LIVRE III.

LES PROPORTIONS DES FIGURES.

DÉFINITIONS.

I. J'APPELLERAI *figures équivalentes* celles dont les surfaces sont égales.

Deux figures peuvent être équivalentes, quoique très-dissemblables : par exemple, un cercle peut être équivalent à un quarré, un triangle à un rectangle, etc.

La dénomination de figures égales sera conservée à celles qui étant appliquées l'une sur l'autre, coïncident dans tous leurs points : tels sont deux cercles dont les rayons sont égaux, deux triangles dont les trois côtés sont égaux chacun à chacun, etc.

II. Deux figures sont *semblables*, lorsqu'elles ont les angles égaux chacun à chacun et les *côtés homologues* proportionnels. Par côtés homologues on entend ceux qui ont la même position dans les deux figures, ou qui sont adjacents à des angles égaux. Ces angles eux-mêmes s'appellent *angles homologues*.

Deux figures égales sont toujours semblables; mais deux figures semblables peuvent être fort inégales.

III. Dans deux cercles différents, on appelle *arcs semblables*, *secteurs semblables*, *segments semblables*, ceux qui répondent à des angles au centre égaux.

fig. 92. Ainsi l'angle A étant égal à l'angle O, l'arc BC est semblable à l'arc DE, le secteur ABC au secteur ODE, etc.

IV. La *hauteur* d'un parallélogramme est la perpendiculaire EF qui mesure la distance des deux côtés opposés AB, CD, pris pour bases. fig. 93.

V. La *hauteur* d'un triangle est la perpendiculaire AD abaissée du sommet d'un angle A sur le côté opposé BC pris pour base. fig. 94.

VI. La *hauteur* du trapeze est la perpendiculaire EF menée entre ses deux côtés paralleles AB, CD. fig. 95.

VII. L'*aire* ou la surface d'une figure sont des termes à-peu-près synonymes. L'aire désigne plus particulièrement la quantité superficielle de la figure en tant qu'elle est mesurée ou comparée à d'autres surfaces.

N. B. Pour l'intelligence de ce livre et des suivants, il faut avoir présente la théorie des proportions, pour laquelle nous renvoyons aux traités ordinaires d'arithmétique et d'algebre. Nous ferons seulement une observation, qui est tres importante pour fixer le vrai sens des propositions, et dissiper toute obscurité, soit dans l'énoncé, soit dans les démonstrations.

Si on a la proportion A:B::C:D, on sait que le produit des extrêmes A×D est égal au produit des moyens B×C.

Cette vérité est incontestable pour les nombres; elle l'est aussi pour des grandeurs quelconques, pourvu qu'elles s'expriment ou qu'on les imagine exprimées en nombres; et c'est ce qu'on peut toujours supposer : par exemple, si A, B, C, D, sont des lignes, on peut imaginer qu'une de ces quatre lignes, ou une cinquieme, si l'on veut, serve à toutes de commune mesure et soit prise pour unité; alors A, B, C, D représentent chacune un certain nombre d'unités, entier ou rompu, commensurable ou incommensurable, et la proportion entre les lignes A, B, C, D, devient une proportion de nombres.

Le produit des lignes A et D, qu'on appelle aussi leur *rectangle*, n'est donc autre chose que le nombre d'unités linéaires contenues dans A, multiplié par le nombre d'unités linéaires contenues dans B; et on conçoit facilement que ce produit peut et doit être égal à celui qui résulte semblablement des lignes B et C.

Les grandeurs A et B peuvent être d'une espèce, par exemple, des lignes, et les grandeurs C et D d'une autre espece, par exemple, des surfaces; alors il faut toujours regarder ces grandeurs comme des nombres : A et B s'exprimeront en unités linéaires, C et D en unités superficielles, et le produit $A \times D$ sera un nombre comme le produit $B \times C$.

En général, dans toutes les opérations qu'on fera sur les proportions, il faut toujours regarder les termes de ces proportions comme autant de nombres, chacun de l'espece qui lui convient, et on n'aura aucune peine à concevoir ces opérations et les conséquences qui en résultent.

Nous devons avertir aussi que plusieurs de nos démonstrations sont fondées sur quelques-unes des regles les plus simples de l'algebre, lesquelles s'appuient elles-mêmes sur les axiomes connus : ainsi si l'on a $A = B + C$, et qu'on multiplie chaque membre par une même quantité M, on en conclut $A \times M = B \times M + C \times M$; pareillement si l'on a $A = B + C$ et $D = E - C$, et qu'on ajoute les quantités égales, en effaçant $+C$ et $-C$ qui se détruisent, on en conclura $A + D = B + E$, et ainsi des autres. Tout cela est assez évident par soi-même; mais, en cas de difficulté, il sera bon de consulter les livres d'algebre, et d'entre-mêler ainsi l'étude des deux sciences.

PROPOSITION PREMIERE.

THÉORÊME.

Les parallélogrammes qui ont des bases égales et des hauteurs égales, sont équivalents.

fig. 96. Soit AB la base commune des deux parallélogrammes ABCD, ABEF, puisqu'ils sont supposés avoir la même hauteur, les bases supérieures DC, FE, seront situées sur une même ligne parallele à AB. Or on a par la nature des parallélogrammes $AD = BC$, et $AF = BE$; par la même raison on a $DC = AB$, et $FE = AB$; donc $DC = FE$; donc, retranchant DC et FE de la même ligne DE, les restes CE et DF seront égaux.

Il suit de-là que les triangles DAF, CBD, sont équilatéraux entre eux, et par conséquent égaux.

Mais si du quadrilatere ABED on retranche le triangle ADF, il reste le parallélogramme ABEF; et si du même quadrilatere ABED on retranche le triangle CBE, il reste le parallélogramme ABCD; donc les deux parallélogrammes ABCD, ABEF, qui ont même base et même hauteur, sont équivalents. fig. 96.

Corollaire. Tout parallélogramme ABCD est équivalent au rectangle ABEF de même base et de même hauteur. fig. 97.

PROPOSITION II.

THÉORÊME.

Tout triangle ABC *est la moitié du parallélogramme* ABCD *qui a même base et même hauteur.* fig 98.

Car les triangles ABC, ACD, sont égaux *. * 28, 1.

Corollaire I. Donc un triangle ABC est la moitié du rectangle BCEF qui a même base BC et même hauteur AO; car le rectangle BCEF est équivalent au parallélogramme ABCD.

Corollaire II. Tous les triangles qui ont des bases égales et des hauteurs égales, sont équivalents.

PROPOSITION III.

THÉORÊME.

Deux rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.

Soient ABCD, AEFD, deux rectangles qui ont pour hauteur commune AD; je dis qu'ils sont entre eux comme leurs bases AB, AE. fig 99.

Supposons d'abord que les bases AB, AE, soient commensurables entre elles, et qu'elles soient, par exemple, comme les nombres 7 et 4 : si on divise AB en 7 parties égales, AE contiendra 4 de ces parties, élevez à chaque point de division une perpendiculaire à la base, vous formerez ainsi sept rectangles partiels, qui seront égaux entre eux, puisqu'ils auront même base et même hauteur. Le rectangle ABCD contiendra sept rectangles partiels, tandis que AEFD en contiendra quatre; donc le rectangle ABCD est au rectangle AEFD comme 7 est à 4, ou comme AB est à AE. Le même raisonnement peut être appliqué à tout autre rapport que celui de 7 à 4; donc, quel que soit ce rapport, pourvu qu'il soit commensurable, on aura,

ABCD : AEFD :: AB : AE.

fig. 100. Supposons, en second lieu, que les bases AB, AE, soient incommensurables entre elles; je dis qu'on n'en aura pas moins,

ABCD : AEFD :: AB : AE.

Car si cette proportion n'est pas vraie, les trois premiers termes demeurant les mêmes, le quatrieme sera plus grand ou plus petit que AE. Supposons qu'il soit plus grand et qu'on ait,

ABCD : AEFD :: AB : AO.

Divisez la ligne AB en parties égales plus petites que EO, il y aura au moins un point de division I entre E et O : par ce point élevez sur AI la perpendiculaire IK; les bases AB, AI, seront commensurables entre elles, et ainsi on aura, par ce qui vient d'être démontré,

ABCD : AIKD :: AB : AI.

Mais on a, par hypothese,

ABCD : AEFD :: AB : AO.

Dans ces deux proportions les antécédents sont égaux; donc les conséquents sont proportionnels, et il en résulte,

AIKD : AEFD :: AI : AO

Mais AO est plus grand que AI; donc, pour que cette proportion subsistât, il faudrait que le rectangle AEFD fût plus grand que AIKD; or, au contraire, il est plus petit; donc la proportion est impossible; donc ABCD ne peut être à AEFD comme AB est à une ligne plus grande que AE.

Par un raisonnement entièrement semblable, on prouverait que le quatrieme terme de la proportion ne peut être plus petit que AE; donc il est égal à AE.

Donc, quel que soit le rapport des bases, deux rectangles de même hauteur ABCD, AEFD, sont entre eux comme leurs bases AB, AE.

PROPOSITION IV.

THÉORÊME.

Deux rectangles quelconques ABCD, AEGF, *sont entre eux comme les produits des bases multipliées par les hauteurs, de sorte qu'on a* ABCD:AEGF::AB×AD.AE×AF. fig. 101.

Ayant disposé les deux rectangles de maniere que les angles en A soient opposés au sommet, prolongez les côtés GE, CD, jusqu'à leur rencontre en H; les deux rectangles ABCD, AEHD, ont même hauteur AD; ils sont donc entre eux comme leurs bases AB, AE : de même les deux rectangles AEHD, AEGF, ont même hauteur AE, ils sont donc entre eux comme leurs bases AD, AF : ainsi on aura les deux proportions,

ABCD:AEHD::AB:AE.
AEHD:AEGF::AD:AF.

Multipliant ces proportions par ordre, et observant que le moyen terme AEHD peut être omis comme multiplicateur commun à l'antécédent et au conséquent, on aura,

$$ABCD : AEGF :: AB \times AD : AE \times AF.$$

Scholie. Donc on peut prendre pour mesure d'un rectangle le produit de sa base par sa hauteur, pourvu qu'on entende par ce produit celui de deux nombres, qui sont le nombre d'unités linéaires contenues dans la base, et le nombre d'unités linéaires contenues dans la hauteur.

Cette mesure, d'ailleurs, n'est pas absolue, mais seulement relative; elle suppose qu'on évalue semblablement un autre rectangle en mesurant ses côtés par la même unité linéaire; on obtient ainsi un second produit, et le rapport des deux produits est égal à celui des rectangles, conformément à la proposition qu'on vient de démontrer.

Par exemple, si la base du rectangle A est de trois unités et sa hauteur de dix, le rectangle sera représenté par le nombre 3×10, ou 30, nombre qui ainsi isolé ne signifie rien; mais si on a un second rectangle B dont la base soit de douze unités et la hauteur de sept, le second rectangle sera représenté par le nombre 7×12, ou 84 : de-là on conclura que les deux rectangles A et B sont entre eux comme 30 est à 84; donc, si on convenait de prendre le rectangle A pour l'unité de mesure dans les surfaces, le rectangle B aurait alors pour mesure absolue $\frac{84}{30}$, c'est-à-dire qu'il serait égal à $\frac{84}{30}$ d'unités superficielles.

Il est plus ordinaire et plus simple de prendre le quarré pour l'unité de surface, et on choisit le quarré dont le côté est l'unité de longueur; alors la mesure que nous avons regardée simplement comme relative devient absolue : par exemple le nombre 30, par lequel nous avons mesuré le rectangle A, représente 30
fig. 102. unités superficielles, ou 30 de ces quarrés dont le côté est égal à l'unité : c'est ce que la fig. 102 rend sensible

On confond assez souvent en géométrie le produit de deux lignes avec leur *rectangle*, et cette expression a même passé en arithmétique pour désigner le produit de deux nombres inégaux, comme on emploie celle de *quarré* pour exprimer le produit d'un nombre multiplié par lui-même.

Les quarrés des nombres 1, 2, 3, etc., sont 1, 4, 9, etc. Aussi voit-on que le quarré fait sur une ligne double est quadruple; sur une ligne triple, il est neuf fois plus grand, et ainsi de suite. fig. 103.

PROPOSITION V.

THÉORÊME.

L'aire d'un parallélogramme quelconque est égale au produit de sa base par sa hauteur.

Car le parallélogramme ABCD est équivalent au rectangle ABEF, qui a même base AB et même hauteur BE*; or celui-ci a pour mesure AB×BE**. Donc AB×BE est égal à l'aire du parallélogramme ABCD. fig. 97. *1. **4.

Corollaire. Les parallélogrammes de même base sont entre eux comme leurs hauteurs, et les parallélogrammes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases; car A, B, C, étant trois grandeurs quelconques, on a généralement A×C : B×C :: A : B.

PROPOSITION VI.

THÉORÊME.

L'aire d'un triangle est égale au produit de sa base par la moitié de sa hauteur.

Car le triangle ABC est la moitié du parallélogramme ABCE, qui a même base BC et même hauteur AD*: or, la surface du parallélogramme fig. 104. *2.

* 5. $= BC \times AD$*; donc celle du triangle $= \frac{1}{2} BC \times AD$ ou $BC \times \frac{1}{2} AD$.

Corollaire. Deux triangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases, et deux triangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.

PROPOSITION VII.

THÉORÊME.

fig. 105. *L'aire du trapeze* ABCD *est égale à sa hauteur* EF, *multipliée par la demi-somme des bases paralleles,* AB, CD.

Par le point I, milieu du côté CB, menez KL parallele au côté opposé AD, et prolongez DC jusqu'à la rencontre de KL.

Dans les triangles IBL, ICK, on a le côté $IB = IC$ par construction, l'angle $LIB = CIK$, et l'angle
* 24. 1. $IBL = ICK$, puisque CK et BL sont paralleles *;
* 7, 1. donc ces triangles sont égaux *; donc le trapeze ABCD est équivalent au parallélogramme ADKL, et il a pour mesure $EF \times AL$.

Mais on a $AL = DK$, et puisque le triangle IBL est égal au triangle KCI, le côté $BL = CK$; donc $AB + CD = AL + DK = 2\,AL$, et ainsi AL est la demi-somme des bases AB, CD; donc enfin l'aire du trapeze ABCD est égale à la hauteur EF multipliée par la demi-somme des bases AB, CD, ce qui s'exprime ainsi : $ABCD = EF \times \left(\frac{AB + CD}{2}\right)$.

Scholie. Si par le point I, milieu de BC, on mene IH, parallele à la base AB, le point H sera aussi le milieu de AD, car la figure AHIL est un parallélogramme, ainsi que DHIK, puisque les côtés opposés sont paralleles : on a donc $AH = IL$ et $DH = IK$; or, $IL = IK$, puisque les triangles BIL, CIK, sont égaux, donc $A = H\,DH$.

On peut remarquer que la ligne $HI = AL = \frac{AB + CD}{2}$; donc l'aire du trapeze peut s'exprimer aussi par $EF \times HI$: elle est donc égale à la hauteur du trapeze multipliée par la ligne qui joint les milieux des côtés non paralleles.

PROPOSITION VIII.

THÉORÊME.

Si une ligne AC *est divisée en deux parties* AB, BC, *le quarré fait sur la ligne entiere* AC *contiendra le quarré fait sur une partie* AB, *plus le quarré fait sur l'autre partie* BC, *plus deux fois le rectangle compris sous les deux parties* AB, BC, *ce qu'on exprime ainsi*, $\overline{AC}^2$ *ou* $(AB + BC)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\,AB \times BC$. fig. 106.

Construisez le quarré ACDE, prenez $AF = AB$, menez FG parallele à AC, et BH parallele à AE.

Le quarré ABCD est divisé en quatre parties : la premiere ABIF est le quarré fait sur AB, puisqu'on a pris $AF = AB$: la seconde IGDH est le quarré fait sur BC; car puisqu'on a $AC = AE$, et $AB = AF$, la différence $AC - AB$ est égale à la différence $AE - AF$, ce qui donne $BC = EF$; mais à cause des paralleles $IG = BC$, et $DG = EF$, donc HIGD est égal au quarré fait sur BC. Ces deux parties étant retranchées du quarré total, il reste les deux rectangles BCGI, EFIH, qui ont chacun pour mesure $AB \times BC$; donc le quarré fait sur AC, etc.

Scholie. Cette proposition revient à celle qu'on démontre en algebre pour la formation du quarré d'un binôme, et qui est ainsi exprimée :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

PROPOSITION IX.

THÉORÊME.

fig. 107. *Si la ligne* AC *est la différence des deux lignes* AB, BC, *le quarré fait sur* AC *contiendra le quarré de* AB, *plus le quarré de* BC, *moins deux fois le rectangle fait sur* AB *et* BC; *c'est-à-dire qu'on aura* $\overline{AC}^2$ *ou* $(AB - BC)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,AB \times BC$.

Construisez le quarré ABIF, prenez AE=AC, menez CG parallele à BI, HK parallele à AB, et achevez le quarré EFLK.

Les deux rectangles CBIG, GLKD, ont chacun pour mesure AB×BC: si on les retranche de la figure entiere ABILKEA, qui a pour valeur $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$, il est clair qu'il restera le quarré ACDE, donc, etc.

Scholie. Cette proposition revient à la formule d'algèbre $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

PROPOSITION X.

THÉORÊME.

Le rectangle fait sur la somme et la différence de deux lignes, est égal à la différence des
fig. 108 *quarrés de ces lignes: ainsi on a* $(AB + BC) \times (AB - BC) = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2$.

Construisez sur AB et AC les quarrés ABIF, ACDE; prolongez AB d'une quantité BK=BC, et achevez le rectangle AKLE.

La base AK du rectangle est la somme des deux lignes AB, BC, sa hauteur AE est la différence de ces mêmes lignes; donc le rectangle AKLE= (AB + BC) × (AB − BC). Mais ce même rectangle est composé des deux parties ABHE + BHLK; et la partie BHLK est égale au rectangle EDGF, car BH=DE et BK=EF; donc AKLE=ABHE+EDGF. Or, ces deux parties forment le quarré ABIF moins le quarré DHIG, qui est le quarré fait sur BC; donc enfin $(AB+BC)\times(AB-BC)=\overline{AB}^2-\overline{BC}^2$.

Scholie. Cette proposition revient à la formule d'algèbre $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

PROPOSITION XI.

THÉORÊME.

Le quarré fait sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des quarrés faits sur les deux autres côtés.

Soit ABC un triangle rectangle en A : ayant formé des quarrés sur les trois côtés, abaissez de l'angle droit sur l'hypoténuse la perpendiculaire AD que vous prolongerez jusqu'en E ; tirez ensuite les diagonales AF, CH. fig. 109.

L'angle ABF est composé de l'angle ABC plus l'angle droit CBF : l'angle CBH est composé du même angle ABC plus l'angle droit ABH; donc l'angle ABF =HBC. Mais AB=BH comme côtés d'un même quarré, et BF=BC par la même raison ; donc les triangles ABF, HBC, ont un angle égal compris entre côtés égaux ; donc ils sont égaux*. * 6, 1.

Le triangle ABF est la moitié du rectangle BDEF, (ou pour abréger BE) qui a même base BF et même hauteur BD *. Le triangle HBC est pareillement la moitié du quarré AH; car l'angle BAC étant droit ainsi que BAL, AC et AL ne font qu'une même ligne droite parallele à HB; donc le triangle HBC et le quarré AH, qui ont la base commune BH, ont aussi la hauteur commune AB ; donc le triangle est la moitié du quarré. * pr.

On a déja prouvé que le triangle ABF est égal au triangle HBC; donc le rectangle BDEF, double du triangle ABF, est équivalent au quarré AH, double du triangle HBC. On démontrera de même que le rectangle CDEG est équivalent au quarré AI; mais les deux rectangles BDEF, CDEG, pris ensemble, font le quarré BCGF; donc le quarré BCGF, fait sur l'hypoténuse, est égal à la somme des quarrés ABHL, ACIK, faits sur les deux autres côtés; ou, en d'autres termes, $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$.

Corollaire I. Donc le quarré d'un des côtés de l'angle droit est égal au quarré de l'hypoténuse moins le quarré de l'autre côté, ce qu'on exprime ainsi: $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2$.

fig. 118. *Corollaire* II. Soit ABCD un quarré, AC sa diagonale; le triangle ABC étant rectangle et isoscele, on aura $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AB}^2$; donc *le quarré fait sur la diagonale* AC *est double du quarré fait sur le côté* AB.

On peut rendre sensible cette propriété en menant par les points A et C des paralleles à BD, et par les points B et D des paralleles à AC: on formera ainsi un nouveau quarré EFGH qui sera le quarré de AC. Or, on voit que EFGH contient huit triangles égaux à ABE, et que ABCD en contient quatre; donc le quarré EFGH est double de ABCD.

Puisque $\overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 :: 2 : 1$, on a, en extrayant la racine quarrée, $AC : AB :: \sqrt{2} : 1$; donc *la diagonale d'un quarré est incommensurable avec son côté.*

C'est ce qu'on développera davantage dans une autre occasion.

fig. 109. *Corollaire* III. On a démontré que le quarré AH est équivalent au rectangle BDEF; or, à cause de la hauteur commune BF, le quarré BCGF est au rec-

tangle BDEF comme la base BC est à la base BD; donc,

$$\overline{BC}^2 : \overline{AB}^2 :: BC : BD.$$

Donc *le quarré de l'hypoténuse est au quarré d'un des côtés de l'angle droit comme l'hypoténuse est au segment adjacent à ce côté.* On appelle ici *segment* la partie de l'hypoténuse déterminée par la perpendiculaire abaissée de l'angle droit; ainsi BD est le segment adjacent au côté AB, et DC est le segment adjacent au côté AC. On aurait semblablement,

$$\overline{BC}^2 : \overline{AC}^2 :: BC : CD.$$

Corollaire IV. Les rectangles BDEF, DCGE, ayant aussi la même hauteur, sont entre eux comme leurs bases BD, CD. Or, ces rectangles sont équivalents aux quarrés $\overline{AB}^2$, $\overline{AC}^2$; donc,

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: BD : DC.$$

Donc *les quarrés des deux côtés de l'angle droit sont entre eux comme les segments de l'hypoténuse adjacents à ces côtés.*

PROPOSITION XII.

THÉORÊME.

Dans un triangle ABC, *si l'angle* C *est aigu, le quarré du côté opposé sera plus petit que la somme des quarrés des côtés qui comprennent l'angle* C; *et si l'on abaisse* AD *perpendiculaire sur* BC, *la différence sera égale au double du rectangle* BD × CD; *de sorte qu'on aura*, fig. 110.

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,BC \times CD.$$

Il y a deux cas. 1° Si la perpendiculaire tombe au-dedans du triangle ABC, on aura BD = BC − CD, et par conséquent * $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2\,BC \times CD$.

ajoutant de part et d'autre $\overline{AD}^2$, et observant que les triangles rectangles ABD, ADC, donnent $\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2$ et $\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2$, on aura $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,BC \times CD$.

2° Si la perpendiculaire AD tombe hors du triangle
9. ABC, on aura $BD = CD - BC$, et par conséquent $\overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,CD \times BC$. Ajoutant de part et d'autre $\overline{AD}^2$, on en conclura de même,

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,BC \times CD.$$

PROPOSITION XIII.

THÉORÊME.

fig. 111. *Dans un triangle* ABC, *si l'angle* C *est obtus, le quarré du côté opposé* AB *sera plus grand que la somme des quarrés des côtés qui comprennent l'angle* C, *et si on abaisse* AD *perpendiculaire sur* BC, *la différence sera égale au double du rectangle* BC × CD, *de sorte qu'on aura,*

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2\,BC \times CD.$$

La perpendiculaire ne peut pas tomber au-dedans du triangle; car si elle tombait, par exemple, en E, le triangle ACE aurait à-la-fois l'angle droit E et
19. 1. l'angle obtus C, ce qui est impossible; donc elle tombe au-dehors, et on a $BD = BC + CD$. De là
* 8. résulte* $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + 2\,BC \times CD$. Ajoutant de part et d'autre $\overline{AD}^2$ et faisant les réductions comme dans le théorême précédent, on en conclura $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + 2\,BC \times CD$.

Scholie. Le triangle rectangle est le seul dans lequel la somme des quarrés de deux côtés soit égale au quarré du troisième; car si l'angle compris par ces côtés est aigu, la somme de leurs quarrés sera plus grande que le quarré du côté opposé; s'il est obtus, elle sera moindre.

PROPOSITION XIV.

THÉORÈME.

Dans un triangle quelconque ABC, *si on mène du sommet au milieu de la base la ligne* AE, *je dis qu'on aura* $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\,\overline{AE}^2+2\,\overline{BE}^2$. fig. 112.

Abaissez la perpendiculaire AD sur la base BC, le triangle AEC donnera par le théorême XII,

$$\overline{AC}^2=\overline{AE}^2+\overline{EC}^2-2\,EC\times ED.$$

Le triangle ABE donnera par le théorême XIII,

$$\overline{AB}^2=\overline{AE}^2+\overline{EB}^2+2\,EB\times ED.$$

Donc, en ajoutant et observant que EB=EC, on aura,

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\,\overline{AE}^2+2\,\overline{EB}^2.$$

Corollaire. Donc, *dans tout parallélogramme, la somme des quarrés des côtés est égale à la somme des quarrés des diagonales.*

Car les diagonales AC, BD, se coupent mutuellement en deux parties égales au point E*; ainsi le triangle ABC donne, fig. 113. *31, 1.

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2\,\overline{AE}^2+2\,\overline{BE}^2.$$

Le triangle ADC donne pareillement,

$$\overline{AD}^2+\overline{DC}^2=2\,\overline{AE}^2+2\,\overline{DE}^2.$$

Ajoutant membre à membre, en observant que BE=DE, on aura,

$$\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+\overline{DC}^2+\overline{BC}^2=4\,\overline{AE}^2+4\,\overline{DE}^2.$$

Mais $4\,\overline{AE}^2$ est le quarré de 2 AE ou de AC; $4\,\overline{DE}^2$ est le quarré de BD; donc la somme des quarrés des côtés est égale à la somme des quarrés des diagonales.

PROPOSITION XV.

THÉORÊME.

fig. 114. *La ligne* DE, *menée parallèlement à la base d'un triangle* ABC, *divise les côtés* AB, AC, *proportionnellement; de sorte qu'on a* AD : DB :: AE : EC.

Joignez BE et DC; les deux triangles BDE, DEC, ont même base DE; ils ont aussi même hauteur, puisque les sommets B et C sont situés sur une parallele à la base; donc ces triangles sont équivalents*. * 2.

Les triangles ADE, BDE, dont le sommet commun est E, ont même hauteur et sont entre eux comme leurs bases AD, DB*; ainsi on a, * 6.

ADE : BDE :: AD : DB.

Les triangles ADE, DEC, dont le sommet commun est D, ont aussi même hauteur, et sont entre eux comme leurs bases AE, EC; donc,

ADE : DEC :: AE : EC.

Mais le triangle BDE = DEC; donc, à cause du rapport commun dans ces deux proportions, on en conclura AD : DB :: AE : EC.

Corollaire I. De là résulte *componendo* AD + DB : AD :: AE + EC : AE, ou AB : AD :: AC : AE, et aussi AB : BD :: AC : CE.

fig. 115. *Corollaire* II. *Si entre deux droites* AB, CD, *on mene tant de paralleles qu'on voudra* AC, EF, GH, BD, etc., *ces droites seront coupées proportionnellement*, *et on aura* AE : CF :: EG : FH :: GB : HD.

Car soit O le point de concours des droites AB, CD; dans le triangle OEF, où la ligne AC est menée parallèlement à la base EF, on aura OE : AE :: OF : CF, ou OE : OF :: AE : CF. Dans le triangle OGH, on aura semblablement OE : EG :: OF : FH, ou OE : OF :: EG FH; donc, à cause du rapport commun :

OE : OF, ces deux proportions donnent AE : CF : : EG : FH. On démontrera de la même maniere que EG : FH : : GB : HD, et ainsi de suite; donc les lignes AB, CD, sont coupées proportionnellement par les paralleles EF, GH, etc.

PROPOSITION XVI.

THÉORÊME.

Réciproquement si les côtés AB, AC, *sont coupés proportionnellement par la ligne* DE, *en sorte qu'on ait* AD : DB : : AE : EC, *je dis que la ligne* DE *sera parallele à la base* BC. fig. 116.

Car si DE n'est pas parallele à BC, supposons que DO en soit une; alors, suivant le théorême précédent, on aura AD : BD : : AO : OC. Mais, par hypothese, AD : DB : : AE : EC; donc on aurait AO : OC : : AE : EC; proportion impossible, puisque d'une part l'antécédent AE est plus grand que AO, et que de l'autre le conséquent EC est plus petit que OC; donc la parallele à BC menée par le point D ne peut différer de DE; donc DE est cette parallele.

Scholie. La même conclusion aurait lieu si on supposait la proportion AB : AD : : AC : AE. Car cette proportion donnerait AB—AD : AD : : AC—AE : AE, ou BD : AD : : CE : AE.

PROPOSITION XVII.

THÉORÊME.

La ligne AD, *qui divise en deux parties égales l'angle* BAC *d'un triangle, divisera la base* BC *en deux segments* BD, DC, *proportionnels aux côtés adjacents* AB, AC; *de sorte qu'on aura* BD : DC : : AB : AC. fig. 117.

Par le point C menez CE parallele à AD jusqu'à la rencontre de BA prolongé.

Dans le triangle BCE, la ligne AD est parallele à la
* 15. base CE; ainsi on a la proportion *,

BD:DC::AB:AE.

Mais le triangle ACE est isoscele; car, à cause des paralleles AD, CE, l'angle ACE=DAC, et l'angle
* 24, 1. AEC=BAD * : or, par hypothèse, DAC=BAD;
* 13, 1. donc l'angle ACE=AEC, et par suite AE=AC *; substituant donc AC à la place de AE dans la proportion précédente, on aura,

BD:DC::AB:AC.

PROPOSITION XVIII.

THÉORÊME.

Deux triangles équiangles ont les côtés homologues proportionnels et sont semblables.

fig. 119. Soient ABC, CDE, deux triangles qui ont les angles égaux chacun à chacun, savoir BAC=CDE, ABC=DCE, et ACB=DEC; je dis que les côtés homologues ou adjacents aux angles égaux, seront proportionnels, de sorte qu'on aura BC:CE::AB:CD::AC:DE.

Placez les côtés homologues BC, CE, dans la même direction, et prolongez les côtés BA, ED, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en F.

Puisque BCE est une ligne droite, et que l'angle
* 24, 1. BCA=CED, il s'ensuit que AC est parallele à DE *. Pareillement, puisque l'angle ABC=DCE, la ligne AB est parallele à DC; donc la figure ACDF est un parallélogramme.

Dans le triangle BFE la ligne AC est parallele à la
* 15. base FE, ainsi on a BC:CE::BA:AF*. A la place de AF mettant son égale CD, on aura,

BC:CE::BA:CD.

Dans le même triangle BFE, si on regarde BF comme la base, CD est une parallele à cette base, et on a la proportion BC:CE::FD:DE. A la place de FD mettant son égale AC, on aura,

BC:CE::AC:DE.

Enfin de ces deux proportions qui contiennent le même rapport, BC:CE, on peut conclure aussi,

AC:DE::BA:CD.

Donc les triangles équiangles BAC, CDE, ont les côtés homologues proportionnels : mais, suivant la définition II, deux figures sont semblables, lorsque elles ont à-la-fois les angles égaux chacun à chacun, et les côtés homologues proportionnels; donc les triangles équiangles BAC, CDE, sont deux figures semblables.

Corollaire. Pour que deux triangles soient semblables, il suffit qu'ils aient deux angles égaux chacun à chacun, car alors le troisieme sera égal de part et d'autre, et les deux triangles seront équiangles.

Scholie. Remarquez que, dans les triangles semblables, les côtés homologues sont opposés à des angles égaux; ainsi l'angle ACB étant égal à DEC, le côté AB est homologue à DC; de même AC et DE sont homologues comme étant opposés aux angles égaux ABC, DCE : les côtés homologues étant reconnus, on forme aussitôt les proportions :

AB:DC::AC:DE::BC:CE.

PROPOSITION XIX.

THÉORÊME.

Deux triangles qui ont les côtés homologues proportionnels, sont équiangles et semblables.

Supposons qu'on ait BC:EF::AB:DE::AC:DF; fig. 120.
je dis que les triangles ABC, DEF, auront les angles égaux, savoir, A=D, B=E, C=F.

Faites au point E l'angle FEG=B et au point F l'angle EFG=C, le troisieme G sera égal au troisieme A, et les deux triangles ABC, EFG, seront équiangles; donc on aura par le théorême précédent BC:EF::AB:EG: mais, par hypothese, BC:EF:: AB:DE; donc EG=DE. On aura encore, par le même théorême, BC:EF::AC:FG; or on a, par hypothese, BC:EF::AC:DF, donc FG=DF; donc les triangles EGF, DEF, ont les trois côtés égaux
* 11, 1. chacun à chacun; donc ils sont égaux *. Mais, par construction, le triangle EGF est équiangle au triangle ABC; donc aussi les triangles DEF, ABC, sont équiangles et semblables.

Scholie I. On voit par ces deux dernieres propositions, que dans les triangles, l'égalité des angles est une suite de la proportionnalité des côtés, et réciproquement, de sorte qu'une de ces conditions suffit pour assurer la similitude des triangles. Il n'en est pas de même dans les figures de plus de trois côtés; car, dès qu'il s'agit seulement des quadrilateres, on peut, sans changer les angles, altérer la proportion des côtés, ou, sans altérer les côtés, changer les angles; ainsi la proportionnalité des côtés ne peut être une suite de l'égalité des angles, ni
fig. 121. *vice versâ*. On voit, par exemple, qu'en menant EF parallele à BC, les angles du quadrilatere AEFD sont égaux à ceux du quadrilatere ABCD; mais la proportion des côtés est différente: de même, sans changer les quatre côtés AB, BC, CD, AD, on peut rapprocher ou éloigner le point B du point D, ce qui altérera les angles.

Scholie II. Les deux propositions précédentes qui n'en font proprement qu'une, jointes à celle du quarré de l'hypoténuse, sont les propositions les plus importantes et les plus fécondes de la géométrie; elles suffisent presque seules à toutes les applications et à la résolution de tous les problêmes : la raison en est que toutes les figures peuvent se partager en triangles, et un triangle quelconque en deux triangles rectangles. Ainsi les propriétés générales des triangles renferment implicitement celles de toutes les figures.

PROPOSITION XX.

THÉORÊME.

Deux triangles qui ont un angle égal compris entre côtés proportionnels, sont semblables.

Soit l'angle A = D, et supposons qu'on a AB : DE : : AC : DF ; je dis que le triangle ABC est semblable à DEF. fig. 122.

Prenez AG = DE et menez GH parallele à BC, l'angle AGH sera égal à l'angle ABC*; et le triangle AGH sera équiangle au triangle ABC ; on aura donc AB:AG::AC:AH: mais, par hypothese, AB:DE:: AC:DF, et par construction AG = DE ; donc AH = DF. Les deux triangles AGH, DEF, ont donc un angle égal compris entre côtés égaux ; donc ils sont égaux. Or le triangle AGH est semblable à ABC; donc DEF est aussi semblable à ABC. *24. 1.

PROPOSITION XXI.

THÉORÊME.

Deux triangles qui ont les côtés homologues paralleles, ou qui les ont perpendiculaires chacun à chacun, sont semblables.

Car, 1° si le côté AB est parallele à DE, et BC à EF, l'angle ABC sera égal à DEF* ; si de plus AC est parallele à DF, l'angle ACB sera égal à DFE, et aussi fig. 123 *27. 1.

BAC à EDF : donc les triangles ABC, DEF, sont équiangles ; donc ils sont semblables.

fig. 24. 2° Soit le côté DE perpendiculaire à AB, et le côté DF à AC ; dans le quadrilatere AIDH les deux angles I et H seront droits ; les quatre angles valent * 20, 1. ensemble quatre angles droits * ; donc les deux restants IAH, IDH, valent deux angles droits. Mais les deux angles EDF, IDH, valent aussi deux angles droits ; donc l'angle EDF est égal à IAH ou BAC : pareillement si le troisieme côté EF est perpendiculaire au troisieme BC, on démontrera que l'angle DFE$=$C, et DEF$=$B ; donc les deux triangles ABC, DEF, qui ont les côtés perpendiculaires chacun à chacun, sont équiangles et semblables.

Scholie. Dans le cas des côtés paralleles, les côtés homologues sont les côtés paralleles, et, dans celui des côtés perpendiculaires, ce sont les côtés perpendiculaires. Ainsi, dans ce dernier cas, DE est homologue à AB, DF à AC, et EF à BC.

Le cas des côtés perpendiculaires pourrait offrir une situation relative des deux triangles, différente de celle qui est supposée dans la fig. 124 ; mais l'égalité des angles respectifs se démontrerait toujours, soit par des quadrilateres tels que AIDH, dont deux angles sont droits, soit par la comparaison de deux triangles qui, avec des angles opposés au sommet, auraient chacun un angle droit : d'ailleurs, on pourrait toujours supposer qu'on a construit au-dedans du triangle ABC un triangle DEF, dont les côtés seraient paralleles à ceux du triangle comparé à ABC, et alors la démonstration rentrerait dans le cas de la fig. 124.

PROPOSITION XXII.

THÉORÊME.

Les lignes AF, AG, etc., *menées comme on voudra par le sommet d'un triangle, divisent proportionnellement la base* BC *et sa parallele* DE, *de sorte qu'on a* DI : BF : : IK : FG : : KL : GH, etc. fig. 125.

Car, puisque DI est parallele à BF, le triangle ADI est équiangle à ABF, et on a la proportion DI:BF :: AI:AF ; de même IK étant parallele à FG, on a AI:AF :: IK:FG ; donc, à cause du rapport commun AI.AF, on aura DI:BF :: IK:FG. On trouvera semblablement IK:FG :: KL:GH, etc. ; donc la ligne DE est divisée aux points I, K, L, comme la base BC l'est aux points F, G, H.

Corollaire. Donc, si BC était divisée en parties égales aux points F, G, H, la parallele DE serait divisée de même en parties égales aux points I, K, L.

PROPOSITION XXIII.

THÉORÊME.

Si de l'angle droit A *d'un triangle rectangle on abaisse la perpendiculaire* AD *sur l'hypoténuse;* fig. 126.

1° *Les deux triangles partiels* ABD, ADC, *seront semblables entre eux et au triangle total* ABC ;

2° *Chaque côté* AB *ou* AC *sera moyen proportionnel entre l'hypoténuse* BC *et le segment adjacent* BD *ou* DC ;

3° *La perpendiculaire* AD *sera moyenne proportionnelle entre les deux segments* BD, DC.

Car, 1° le triangle BAD et le triangle BAC ont l'angle commun B ; de plus l'angle droit BDA est égal à l'angle droit BAC ; donc le troisieme angle BAD de l'un est égal au troisieme C de l'autre ; donc ces deux triangles sont équiangles et semblables. On démontrera de même que le triangle DAC est semblable au triangle BAC; donc les trois triangles sont équiangles et semblables entre eux.

2° Puisque le triangle BAD est semblable au triangle BAC, leurs côtés homologues sont proportionnels. Or, le côté BD dans le petit triangle est homologue à BA dans le grand, parce qu'ils sont opposés à des angles égaux, BAD, BCA; l'hypoténuse BA du petit est homologue à l'hypoténuse BC du grand; donc on peut former la proportion BD : BA :: BA : BC. On aurait de la même maniere DC:AC :: AC:BC; donc, 2° chacun des côtés AB, AC, est moyen proportionnel entre l'hypoténuse et le segment adjacent à ce côté.

3° Enfin, la similitude des triangles ABD, ADC, donne, en comparant les côtés homologues, BD: AD :: AD:DC; donc, 3° la perpendiculaire AD est moyenne proportionnelle entre les segments BD, DC de l'hypoténuse.

Scholie. La proportion BD:AB :: AB:BC donne, en égalant le produit des extrêmes à celui des moyens, $\overline{AB}^2 = BD \times BC$. On a de même $\overline{AC}^2 = DC \times BC$, donc $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BD \times BC + DC \times BC$; le second membre est la même chose que $(BD + DC) \times BC$, et il se réduit à $BC \times BC$ ou $\overline{BC}^2$; donc on a $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$; donc le quarré fait sur l'hypoténuse BC est égal à la somme des quarrés faits sur les deux autres côtés AB, AC. Nous retombons ainsi sur la proposition du quarré de l'hypoténuse par une voie très-différente de celle que nous avions suivie; d'où l'on voit qu'à proprement parler, la proposition du quarré de l'hypoténuse est une suite de la proportionnalité des côtés dans les triangles équiangles.

Ainsi les propositions fondamentales de la géométrie se réduisent, pour ainsi dire, à celle-ci seule, que les triangles équiangles ont leurs côtés homologues proportionnels.

Il arrive souvent, comme on vient d'en voir un exemple, qu'en tirant des conséquences d'une ou de plusieurs propositions, on retombe sur des propositions déja démontrées. En général, ce qui caractérise particulièrement les théorêmes de géométrie, et ce qui est une preuve invincible de leur certitude, c'est qu'en les combinant ensemble d'une maniere quelconque, pourvu qu'on raisonne juste, on tombe toujours sur des résultats exacts. Il n'en serait pas de même si quelque proposition était fausse, ou n'était vraie qu'à-peu-près; il arriverait souvent que, par la combinaison des propositions entre elles, l'erreur s'accroîtrait et deviendrait sensible. C'est ce dont on voit des exemples dans toutes les démonstrations où nous nous servons de la *réduction à l'absurde*. Ces démonstrations, où l'on a pour but de prouver que deux quantités sont égales, consistent à faire voir que, s'il y avait entre elles la moindre inégalité, on serait conduit par la suite des raisonnements à une absurdité manifeste et palpable; d'où l'on est obligé de conclure que ces deux quantités sont égales.

Corollaire. Si d'un point A de la circonférence on mene les deux cordes AB, AC, aux extrémités du diametre BC, le triangle BAC sera rectangle en A *; donc, 1° *la perpendiculaire* AD *est moyenne proportionnelle entre les deux segments* BD, DC, *du diametre*, ou, ce qui revient au même, le quarré $\overline{AD}^2$ est égal au rectangle $BD \times DC$. fig. 127. * 18, 2.

2° *La corde* AB *est moyenne proportionnelle entre le diametre* BC *et le segment adjacent* BD, ou, ce qui revient au même, $\overline{AB}^2 = BD \times BC$. On a semblablement $\overline{AC}^2 = CD \times BC$; donc $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: BD : DC$; et si on compare $\overline{AB}^2$ à $\overline{BC}^2$, on aura $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: BD : BC$; on aurait de même $\overline{AC}^2 : \overline{BC}^2 :: DC : BC$. Ces rapports des quarrés des côtés, soit entre eux, soit avec le quarré de l'hypoténuse, ont été déja donnés dans les corol. III et IV de la prop. XI.

PROPOSITION XXIV.

THÉORÊME.

Deux triangles qui ont un angle égal sont entre eux comme les rectangles des côtés qui
fig. 128. *comprennent l'angle égal. Ainsi le triangle* ABC *est au triangle* ADE *comme le rectangle* AB × AC *est au rectangle* AD × AE.

Tirez BE ; les deux triangles ABE, ADE, dont le sommet commun est E, ont même hauteur, et sont
* 6. entre eux comme leurs bases AB, AD * ; donc,

$$ABE : ADE :: AB : AD.$$

On a de même,

$$ABC : ABE :: AC : AE.$$

Multipliant ces deux proportions par ordre, et omettant le commun terme ABE, on aura,

$$ABC : ADE :: AB \times AC : AD \times AE.$$

Corollaire. Donc les deux triangles seraient équivalents, si le rectangle AB × AC était égal au rectangle AD × AE, ou si on avait AB : AD :: AE : AC, ce qui aurait lieu si la ligne DC était parallele à BE.

PROPOSITION XXV.

THÉORÊME.

Deux triangles semblables sont entre eux comme les quarrés des côtés homologues.

Soit l'angle A=D et l'angle B=E ; d'abord à cause des angles égaux A et D, on aura, par la proposition précédente, fig 122.

$$ABC:DEF :: AB \times AC:DE \times DF.$$

On a d'ailleurs, à cause de la similitude des triangles,

$$AB:DE :: AC:DF.$$

Et si on multiplie cette proportion terme à terme par la proportion identique,

$$AC:DF :: AC:DF,$$

il en résultera,

$$AB \times AC:DE \times DF :: \overline{AC}^2:\overline{DF}^2.$$

Donc,

$$ABC:DEF :: \overline{AC}^2:\overline{DF}^2.$$

Donc deux triangles semblables ABC, DEF, sont entre eux comme les quarrés des côtés homologues AC, DF, ou comme les quarrés de deux autres côtés homologues quelconques.

PROPOSITION XXVI.

THÉORÊME.

Deux polygones semblables sont composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun et semblablement disposés.

Dans le polygone ABCDE, menez d'un même angle A les diagonales AC, AD aux autres angles. Dans l'autre polygone FGHIK, menez semblablement de l'angle F homologue à A, les diagonales FH, FI aux autres angles. fig. 129.

Puisque les polygones sont semblables, l'angle ABC est égal à son homologue FGH *, et de plus les côtés AB, BC, sont proportionnels aux côtés FG, GH; de sorte qu'on a AB:FG :: BC:GH. Il suit de-là que les triangles ABC, FGH, ont un angle égal compris entre côtés proportionnels; donc ils sont sembla- * déf. 2.

* 20. bles *; donc l'angle BCA est égal à GHF. Ces angles égaux étant retranchés des angles égaux BCD, GHI, les restes ACD, FHI seront égaux : mais puisque les triangles ABC, FGH sont semblables, on a AC : FH :: BC : GH; d'ailleurs, à cause de la similitude des
def. 2. polygones *, BC : GH :: CD : HI; donc AC : FH :: CD : HI : mais on a déja vu que l'angle ACD=FHI; donc les triangles ACD, FHI, ont un angle égal compris entre côtés proportionnels, donc ils sont semblables. On continuerait de même à démontrer la similitude des triangles suivants, quel que fût le nombre des côtés des polygones proposés ; donc deux polygones semblables sont composés d'un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés.

Scholie. La proposition inverse est également vraie : *si deux polygones sont composés d'un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés, ces deux polygones seront semblables.*

Car la similitude des triangles respectifs donnera l'angle ABC=FGH, BCA=GHF, ACD=FHI; donc BCD=GHI, de même CDE=HIK, etc. De plus, on aura AB : FG :: BC : GH :: AC : FH :: CD : HI, etc.; donc les deux polygones ont les angles égaux et les côtés proportionnels; donc ils sont semblables.

PROPOSITION XXVII.

THÉORÊME.

Les contours ou périmetres des polygones semblables sont comme les côtés homologues, et leurs surfaces sont comme les quarrés de ces mêmes côtés.

fig. 129. Car, 1° puisqu'on a, par la nature des figures semblables, AB : FG :: BC : GH :: CD : HI, etc., on

peut conclure de cette suite de rapports égaux : La somme des antécédents AB+BC+CD, etc., périmetre de la premiere figure, est à la somme des conséquents FG+GH+HI, etc., périmetre de la seconde figure, comme un antécédent est à son conséquent, ou comme le côté AB est à son homologue FG.

2° Puisque les triangles ABC, FGH sont semblables, on a * ABC : FGH :: $\overline{AC}^2 : \overline{FH}^2$; de même les * 25.
triangles semblables ACD, FHI, donnent ACD : FHI :: $\overline{AC}^2 : \overline{FH}^2$; donc, à cause du rapport commun $\overline{AC}^2 : \overline{FH}^2$, on a,

ABC : FGH :: ACD : FHI.

Par un raisonnement semblable on trouverait,

ACD : FHI :: ADE : FIK;

et ainsi de suite, s'il y avait un plus grand nombre de triangles. De cette suite de rapports égaux on conclura : La somme des antécédents ABC+ACD+ADE, ou le polygone ABCDE, est à la somme des conséquents FGH+FHI+FIK, ou au polygone FGHIK, comme un antécédent ABC est à son conséquent FGH, ou comme $\overline{AB}^2$ est à $\overline{FG}^2$; donc les surfaces des polygones semblables sont entre elles comme les quarrés des côtés homologues.

Corollaire. Si on construit trois figures semblables dont les côtés homologues soient égaux aux trois côtés d'un triangle rectangle, la figure faite sur le grand côté sera égale à la somme des deux autres : car ces trois figures sont proportionnelles aux quarrés de leurs côtés homologues ; or, le quarré de l'hypoténuse est égal à la somme des quarres des deux autres côtés ; donc, etc.

PROPOSITION XXVIII.

THÉORÊME.

fig. 130. *Les parties de deux cordes* AB, CD, *qui se coupent dans un cercle, sont réciproquement proportionnelles, c'est-à-dire qu'on a* AO : DO : : CO : OB.

Joignez AC et BD : dans les triangles ACO, BOD, les angles en O sont égaux comme opposés au sommet ; l'angle A est égal à l'angle D, parce qu'ils sont
* 18, 2. inscrits dans le même segment * ; par la même raison l'angle C=B ; donc ces triangles sont semblables, et les côtés homologues donnent la proportion AO:DO :: CO:OB.

Corollaire. On tire de-là AO × OB=DO × CO : donc le rectangle des deux parties de l'une des cordes est égal au rectangle des deux parties de l'autre.

PROPOSITION XXIX.

THÉORÊME.

fig. 131. *Si d'un même point* O, *pris hors du cercle, on mene les sécantes* OB, OC, *terminées à l'arc concave* BC, *les sécantes entieres seront réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures, c'est-à-dire qu'on aura* OB : OC : : OD : OA.

Car, en joignant AC, BD, les triangles OAC, OBD,
* 18, 2. ont l'angle O commun ; de plus l'angle B=C * ; donc ces triangles sont semblables ; et les côtés homologues donnent la proportion,

OB:OC :: OD:OA.

Corollaire. Donc le rectangle OA × OB, est égal au rectangle OC × OD.

Scholie. On peut remarquer que cette proposition a beaucoup d'analogie avec la précédente, et qu'elle n'en differe qu'en ce que les deux cordes AB, CD, au lieu de se couper dans le cercle, se coupent au-dehors. La proposition suivante peut encore être regardée comme un cas particulier de celle-ci.

PROPOSITION XXX.

THÉORÊME.

Si d'un même point O *pris hors du cercle on mene une tangente* OA *et une sécante* OC, *la tangente sera moyenne proportionnelle entre la sécante et sa partie extérieure; de sorte qu'on aura* OC : OA : : OA : OD; *ou, ce qui revient au même*, $\overline{OA}^2 = OC \times OD$. fig. 132.

Car, en joignant AD et AC, les triangles OAD, OAC, ont l'angle O commun; de plus l'angle OAD, formé par une tangente et une corde *, a pour mesure la moitié de l'arc AD, et l'angle C a la même mesure; donc l'angle OAD=C; donc les deux triangles sont semblables, et on a la proportion, * 19, 2.

OC : OA :: OA : OD,

qui donne $\overline{OA}^2 = OC \times OD$.

PROPOSITION XXXI.

THÉORÊME.

Dans un triangle ABC, *si on divise l'angle* A *en deux parties égales par la ligne* AD, *le rectangle des côtés* AB, AC, *sera égal au rectangle des segments* BD, DC, *plus ae, quarré de la sécante* AD. fig. 133.

Faites passer une circonférence par les trois points A, B, C, prolongez AD jusqu'à la circonférence, et joignez CE.

Le triangle BAD est semblable au triangle EAC; car, par hypothese, l'angle BAD=EAC; de plus l'angle B=E, puisqu'ils ont tous deux pour mesure la moitié de l'arc AC; donc ces triangles sont semblables, et les côtés homologues donnent la proportion BA : AE :: AD : AC : de là résulte

$BA \times AC = AE \times AD$; mais $AE = AD + DE$, et en multipliant de part et d'autre par AD, on a $AE \times AD = \overline{AD}^2 +$
* 28. $AD \times DE$; d'ailleurs $AD \times DE = BD \times DC$ *; donc enfin

$$BA \times AC = \overline{AD}^2 + BD \times DC.$$

PROPOSITION XXXII.

THÉORÊME.

fig. 134. *Dans tout triangle* ABC, *le rectangle des deux côtés* AB, AC, *est égal au rectangle compris par le diametre* CE *du cercle circonscrit et la perpendiculaire* AD *abaissée sur le troisieme côté* BC.

Car, en joignant AE, les triangles ABD, AEC, sont rectangles, l'un en D, l'autre en A; de plus l'angle $B = E$; donc ces triangles sont semblables, et ils donnent la proportion $AB : CE :: AD : AC$; d'où résulte $AB \times AC = CE \times AD$.

Corollaire. Si on multiplie ces quantités égales par la même quantité BC, on aura $AB \times AC \times BC = CE \times AD \times BC$.
* 6. Or, $AD \times BC$ est le double de la surface du triangle *; donc *le produit des trois côtés d'un triangle est égal à sa surface multipliée par le double du diametre du cercle circonscrit.*

Le produit de trois lignes s'appelle quelquefois un *solide*, par une raison qu'on verra ci-après. Sa valeur se conçoit aisément, en imaginant que les lignes sont réduites en nombres, et multipliant les nombres dont il s'agit.

Scholie. On peut démontrer aussi que *la surface d'un triangle est égale à son périmetre multiplié par la moitié du rayon du cercle inscrit.*

fig. 87. Car les triangles AOB, BOC, AOC, qui ont leur sommet commun en O, ont pour hauteur commune le rayon du cercle inscrit; donc la somme de ces triangles sera égale à la somme des bases AB, BC, AC, multipliée par la moitié du rayon OD; donc la surface du triangle ABC est égale à son périmetre multiplié par la moitié du rayon du cercle inscrit.

PROPOSITION XXXIII.

THÉORÊME.

Dans tout quadrilatère inscrit ABCD, *le rectangle des deux diagonales* AC, BD, *est égal à la somme des rectangles des côtés opposés, de sorte qu'on a* fig. 135.

$$AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC.$$

Prenez l'arc $CO = AD$, et tirez BO qui rencontre la diagonale AC en I.

L'angle $ABD = CBI$, puisque l'un a pour mesure la moitié de AD, et l'autre la moitié de CO égal à AD. L'angle $ADB = BCI$, parce qu'ils sont inscrits dans le même segment AOB; donc le triangle ABD est semblable au triangle IBC, et on a la proportion $AD : CI :: BD : BC$; d'où résulte $AD \times BC = CI \times BD$. Je dis maintenant que le triangle ABI est semblable au triangle BDC; car l'arc AD étant égal à CO, si on ajoute de part et d'autre OD, on aura l'arc $AO = DC$; donc l'angle $ABI = DBC$; de plus l'angle $BAI = BDC$, parce qu'ils sont inscrits dans le même segment; donc les triangles ABI, DBC, sont semblables, et les côtés homologues donnent la proportion $AB : BD :: AI : CD$; d'où résulte $AB \times CD = AI \times BD$.

Ajoutant les deux résultats trouvés, et observant que $AI \times BD + CI \times BD = (AI + CI) \times BD = AC \times BD$, on aura $AD \times BC + AB \times CD = AC \times BD$.

Scholie. On peut démontrer de la même maniere un autre théorême sur le quadrilatere inscrit.

Le triangle ABD semblable à BIC, donne la proportion $BD : BC :: AB : BI$, d'où résulte $BI \times BD = BC \times AB$. Si on joint CO, le triangle ICO, semblable à ABI, sera semblable à BDC, et donnera la proportion $BD : CO :: DC : OI$; d'où résulte $OI \times BD = CO \times DC$, ou, à cause de $CO = AD$, $OI \times BD = AD \times DC$. Ajoutant les deux résultats, et observant que $BI \times BD + OI \times BD$ se réduit à $BO \times BD$, on aura,

$$BO \times BD = AB \times BC + AD \times DC.$$

Si on eût pris $BP = AD$, et qu'on eût tiré CKP, on aurait trouvé par des raisonnements semblables,

$$CP \times CA = AB \times AD + BC \times CD.$$

Mais l'arc BP étant égal à CO, si on ajoute de part et d'autre BC, on aura l'arc CBP=BCO; donc la corde CP est égale à la corde BO, et par conséquent les rectangles BO×BD et CP×CA sont entre eux comme BD est à CA; donc,

$$BD:CA::AB\times BC+AD\times DC:AD\times AB+BC\times CD.$$

Donc *les deux diagonales d'un quadrilatere inscrit sont entre elles comme les sommes des rectangles des côtés qui aboutissent à leurs extrémités.*

Ces deux théorêmes peuvent servir à trouver les diagonales quand on connaît les côtés.

PROPOSITION XXXIV.

THÉORÊME.

fig. 136. *Soit* P *un point donné au-dedans du cercle sur le rayon* AC, *et soit pris un point* Q *au-dehors sur le prolongement du même rayon, de sorte qu'on ait* CP:CA::CA:CQ; *si d'un point quelconque* M *de la circonférence on mene aux deux points* P *et* Q *les droites* MP, MQ, *je dis que ces droites seront partout dans un même rapport, et qu'on aura* MP:MQ::AP:AQ.

Car on a, par hypothese, CP:CA::CA:CQ; mettant CM à la place de CA, on aura CP:CM::CM:CQ; donc les triangles CPM, CQM, ont un angle égal C compris entre
20, 3. côtés proportionnels; donc ils sont semblables; donc le troisieme côté MP est au troisieme MQ comme CP est à CM ou CA. Mais la proportion CP:CA::CA:CQ donne, *dividendo,* CP:CA::CA—CP:CQ—CA, ou CP:CA::AP:AQ, donc MP:MQ::AP:AQ.

Problêmes relatifs au Livre III.

PROBLÊME PREMIER.

Diviser une ligne droite donnée en tant de parties égales qu'on voudra, ou en parties proportionnelles à des lignes données.

1° Soit proposé de diviser la ligne AB en cinq parties égales; par l'extrémité A on menera la droite indéfinie AG, et prenant AC d'une grandeur quelconque, on portera AC cinq fois sur AG. On joindra le dernier point de division G et l'extrémité B par la ligne GB, puis on menera CI parallele à GB; je dis que AI sera la cinquieme partie de la ligne AB, et qu'ainsi en portant AI cinq fois sur AB, la ligne AB sera divisée en cinq parties égales. fig. 137.

Car, puisque CI est parallele à GB, les côtés AG, AB, sont coupés proportionnellement en C et I *. Mais AC est la cinquieme partie de AG; donc AI est la cinquieme partie de AB. * 15.

2° Soit proposé de diviser la ligne AB en parties proportionnelles aux lignes données P, Q, R. Par l'extrémité A on tirera l'indéfinie AG, on prendra AC=P, CD=Q, DE=R, on joindra les extrémités E et B, et par les points C, D, on menera CI, DK, paralleles à EB; je dis que la ligne AB sera divisée en parties AI, IK, KB, proportionnelles aux lignes données P, Q, R. fig. 138.

Car, à cause des paralleles CI, DK, EB, les parties AI, IK, KB, sont proportionnelles aux parties AC, CD, DE *; et par construction celles-ci sont égales aux lignes données P, Q, R. * 15.

PROBLÊME II.

Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données A, B, C.

fig. 139. Tirez les deux lignes indéfinies DE, DF, sous un angle quelconque. Sur DE prenez DA=A et DB=B, sur DF prenez DC=C, joignez AC, et par le point B menez BX parallele à AC; je dis que DX sera la quatrieme proportionnelle demandée : car, puisque BX est parallele à AC, on a la proportion DA:DB::DC:DX; or, les trois premiers termes de cette proportion sont égaux aux trois lignes données; donc DX est la quatrieme proportionnelle demandée.

Corollaire. On trouvera de même une troisieme proportionnelle aux deux lignes données A, B, car elle sera la même que la quatrieme proportionnelle aux trois lignes A, B, B.

PROBLÊME III.

Trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données A *et* B.

fig. 140. Sur la ligne indéfinie DF prenez DE=A, et EF=B: sur la ligne totale DF comme diametre, décrivez la demi-circonférence DGF; au point E élevez sur le diametre la perpendiculaire EG, qui rencontre la circonférence en G; je dis que EG sera la moyenne proportionnelle cherchée.

Car la perpendiculaire GE, abaissée d'un point de la circonférence sur le diametre, est moyenne proportionnelle entre les deux segments du diametre DE, EF *: or, ces segments sont égaux aux lignes données A et B.

* 23.

PROBLÊME IV.

fig. 141. *Diviser la ligne donnée* AB *en deux parties, de maniere que la plus grande soit moyenne proportionnelle entre la ligne entiere et l'autre partie.*

A l'extrémité B de la ligne AB élevez la perpendiculaire BC égale à la moitié de AB; du point C comme centre, et du rayon CB décrivez une circonférence, tirez AC, qui coupera la circonférence en D, et prenez AF=AD; je dis que la ligne AB sera divisée au point F de la maniere demandée, c'est-à-dire qu'on aura AB:AF :: AF:FB.

Car AB étant perpendiculaire à l'extrémité du rayon CB, est une tangente; et si on prolonge AC jusqu'à ce qu'elle rencontre de nouveau la circonférence en E, on aura * AE:AB :: AB:AD; donc, *dividendo*, AE —AB.AB :: AB—AD:AD. Mais, puisque le rayon BC est la moitié de AB, le diametre DE est égal à AB, et par conséquent AE—AB=AD=AF; on a aussi, à cause de AF=AD, AB—AD=FB; donc AF:AB :: FB:AD ou AF; donc, *invertendo*, AB:AF :: AF:FB. *50.

Scholie. Cette sorte de division de la ligne AB s'appelle division en *moyenne et extrême raison :* on en verra des usages. On peut remarquer que la sécante AE est divisée en moyenne et extrême raison au point D; car, puisque AB=DE, on a AE:DE :: DE:AD.

PROBLÈME V.

Par un point donné A *dans l'angle donné* BCD, *tirer la ligne* BD *de maniere que les parties* AB, AD, *comprises entre le point* A *et les deux côtés de l'angle, soient égales.* fig. 142.

Par le point A menez AE parallele à CD, prenez BE=CE, et par les points B et A tirez BAD, qui sera la ligne demandée.

Car, AE étant parallele à CD, on a BE:EC :: BA:AD; or BE=EC; donc BA=AD.

PROBLÈME VI.

Faire un quarré équivalent à un parallélogramme ou à un triangle donné.

fig. 143. 1° Soit ABCD le parallélogramme donné, AB sa base, DE sa hauteur : entre AB et DE cherchez une moyenne proportionnelle XY*; je dis que le quarré fait sur XY sera équivalent au parallélogramme ABCD. Car on a, par construction, AB:XY :: XY:DE; donc $\overline{XY}^2 = AB \times DE$: or $AB \times DE$ est la mesure du parallélogramme, et $\overline{XY}^2$ celle du quarré, donc ils sont équivalents.

fig. 144. 2° Soit ABC le triangle donné, BC sa base, AD sa hauteur : prenez une moyenne proportionnelle entre BC et la moitié de AD, et soit XY cette moyenne; je dis que le quarré fait sur XY sera équivalent au triangle ABC.

Car, puisqu'on a BC:XY :: XY : $\frac{1}{2}$ AD, il en résulte $\overline{XY}^2 = BC \times \frac{1}{2}AD$, donc le quarré fait sur XY est équivalent au triangle ABC.

PROBLÊME VII.

fig. 145. *Faire sur la ligne donnée* AD *un rectangle* ADEX *équivalent au rectangle donné* ABFC.

Cherchez une quatrieme proportionnelle aux trois lignes AD, AB, AC, et soit AX cette quatrieme proportionnelle, je dis que le rectangle fait sur AD et AX sera équivalent au rectangle ABFC.

Car, puisqu'on a AD:AB :: AC:AX, il en résulte $AD \times AX = AB \times AC$; donc le rectangle ADEX est équivalent au rectangle ABFC.

PROBLÊME VIII.

fig. 148. *Trouver en lignes le rapport du rectangle des deux lignes données* A *et* B *au rectangle des deux lignes données* C *et* D.

Soit X une quatrieme proportionnelle aux trois lignes B, C, D; je dis que le rapport des deux lignes

A et X sera égal à celui des deux rectangles $A \times B$, $C \times D$.

Car, puisqu'on a $B : C :: D : X$, il en résulte $C \times D = B \times X$; donc $A \times B : C \times D :: A \times B : B \times X :: A : X$.

Corollaire. Donc, pour avoir le rapport des quarrés faits sur les lignes données A et C, cherchez une troisieme proportionnelle X aux lignes A et C, en sorte qu'on ait $A : C :: C : X$, et vous aurez $A^2 : C^2 :: A : X$.

PROBLÊME IX.

Trouver en lignes le rapport du produit des trois lignes données A, B, C, *au produit des trois lignes données* P, Q, R. fig. 149.

Aux trois lignes données P, A, B, cherchez une quatrieme proportionnelle X : aux trois lignes données C, Q, R, cherchez une quatrieme proportionnelle Y. Les deux lignes X, Y, seront entre elles comme les produits $A \times B \times C$, $P \times Q \times R$.

Car, puisque $P : A :: B : X$, on a $A \times B = P \times X$; et, en multipliant de part et d'autre par C, $A \times B \times C = C \times P \times X$. De même, puisque $C : Q :: R : Y$, il en résulte $Q \times R = C \times Y$; et, multipliant de part et d'autre par P, on a $P \times Q \times R = P \times C \times Y$, donc le produit $A \times B \times C$ est au produit $P \times Q \times R$ comme $C \times P \times X$ est à $P \times C \times Y$, ou comme X est à Y.

PROBLÊME X.

Faire un triangle équivalent à un polygone donné.

Soit $ABCDE$ le polygone donné. Tirez d'abord la diagonale CE, qui retranche le triangle CDE; par fig. 146.
le point D menez DF parallele à CE jusqu'à la rencontre de AE prolongé; joignez CF, et le polygone $ABCDE$ sera équivalent au polygone $ABCF$ qui a un côté de moins.

Car les triangles CDE, CFE, ont la base commune CE; ils ont aussi même hauteur, puisque leurs sommets D, F, sont situés sur une ligne DF parallele à la base; donc ces triangles sont équivalents. Ajoutant de part et d'autre la figure ABCE, on aura d'un côté le polygone ABCDE, et de l'autre le polygone ABCF, qui seront équivalents.

On peut pareillement retrancher l'angle B en substituant au triangle ABC le triangle équivalent AGC, et ainsi le pentagone ABDE sera changé en un triangle équivalent GCF.

Le même procédé s'appliquera à toute autre figure; car en diminuant d'un à chaque fois le nombre des côtés, on finira par tomber sur le triangle équivalent.

Scholie. On a déja vu que tout triangle peut être
* pr. 6. changé en un quarré équivalent *, ainsi on trouvera toujours un quarré équivalent à une figure rectiligne donnée; c'est ce qu'on appelle *quarrer* la figure rectiligne, ou en trouver la *quadrature*.

Le problême de *la quadrature du cercle* consiste à trouver un quarré équivalent à un cercle dont le diametre est donné.

PROBLÊME XI.

Faire un quarré qui soit égal à la somme ou à la différence de deux quarrés donnés.

Soient A et B les côtés des quarrés donnés:

fig. 147. 1° S'il faut trouver un quarré égal à la somme de ces quarrés, tirez les deux lignes indéfinies ED, EF à angle droit; prenez ED=A et EG=B, joignez DG, et DG sera le côté du quarré cherché.

Car le triangle DEG étant rectangle, le quarré fait sur DG est égal à la somme des quarrés faits sur ED et EG.

2° S'il faut trouver un quarré égal à la différence des quarrés donnés, formez de même l'angle droit

FEH, prenez GE égal au plus petit des côtés A et B; du point G, comme centre, et d'un rayon GH égal à l'autre côté, décrivez un arc qui coupe EH en H; je dis que le quarré fait sur EH sera égal à la différence des quarrés faits sur les lignes A et B.

Car le triangle GEH est rectangle, l'hypoténuse GH=A, et le côté GE=B; donc le quarré fait sur EH, etc.

Scholie. On peut trouver ainsi un quarré égal à la somme de tant de quarrés qu'on voudra; car la construction qui en réduit deux à un seul, en réduira trois à deux, et ces deux-ci à un, ainsi des autres. Il en serait de même si quelques-uns des quarrés devaient être soustraits de la somme des autres.

PROBLÈME XII.

Construire un quarré qui soit au quarré donné ABCD, *comme la ligne* M *est à la ligne* N. fig. 150.

Sur la ligne indéfinie EG, prenez EF=M, et FG =N; sur EG, comme diametre, décrivez une demi-circonférence, et au point F élevez sur le diametre la perpendiculaire FH. Du point H menez les cordes HG, HE, que vous prolongerez indéfiniment : sur la premiere prenez HK égale au côté AB du quarré donné, et par le point K menez KI parallele à EG; je dis que HI sera le côté du quarré cherché.

Car, à cause des paralleles KI, GE, on a HI : HK :: HE : HG; donc $\overline{HI}^2 : \overline{HK}^2 :: \overline{HE}^2 : \overline{HG}^2$: mais dans le triangle rectangle EHG *, le quarré de HE est au quarré de HG comme le segment EF est au segment FG, ou comme M est à N, donc $\overline{HI}^2 : \overline{HK}^2$ :: M:N. Mais HK=AB; donc le quarré fait sur HI est au quarré fait sur AB comme M est à N. * 23.

PROBLÊME XIII.

fig. 129. *Sur le côté* FG, *homologue à* AB, *décrire un polygone semblable au polygone donné* ABCDE.

Dans le polygone donné tirez les diagonales AC, AD : au point F faites l'angle GFH=BAC, et au point G l'angle FGH=ABC; les lignes FH, GH, se couperont en H, et FGH sera un triangle semblable à ABC : de même sur FH, homologue à AC, construisez le triangle FIH semblable à ADC, et sur FI, homologue à AD, construisez le triangle FIK, semblable à ADE. Le polygone FGHIK sera le polygone demandé, semblable à ABCDE.

Car ces deux polygones sont composés d'un même nombre de triangles semblables et semblablement
*26 placés *.

PROBLÊME XIV.

Deux figures semblables étant données, construire une figure semblable qui soit égale à leur somme ou à leur différence.

Soient A et B deux côtés homologues des figures données, cherchez un quarré égal à la somme ou à la différence des quarrés faits sur A et B ; soit X le côté de ce quarré, X sera dans la figure cherchée le côté homologue à A et B dans les figures données. On construira ensuite la figure elle-même par le problême précédent.

Car les figures semblables sont comme les quarrés des côtés homologues; or le quarré du côté X est égal à la somme ou à la différence des quarrés faits sur les côtés homologues A et B ; donc la figure faite sur le côté X est égale à la somme ou à la différence des figures semblables faites sur les côtés A et B.

PROBLÊME XV.

Construire une figure semblable à une figure donnée, et qui soit à cette figure dans le rapport donné de M *à* N.

Soit A un côté de la figure donnée, X le côté homologue dans la figure cherchée; il faudra que le quarré de X soit au quarré de A comme M est à N *. On trouvera donc X par le problême XII; connaissant X, le reste s'achevera par le problême XIII. * 27.

PROBLÊME XVI.

Construire une figure semblable à la figure P *et équivalente à la figure* Q. fig. 151.

Cherchez le côté M du quarré équivalent à la figure P, et le côté N du quarré équivalent à la figure Q. Soit ensuite X une quatrieme proportionnelle aux trois lignes données M, N, AB; sur le côté X, homologue à AB, décrivez une figure semblable à la figure P; je dis qu'elle sera de plus équivalente à la figure Q.

Car en appelant Y la figure faite sur le côté X, on aura $P:Y::\overline{AB}^2:X^2$; mais, par construction, $AB:X::M:N$, ou $\overline{AB}^2:X^2::M^2:N^2$; donc $P:Y::M^2:N^2$. Mais on a aussi, par construction, $M^2=P$ et $N^2=Q$; donc $P:Y::P:Q$; donc $Y=Q$; donc la figure Y est semblable à la figure P, et équivalente à la figure Q.

PROBLÊME XVII.

Construire un rectangle équivalent à un quarré donné C, *et dont les côtés adjacents fassent une somme donnée* AB. fig. 152.

Sur AB, comme diametre, décrivez une demi-circonférence, menez parallèlement au diametre la ligne DE à une distance AD égale au côté du quarré donné C.

Du point E, où la parallele coupe la circonférence, abaissez sur le diametre la perpendiculaire EF; je dis que AF et FB seront les côtés du rectangle cherché.

Car leur somme est égale à AB; et leur rectangle
* 23. AF × FB est égal au quarré de EF *, ou au quarré de AD; donc ce rectangle est équivalent au quarré donné C.

Scholie. Il faut, pour que le problême soit possible, que la distance AD n'excede pas le rayon, c'est-à-dire que le côté du quarré C n'excede pas la moitié de la ligne AB.

PROBLÊME XVIII.

fig. 153. *Construire un rectangle équivalent à un quarré* C, *et dont les côtés adjacents aient entre eux la différence donnée* AB.

Sur la ligne donnée AB, comme diametre, décrivez une circonférence; à l'extrémité du diametre, menez la tangente AD égale au côté du quarré C : par le point D et le centre O tirez la sécante DE; je dis que DE et DF seront les côtés adjacents du rectangle demandé.

Car 1° la différence de ces côtés est égale au diametre EF ou AB; 2° le rectangle DE × DF est égal
* 30. à $\overline{AD}^2$ *; donc ce rectangle sera équivalent au quarré donné C.

PROBLÊME XIX.

Trouver la commune mesure, s'il y en a une, entre la diagonale et le côté du quarré.

fig. 154. Soit ABCG un quarré quelconque, AC sa diagonale.

Il faut d'abord porter CB sur CA autant de fois
*prob. 17. 2e liv. qu'il peut y être contenu *, et pour cela soit décrit du centre C et du rayon CB le demi-cercle DBE : on voit que CB est contenu une fois dans AC avec le reste AD, le résultat de la premiere opération est donc

le quotient 1 avec le reste AD, qu'il faut comparer avec BC ou son égale AB.

On peut prendre AF=AD, et porter réellement AF sur AB; on trouverait qu'il y est contenu deux fois avec un reste : mais comme ce reste et les suivants vont en diminuant, et que bientôt ils échapperaient par leur petitesse, ce ne serait là qu'un moyen mécanique imparfait, d'où l'on ne pourrait rien conclure pour décider si les lignes AC, CB, ont entre elles ou n'ont pas une commune mesure : or il est un moyen très-simple d'éviter les lignes décroissantes, et de n'avoir à opérer que sur des lignes qui restent toujours de la même grandeur.

En effet, l'angle ABC étant droit, AB est une tangente, et AE une sécante menée du même point, de sorte qu'on a * AD:AB::AB:AE. Ainsi dans la seconde opération, où il s'agit de comparer AD avec AB, on peut, au lieu du rapport de AD à AB, prendre celui de AB à AE : or AB ou son égale CD est contenue deux fois dans AE avec le reste AD; donc le résultat de la seconde opération est le quotient 2 avec le reste AD qu'il faut comparer à AB. * 30.

La troisieme opération, qui consiste à comparer AD avec AB, se réduira de même à comparer AB ou son égale CD avec AE, et on aura encore 2 pour quotient et AD pour reste.

Delà on voit que l'opération ne sera jamais terminée, et qu'ainsi il n'y a pas de commune mesure entre la diagonale et le côté du quarré : vérité qui était déja connue par l'arithmétique (puisque ces deux lignes sont entre elles :: $\sqrt{2}$: 1)*, mais qui acquiert un plus grand degré de clarté par la résolution géométrique. * 11.

Scholie. Il n'est donc pas possible non plus de trouver en nombres le rapport exact de la diagonale au côté du quarré; mais on peut en approcher tant qu'on voudra au moyen de la fraction continue qui est égale à ce rapport. La premiere opération a donné pour quotient 1 ; la seconde et toutes les autres à l'infini donnent 2 : ainsi la fraction dont il s'agit est

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc. à l'infini.}}}}}}$$

Par exemple, si on calcule cette fraction jusqu'au quatrieme terme inclusivement, on trouve que sa valeur est $1\frac{12}{29}$ ou $\frac{41}{29}$; de sorte que le rapport approché de la diagonale au côté du quarré est :: 41 : 29. On trouverait un rapport plus approché en calculant un plus grand nombre de termes.