
différence	4·8036610	....	4·8036610
$\sin C'$ ...	9·9705008	$\sin B'$ ...	9·7182661
$\log c =$ ..	4·7741618	$\log b =$	4·5219271

Donc dans le triangle sphérique proposé, les éléments qu'il fallait trouver sont :

$$A = 41^\circ\ 78'\ 44''\ \cdot 40$$
$$B = 35\quad 1\quad 65\quad \cdot 86$$
$$\log c = 4 \cdot 7741618,\ \text{ou}\ c = 59451^{m}\ 256.$$

N. B. La méthode donnée dans ce paragraphe peut servir aussi à
fig. 16. résoudre les triangles dans lesquels deux côtés seraient très-peu différents de 200° et le troisieme très-petit. Car en prolongeant les grands côtés A'C, A'B, on aura un triangle sphérique BCA, dont les trois côtés seront très-petits.

§. VI. *Des triangles sphériques dont deux angles sont très-aigus.*

fig. 17. CVIII. Soit ABC le triangle sphérique proposé dans lequel A et B sont deux angles très-aigus, soit LMN son triangle polaire, de sorte qu'on ait MN = 200° − A et LN = 200° − B. Si on prolonge les arcs NM, NL, jusqu'à leur rencontre en K, il est clair qu'on aura KM = A, et KL = B, le triangle LKM aura donc ses côtés très-petits, et il sera dans le cas d'être résolu par la méthode du paragraphe précédent. Soient A', B', C', les trois angles et a', b', c' les trois côtés du triangle LKM, on aura

$$A' = MLK = a \qquad a' = KM = A$$
$$B' = LMK = b \qquad b' = LK = B$$
$$C' = LKM = 200^\circ - c \qquad c' = LM = 200^\circ - C.$$

Donc trois éléments connus dans le triangle ABC en donneront trois dans le triangle LKM, et par conséquent trois aussi dans le triangle rectiligne auquel le triangle LKM peut être ramené : or celui-ci étant résolu, on aura la solution du triangle LKM, et de là celle du triangle proposé ABC.

CIX. Soit par exemple, $A = 3^o$, $B = 2^o$ et le côté adjacent $c = 150^o$, les données du triangle LKM, ou plutôt $A'B'C'$, seront $a' = 3^o$, $b' = 2^o$, et l'angle compris $C' = 50^o$. Par le moyen de ces données, on trouve l'excès sphérique ε $= \dfrac{\frac{1}{2} a'\, b' \sin C'}{R} = 333''.21$, et le tiers de ε étant retranché de C', le reste sera $49^o\, 98'\, 88''.93$. Il faut donc résoudre un triangle rectiligne dans lequel on a les deux côtés $a' = 30000''$, $b' = 20000''$, et l'angle compris $C'' = 49^o\, 98'\, 88''.93$. On trouvera les deux autres angles $A'' = 103^o\, 64'\, 86''.33$, $B'' = 46^o\, 36'\, 24''.75$, et le troisieme côté $c' = 21244''.36$; ajoutant donc $\frac{1}{3}\varepsilon$ aux angles A'' et B'' du triangle rectiligne, afin d'avoir les angles A', B' du triangle sphérique, on aura pour la solution cherchée

$$\begin{aligned} A' &= a = 103^o\, 65'\, 97''.40 \\ B' &= b = 46\;\; 37\;\; 35\;.82 \\ C = 200^o - c' &= 197\;\; 87\;\; 55\;.64 \end{aligned}$$

§. VII. *Du polygone régulier de dix-sept côtés.*

CX. Nous terminerons ces applications du calcul trigonométrique en donnant, d'après l'excellent ouvrage de Gauss cité page 112, la maniere d'inscrire le polygone régulier de 17 côtés par la simple résolution des équations du second degré.

Soit l'arc $\dfrac{200^o}{17} = \varphi$, je dis d'abord qu'on aura l'équation

$$\cos\varphi + \cos 3\varphi + \cos 5\varphi + \cos 7\varphi + \cos 9\varphi + \cos 11\varphi + \cos 13\varphi + \cos 15\varphi = \tfrac{1}{2}.$$

Car si on appelle le premier membre P, et qu'on multiplie tous ses termes par $2\cos\varphi$; qu'ensuite on change chaque produit de deux cosinus en cosinus d'arcs simples d'après la formule :

$$2\cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$$

on aura

$$2P\cos\varphi = 1 + 2\cos 2\varphi + 2\cos 4\varphi + 2\cos 6\varphi \ldots\ldots + 2\cos 14\varphi + \cos 15\varphi$$

Or puisque $17\varphi = 200^\circ$, on a $\cos 2\varphi = \cos(200^\circ - 15\varphi) = -\cos 15\varphi$, $\cos 4\varphi = \cos(200^\circ - 13\varphi) = -\cos 13\varphi$, et ainsi de suite jusqu'à $\cos 16\varphi = -\cos\varphi$. Donc
$2P\cos\varphi = 1 - 2\cos 15\varphi - 2\cos 13\varphi - 2\cos 11\varphi \ldots - 2\cos 3\varphi - \cos\varphi$
ou $2P\cos\varphi = 1 + \cos\varphi - 2P$, ou $2P(1+\cos\varphi) = 1 + \cos\varphi$.
Donc $P = \frac{1}{2}$.

Cela posé, je partage la somme des termes qui composent P en deux parties, savoir :

$$x = \cos 3\varphi + \cos 5\varphi + \cos 7\varphi + \cos 11\varphi$$
$$y = \cos\varphi + \cos 9\varphi + \cos 13\varphi + \cos 15\varphi.$$

J'aurai donc d'abord $x + y = \frac{1}{2}$; je multiplie ensuite les quatre termes de x par les quatre termes de y, et changeant les produits de cosinus en cosinus d'arcs simples, j'obtiens, toutes réductions faites,

$$xy = \quad 2(\cos 2\varphi + \cos 4\varphi + \cos 6\varphi \ldots + \cos 16\varphi)$$
ou $xy = -2(\cos 15\varphi + \cos 13\varphi + \cos 11\varphi \ldots + \cos\varphi)$
ou enfin $xy = -1$.

Au moyen de ces équations on trouve

$$x = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\sqrt{17}\,; \qquad y = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\sqrt{17}.$$

Maintenant si l'on partage de nouveau les sommes x et y chacune en deux parties, savoir :

$$x = s + t \qquad\qquad y = u + z$$
$$s = \cos 3\varphi + \cos 5\varphi \qquad u = \cos\varphi + \cos 13\varphi$$
$$t = \cos 7\varphi + \cos 11\varphi \qquad z = \cos 9\varphi + \cos 15\varphi,$$

on trouvera semblablement

$$st = -\tfrac{1}{4} \qquad\qquad uz = -\tfrac{1}{4}.$$

De sorte qu'on pourra déterminer les quatre nombres s, t, u, z, à l'aide de deux nouvelles équations du second degré.

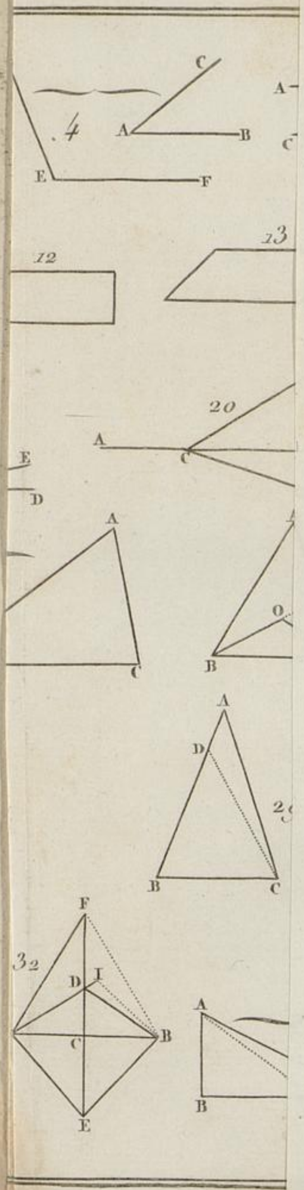
Enfin connaissant $\cos\varphi + \cos 13\varphi = u$ et $\cos\varphi \cos 13\varphi = \frac{1}{2}(\cos 12\varphi + \cos 14\varphi) = -\frac{1}{2}(\cos 3\varphi + \cos 5\varphi) = -\frac{1}{2}s$, on obtiendra, par une quatrieme équation du second degré, la valeur de $\cos\varphi$, et de là celle du côté du polygone proposé, laquelle est $2\sin\varphi$ ou $2\sqrt{(1-\cos^2\varphi)}$.

Quant à la méthode qui a dirigé le partage de ces diverses équations, elle tient à une théorie très-délicate, fondée sur l'analyse indéterminée, et dont il faut voir le développement dans l'ouvrage même de Gauss, ou dans l'*Essai sur la théorie des nombres*, deuxième édition. On y trouvera la démonstration complete de ce théorême très-beau et très-général :

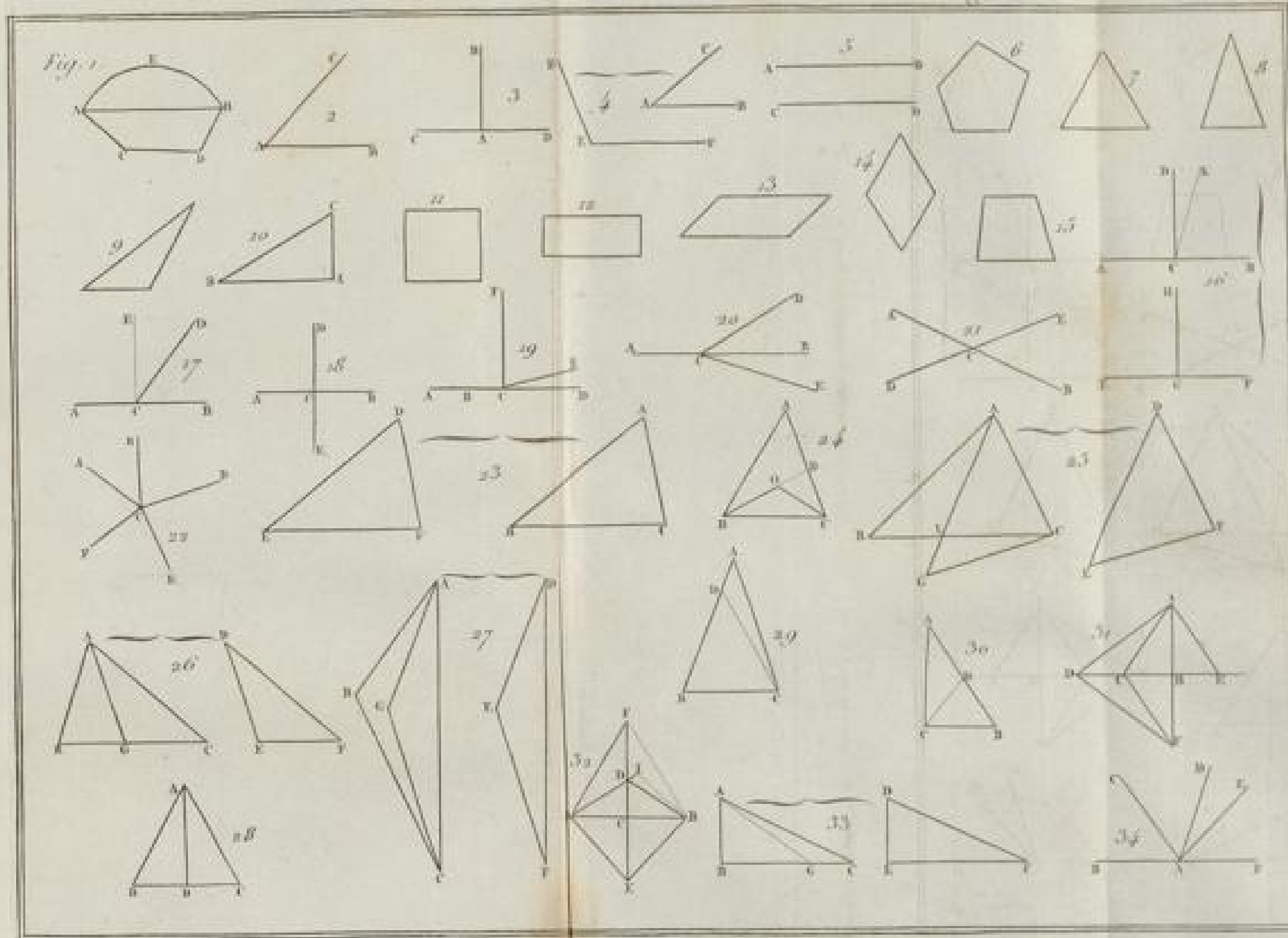
« Si le nombre n est premier, et que $n - 1$ résulte du « produit des facteurs premiers $2^\alpha\, 3^\beta\, 5^\gamma$, etc. la division « du cercle en n parties égales pourra toujours se réduire « à la résolution de α équations du deuxieme degré, β du « troisieme, γ du cinquieme, et ainsi de suite ».

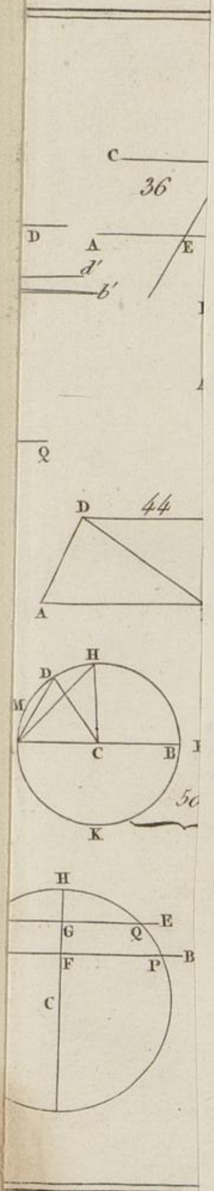
FIN.

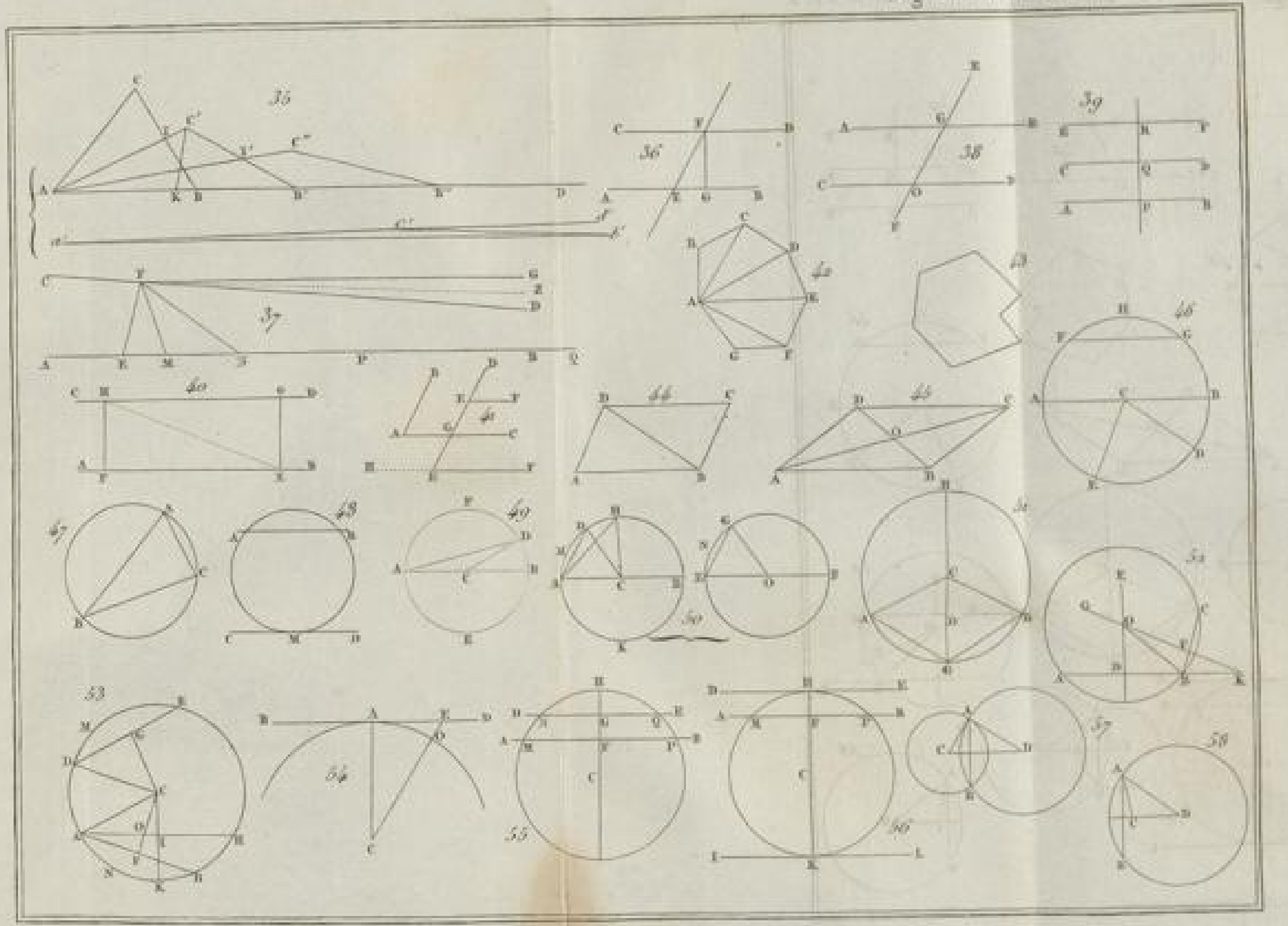
DE L'IMPRIMERIE DE FIRMIN DIDOT,
RUE JACOB, N° 24.

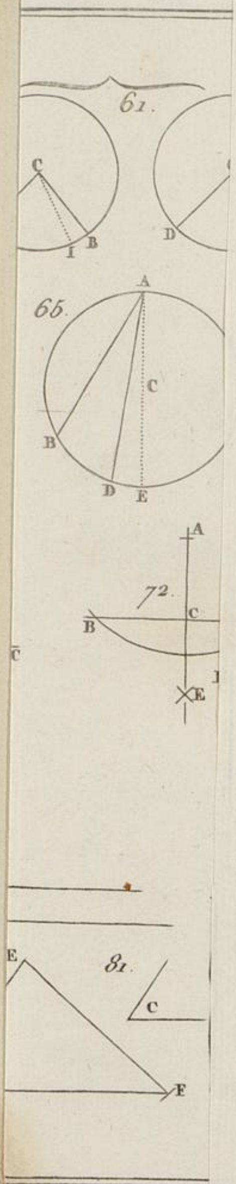


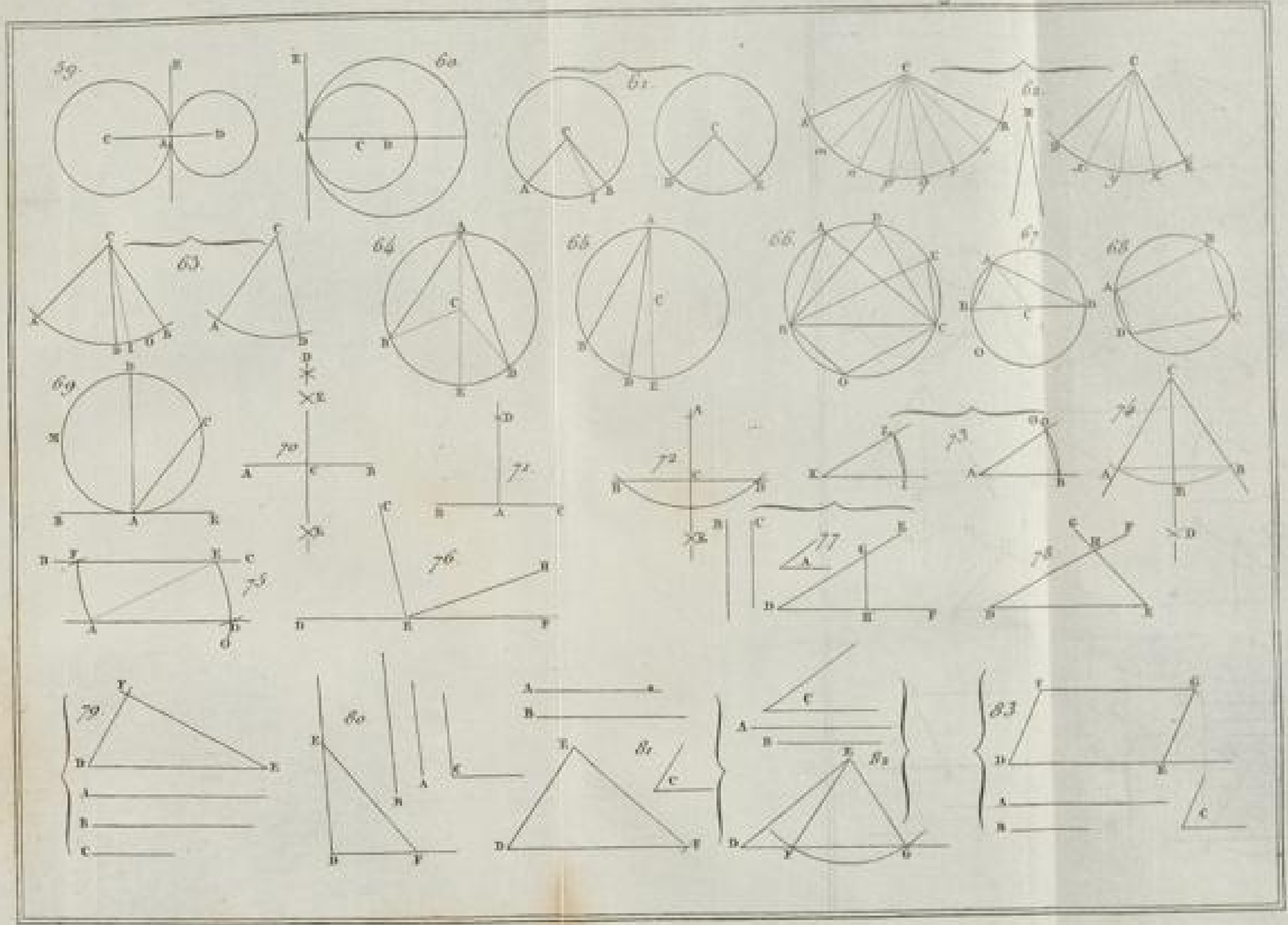
4
C
A
B
E
F
12
13
20
A
C
E
D
A
C
B
O
A
D
B
C
F
32
D
I
C
B
E
A
B

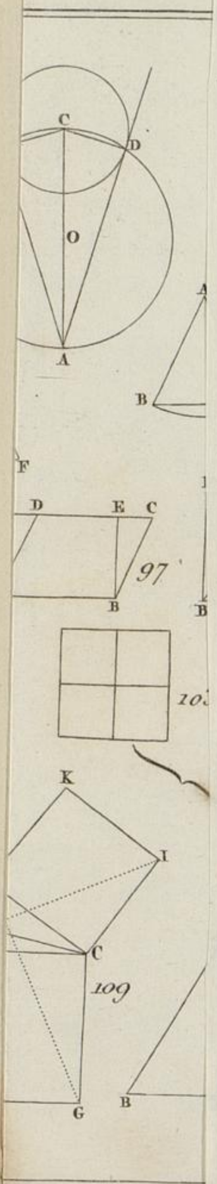


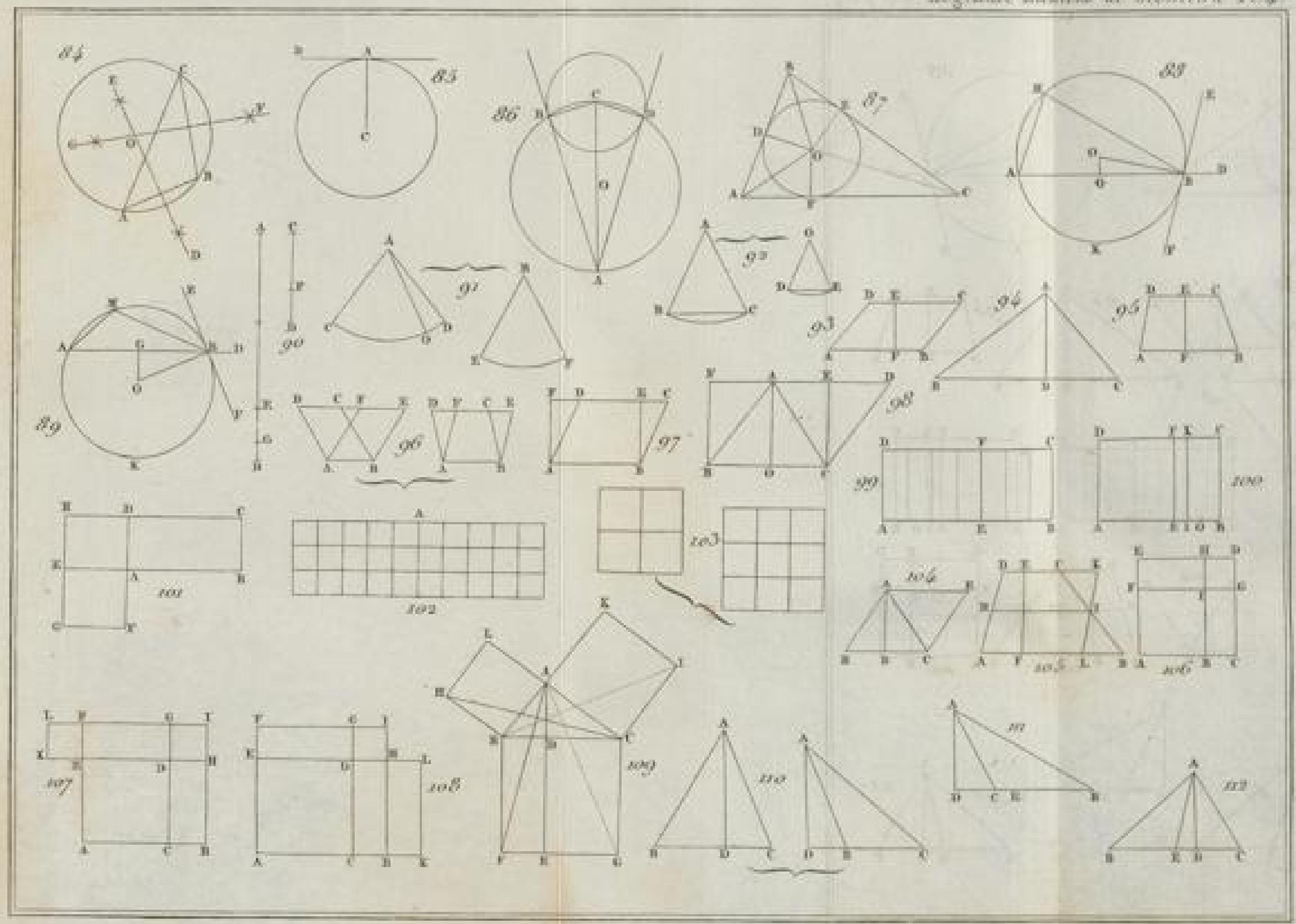

36
44
C
D
A
E
d'
b'
Q
D
A
H
D
M
C
B
K
H
E
G
Q
F
P
B
C

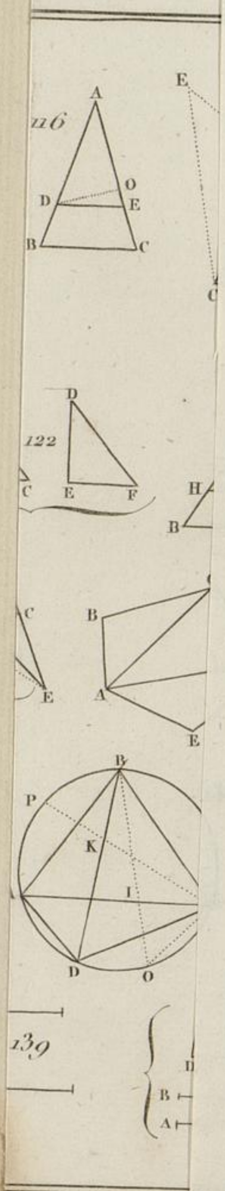

35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58


61.
C
D
B
I
66.
A
C
B
D
E
72.
A
C
B
E
81.
E
C
F

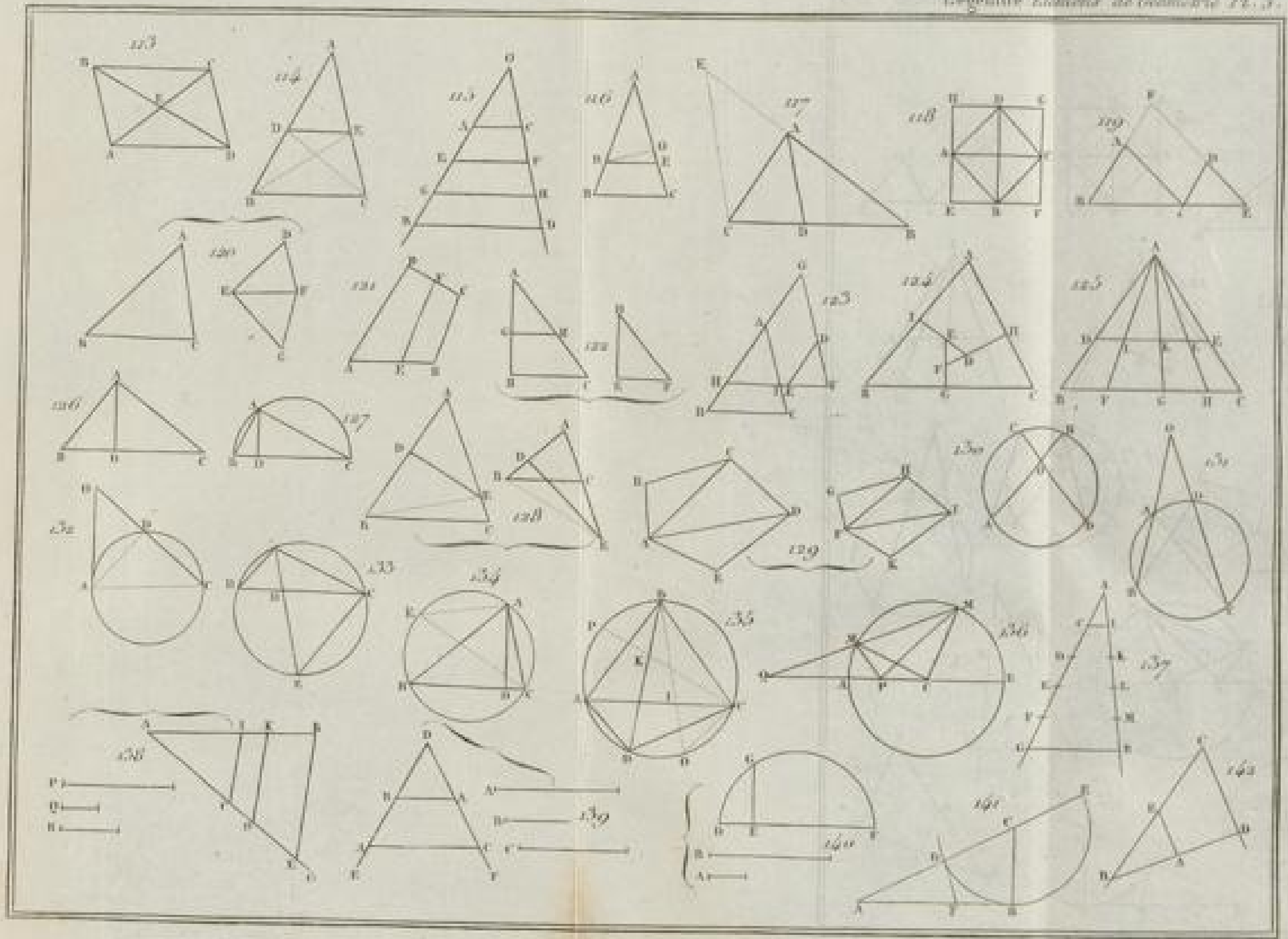

59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83

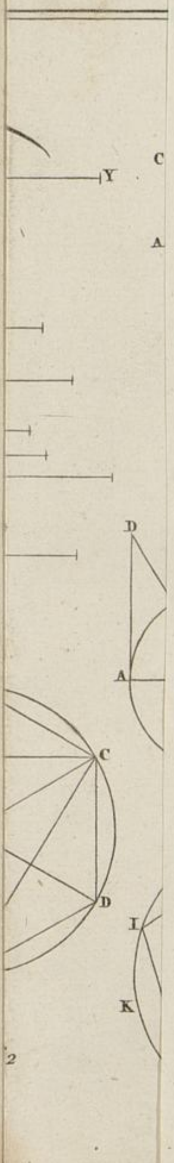

C
D
O
A
B
F
D
E
C
97
B
B
K
I
C
109
G
B

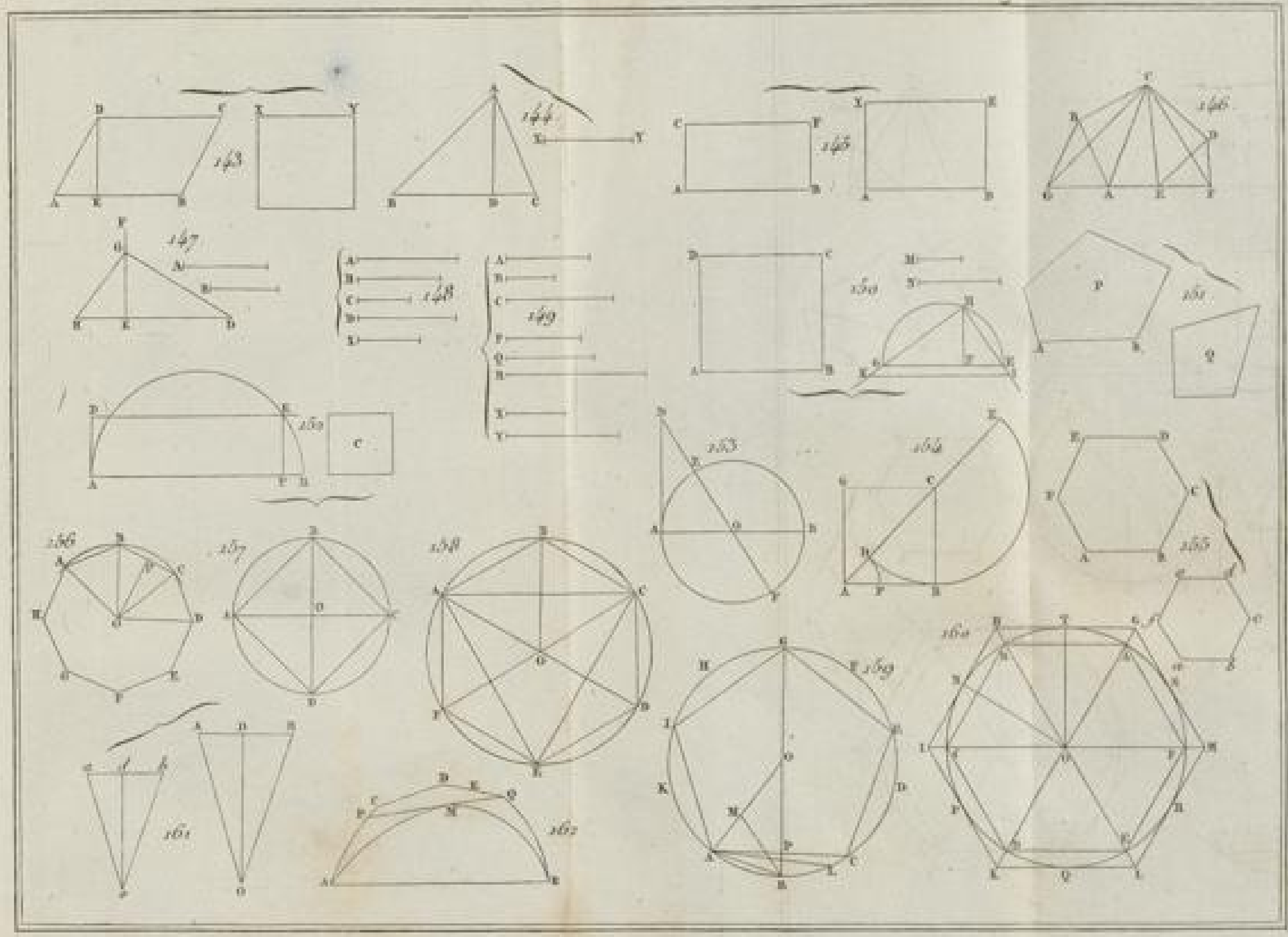


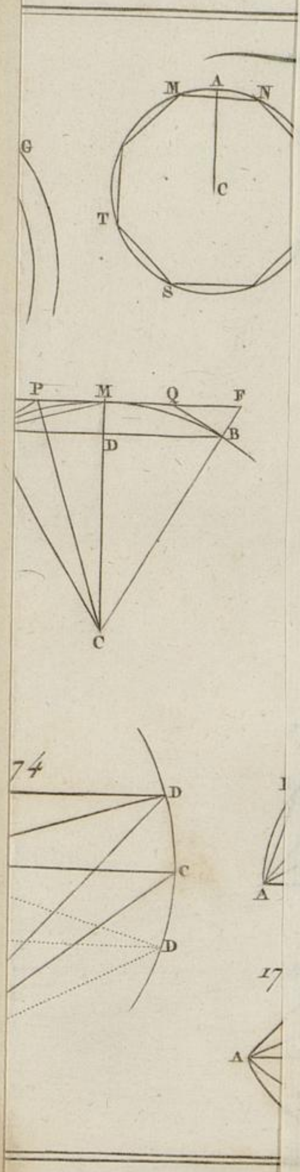


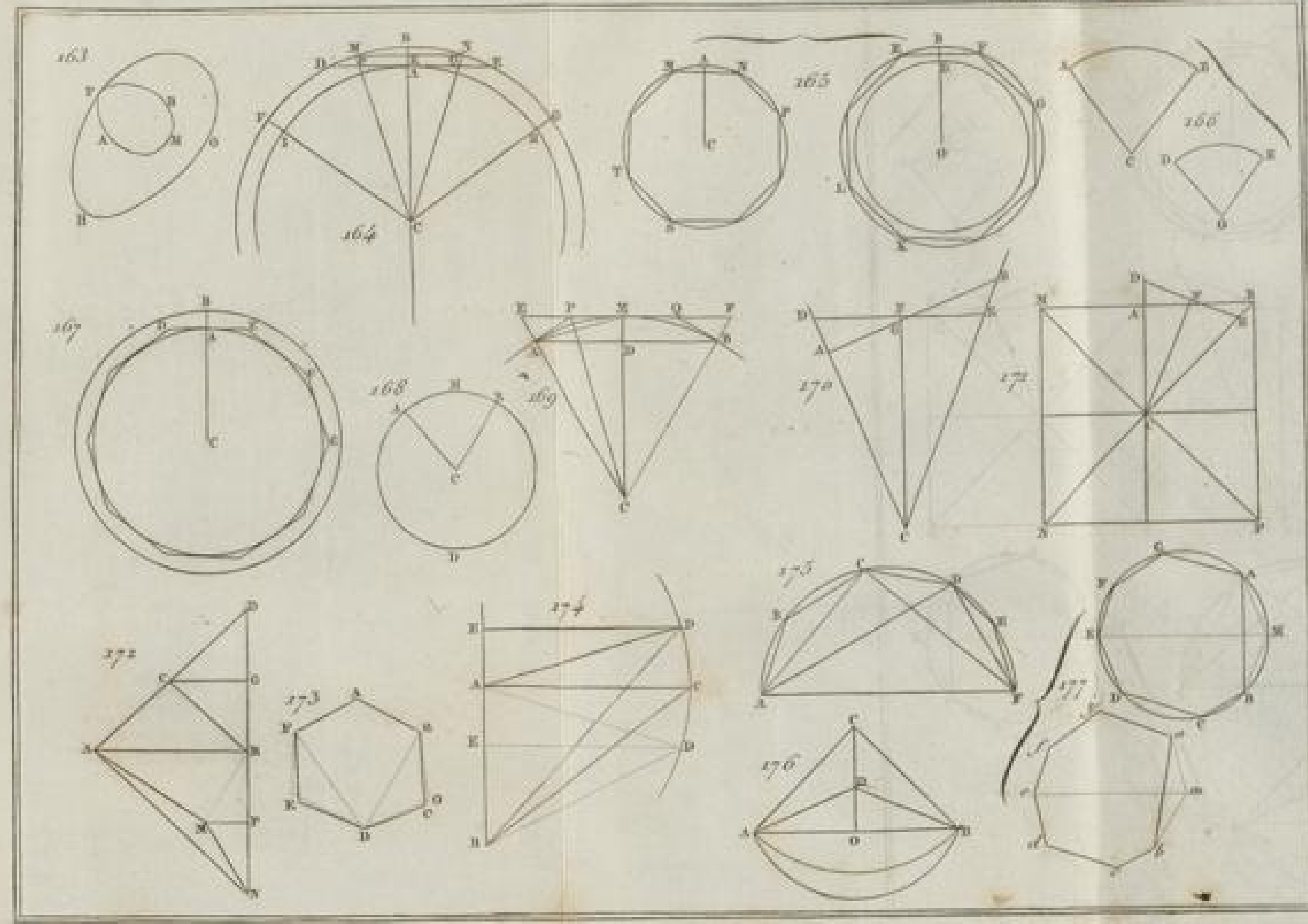
116
A
O
D
E
B
C
E
C
D
122
E
F
C
H
B
C
B
A
E
E
B
P
K
I
D
O
139
D
B
A

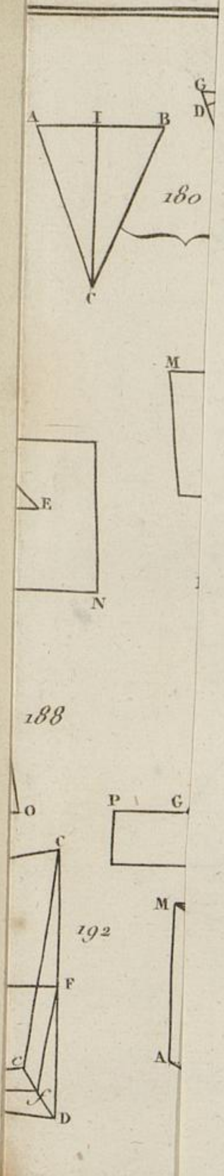

113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142


C
Y
A
D
A
C
D
I
K
2


143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162


M
A
N
G
C
T
S
P
M
Q
F
B
D
C
74
D
C
D
A
17
A

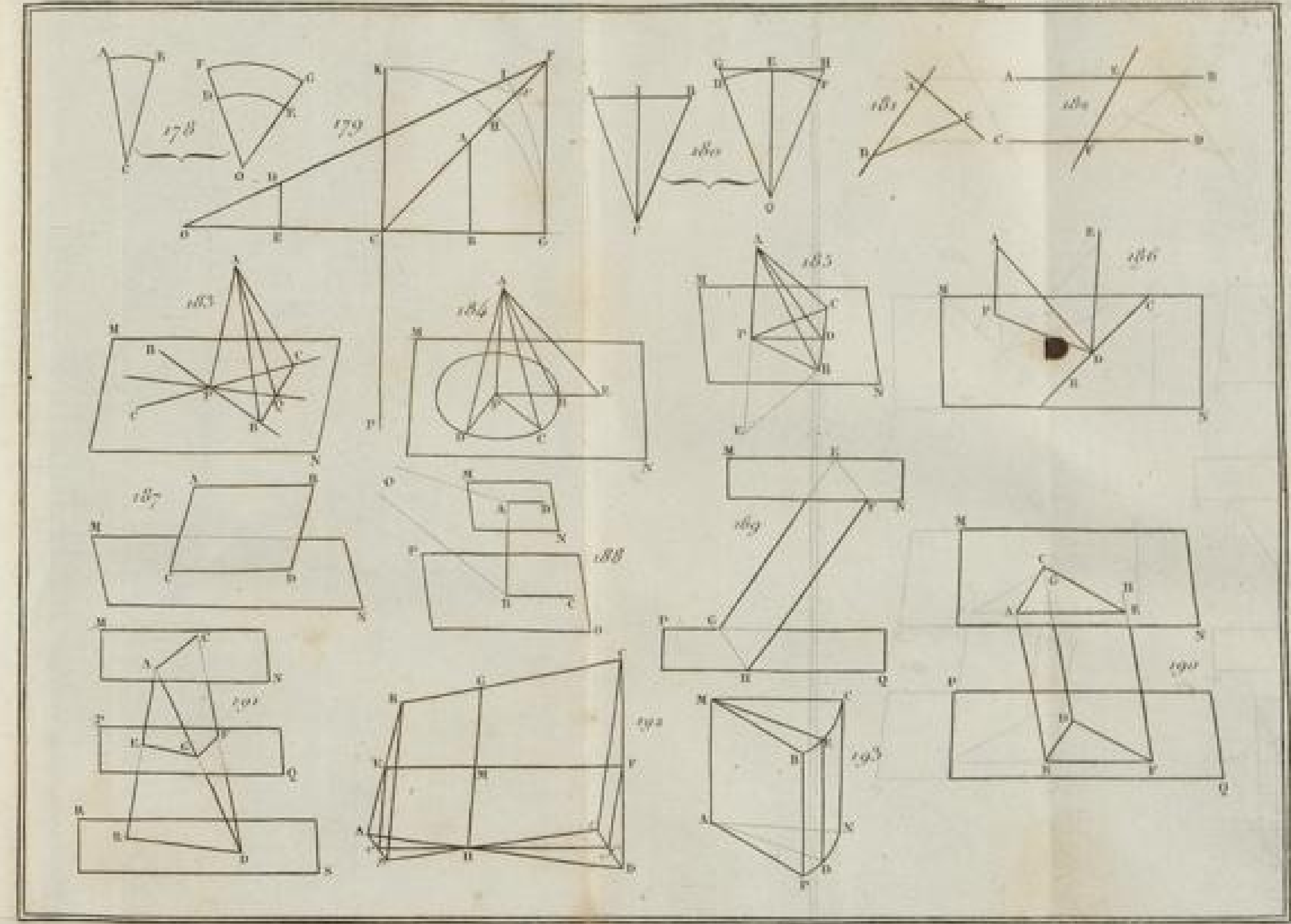

163
164
165
166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177

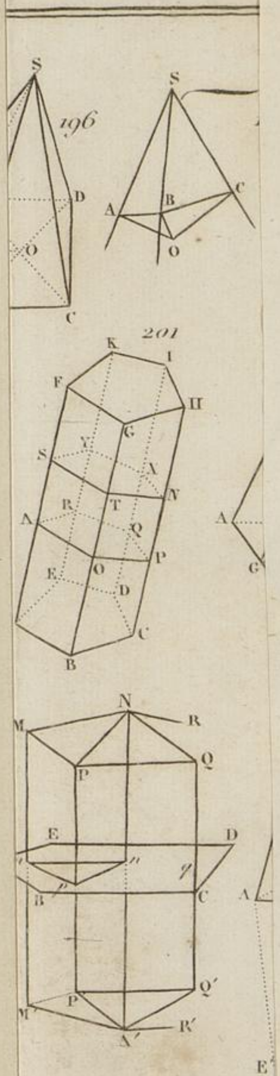


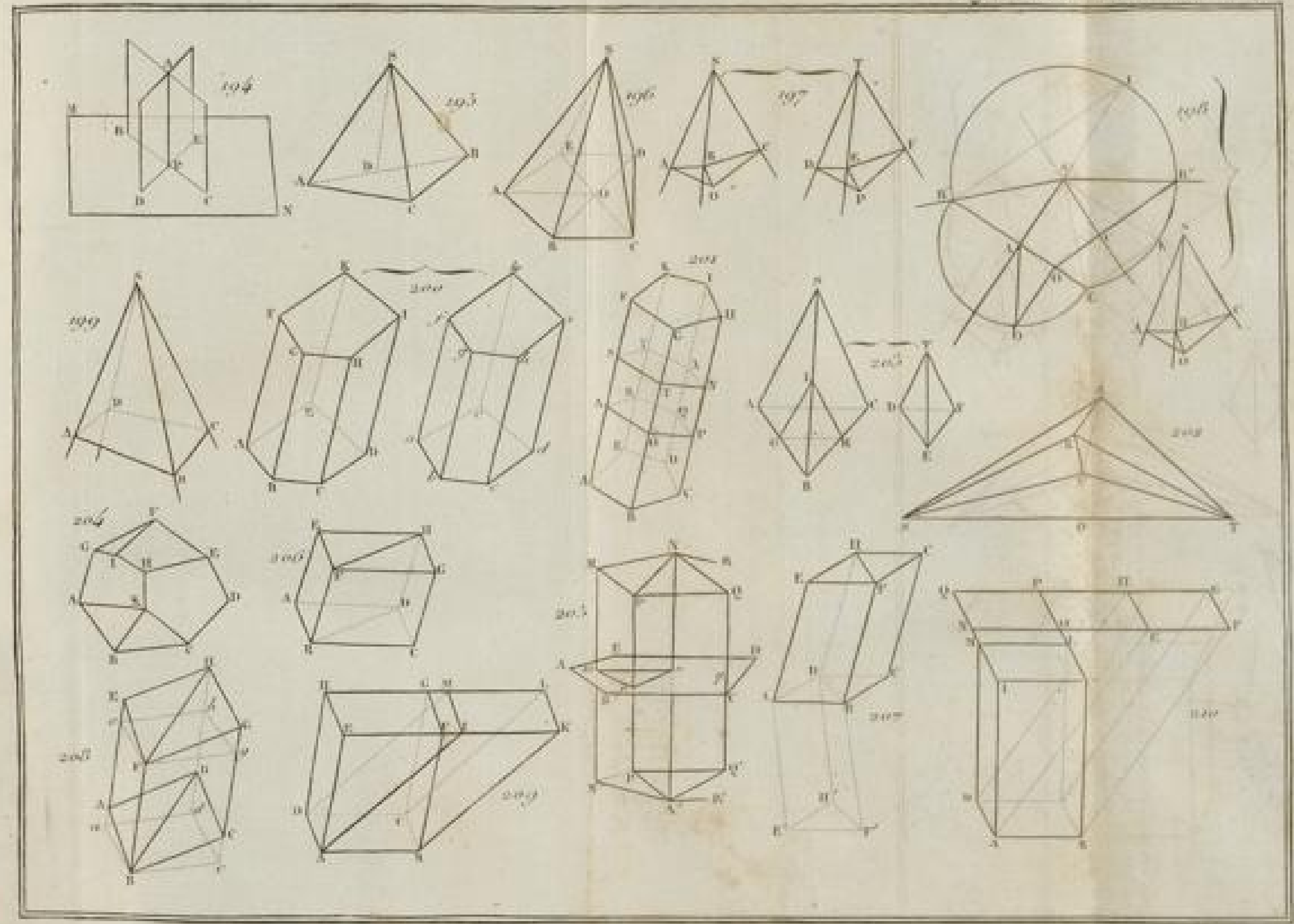
180

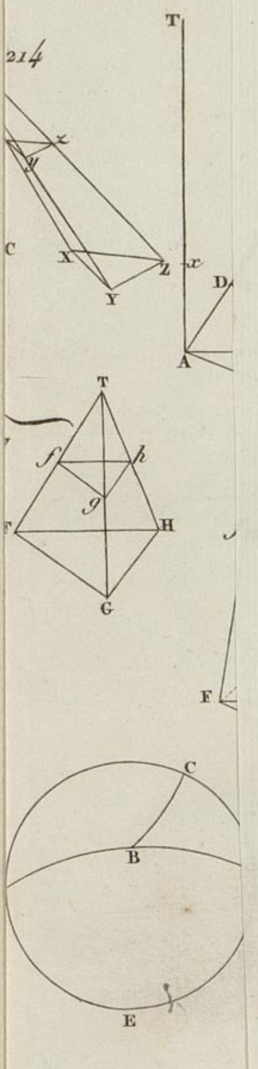
188

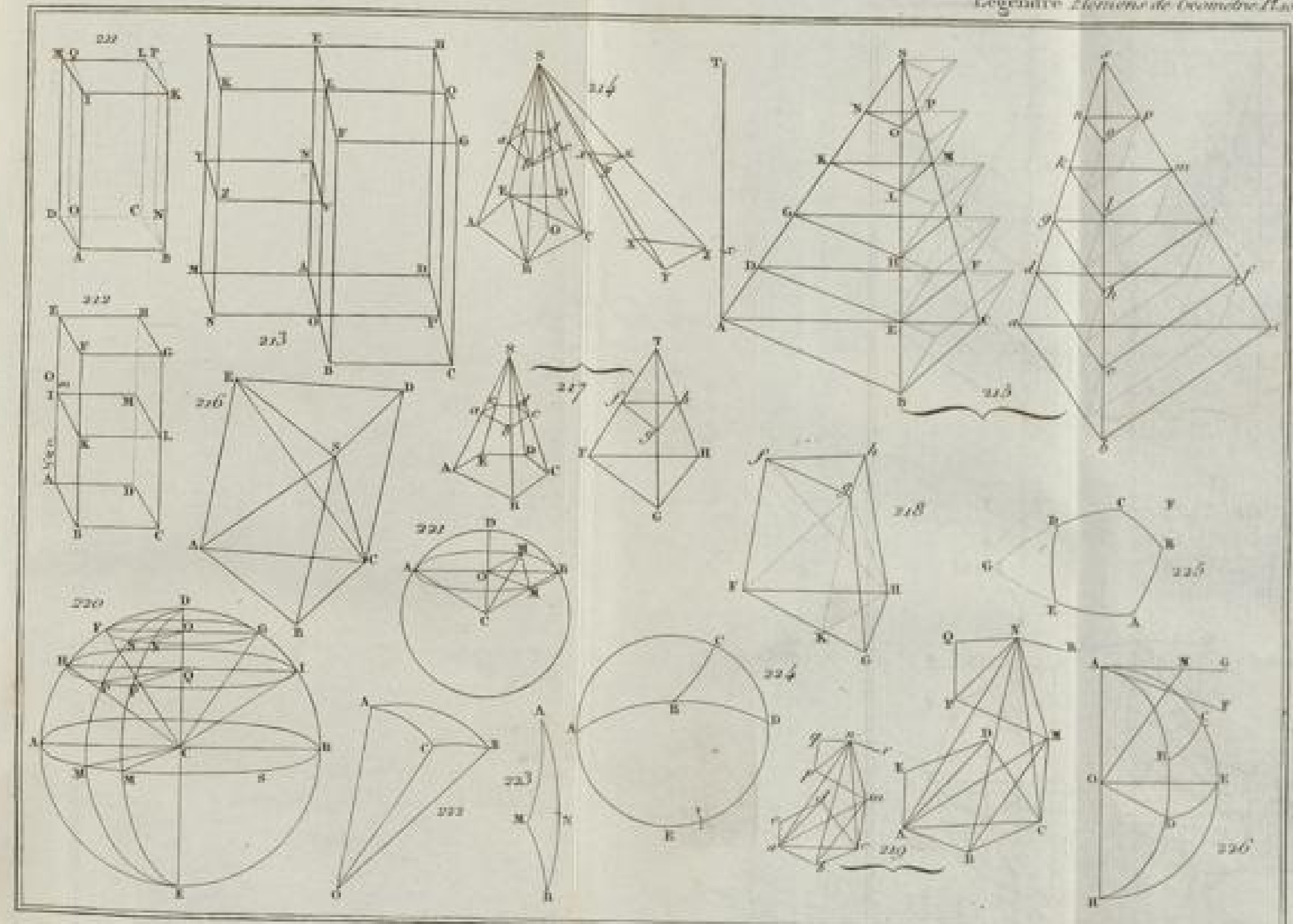
192

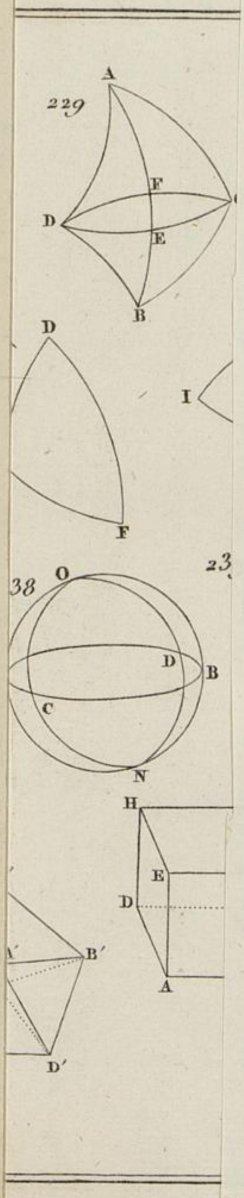

178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193

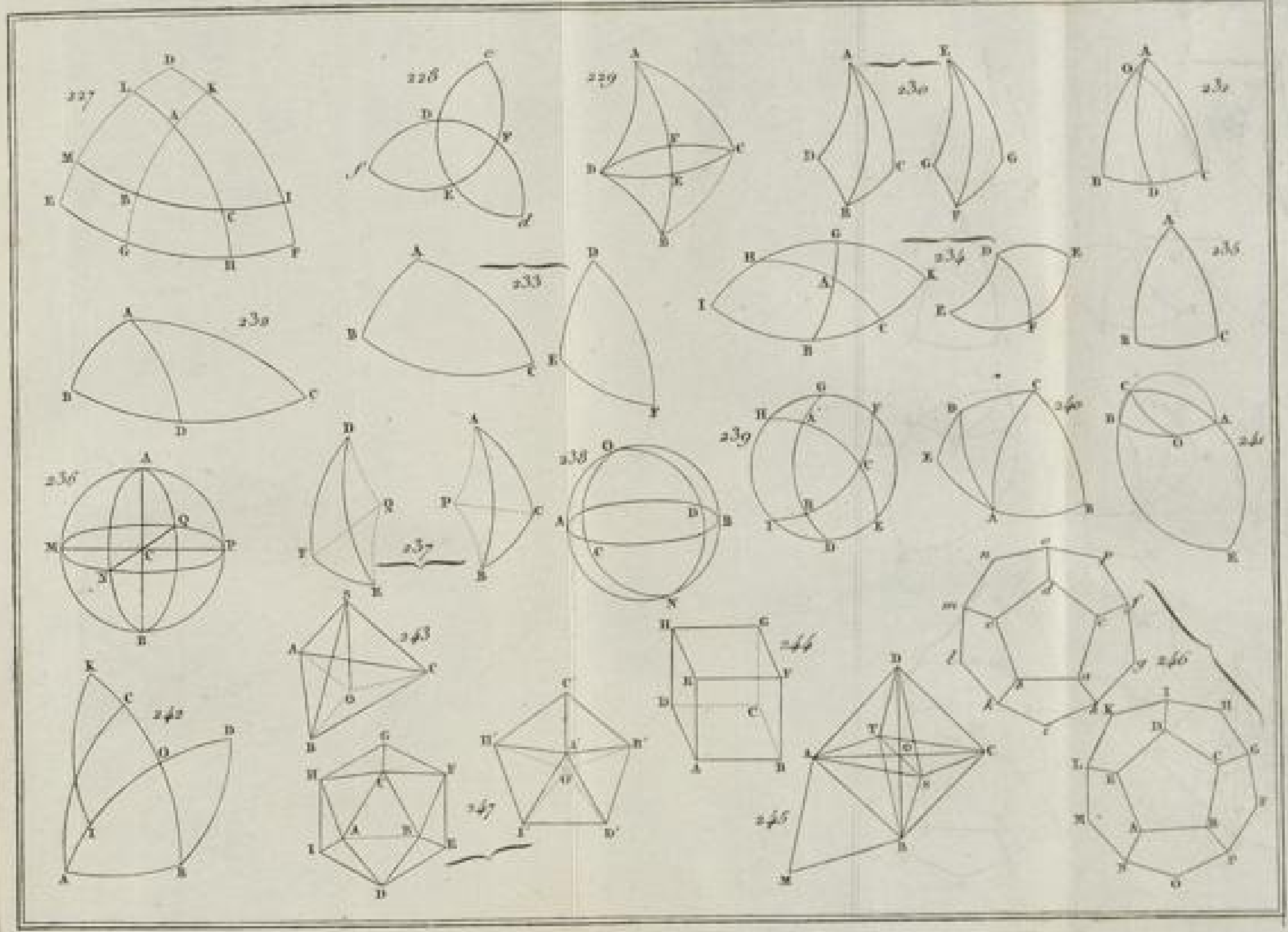

196
201
S
A
B
C
D
O
K
I
F
H
G
Y
X
N
R
T
Q
P
E
M
n
p
q
Q′
M′
R′

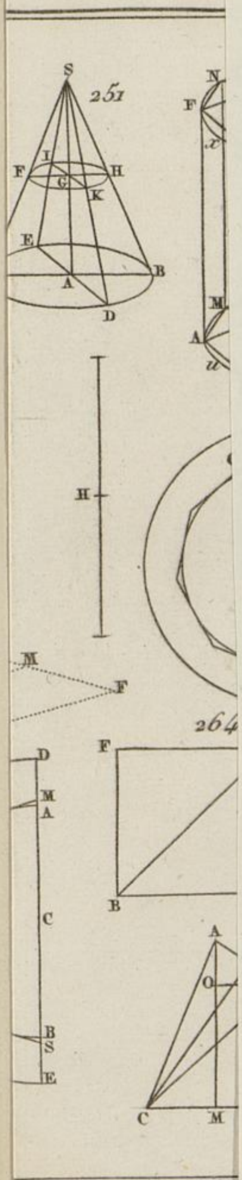

194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204
205
206
207
208
209
210


214
T
z
y
C
X
Z
x
Y
D
A
T
f
h
g
F
H
G
F
C
B
E

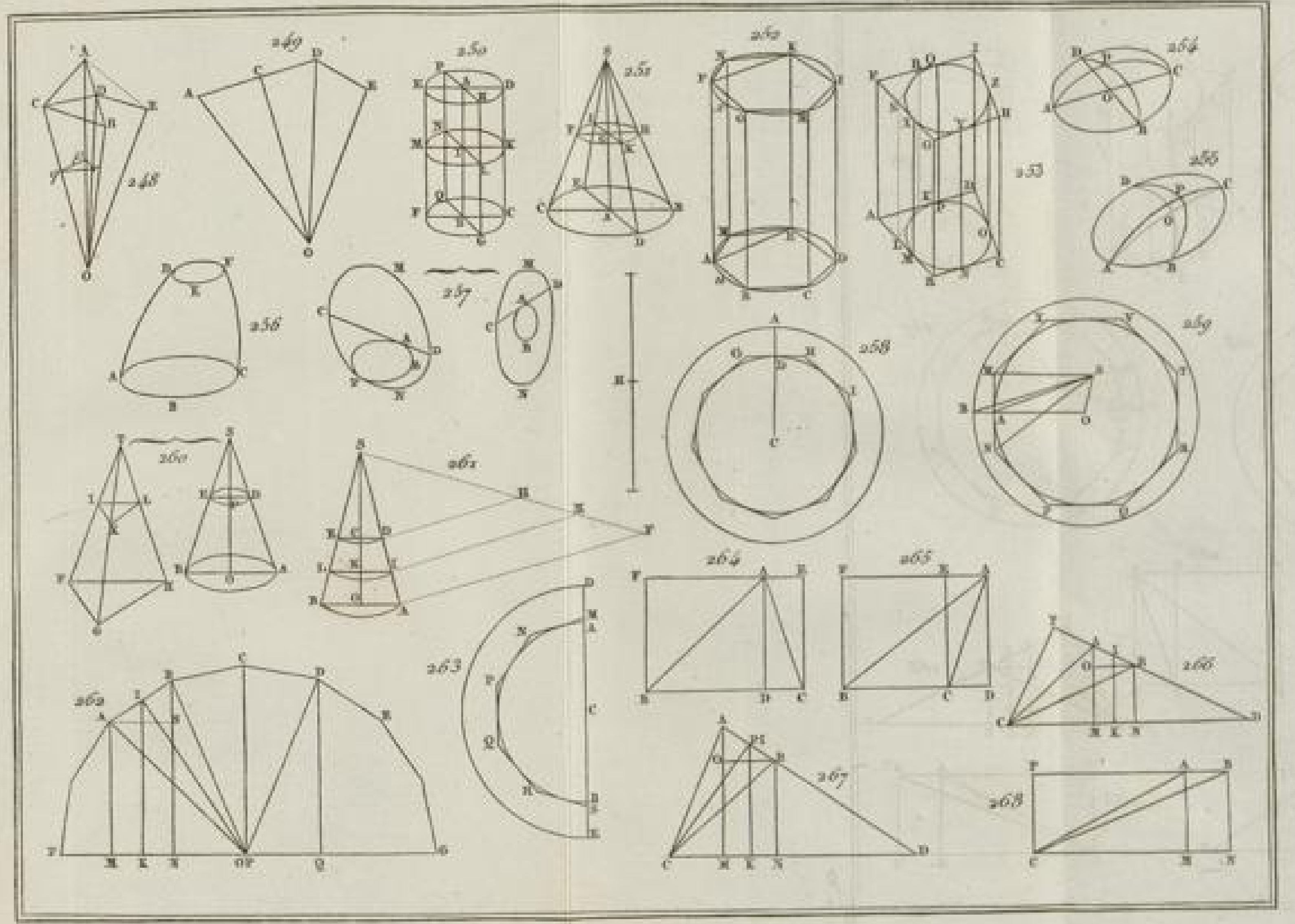

211
212
213
214
215
216
217
218
219
220
221
222
223
224
225
226

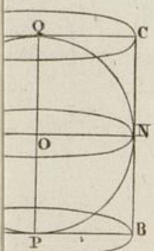

229
A
F
D
E
B
D
I
F
38
O
23
D
B
C
N
H
E
D
A′
B′
A
D′

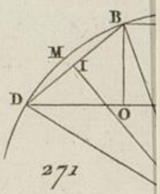

227
228
229
230
231
232
233
234
235
236
237
238
239
240
241
242
243
244
245
246
247



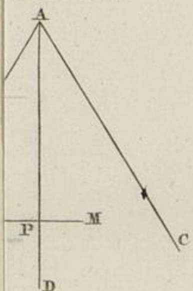
251
S
I
F
H
G
K
E
B
A
D
N
F
x
M
A
u
H
M
F
264
D
M
A
C
B
S
E
F
B
A
O
C
M

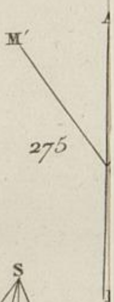

248
249
250
251
252
253
254
255
256
257
258
259
260
261
262
263
264
265
266
267
268





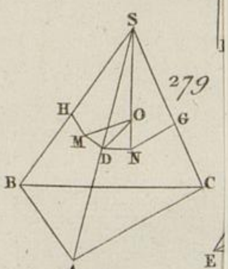
271





275

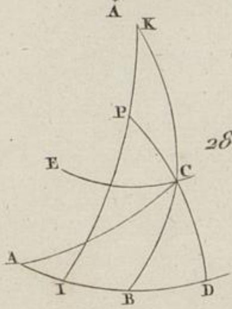
278



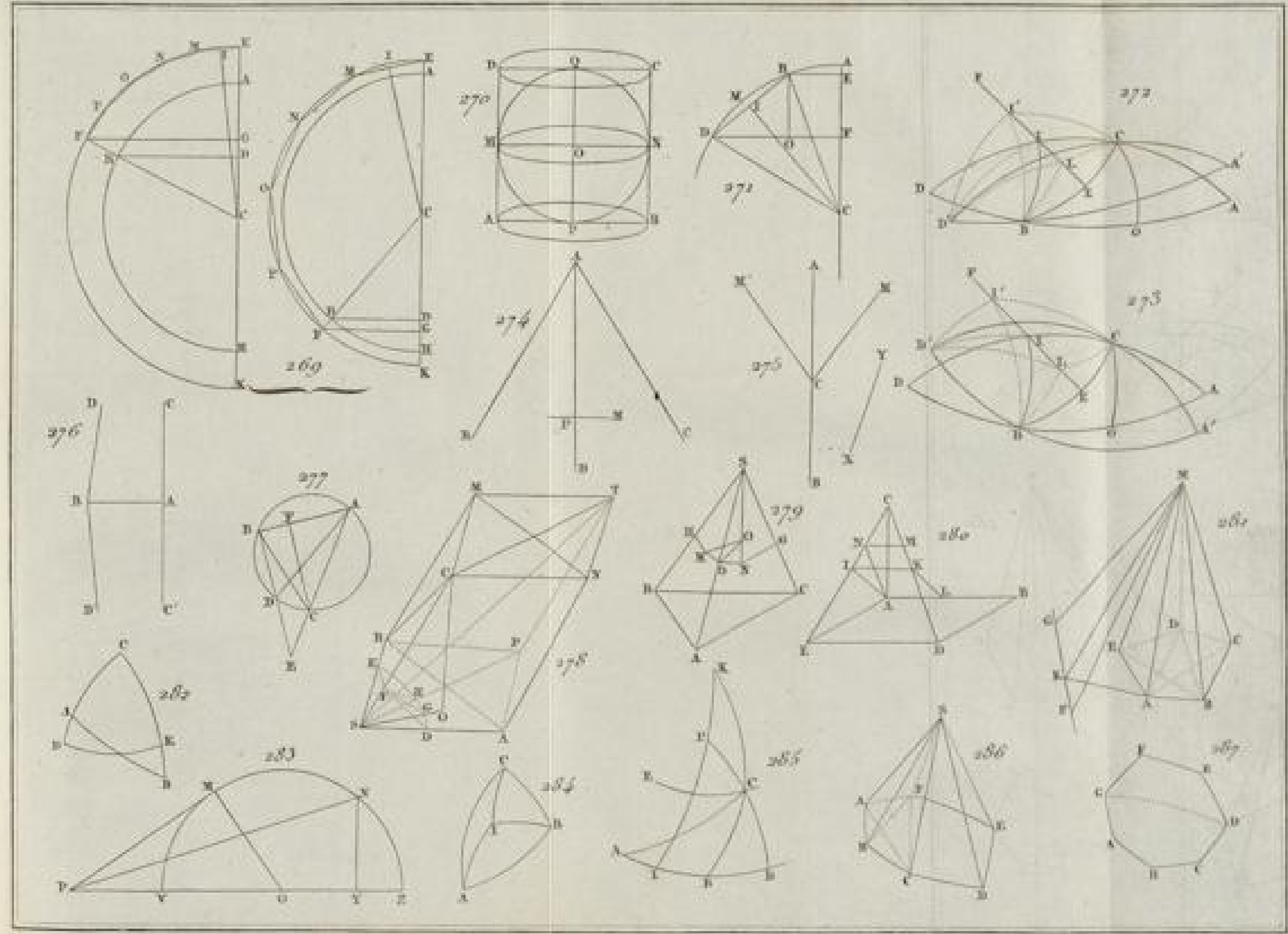
279

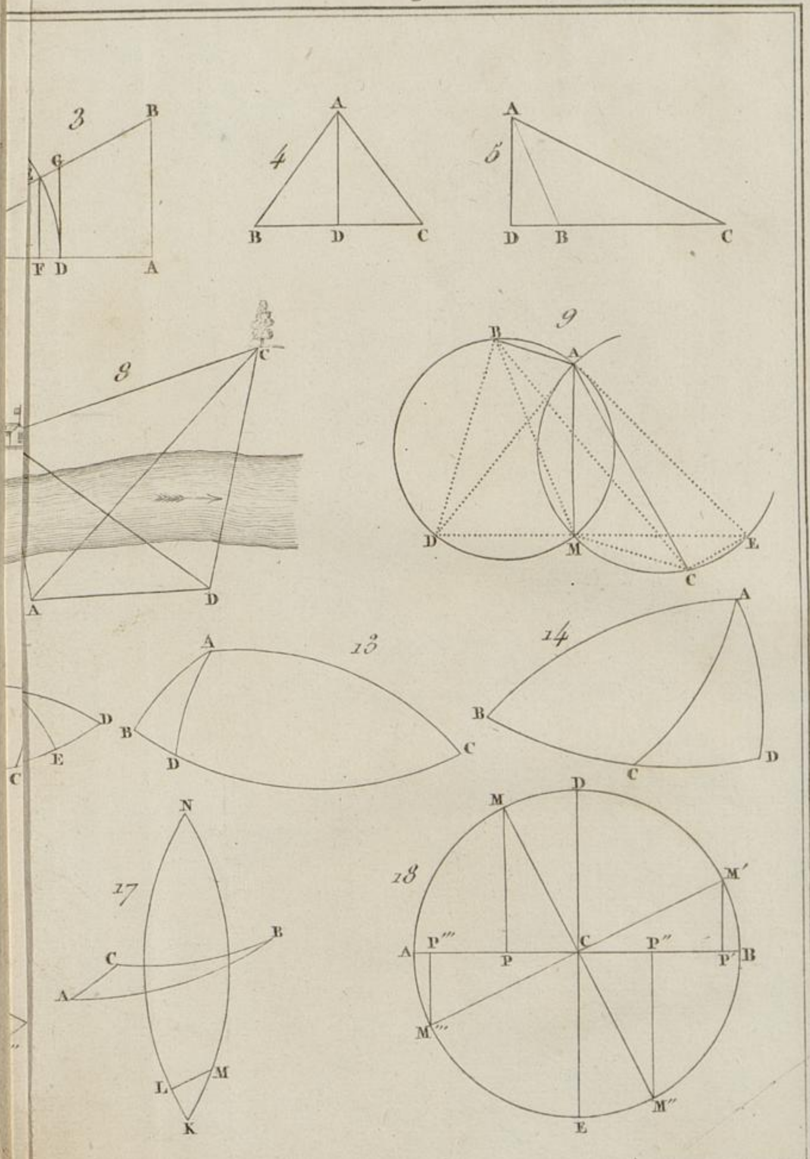
84

B



285


269
270
271
272
273
274
275
276
277
278
279
280
281
282
283
284
285
286
287


3
B
G
F
D
A
4
A
B
D
C
5
A
D
B
C
8
C
A
D
9
B
A
D
M
C
E
13
A
B
D
C
E
14
A
B
C
D
17
N
B
C
A
L
M
K
18
D
M
M′
A
P‴
P
C
P″
P′
B
M‴
M″
E

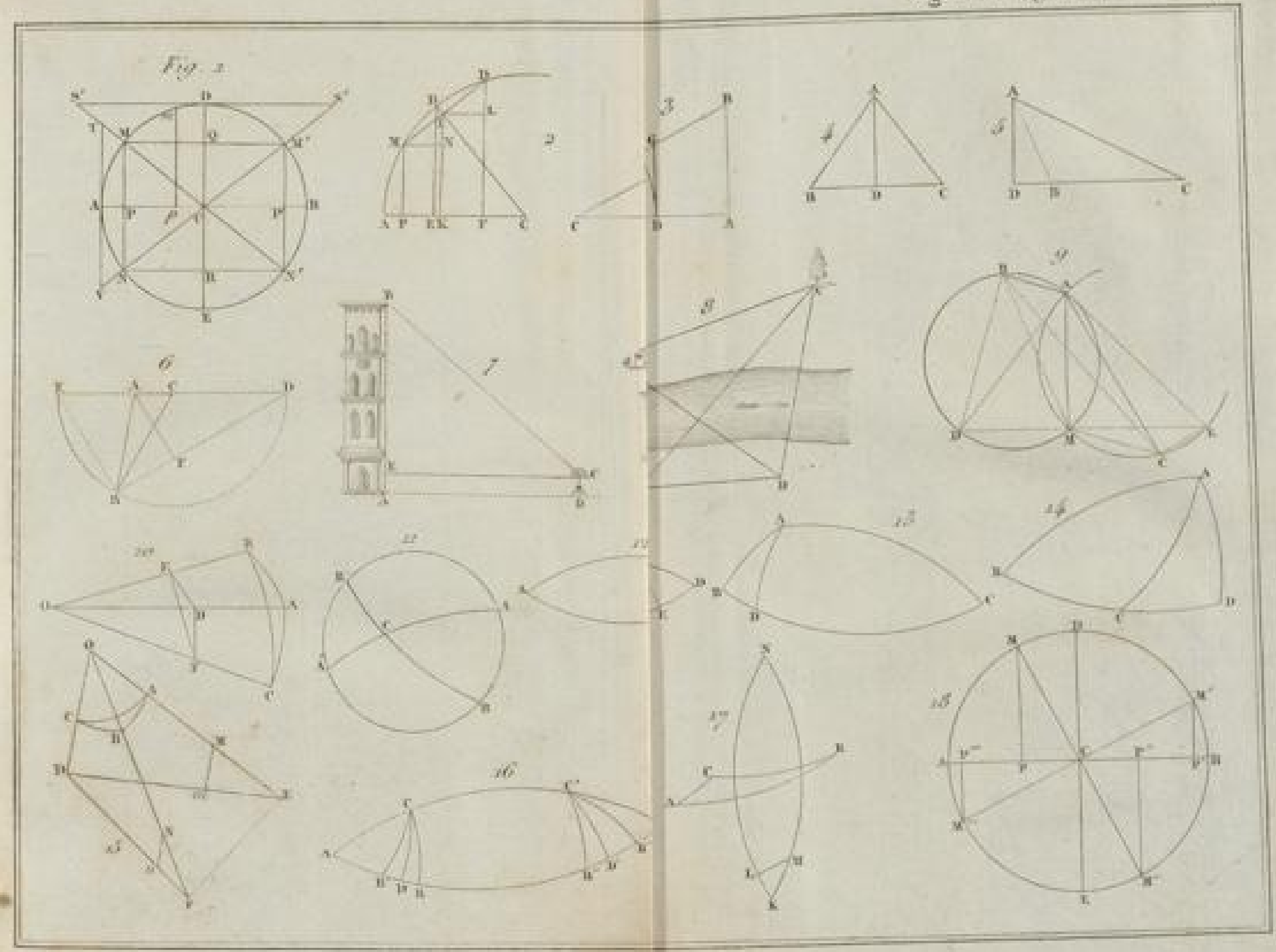


Fig. 1