TRAITÉ
DE
TRIGONOMÉTRIE.

La Trigonométrie a pour objet de *résoudre* les triangles, c'est-à-dire, de déterminer leurs angles et leurs côtés par le moyen d'un nombre de données suffisant.

Dans les triangles rectilignes il suffit de connaître trois des six parties qui les composent, pourvu que parmi ces parties il y ait un côté. Car si on ne donnait que les trois angles, il est visible que tous les triangles semblables satisferaient à la question.

Dans les triangles sphériques trois données quelconques, angles ou côtés, suffisent toujours pour déterminer le triangle, parce que dans ces sortes de triangles on ne considere pas la grandeur absolue des côtés, mais seulement leur rapport avec le quadrant ou le nombre de degrés qu'ils contiennent.

Dans les problêmes annexés au livre II, on a déja vu comment les triangles rectilignes se construisent au moyen de trois parties données ; les propositions XXIV et XXV du livre V donnent également une idée des constructions par lesquelles on pourrait résoudre les cas analogues des triangles sphériques. Mais ces constructions, qui sont exactes en théorie, ne donneraient qu'une médiocre approximation dans la pratique (1), à cause de l'imperfection des instru-

(1) Il faut distinguer en effet les figures qui ne servent qu'à diriger le raisonnement pour la démonstration d'un théorême ou

ments dont elles exigent l'emploi : on les appelle des *méthodes graphiques*. Les méthodes trigonométriques, au contraire, indépendantes de toute opération mécanique, donnent les solutions avec tout le degré d'exactitude qu'on peut desirer : elles sont fondées sur les propriétés des lignes appelées *sinus*, *cosinus*, *tangentes*, etc., au moyen desquelles on est parvenu à exprimer d'une maniere très-simple les relations qui existent entre les côtés et les angles des triangles.

Nous allons d'abord exposer les propriétés de ces lignes et les principales formules qui en résultent ; formules qui sont d'un grand usage dans toutes les parties des mathématiques, et qui fournissent même à l'analyse algébrique des moyens de perfectionnement. Nous les appliquerons ensuite à la résolution des triangles rectilignes et à celle des triangles sphériques.

Division de la Circonférence.

1. Jusqu'à ces derniers temps les géometres s'étaient accordés à diviser la circonférence en 360 parties égales appelées *degrés*, le degré en 60 *minutes*, la minute en 60 *secondes*, etc. Ce mode présentait quelques facilités dans la pratique, à cause du grand nombre de diviseurs de 60 et de 360 : mais il était réellement sujet à l'inconvénient des nombres complexes, et il nuisait souvent à la rapidité du calcul.

Les savants, à qui on doit l'invention du nouveau système des poids et mesures, ont pensé qu'il y aurait un grand avantage à introduire la division décimale dans la mesure des angles. En conséquence ils ont

la solution d'un problême, des figures que l'on construit pour connaître quelques-unes de leurs dimensions. Les premieres sont toujours supposées exactes ; les secondes, si elles ne sont pas tracées exactement, donneront des résultats fautifs.

regardé comme unité principale le quart de circonférence ou le quadrant, mesure de l'angle droit, et ils ont divisé cette unité en 100 parties égales appelées *degrés*, le degré en 100 *minutes*, et la minute en 100 *secondes*.

Nous emploierons désormais la nouvelle division ou la division décimale de la circonférence; cependant comme les tables trigonométriques, calculées suivant cette division, ne sont pas encore assez généralement répandues, nous aurons soin d'ajouter dans les exemples, les résultats que donnent les calculs faits suivant l'ancienne division, ou la division sexagésimale de la circonférence. La différence ne tombe jamais sur la valeur des côtés, mais seulement sur la valeur ou plutôt sur l'expression en degrés des angles et des arcs.

II. Les degrés, minutes et secondes se désignent respectivement par les caracteres $^{\circ}$, $'$, $''$: ainsi l'expression $16^{\circ}\,6'\,75''$, représente un arc ou un angle de 16 degrés 6 minutes 75 secondes. Si on rapportait ce même arc au quadrant pris pour unité, il s'exprimerait par 0, 160675. On voit en même temps que l'angle mesuré par cet arc, est à l'angle droit :: 160675 : 1000000, rapport qu'on ne déduirait pas aussi facilement des expressions données par l'ancienne division de la circonférence.

Les arcs et les angles sont exprimés indistinctement dans le calcul par des nombres de degrés, minutes et secondes. Ainsi nous désignerons l'angle droit ou le quadrant par 100°, deux angles droits ou la demi-circonférence par 200°, quatre angles droits ou la circonférence entiere par 400°; ainsi de suite.

III. Le *complément* d'un angle ou d'un arc est ce qui reste en retranchant cet angle ou cet arc de 100°. Ainsi un angle de $25^{\circ}\,40'$ a pour complément, 74° 60′; un angle de 12° 4′ 62″ a pour complément, 87° 95′ 38″.

En général, A étant un angle ou un arc quelconque, 100° — A est le complément de cet angle ou de cet arc. D'où l'on voit que, si l'angle ou l'arc dont il s'agit est plus grand que 100°, son complément sera négatif. C'est ainsi que le complément de 160° 84′ 10″ est — 60° 84′ 10″. Dans ce cas, le complément, pris positivement, serait la quantité qu'il faudrait retrancher de l'angle ou de l'arc donné, pour que le reste fût égal à 100°.

Les deux angles aigus d'un triangle rectangle valent ensemble un angle droit : ils sont donc compléments l'un de l'autre.

IV. Le *supplément* d'un angle ou d'un arc est ce qui reste en ôtant cet angle ou cet arc de 200°, valeur de deux angles droits ou d'une demi-circonférence. Ainsi A étant un angle ou un arc quelconque, 200° — A est son supplément.

Dans tout triangle, un angle est le supplément de la somme des deux autres, puisque les trois ensemble font 200°.

Les angles des triangles, tant rectilignes que sphériques, et les côtés de ces derniers, ont toujours leurs suppléments positifs ; car ils sont toujours moindres que 200°.

Notions générales sur les sinus, cosinus, tangentes, etc.

fig. 1. V. Le *sinus* de l'arc AM, ou de l'angle ACM, est la perpendiculaire MP abaissée d'une extrémité de l'arc sur le diametre qui passe par l'autre extrémité.

Si à l'extrémité du rayon CA on mene la perpendiculaire AT jusqu'à la rencontre du rayon CM prolongé, la ligne AT, ainsi terminée, s'appelle la *tangente*, et CT la *sécante* de l'arc AM ou de l'angle ACM.

Ces trois lignes MP, AT, CT, dépendantes de l'arc AM, et toujours déterminées par l'arc AM et le rayon, se désignent ainsi : MP $=$ *sin* AM, ou *sin* ACM, AT $=$ *tang* AM, ou *tang* ACM TC, $=$ *séc* AM, ou *séc* ACM.

VI. Ayant pris l'arc AD égal à un quadrant, si des points M et D on mene les lignes MQ, DS perpendiculaires au rayon CD, l'une terminée à ce rayon, l'autre terminée au rayon CM prolongé; les lignes MQ, DS et CS seront pareillement les sinus, tangente et sécante de l'arc MD, complément de AM. On les appelle, pour abréger, les *cosinus*, *cotangente* et *cosécante* de l'arc AM, et on les désigne ainsi : MQ $=$ *cos* AM, ou *cos* ACM, DS $=$ *cot* AM, ou *cot* ACM, CS $=$ *cosèc* AM, ou *coséc* ACM. En général, A étant un arc ou un angle quelconque, on a *cos* A $=$ *sin* $(100^\circ - \mathrm{A})$, *cot* A $=$ *tang* $(100^\circ - \mathrm{A})$, *coséc* A $=$ *séc* $(100^\circ - \mathrm{A})$.

Le triangle MQC est, par construction, égal au triangle CPM, ainsi on a CP $=$ MQ; donc dans le triangle rectangle CMP, dont l'hypoténuse est égale au rayon, les deux côtés MP, CP sont le sinus et le cosinus de l'arc AM. Quant aux triangles CAT, CDS, ils sont semblables aux triangles égaux CPM, CQM, et ainsi ils sont semblables entre eux. De là nous déduirons bientôt les différents rapports qui existent entre les lignes que nous venons de définir ; mais auparavant il faut voir quelle est la marche progressive de ces mêmes lignes, lorsque l'arc auquel elles se rapportent augmente depuis zéro jusqu'à 200°. fig. 1.

VII. Supposons qu'une extrémité de l'arc demeure fixe en A, et que l'autre extrémité, marquée M, parcoure successivement toute l'étendue de la demi-circonférence depuis A jusqu'en B dans le sens ADB.

Lorsque le point M est réuni en A, ou lorsque l'arc AM est zéro, les trois points T, M, P, se confondent avec le point A ; d'où l'on voit que le sinus et la tangente d'un arc zéro sont zéro, et que le cosinus de ce même arc est égal au rayon, ainsi que sa sécante. Donc en désignant par R le rayon du cercle, on aura

$$sin\ 0 = 0,\ tang\ 0 = 0,\ cos\ 0 = R,\ séc\ 0 = R.$$

VIII. A mesure que le point M s'avance vers D, le sinus augmente, ainsi que la tangente et la sécante; mais le cosinus, la cotangente et la cosécante diminuent.

Lorsque le point M se trouve au milieu de AD, ou lorsque l'arc AM est de 50°, ainsi que son complément MD, le sinus MP est égal au cosinus MQ ou CP, et le triangle CMP, devenu isoscele, donne la proportion MP : CM :: $1 : \sqrt{2}$, ou $sin\ 50^\circ : R :: 1 : \sqrt{2}$. Donc $sin\ 50^\circ = cos\ 50^\circ = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} R \sqrt{2}$. Dans ce même cas le triangle CAT devient isoscele et égal au triangle CDS ; d'où l'on voit que la tangente de 50° et sa cotangente sont toutes deux égales au rayon, et qu'ainsi on a $tang\ 50^\circ = cot\ 50^\circ = R$.

IX. L'arc AM continuant d'augmenter, le sinus augmente jusqu'à ce que le point M soit parvenu en D : alors le sinus est égal au rayon, et le cosinus est zéro. On a donc $sin\ 100^\circ = R$ et $cos\ 100^\circ = 0$; et l'on peut remarquer que ces valeurs sont une suite de celles que nous avons trouvées pour les sinus et cosinus de l'arc zéro ; car le complément de 100° étant zéro, on a $sin\ 100^\circ = cos\ 0^\circ = R$ et $cos\ 100^\circ = sin\ 0^\circ = 0$.

Quant à la tangente, elle augmente d'une maniere très-rapide à mesure que le point M s'approche de D; et enfin lorsqu'il est parvenu en D, il n'existe plus proprement de tangente, parce que les lignes AT, CD, étant paralleles, ne peuvent se rencontrer. C'est ce qu'on exprime en disant que la tangente de 100° est infinie, et on écrit $tang\ 100^\circ = \infty$.

Le complément de 100° étant zéro, on a $tang\ 0 = cot\ 100^\circ$ et $cot\ 0 = tang\ 100^\circ$. Donc $cot\ 0 = \infty$ et $cot\ 100^\circ = 0$.

x. Le point M continuant à avancer de D vers B, les sinus diminuent et les cosinus augmentent. Ainsi on voit que l'arc AM' a pour sinus M'P', et pour cosinus M'Q ou CP'. Mais l'arc M'B est supplément de AM', puisque AM' + M'B est égal à une demi-circonférence ; d'ailleurs si l'on mene M'M parallele à AB, il est clair que les arcs AM, BM', compris entre paralleles, seront égaux, ainsi que les perpendiculaires ou sinus MP, M'P'. Donc *le sinus d'un arc ou d'un angle est égal au sinus du supplément de cet arc ou de cet angle*.

L'arc ou l'angle A a pour supplément $200^\circ - A$: ainsi on a en général

$$sin\ A = sin\ (200^\circ - A).$$

La même propriété s'exprimerait aussi par l'équation $sin\ (100^\circ + B) = sin\ (100^\circ - B)$, B étant l'arc DM ou son égal DM'.

xi. Les mêmes arcs AM', AM qui sont suppléments l'un de l'autre, et qui ont des sinus égaux, ont aussi les cosinus égaux CP', CP ; mais il faut observer que ces cosinus sont dirigés dans des sens différents. Cette différence de situation s'exprime dans le calcul par l'opposition des signes : de sorte que si on regarde comme positifs, ou affectés du signe +, les cosinus des arcs moindres que 100°, il faudra regarder comme négatifs ou affectés du signe —, les cosinus des arcs plus grands que 100°. On aura donc en général

$$cos\ A = -\ cos\ (200^\circ - A),$$

ou $cos\ (100^\circ + B) = -cos\ (100^\circ - B)$; c'est-à-dire, que *le cosinus d'un arc ou d'un angle plus grand que* 100° *est égal au cosinus de son supplément, pris négativement*.

Le complément d'un arc plus grand que $100°$
* III. étant négatif *, il n'est pas étonnant que le sinus de ce complément soit négatif; mais pour rendre cette vérité encore plus palpable, cherchons l'expression de la distance du point A à la perpendiculaire MP. Si on fait l'arc $AM = x$, on aura $CP = \cos x$, et la distance cherchée $AP = R - \cos x$. La même formule doit exprimer la distance du point A à la droite MP, quelle que soit la grandeur de l'arc AM, dont l'origine est au point A. Supposons donc que le point M vienne en M', en sorte que x désigne l'arc AM', on aura encore en ce point $AP' = R - \cos x$; donc $\cos x = R - AP' = AC - AP' = - CP'$; ce qui fait voir que $\cos x$ est alors négatif; et parce que $CP' = CP = \cos(200° - x)$, on a $\cos x = - \cos(200° - x)$, comme on l'a déja trouvé.

On voit par-là qu'un angle obtus a le même sinus et le même cosinus que l'angle aigu qui lui sert de supplément, avec cette seule différence que le cosinus de l'angle obtus doit être affecté du signe —. Ainsi on a $\sin 150° = \sin 50° = \frac{1}{2} R\sqrt{2}$, et $\cos 150° = - \cos 50° = - \frac{1}{2} R\sqrt{2}$.

Quant à l'arc ADB égal à la demi-circonférence, son sinus est zéro, et son cosinus est égal au rayon pris négativement; on a donc $\sin 200° = 0$, et $\cos 200° = - R$. C'est aussi ce que donneraient les formules $\sin A = \sin(200° - A)$, et $\cos A = - \cos(200° - A)$, en y faisant $A = 200°$.

XII. Examinons maintenant ce que devient la tangente d'un arc AM' plus grand que $100°$. Suivant la définition, elle doit être déterminée par le concours des lignes AT, CM'. Ces lignes ne se rencontrent point dans le sens AT, mais elles se rencontrent dans le sens opposé AV; d'où l'on voit que la tangente d'un arc plus grand que $100°$ est négative. D'ailleurs, si on observe que AV est la tangente de
fig. 1. l'arc AN supplément de AM' (puisque NAM' est une

demi-circonférence), on en conclura que *la tangente d'un arc ou d'un angle plus grand que* 100° *est égale à celle de son supplément, prise négativement*, de sorte qu'on a

$$tang\ A = -tang\ (200^\circ - A)$$

Il en est de même de la cotangente représentée par DS', laquelle est égale, et en sens contraire à DS cotangente de AM. On a donc aussi

$$cot\ A = -cot\ (200^\circ - A).$$

Les tangentes et les cotangentes sont donc négatives, ainsi que les cosinus, depuis 100° jusqu'à 200°. Et, dans cette derniere limite, on a $tang\ 200^\circ = 0$ et $cot\ 200^\circ = -cot\ 0 = -\infty$.

XIII. Dans la trigonométrie il n'y a pas lieu de considérer les sinus, cosinus, etc., des arcs ou des angles plus grands que 200°; car c'est toujours entre 0 et 200° que sont compris les angles des triangles tant rectilignes que sphériques, et les côtés de ces derniers. Mais dans diverses applications de la géométrie, il n'est pas rare de considérer des arcs plus grands que la demi-circonférence, et même des arcs comprenant plusieurs circonférences. Il est donc nécessaire de trouver l'expression des sinus et cosinus de ces arcs, quelle que soit leur grandeur.

Observons d'abord que deux arcs égaux et de signes contraires AM, AN, ont des sinus égaux et de signes contraires MP, PN, tandis que le cosinus CP est le même pour l'un et pour l'autre. On a donc en général

$$sin\,(-x) = -sin\,x$$
$$cos\,(-x) = cos\,x,$$

formules qui serviront à exprimer les sinus et cosinus des arcs négatifs.

Depuis 0° jusqu'à 200° les sinus sont toujours positifs, parce qu'ils sont situés d'un même côté du diametre AB; depuis 200° jusqu'à 400° les sinus sont négatifs, parce qu'ils sont situés de l'autre côté de ce diametre. Soit ABN' $= x$ nu arc plus grand que 200°, son sinus P'N' est égal à PM sinus de l'arc AM $= x - 200^\circ$; donc on a en général

$$sin\,x = -sin\,(x - 200^\circ).$$

Cette formule donnerait les sinus entre 200° et 400° au moyen des sinus entre 0° et 200°; elle donne en particulier $\sin 400^\circ = -\sin 200^\circ = 0$; il est évident en effet que si un arc est égal à la circonférence entiere, les deux extrémités se confondent en un même point, et le sinus se réduit à zéro.

Il n'est pas moins évident que, si à un arc quelconque AM on ajoute une ou plusieurs circonférences, on retombera exactement sur le point M, et l'arc ainsi augmenté aura le même sinus que l'arc AM; donc si C désigne une circonférence entiere ou 400°, on aura

$$\sin x = \sin(C+x) = \sin(2C+x) = \sin(3C+x) \text{ etc.}$$

La même chose aurait lieu pour les cosinus, tangente, etc.

Maintenant, quel que soit l'arc proposé x, il est facile de voir que son sinus pourra toujours s'exprimer, avec un signe convenable, par le sinus d'un arc moindre que 100°. Car d'abord on peut retrancher de l'arc x autant de fois 400° qu'ils peuvent y être contenus; soit le reste y, on aura $\sin x = \sin y$. Ensuite si y est plus grand que 200°, on fera $y = 200^\circ + z$, et on aura $\sin y = -\sin z$. Tous les cas sont donc réduits à celui où l'arc proposé est moindre que 200°, et comme d'ailleurs on a $\sin(100^\circ + x) = \sin(100^\circ - x)$, il est clair qu'ils se réduisent ultérieurement au cas où l'arc proposé est entre zéro et 100°.

XIV. Les cosinus se réduisent toujours aux sinus en vertu de la formule $\cos A = \sin(100^\circ - A)$, ou, si l'on veut, de la formule $\cos A = \sin(100^\circ + A)$; ainsi, sachant évaluer les sinus dans tous les cas possibles, on saura de même évaluer les cosinus. Au reste, on voit directement par la figure que les cosinus négatifs sont séparés des cosinus positifs par le diametre DE, en sorte que tous les arcs dont l'extrémité tombe à gauche de DE ont un cosinus positif, tandis que ceux dont l'extrémité tombe à droite ont un cosinus négatif.

Ainsi de 0° à 100° les cosinus sont positifs, de 100° à 300° ils sont négatifs, de 300° à 400° ils redeviennent positifs; et après une révolution entiere, ils prennent les mêmes valeurs que dans la révolution précédente, car on a aussi $\cos(400^\circ + x) = \cos x$.

D'après ces explications, il est aisé de voir que les sinus et cosinus des arcs multiples du quadrant, ont les valeurs suivantes :

$sin\ 0^0 = 0$	$sin\ 100^0 = R$	$cos\ 0^0 = R$	$cos\ 100^0 = 0$
$sin\ 200^0 = 0$	$sin\ 300^0 = -R$	$cos\ 200^0 = -R$	$cos\ 300^0 = 0$
$sin\ 400^0 = 0$	$sin\ 500^0 = R$	$cos\ 400^0 = R$	$cos\ 500^0 = 0$
$sin\ 600^0 = 0$	$sin\ 700^0 = -R$	$cos\ 600^0 = -R$	$cos\ 700^0 = 0$
$sin\ 800^0 = 0$	$sin\ 900^0 = R$	$cos\ 800^0 = R$	$cos\ 900^0 = 0$
etc.	etc.	etc.	etc.

En général k désignant un nombre entier quelconque, on aura :

$sin\ 2k.\ 100^0 = 0,$	$cos\ (2k+1).\ 100^0 = 0$
$sin\ (4k+1).\ 100^0 = R$	$cos\ 4k.\ 100^0 = R$
$sin\ (4k-1).\ 100^0 = -R$	$cos\ (4k+2).\ 100^0 = -R$

Ce que nous venons de dire des sinus et cosinus nous dispense d'entrer dans aucun détail particulier sur les tangentes, cotangentes, etc., des arcs plus grands que 200^0; car les valeurs de ces quantités et leurs signes sont toujours faciles à déduire de celles des sinus et cosinus des mêmes arcs, ainsi qu'on le verra par les formules que nous allons exposer.

Théorêmes et formules concernant les sinus, cosinus, tangentes, etc.

XV. *Le sinus d'un arc est la moitié de la corde qui sous-tend un arc double.*

Car le rayon CA, perpendiculaire à MN, divise en deux parties égales la corde MN et l'arc sous-tendu MAN; donc MP, sinus de l'arc MA, est la moitié de la corde MN qui sous-tend l'arc MAN, double de MA. fig. 1.

La corde qui sous-tend la sixieme partie de la circonférence est égale au rayon; donc $sin\ \frac{400^0}{12}$ ou $sin\ 33^0\frac{1}{3} = \frac{1}{2}R$, c'est-à-dire que le sinus du tiers de l'angle droit est égal à la moitié du rayon.

XVI. *Le quarré du sinus d'un arc plus le quarré de son cosinus est égal au quarré du rayon, de* *sorte qu'on a en général* $\sin^2 A + \cos^2 A = R^2$ (1).

Cette propriété résulte immédiatement du triangle rectangle CMP, où l'on a $\overline{MP}^2 + \overline{CP}^2 = \overline{CM}^2$.

Il s'ensuit qu'étant donné le sinus d'un arc on trouvera son cosinus, et *vice versâ*, au moyen des formules $\cos A = \pm \sqrt{(R^2 - \sin^2 A)}$, $\sin A = \pm \sqrt{(R^2 - \cos^2 A)}$. Le double signe de ces formules vient de ce que le même sinus MP répond à deux arcs AM, AM', dont les cosinus CP, CP' sont égaux et de signes contraires, comme le même cosinus CP répond à deux arcs AM, AN, dont les sinus MP, PN sont pareillement égaux et de signes contraires.

Ainsi, par exemple, ayant trouvé $\sin 33^\circ \frac{1}{3} = \frac{1}{2} R$, on en déduira $\cos 33^\circ \frac{1}{3}$ ou $\sin 66^\circ \frac{2}{3} = \sqrt{(R^2 - \frac{1}{4} R^2)} = \sqrt{\frac{3}{4} R^2} = \frac{1}{2} R \sqrt{3}$.

XVII. *Etant donnés les sinus et cosinus de l'arc* A, *on peut trouver les tangente, sécante, cotangente et cosécante du même arc au moyen des formules suivantes :*

$$\tang A = \frac{R \sin A}{\cos A}, \quad \text{séc}\, A = \frac{R^2}{\cos A}, \quad \cot A = \frac{R \cos A}{\sin A},$$

$$\text{coséc}\, A = \frac{R^2}{\sin A}.$$

En effet les triangles semblables CPM, CAT, CDS donnent les proportions :

$$CP : PM :: CA : AT \text{ ou } \cos A : \sin A :: R : \tang A = \frac{R \sin A}{\cos A}$$

$$CP : CM :: CA : CT \text{ ou } \cos A : R :: R : \text{séc}\, A = \frac{R^2}{\cos A}$$

$$PM : CP :: CD : DS \text{ ou } \sin A : \cos A :: R : \cot A = \frac{R \cos A}{\sin A}$$

$$PM : CM :: CD : CS \text{ ou } \sin A : R :: R : \text{coséc}\, A = \frac{R^2}{\sin A}$$

(1) On désigne ici par $\sin^2 A$ le quarré de $\sin A$, et semblablement par $\cos^2 A$ le quarré de $\cos A$.

d'où l'on tire les quatre formules dont il s'agit. On peut observer au reste que les deux dernieres formules se déduiraient des deux premieres en mettant simplement $100^o - A$ au lieu de A.

Ces formules donneront les valeurs et les signes propres des tangentes, sécantes, etc. pour tout arc dont on connaîtra le sinus et le cosinus; et comme la loi progressive des sinus et cosinus, selon les différents arcs auxquels ils se rapportent, a été suffisamment développée dans le chapitre précédent, il ne reste rien à desirer sur la loi que suivent semblablement les tangentes, sécantes, etc.

On peut confirmer aussi par leur moyen plusieurs résultats qui ont été déja obtenus relativement aux tangentes; par exemple, si l'on fait $A = 100^o$, on aura $sin\ A = R$, et $cos\ A = 0$, donc $tang\ 100^o = \frac{R^2}{0}$, expression qui désigne une quantité infinie; car R^2 divisé par une quantité très-petite, donnerait un quotient très-grand; donc R^2 divisé par zéro donne un quotient plus grand que toute quantité finie. Et parce que zéro peut être pris avec le signe $+$ ou avec le signe $-$, on aura la valeur ambiguë $tang\ 100^o = \pm \infty$.

Soit encore $A = 200^o - B$, on aura $sin\ A = sin\ B$, et $cos\ A = -cos\ B$; donc $tang\,(200^o - B) = \frac{R\ sin\ B}{-cos\ B} = -\frac{R\ sin\ B}{cos\ B} = -tang\ B$, ce qui s'accorde avec l'art. XII.

XVIII. Les formules de l'article précédent, combinées entre elles et avec l'équation $sin^2 A + cos^2 A = R^2$, en fournissent quelques autres qui méritent attention.

On a d'abord $R^2 + tang^2 A = R^2 + \frac{R^2 sin^2 A}{cos^2 A} = \frac{R^2 (sin^2 A + cos^2 A)}{cos^2 A} = \frac{R^4}{cos^2 A}$, donc $R^2 + tang^2 A = séc^2 A$, formule qui se déduirait immédiatement du triangle rectangle CAT; on aurait de même, par les formules ou par le triangle rectangle CDS, $R^2 + cot^2 A = cos\acute{e}c^2 A$.

Enfin, si on multiplie entre elles les formules $tang\ A = \frac{R\ sin\ A}{cos\ A}$, $cot\ A = \frac{R\ cos\ A}{sin\ A}$, on aura $tang\ A \times cot\ A = R^2$, formule qui donne $cot\ A = \frac{R^2}{tang\ A}$, et $tang\ A = \frac{R^2}{cot\ A}$. On aurait de même $cot\ B = \frac{R^2}{tang\ B}$. Donc $cot\ A : cot\ B :: tang\ B : tang\ A$; c'est-à-dire, que *les cotangentes de deux arcs sont en raison inverse de leurs tangentes.*

Cette formule $cot\ A \times tang\ A = R^2$ se déduirait immédiatement de la comparaison des triangles semblables CAT, CDS, lesquels donnent AT : CA :: CD : DS, ou $tang\ A : R :: R : cot\ A$.

XIX. *Etant donnés les sinus et cosinus de deux arcs* a *et* b, *on peut déterminer les sinus et cosinus de la somme ou de la différence de ces arcs, au moyen des formules suivantes:*

$$sin\ (a+b) = \frac{sin\ a\ cos\ b + sin\ b\ cos\ a}{R}$$

$$sin\ (a-b) = \frac{sin\ a\ cos\ b - sin\ b\ cos\ a}{R}$$

$$cos\ (a+b) = \frac{cos\ a\ cos\ b - sin\ a\ sin\ b}{R}$$

$$cos\ (a-b) = \frac{cos\ a\ cos\ b + sin\ a\ sin\ b}{R}.$$

fig. 2. Soit le rayon AC = R, l'arc AB = a, l'arc BD = b, et par conséquent ABD = $a + b$. Des points B et D abaissez BE, DF perpendiculaires sur AC; du point D menez DI perpendiculaire sur BC, enfin du point I menez IK perpendiculaire et IL parallele à AC.

Les triangles semblables BCE, ICK donnent les proportions

$CB : CI :: BE : IK$ ou $R : \cos b :: \sin a : IK = \frac{\sin a \cos b}{R}$

$CB : CI :: CE : CK$ ou $R : \cos b :: \cos a : CK = \frac{\cos a \cos b}{R}$

Les triangles DIL, CBE, qui ont les côtés perpendiculaires chacun à chacun, sont semblables et donnent les proportions

$CB : DI :: CE : DL$ ou $R : \sin b :: \cos a : DL = \frac{\cos a \sin b}{R}$

$CB : DI :: BE . IL$ ou $R : \sin b :: \sin a : IL = \frac{\sin a \sin b}{R}$

Mais on a

$IK + DL = DF = \sin (a + b)$, et $CK - IL = CF = \cos (a + b)$. Donc

$$\sin (a + b) = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{R}$$

$$\cos (a + b) = \frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b}{R}.$$

Il serait facile de déduire de ces deux formules les valeurs de $\sin (a - b)$ et de $\cos (a - b)$; mais on peut les trouver directement par la même figure. En effet, si on prolonge le sinus DI jusqu'à ce qu'il rencontre la circonférence en M, on aura $BM = BD = b$, et $MI = ID = \sin b$. Par le point M menez MP perpendiculaire et MN parallele à AC; puisque $MI = DI$, on aura $MN = IL$, et $IN = DL$. Mais on a $IK - IN = MP = \sin (a - b)$, et $CK + MN = CP = \cos (a - b)$; donc

$$\sin (a - b) = \frac{\sin a \cos b - \sin b \cos a}{R}$$

$$\cos (a - b) = \frac{\cos a \cos b + \sin a \sin b}{R}.$$

Ce sont les formules qu'il s'agissait de démontrer.

On pourrait craindre que la démonstration précédente ne fût pas assez générale, parce que la figure qu'on a suivie suppose les arcs a et b, et même $a + b$ plus petits que

100°. Mais d'abord la démonstration s'étend sans peine au cas où a et b étant plus petits que 100°, leur somme $a+b$ est $>100^\circ$. Alors le point F tomberait sur le prolongement de AC, et le seul changement à faire dans la démonstration, serait de prendre $cos(a+b)=-CF$; mais comme on aurait en même temps $CF=IL-CK$, il en résulte toujours $cos(a+b)=CK-IL$, ou $R\,cos\,(a+b)=cos\,a\,cos\,b - sin\,a\,sin\,b$.

Supposons maintenant que les formules

$$R\,sin\,(a+b)=sin\,a\,cos\,b+sin\,b\,cos\,a$$
$$R\,cos\,(a+b)=cos\,a\,cos\,b-sin\,a\,sin\,b$$

soient reconnues exactes pour toutes les valeurs de a et de b, moindres que les limites A et B, je dis qu'elles auront encore lieu lorsque ces limites seront $100^\circ+A$ et B.

En effet, on a généralement, quel que soit l'arc x,

$$sin\,(100^\circ+x)=cos\,x$$
$$cos\,(100^\circ+x)=-sin\,x.$$

Ces équations sont manifestes lorsque x est $<100^\circ$, et on s'assure aisément qu'elles ont lieu pour toutes les valeurs de x, au moyen de la fig. 18, où MM'' et $M'M'''$ sont deux diamètres perpendiculaires entre eux, et où l'on peut prendre successivement pour x les valeurs AM, ADM', ADBM'', ADBEM''', ou ces valeurs augmentées de tant de circonférences qu'on voudra.

Cela posé, soit $x=m+b$, on aura

$$sin\,(100^\circ+m+b)=cos\,(m+b)$$
$$cos\,(100^\circ+m+b)=-sin\,(m+b).$$

Mais, suivant l'hypothese, on connaît les valeurs des seconds membres, tant que m et b n'excedent pas les limites A et B; donc dans cette même hypothese on aura :

$$R\,sin\,(100^\circ+m+b)=cos\,m\,cos\,b-sin\,m\,sin\,b.$$
$$R\,cos\,(100^\circ+m+b)=-sin\,m\,cos\,b-cos\,m\,sin\,b.$$

Soit $100^\circ+m=a$, puisqu'on a $sin\,(100^\circ+m)=cos\,m$ et $cos\,(100^\circ+m=-sin\,m$, il en résultera $cos\,m=sin\,a$ et $sin\,m=-cos\,a$; donc en faisant cette substitution dans les équations précédentes, on aura :

$$R\,sin\,(a+b)=sin\,a\,cos\,b+cos\,a\,sin\,b$$
$$R\,cos\,(a+b)=cos\,a\,cos\,b-sin\,a\,sin\,b.$$

D'où l'on voit que ces formules, qui n'étaient démontrées d'abord que dans les limites $a < \mathrm{A}$, $b < \mathrm{B}$, le sont maintenant dans les limites plus étendues $a < 100^\circ + \mathrm{A}$, $b < \mathrm{B}$. Mais, par la même raison, la limite de b pourra être reculée de 100°, ensuite celle de a, ce qui peut se continuer indéfiniment; donc les formules dont il s'agit ont lieu, quelle que soit la grandeur des arcs a et b.

L'arc a étant composé de la somme des deux arcs $a - b$ et b, on aura, d'après les formules précédentes,

$$\mathrm{R}\, sin\, a = sin\,(a-b)\, cos\, b + cos\,(a-b)\, sin\, b$$
$$\mathrm{R}\, cos\, a = cos\,(a-b)\, cos\, b - sin\,(a-b)\, sin\, b.$$

Et de celles-ci on tire :

$$\mathrm{R}\, sin\,(a-b) = sin\, a\, cos\, b - sin\, b\, cos\, a$$
$$\mathrm{R}\, cos\,(a-b) = cos\, a\, cos\, b + sin\, a\, sin\, b,$$

formules qui auront encore lieu pour toutes valeurs de a et de b.

XX. Si dans les formules de l'article précédent on fait $b = a$, la premiere et la troisieme donneront

$$sin\, 2a = \frac{2\, sin\, a\, cos\, a}{\mathrm{R}},\quad cos\, 2a = \frac{cos^2 a - sin^2 a}{\mathrm{R}}.$$

Celles-ci serviront à trouver le sinus et le cosinus d'un arc double, lorsqu'on connaît le sinus et le cosinus de l'arc simple. C'est le problême de la duplication d'un arc.

Réciproquement pour diviser un arc donné a en deux parties égales, mettons dans les mêmes formules $\frac{1}{2}a$ à la place de a, nous aurons

$$sin\, a = \frac{2\, sin\, \frac{1}{2}a\, cos\, \frac{1}{2}a}{\mathrm{R}},\quad cos\, a = \frac{cos^2 \frac{1}{2}a - sin^2 \frac{1}{2}a}{\mathrm{R}}.$$

Or, puisqu'on a tout-à-la-fois $cos^2 \frac{1}{2}a + sin^2 \frac{1}{2}a = \mathrm{R}^2$ et $cos^2 \frac{1}{2}a - sin^2 \frac{1}{2}a = \mathrm{R}\, cos\, a$, il en résulte $cos^2 \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\mathrm{R}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{R}\, cos\, a$ et $sin^2 \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\mathrm{R}^2 - \frac{1}{2}\mathrm{R}\, cos\, a$, donc

$$sin\, \tfrac{1}{2}a = \sqrt{(\tfrac{1}{2}\mathrm{R}^2 - \tfrac{1}{2}\mathrm{R}\, cos\, a)}$$
$$cos\, \tfrac{1}{2}a = \sqrt{(\tfrac{1}{2}\mathrm{R}^2 + \tfrac{1}{2}\mathrm{R}\, cos\, a)}.$$

Ainsi, en faisant $a = 100^\circ$, ou $cos\, a = 0$, on a $sin\, 50^\circ = cos\, 50^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{R}^2} = \mathrm{R}\sqrt{\frac{1}{2}}$; ensuite si l'on fait $a = 50^\circ$, ce qui donne $cos\ a = R\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, on aura $sin\ 25^\circ = R\sqrt{(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}})}$, et $cos\ 25^\circ = R\sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}})}$.

XXI. On peut aussi avoir les valeurs de $sin\ \tfrac{1}{2}a$ et $cos\ \tfrac{1}{2}a$ exprimées par le moyen de $sin\ a$, ce qui sera utile dans beaucoup d'occasions ; ces valeurs sont :

$$sin\ \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}\sqrt{(R^2 + R\, sin\ a)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(R^2 - R\, sin\ a)}$$
$$cos\ \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}\sqrt{(R^2 + R\, sin\ a)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(R^2 - R\, sin\ a)}.$$

En effet, si on éleve la premiere au quarré, on aura $sin^2 \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{4}(R^2 + R\, sin\ a) + \tfrac{1}{4}(R^2 - R\, sin\ a) - \tfrac{1}{2}\sqrt{(R^4 - R^2\, sin^2 a)} = \tfrac{1}{2}R^2 - \tfrac{1}{2}R\, cos\ a$; on aurait de même $cos^2 \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}R^2 + \tfrac{1}{2}R\, cos\ a$, ce qui s'accorde avec les valeurs précédentes de $sin\ \tfrac{1}{2}a$ et $cos\ \tfrac{1}{2}a$. Il faut cependant observer que, si $cos\ a$ était négatif, le radical $\sqrt{(R^2 - R\, sin\ a)}$ devrait être pris avec un signe contraire dans les valeurs de $sin\ \tfrac{1}{2}a$ et $cos\ \tfrac{1}{2}a$, ce qui changerait l'une dans l'autre.

XXII. Au moyen de ces formules, il est facile de déterminer les sinus et cosinus de tous les dixiemes du quadrant.

Et d'abord soit $sin\ 20^\circ = x$, $2x$ sera la corde de 40°, ou le côté du décagone régulier inscrit ; or ce côté est égal au plus grand segment du rayon divisé en moyenne et
* 5, 4. extrême raison* ; donc si on fait le rayon égal $= 1$, on aura $1 : 2x :: 2x : 1 - 2x$. De là on tire $4x^2 = 1 - 2x$, ou $x^2 + \tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{4}$; donc $(x + \tfrac{1}{4})^2 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} = \tfrac{5}{16}$; donc $x + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}\sqrt{5}$, et enfin x ou $sin\ 20^\circ = \tfrac{1}{4}(-1 + \sqrt{5})$.

Cette valeur, élevée au quarré, donne $sin^2\ 20^\circ = \dfrac{6 - 2\sqrt{5}}{16}$;

donc $1 - sin^2 20^\circ$, ou $cos^2\ 20^\circ = \dfrac{10 + 2\sqrt{5}}{16}$. Mais $cos^2 a - sin^2 a$

$= cos\ 2a$, donc $cos\ 40^\circ$ ou $sin\ 60^\circ = \dfrac{4 + 4\sqrt{5}}{16} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

Maintenant, si dans les formules du n° XXI on fait $R = 1$, $a = 20^\circ$, et $sin\ a = \tfrac{1}{4}(-1 + \sqrt{5})$, on en déduira

$$sin\ 10^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{(3 + \sqrt{5})} - \tfrac{1}{4}\sqrt{(5 - \sqrt{5})}$$
$$cos\ 10^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{(3 + \sqrt{5})} + \tfrac{1}{4}\sqrt{(5 - \sqrt{5})}.$$

Si ensuite on fait dans les mêmes formules $a = 60^\circ$, et $sin\ a = \tfrac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$, on aura

$$\sin 30^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{(5+\sqrt{5})} - \tfrac{1}{4}\sqrt{(3-\sqrt{5})}$$
$$\cos 30^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{(5+\sqrt{5})} + \tfrac{1}{4}\sqrt{(3-\sqrt{5})}.$$

Avec ces valeurs et celles qu'on connaît déja de *sin* 50, et de *sin* 100°, on peut former le tableau suivant :

$\sin\ \ 0^\circ = \cos 100^\circ = 0.$
$\sin\ 10^\circ = \cos\ 90^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{(3+\sqrt{5})} - \tfrac{1}{4}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$
$\sin\ 20^\circ = \cos\ 80^\circ = \tfrac{1}{4}(-1+\sqrt{5})$
$\sin\ 30^\circ = \cos\ 70^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{(5+\sqrt{5})} - \tfrac{1}{4}\sqrt{(3-\sqrt{5})}$
$\sin\ 40^\circ = \cos\ 60^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$
$\sin\ 50^\circ = \cos\ 50^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$
$\sin\ 60^\circ = \cos\ 40^\circ = \tfrac{1}{4}(1+\sqrt{5})$
$\sin\ 70^\circ = \cos\ 30^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{(5+\sqrt{5})} + \tfrac{1}{4}\sqrt{(3-\sqrt{5})}$
$\sin\ 80^\circ = \cos\ 20^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{(10+2\sqrt{5})}$
$\sin\ 90^\circ = \cos\ 10^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{(3+\sqrt{5}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$
$\sin 100^\circ = \cos\ \ 0^\circ = 1.$

Ces valeurs peuvent se simplifier encore, puisqu'on a $\sqrt{(3+\sqrt{5})} = \tfrac{1}{2}\sqrt{10} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$ et $\sqrt{(3-\sqrt{5})} = \tfrac{1}{2}\sqrt{10} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$; d'où l'on voit qu'en regardant comme connues $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ et $\sqrt{10}$, il ne reste que quatre extractions de racines quarrées à faire pour avoir les valeurs des sinus et cosinus de tous les arcs multiples de 10°.

XXIII. Nous tirerons de ces formules deux conséquences remarquables. 1° Puisque $2\sin 40^\circ$ est la corde de 80°, ou le côté du pentagone régulier inscrit, ce côté $= \tfrac{1}{2}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$, son quarré $= \dfrac{10-2\sqrt{5}}{4}$. Le côté du décagone régulier $= 2\sin 20^\circ = \tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$, son quarré $= \tfrac{1}{4}(6-2\sqrt{5})$; or $\tfrac{1}{4}(10-2\sqrt{5}) = 1 + \tfrac{1}{4}(6-2\sqrt{5})$. Donc *la somme faite du quarré du rayon et du quarré du côté du décagone, est égale au quarré du pentagone régulier inscrit.*

2° Entre les sinus des divisions décimales impaires du quadrant, on a cette relation

$$\sin 90^\circ + \sin 30^\circ + \sin 10^\circ = \sin 50^\circ + \sin 70^\circ,$$

et les divisions paires donnent semblablement $\sin 60^\circ = \sin 20^\circ + \tfrac{1}{2}$. Mais ces formules ne sont que des cas particuliers, et on peut démontrer que x étant un arc d'un nombre quelconque de degrés, on a

$$\sin(100^\circ - x) + \sin(20^\circ + x) + \sin(20^\circ - x) = \sin(60^\circ - x) + \sin(60^\circ + x).$$

En effet, la formule $\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin a\cos b$, donne

$$\sin(20^\circ+x)+\sin(20^\circ-x)=2\sin 20^\circ\cos x$$
$$\sin(60^\circ+x)+\sin(60^\circ-x)=2\sin 60^\circ\cos x.$$

Donc, puisqu'on a $\sin 60^\circ - \sin 20^\circ = \frac{1}{2}$, et $\cos x = \sin(100^\circ - x)$, ces deux équations retranchées l'une de l'autre, donneront

$$\sin(60^\circ+x)+\sin(60^\circ-x)-\sin(20^\circ+x)-\sin(20^\circ-x)=\sin(100^\circ-x).$$

Formule d'où l'on tire l'équation des divisions impaires en faisant $x=10^\circ$, et qui en général peut servir à la vérification des tables de sinus.

XXIV. Si dans les formules premiere et troisieme de l'article XIX, on fait $b=2a$, on aura

$$\sin 3a=\frac{\sin 2a\cos a+\cos 2a\sin a}{R},\ \cos 3a=\frac{\cos 2a\cos a-\sin 2\sin a}{R}.$$

Substituant dans celles-ci, au lieu de $\sin 2a$ et $\cos 2a$, les valeurs trouvées dans l'article XX, et simplifiant les résultats au moyen de l'équation $\sin^2 a+\cos^2 a=R^2$, on aura

$$\sin 3a=3\sin a-\frac{4\sin^3 a}{R^2}$$
$$\cos 3a=\frac{4\cos^3 a}{R^2}-3\cos a.$$

Ces formules qui servent à la triplication des arcs, peuvent servir aussi à opérer leur trisection ou division en trois parties égales. En effet, si on fait $\sin 3a=c$ et $\sin a=x$, on aura pour déterminer x l'équation $c R^2=3R^2 x-4x^3$. D'où l'on voit que le problême de la trisection de l'angle, considéré analytiquement, est du troisieme degré.

Si dans les mêmes formules de l'article XIX, on fait successivement $b=3a$, $b=4a$, etc., on aura les sinus et cosinus des arcs $4a$, $5a$, etc.; c'est-à-dire, en général, les sinus et cosinus des multiples de a. Réciproquement les formules qui servent à la multiplication des arcs, donneront les équations à résoudre pour diviser un arc donné en parties égales;

c'est-à-dire, pour déterminer *sin a* ou *cos a*, lorsqu'on connaît *sin n a* et *cos n a*.

XXV. Développons encore les valeurs de *sin* $5a$ et *cos* $5a$, et pour cela prenons les formules

$$\sin(3a+2a)=\frac{\sin 3a\cos 2a+\cos 3a\sin 2a}{R}$$

$$\cos(3a+2a)=\frac{\cos 3a\cos 2a-\sin 3a\sin 2a}{R}.$$

Si on y substitue les valeurs déja trouvées art. XX et XXIV, on aura, après les réductions,

$$\sin 5a=5\sin a-\frac{20\sin^3 a}{R^2}+\frac{16\sin^5 a}{R^4}$$

$$\cos 5a=5\cos a-\frac{20\cos^3 a}{R^2}+\frac{16\cos^5 a}{R^4}.$$

D'où l'on voit que le problême de la quintisection de l'angle serait du cinquieme degré, et ainsi des autres divisions par les nombres premiers 7, 11, 13, etc.

XXVI. Soit proposé pour exemple de trouver la valeur de *sin* 1° approchée jusqu'à quinze décimales, ce qui peut être utile pour la construction des tables de sinus. L'expression de *sin* 10°, trouvée n° XXII, étant réduite en décimales dans la supposition de $R=1$, donne $\sin 10°=0.15643\ 44650\ 40231$; de là on tire, par la formule du n° XXI, $\sin 5°=0.07845\ 90957\ 27845$.

Soit maintenant $\sin 1°=x$, il faudra, pour avoir x, résoudre l'équation

$$16x^5-20x^3+5x=0.07845\ 90957\ 27845.$$

Si, pour abréger, on fait le second membre $=c$, on aura à-peu-près $5x-20x^3=c$, et $x=\frac{1}{5}c+4\left(\frac{1}{5}c\right)^3$. Or $\frac{1}{5}c=0.01569\ 18191$ et $4\left(\frac{1}{5}c\right)^3=0.00001\ 5456$; donc on a, pour premiere approximation, $x=0.01570\ 7275$, valeur qui n'est en erreur que dans la huitieme décimale. Pour en avoir une plus exacte, soit $x=0.01570\ 73+y$, on aura, en substituant dans l'équation proposée, et négligeant le quarré et les autres puissances de y,

$0.07845900942 4927+4.9852017y=0.07845909572 7845$;

d'où l'on tire $y=0.0000000173\ 118207$, et

$$x \text{ ou } \sin 1^\circ = 0.01570\ 73173\ 118207.$$

Du sinus de 1° ou 100′, on déduirait semblablement les sinus de 50′, de 10′, de 5′, et enfin celui de 1′.

XXVII. Les formules de l'article XIX fournissent un grand nombre de conséquences, entre lesquelles il suffira de rapporter celles qui sont de l'usage le plus fréquent. On en tire d'abord les quatre suivantes :

$$\sin a \cos b = \tfrac{1}{2} \mathrm{R} \sin (a+b) + \tfrac{1}{2} \mathrm{R} \sin (a-b)$$
$$\sin b \cos a = \tfrac{1}{2} \mathrm{R} \sin (a+b) - \tfrac{1}{2} \mathrm{R} \sin (a-b)$$
$$\cos a \cos b = \tfrac{1}{2} \mathrm{R} \cos (a-b) + \tfrac{1}{2} \mathrm{R} \cos (a+b)$$
$$\sin a \sin b = \tfrac{1}{2} \mathrm{R} \cos (a-b) - \tfrac{1}{2} \mathrm{R} \cos (a+b)$$

lesquelles servent à changer un produit de plusieurs sinus ou cosinus, en sinus et cosinus *linéaires* ou multipliés seulement par des constantes.

XXVIII. Si dans ces formules on fait $a+b=p$, $a-b=q$, ce qui donne $a=\frac{p+q}{2}$, $b=\frac{p-q}{2}$, on en déduira

$$\sin p + \sin q = \frac{2}{\mathrm{R}} \sin \tfrac{1}{2}(p+q) \cos \tfrac{1}{2}(p-q)$$

$$\sin p - \sin q = \frac{2}{\mathrm{R}} \sin \tfrac{1}{2}(p-q) \cos \tfrac{1}{2}(p+q)$$

$$\cos p + \cos q = \frac{2}{\mathrm{R}} \cos \tfrac{1}{2}(p+q) \cos \tfrac{1}{2}(p-q)$$

$$\cos q - \cos p = \frac{2}{\mathrm{R}} \sin \tfrac{1}{2}(p+q) \sin \tfrac{1}{2}(p-q).$$

Nouvelles formules qu'on emploie souvent dans les calculs trigonométriques pour réduire deux termes à un seul.

XXIX. Enfin, de ces dernieres on tire encore par la division, et ayant égard à ce que $\frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\tang a}{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{R}}{\cot a}$, celles qui suivent :

$$\frac{\sin p+\sin q}{\sin p-\sin q}=\frac{\sin\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q)}{\cos\frac{1}{2}(p+q)\sin\frac{1}{2}(p-q)}=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(p+q)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(p-q)}$$

$$\frac{\sin p+\sin q}{\cos p+\cos q}=\frac{\sin\frac{1}{2}(p+q)}{\cos\frac{1}{2}(p+q)}=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(p+q)}{\mathrm{R}}$$

$$\frac{\sin p+\sin q}{\cos q-\cos p}=\frac{\cos\frac{1}{2}(p-q)}{\sin\frac{1}{2}(p-q)}=\frac{\cot\frac{1}{2}(p-q)}{\mathrm{R}}$$

$$\frac{\sin p-\sin q}{\cos p+\cos q}=\frac{\sin\frac{1}{2}(p-q)}{\cos\frac{1}{2}(p-q)}=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(p-q)}{\mathrm{R}}$$

$$\frac{\sin p-\sin q}{\cos q-\cos p}=\frac{\cos\frac{1}{2}(p+q)}{\sin\frac{1}{2}(p+q)}=\frac{\cot\frac{1}{2}(p+q)}{\mathrm{R}}$$

$$\frac{\cos p+\cos q}{\cos q-\cos p}=\frac{\cos\frac{1}{2}(p+q)}{\sin\frac{1}{2}(p+q)}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(p-q)}{\sin\frac{1}{2}(p-q)}=\frac{\cot\frac{1}{2}(p+q)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(p-q)}$$

$$\frac{\sin(p+q)}{\sin p+\sin q}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p+q)}{2\sin\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q)}=\frac{\cos\frac{1}{2}(p+q)}{\cos\frac{1}{2}(p-q)}$$

$$\frac{\sin(p+q)}{\sin p-\sin q}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p+q)}{2\sin\frac{1}{2}(p-q)\cos\frac{1}{2}(p+q)}=\frac{\sin\frac{1}{2}(p+q)}{\sin\frac{1}{2}(p-q)}$$

Formules qui sont l'expression d'autant de théorêmes. De la premiere il résulte que *la somme des sinus de deux arcs est à la différence de ces mêmes sinus, comme la tangente de la demi-somme des arcs est à la tangente de leur demi-différence.*

XXX. Si on fait $b=a$ ou $q=0$ dans les formules des trois articles précédents, on aura les résultats qui suivent :

$$\cos^2 a=\tfrac{1}{2}\mathrm{R}^2+\tfrac{1}{2}\mathrm{R}\cos 2a$$
$$\sin^2 a=\tfrac{1}{2}\mathrm{R}^2-\tfrac{1}{2}\mathrm{R}\cos 2a$$

$$\mathrm{R}+\cos p=\frac{2\cos^2\frac{1}{2}p}{\mathrm{R}}$$

$$\mathrm{R}-\cos p=\frac{2\sin^2\frac{1}{2}p}{\mathrm{R}}$$

$$\sin p=\frac{2\sin\frac{1}{2}p\cos\frac{1}{2}p}{\mathrm{R}}$$

$$\frac{\sin p}{\mathrm{R}+\cos p}=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}p}{\mathrm{R}}=\frac{\mathrm{R}}{\cot\frac{1}{2}p}$$

$$\frac{\sin p}{\mathrm{R}-\cos p}=\frac{\cot\frac{1}{2}p}{\mathrm{R}}=\frac{\mathrm{R}}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}p}$$

$$\frac{\mathrm{R}+\cos p}{\mathrm{R}-\cos p}=\frac{\cot^2\frac{1}{2}p}{\mathrm{R}^2}=\frac{\mathrm{R}^2}{\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}p}.$$

XXXI. Pour développer aussi quelques formules relatives aux tangentes, considérons l'expression $\operatorname{tang}(a+b)=\frac{\mathrm{R}\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$, dans laquelle la substitution des valeurs de $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$, donnera

$$\operatorname{tang}(a+b)=\frac{\mathrm{R}(\sin a\cos b+\sin b\cos a)}{\cos a\cos b-\sin b\sin a}.$$

Or on a $\sin a=\frac{\cos a\operatorname{tang} a}{\mathrm{R}}$ et $\sin b=\frac{\cos b\operatorname{tang} b}{\mathrm{R}}$. substituant ces valeurs et divisant ensuite tous les termes par $\cos a\cos b$, on aura

$$\operatorname{tang}(a+b)=\frac{\mathrm{R}^2(\operatorname{tang} a+\operatorname{tang} b)}{\mathrm{R}^2-\operatorname{tang} a\operatorname{tang} b}.$$

C'est la valeur de la tangente de la somme de deux arcs, exprimée par les tangentes de chacun de ces arcs ; on trouverait de même pour la tangente de leur différence

$$\operatorname{tang}(a-b)=\frac{\mathrm{R}^2(\operatorname{tang} a-\operatorname{tang} b)}{\mathrm{R}^2+\operatorname{tang} a\operatorname{tang} b}.$$

Soit $b=a$, on aura pour la duplication des arcs la formule

$$\operatorname{tang} 2a=\frac{2\mathrm{R}^2\operatorname{tang} a}{\mathrm{R}^2-\operatorname{tang}^2 a},$$

d'où résulterait

$$\cot 2a=\frac{\mathrm{R}^2}{\operatorname{tang} 2a}=\frac{\mathrm{R}^3}{2\operatorname{tang} a}-\tfrac{1}{2}\operatorname{tang} a=\tfrac{1}{2}\cot a-\tfrac{1}{2}\operatorname{tang} a.$$

Soit $b=2a$, on aurait pour leur triplication la formule :

$$\operatorname{tang} 3a=\frac{\mathrm{R}^2(\operatorname{tang} a+\operatorname{tang} 2a)}{\mathrm{R}^2-\operatorname{tang} a\operatorname{tang} 2a};$$

dans laquelle si on substitue la valeur de *tang* $2a$, on aura

$$tang\ 3\ a = \frac{3\,R^2\ tang\ a - tang^3\ a}{R^2 - 3\ tang^2\ a}.$$

XXXII. Le développement des formules trigonométriques, considéré dans toute sa généralité, forme une branche importante de l'analyse, sur laquelle on peut consulter l'excellent ouvrage d'Euler, intitulé : *Introductio in anal. Inf.*, ou sa traduction par M. Labey. Nous croyons cependant devoir démontrer encore les formules qui servent à exprimer le sinus et le cosinus en fonctions de l'arc, formules dont la connaissance est supposée dans la note V et qui d'ailleurs sont nécessaires pour la construction des tables.

Et d'abord, supposant le rayon $=1$, ce qui n'altere pas la généralité des résultats, on a la formule $cos^2 A + sin^2 A = 1$, dont le premier membre peut être regardé comme le produit des deux facteurs imaginaires $cos\ A + \sqrt{-1}\ sin\ A$ et $cos\ A - \sqrt{-1}\ sin\ A$. Si on multiplie ensemble deux facteurs semblables $cos\ A + \sqrt{-1}\ sin\ A$, $cos\ B + \sqrt{-1}\ sin\ B$, le produit sera $cos\ A\ cos\ B - sin\ A\ sin\ B + (sin\ A\ cos\ B + sin\ B\ cos\ A)\sqrt{-1}$, et il se réduit par conséquent à la forme $cos\ (A+B) + \sqrt{-1}\ sin\ (A+B)$, laquelle est semblable à chacun des facteurs. On a donc en général

$$(cos A + \sqrt{-1} sin A)(cos B + \sqrt{-1} sin B) = cos(A+B) + \sqrt{-1} sin(A+B),$$

et il est remarquable que la multiplication de ces sortes de quantités s'exécute en ajoutant seulement les arcs, ce qui est une propriété analogue à celle des logarithmes. On en conclura successivement

$$(cos\ A + \sqrt{-1}\ sin\ A)\ (cos\ A + \sqrt{-1}\ sin\ A) = cos\ 2\ A + \sqrt{-1}\ sin\ 2\ A$$
$$(cos\ A + \sqrt{-1}\ sin\ A)\ (cos\ 2\ A + \sqrt{-1}\ sin\ 2\ A) = cos\ 3\ A + \sqrt{-1}\ sin\ 3\ A$$
$$(cos\ A + \sqrt{-1}\ sin\ A)\ (cos\ 3\ A + \sqrt{-1}\ sin\ 3\ A) = cos\ 4\ A + \sqrt{-1}\ sin\ 4\ A$$

etc.

Le premier produit est égal à $(cos\ A + \sqrt{-1}\ sin\ A)^2$, le second est égal à $(cos\ A + \sqrt{-1}\ sin\ A)^3$; et ainsi de suite. Donc en général, n étant un nombre entier quelconque on aura

$$(cos\ A + \sqrt{-1}\ sin\ A)^n = cos\ n\ A + \sqrt{-1}\ sin\ n\ A.$$

De là résulte, en changeant le signe de $\sqrt{-1}$,

$$(\cos A - \sqrt{-1}\,\sin A)^n = \cos nA - \sqrt{-1}\,\sin nA,$$

et de ces deux équations qui sont une suite l'une de l'autre, on déduira les valeurs séparées de $\sin nA$ et $\cos nA$, savoir:

$$\cos nA = \tfrac{1}{2}(\cos A + \sqrt{-1}\,\sin A)^n + \tfrac{1}{2}(\cos A - \sqrt{-1}\,\sin A)^n$$

$$\sin nA = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(\cos A + \sqrt{-1}\,\sin A)^n - \frac{1}{2\sqrt{-1}}(\cos A - \sqrt{-1}\,\sin A)^n$$

XXXIII. Si on veut exprimer les mêmes quantités en séries, il faudra développer par la formule du binome $(\cos A + \sqrt{-1}\,\sin A)^n$, ce qui donnera

$$\cos^n A + \frac{n}{1}\cos^{n-1} A \sin A\sqrt{-1} - \frac{n\,.\,n-1}{1\,.\,2}\cos^{n-2} A \sin^2 A$$

$$- \frac{n\,.\,n-1\,.\,n-2}{1\,.\,2\,.\,3}\cos^{n-3} A \sin^3 A\sqrt{-1} + \frac{n\,.\,n-1\,.\,n-2\,.\,n-3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\cos^{n-4} A \sin^4 A + \text{etc.}$$

Et cette quantité étant la valeur de $\cos nA + \sqrt{-1}\,\sin nA$, on égalera séparément la partie réelle à $\cos nA$, et la partie imaginaire à $\sqrt{-1}\,\sin nA$. On aura donc

$$\cos nA = \cos^n A - \frac{n\,.\,n-1}{1\,.\,2}\cos^{n-2} A \sin^2 A + \frac{n\,.\,n-1\,.\,n-2\,.\,n-3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\cos^{n-4} A \sin^4 A - \text{etc.}$$

$$\sin nA = n\cos^{n-1} A \sin A - \frac{n\,.\,n-1\,.\,n-2}{1\,.\,2\,.\,3}\cos^{n-3} A \sin^3 A + \text{etc.},$$

séries dont la loi est facile à saisir, et au moyen desquelles on trouve le sinus et le cosinus d'un arc multiple de A, d'une maniere beaucoup plus prompte que par les opérations indiquées art. XXIV.

XXXIV. Puisqu'on a $\sin A = \cos A \tang A$, ces séries peuvent se mettre sous la forme

$$\cos nA = \cos^n A\left(1 - \frac{n\,.\,n-1}{1\,.\,2}\tang^2 A + \frac{n\,.\,n-1\,.\,n-2\,.\,n-3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\tang^4 A - \text{etc.}\right)$$

$$\sin nA = \cos^n A\left(\frac{n}{1}\tang A - \frac{n\,.\,n-1\,.\,n-2}{1\,.\,2\,.\,3}\tang^3 A + \text{etc.}\right)$$

Soit $n = \frac{x}{A}$, on aura, en substituant cette valeur et conservant cependant le facteur $\cos^n A$

$$\cos x = \cos^n A\left(1 - \frac{x.x-A}{1.2}\cdot\frac{tang^2 A}{A^2} + \frac{x.x-A.x-2A.x-3A}{1.2.3.4}\cdot\frac{tang^4 A}{A^4} - \text{etc.}\right)$$

$$\sin x = \cos^n A\left(\frac{x}{1}\cdot\frac{tang\,A}{A} - \frac{x.x-A.x-2A}{1.2.3}\cdot\frac{tang^3 A}{A^3} + \text{etc.}\right)$$

Dans ces formules on peut prendre A à volonté; supposons A très-petit, alors $\frac{tang\,A}{A}$ sera très-peu différent de l'unité, parce que la tangente d'un arc très-petit est presqu'égale à l'arc. Cependant, tant que l'arc n'est pas nul, on a $tang\,A > A$ (1) ou $\frac{tang\,A}{A} > 1$; on a en même temps $A > \sin A$ (2); donc $\frac{tang\,A}{A} < \frac{tang\,A}{\sin A}$, ou $\frac{tang\,A}{A} < \frac{1}{\cos A}$. De là on voit que le rapport $\frac{tang\,A}{A}$ est toujours compris entre les limites 1 et $\frac{1}{\cos A}$. Soit $A = 0$, on aura $\cos A = 1$; donc puisque $\frac{tang\,A}{A}$ est compris entre 1 et $\frac{1}{\cos A}$, il faudra qu'on ait exactement $\frac{tang\,A}{A} = 1$. Donc en faisant $A = 0$, on aura

$$\cos x = \cos^n A\left(1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}\right)$$

$$\sin x = \cos^n A\left(x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}\right)$$

Il reste à voir ce que devient $\cos^n A$, lorsque A diminue de plus en plus, et devient enfin zéro. Or on a $\frac{1}{\cos^2 A} = \sec^2 A = 1 + tang^2 A$; donc $\cos A = (1 + tang^2 A)^{-\frac{1}{2}}$, donc

$$\cos^n A = (1 + tang^2 A)^{-\frac{n}{2}} = 1 - \frac{n}{2} tang^2 A + \frac{n.n+2}{2.4} tang^4 A - \text{etc.}$$

(1) AT est plus grand que AM, parce que le triangle ATC est au secteur ACM :: AT$\times\frac{1}{2}$ AC : AM$\times\frac{1}{2}$ AC :: AT : AM. fig. 1.

(2) AM est plus grand que MP, parce que l'arc MAN est plus grand que sa corde MN.

Substituant au lieu de n sa valeur $\frac{x}{\mathrm{A}}$, on aura

$$cos^n \mathrm{A} = 1 - \frac{x}{2} \mathrm{A}. \frac{tang^2 \mathrm{A}}{\mathrm{A}^2} + \frac{x.x+2\mathrm{A}}{2.4} \mathrm{A}^2. \frac{tang^4 \mathrm{A}}{\mathrm{A}^4} - \text{etc.}$$

Si l'on imagine maintenant que A diminue de plus en plus, x restant la même, la valeur de $cos^n \mathrm{A}$ approchera de plus en plus de l'unité; enfin, si l'on fait $\mathrm{A}=0$ et $\frac{tang\mathrm{A}}{\mathrm{A}}=1$, on aura exactement $cos^n \mathrm{A}=1$. Donc on a les formules

$$cos\, x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}$$

$$sin\, x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}$$

par lesquelles on pourra calculer le sinus et le cosinus d'un arc dont la longueur est donnée en parties du rayon pris pour unité.

XXXV. Ces mêmes valeurs peuvent être exprimées d'une maniere succincte, par le moyen des exponentielles. Pour cela, il faut se rappeler que e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est 1, on a

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Si, dans cette formule, on fait $z = x\sqrt{-1}$, il en résultera

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + \frac{x\sqrt{-1}}{1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}$$

On aurait semblablement en changeant le signe de $\sqrt{-1}$

$$e^{-x\sqrt{-1}} = 1 - \frac{x\sqrt{-1}}{1} - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}$$

De là on tire

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}$$

séries dont les seconds membres sont les valeurs trouvées pour $cos\, x$ et $sin\, x$. Donc on a

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

d'où lon tire $\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}} = \sqrt{-1}.\frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{-1}\,\mathrm{tang}\,x$, formule dont on a fait usage, note IV.

Les mêmes formules donnent $e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x$, $e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\sin x$; donc, en divisant l'une par l'autre, on aura $e^{2x\sqrt{-1}} = \frac{\cos x + \sqrt{-1}\sin x}{\cos x - \sqrt{-1}\sin x} = \frac{1+\sqrt{-1}\,\mathrm{tang}\,x}{1-\sqrt{-1}\,\mathrm{tang}\,x}$, ou en prenant les logarithmes de chaque membre, $2x\sqrt{-1} = \log.\left(\frac{1+\sqrt{-1}\,\mathrm{tang}\,x}{1-\sqrt{-1}\,\mathrm{tang}\,x}\right)$. Mais on sait que $\log.\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = z + \frac{2}{3}z^3 + \frac{2}{5}z^5 + \text{etc.}$; mettant donc $\sqrt{-1}\,\mathrm{tang}\,x$ au lieu de z, et divisant de part et d'autre par $2\sqrt{-1}$, on aura

$x = \mathrm{tang}\,x - \frac{1}{3}\mathrm{tang}^3\,x + \frac{1}{5}\mathrm{tang}^5\,x - \frac{1}{7}\mathrm{tang}^7\,x + \text{etc.}$

Formule très-simple qui sert à calculer l'arc par sa tangente, lorsque celle-ci est plus petite que l'unité.

XXXVI. Pour appliquer les formules précédentes à la détermination du sinus et du cosinus d'un arc donné en degrés et parties de degré, il faut avoir la longueur de cet arc exprimée en parties du rayon, ou, ce qui revient au même, il faut avoir le rapport de cet arc au rayon. Or, le rayon étant 1, la demi-circonférence ou l'arc de 200° $= 3.14159\ 26535\ 897932$. Soit ce nombre $= \pi$, la longueur de l'arc $\frac{m}{n}.100°$ sera $\frac{m}{n}.\frac{\pi}{2}$; donc si on fait dans les formules précédentes $x = \frac{m}{n}.\frac{\pi}{2}$, qu'ensuite on remette la valeur de π, et qu'on calcule les coëfficients jusqu'à seize décimales, on aura les formules suivantes :

$\sin\left(\frac{m}{n}\cdot 100^\circ\right)=$	$\cos\left(\frac{m}{n}\cdot 100^\circ\right)=$
$1.57079\ 63267\ 948966\frac{m}{n}$	$1.00000\ 00000\ 000000$
$-0.64596\ 40975\ 062463\frac{m^3}{n^3}$	$-1.23370\ 05501\ 361698\frac{m^2}{n^2}$
$+0.07969\ 26262\ 461670\frac{m^5}{n^5}$	$+0.25366\ 95079\ 010480\frac{m^4}{n^4}$
$-0.00468\ 17541\ 353187\frac{m^7}{n^7}$	$-0.02086\ 34807\ 633530\frac{m^6}{n^6}$
$+0.00016\ 04411\ 847874\frac{m^9}{n^9}$	$+0.00091\ 92602\ 748394\frac{m^8}{n^8}$
$-0.00000\ 35988\ 432352\frac{m^{11}}{n^{11}}$	$-0.00002\ 52020\ 423731\frac{m^{10}}{n^{10}}$
$+0.00000\ 00569\ 217292\frac{m^{13}}{n^{13}}$	$+0.00000\ 04710\ 874779\frac{m^{12}}{n^{12}}$
$-0.00000\ 00006\ 688035\frac{m^{15}}{n^{15}}$	$-0.00000\ 00063\ 866031\frac{m^{14}}{n^{14}}$
$+0.00000\ 00000\ 060669\frac{m^{17}}{n^{17}}$	$+0.00000\ 00000\ 656596\frac{m^{16}}{n^{16}}$
$-0.00000\ 00000\ 000438\frac{m^{19}}{n^{19}}$	$-0.00000\ 00000\ 005294\frac{m^{18}}{n^{18}}$
$+0.00000\ 00000\ 000003\frac{m^{21}}{n^{21}}$	$+0.00000\ 00000\ 000034\frac{m^{20}}{n^{20}}$

Les sinus et cosinus des arcs depuis zéro jusqu'à 50°, comprennent les sinus et cosinus des arcs depuis 50° jusqu'à 100°; car on a $\sin(50^\circ+z)=\cos(50^\circ-z)$ et $\cos(50^\circ+z)=\sin(50^\circ-z)$. Donc, dans les formules qui donnent les valeurs de $\sin\frac{m}{n}100^\circ$ et $\cos\frac{m}{n}100^\circ$, on pourra toujours supposer $\frac{m}{n}<\frac{1}{2}$; de sorte que les séries seront tellement convergentes, qu'il n'en faudra jamais calculer qu'un petit nombre de termes, sur-tout si on n'a pas besoin de beaucoup de décimales.

Si on fait successivement $\frac{m}{n} = \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}$, on trouvera les résultats suivants :

$sin\ 10^\circ$	$= cos\ 90^\circ$	$= 0.\ 15643\ 44650\ 40231$
$sin\ 20^\circ$	$= cos\ 80^\circ$	$= 0.\ 30901\ 69943\ 74947$
$sin\ 30^\circ$	$= cos\ 70^\circ$	$= 0.\ 45399\ 04997\ 39547$
$sin\ 40^\circ$	$= cos\ 60^\circ$	$= 0.\ 58778\ 52522\ 92473$
$sin\ 50^\circ$	$= cos\ 50^\circ$	$= 0.\ 70710\ 67811\ 86548$
$sin\ 60^\circ$	$= cos\ 40^\circ$	$= 0.\ 80901\ 69943\ 74947$
$sin\ 70^\circ$	$= cos\ 30^\circ$	$= 0.\ 89100\ 65241\ 88368$
$sin\ 80^\circ$	$= cos\ 20^\circ$	$= 0.\ 95105\ 65162\ 95154$
$sin\ 90^\circ$	$= cos\ 10^\circ$	$= 0.\ 98768\ 83405\ 95138$
$sin\ 100^\circ$	$= cos\ 0^\circ$	$= 1.\ 00000\ 00000\ 00000$

lesquels s'accordent avec les formules algébriques du n° 22.

On trouvera pareillement, en faisant $\frac{m}{n} = \frac{1}{100}$, la même valeur de *sin* 1°, qu'on a trouvée n° 26 ; et la grande facilité avec laquelle on parvient à ces résultats, est une preuve de l'excellence de la méthode.

De la construction des tables de sinus.

XXXVII. Les savants utiles à qui on doit la premiere construction des tables de sinus, ont fondé leurs calculs sur des méthodes ingénieuses, mais dont l'application était fort pénible. L'analyse a fourni depuis des méthodes beaucoup plus expéditives pour remplir cet objet ; mais les calculs étant déja faits, ces méthodes seraient restées sans application, si l'établissement du système métrique n'eût fourni l'occasion de calculer de nouvelles tables conformes à la division décimale du cercle.

Pour donner une idée des méthodes qu'on peut suivre dans la construction des tables, supposons qu'il s'agisse de calculer les sinus de tous les arcs de minute en minute, depuis 1 minute jusqu'à 10000 minutes ou 100 degrés ; nous ferons le rayon $= 1$, l'arc d'une minute $= a$, et d'abord il faudra trouver le sinus et le cosinus de l'arc a avec un grand degré d'approximation.

Le rayon étant 1, on sait que la demi-circonférence ou l'arc de $200^\circ = 3.14159\ 26535\ 897932$; divisant ce nombre par 20000, on a l'arc de $1'$ ou $a = 0.00015\,70796\,32679\,48966$, valeur exacte jusque dans la vingtieme décimale. Quand un arc est très-petit, son sinus est sensiblement égal à l'arc, ainsi on a à très-peu près $\sin a = 0.00015\ 70796\ 32679\ 48966$. Mais cette valeur est déja en erreur à la treizieme décimale, laquelle n'est que le dixieme chiffre significatif. Pour en avoir une plus exacte, le moyen le plus simple est de recourir aux formules de l'art. 36, dans lesquelles, si on fait $\frac{m}{n} = \frac{1}{10000}$, on aura immédiatement, par les deux ou trois premiers termes de chaque série,

$$\sin a = 0.00015\ 70796\ 32033\ 525563$$
$$\cos a = 0.99999\ 99876\ 62994\ 52400\ 5253$$

valeurs exactes jusqu'à la vingtieme décimale pour le *sinus*, et jusqu'à la vingt-quatrieme pour le *cosinus*.

XXXVIII. Connaissant le sinus et le cosinus de l'arc d'une minute désigné par a, pour en déduire successivement les sinus de tous les arcs multiples de a, on fera dans les formules de l'art. 22, $p = x + a$, $q = x - a$. La premiere et la troisieme donneront par cette substitution, et en faisant toujours $R = 1$,

$$\sin(x+a) = 2 \cos a \sin x - \sin(x-a)$$
$$\cos(x+a) = 2 \cos a \cos x - \cos(x-a)$$

Il résulte de ces formules que si on a une suite d'arcs en progression arithmétique, dont la différence soit a, leurs sinus formeront une suite récurrente dont l'échelle de relation est $2 \cos a, -1$, c'est-à-dire, que deux sinus consécutifs A et B étant calculés, on trouvera le suivant C, en multipliant B par $2 \cos a$, A par -1, et ajoutant les deux produits, ce qui donnera $C = 2B \cos a - A$. Les cosinus des mêmes arcs formeront également une suite récurrente dont l'échelle de relation est $2 \cos a, -1$: on aura donc successivement,

$\sin 0 = 0$	$\cos 0 = 1$
$\sin a = \sin a$	$\cos a = \cos a$
$\sin 2a = 2 \cos a \sin a$	$\cos 2a = 2 \cos a \cos a - 1$
$\sin 3a = 2 \cos a \sin 2a - \sin a$	$\cos 3a = 2 \cos a \cos 2a - \cos a$
$\sin 4a = 2 \cos a \sin 3a - \sin 2a$	$\cos 4a = 2 \cos a \cos 3a - \cos 2a$
$\sin 5a = 2 \cos a \sin 4a - \sin 3a$	$\cos 5a = 2 \cos a \cos 4a - \cos 3a$

etc.

XXXIX. Il ne s'agit plus que d'exécuter les operations indiquées, en substituant les valeurs de $\sin a$ et $\cos a$. Si on veut construire des tables de sinus avec 10 décimales, il suffira de prendre les valeurs de $\sin a$ et $\cos a$ approchées jusqu'à 16 décimales, savoir :

$$\sin a = 0.00015\ 70796\ 320335$$
$$\cos a = 0.99999\ 99876\ 629945$$

mais comme $\cos a$ differe très-peu de l'unité, il y a un moyen d'abréviation dont il faut profiter. Soit $k = 2(1 - \cos a) = 0.00000\ 00246\ 740110$, on aura $2 \cos a = 2 - k$, ce qui donnera,

$$\sin(x+a) - \sin x = \sin x - \sin(x-a) - k \sin x$$
$$\cos(x+a) - \cos x = \cos x - \cos(x-a) - k \cos x.$$

Pour avoir le terme $\sin(x+a)$ il suffit d'ajouter au terme précédent $\sin x$ la différence $\sin(x+a) - \sin x$, laquelle sera toujours très-petite : or cette différence est, suivant la formule, égale à une différence semblable déja calculée $\sin x - \sin(x-a)$, moins le produit de $\sin x$ par le nombre constant k. Cette multiplication est donc la seule opération un peu longue qu'on ait à faire pour déduire un sinus des deux précédents; mais il faut observer 1° que l'on n'a besoin de connaître le produit que jusqu'à la seizieme décimale, ce qui donnera fort peu de chiffres à calculer; 2° que ces multiplications peuvent être abrégées beaucoup en formant d'avance les produits du nombre constant 246740110 par 1, 2, 3 jusqu'à 9; car, par ce moyen, on aura immédiatement les produits partiels qui résultent des différents chiffres du multiplicateur $\sin x$, et il ne restera plus qu'à faire l'addition de ces produits, en se bornant toujours à la seizieme décimale.

Les mêmes procédés devront être suivis dans le calcul des cosinus; et, lorsqu'on aura prolongé l'une et l'autre série jusqu'à 50°, la table sera complete.

XL. Il est nécessaire, nous le répétons, de calculer les sinus avec 16 décimales, c'est-à-dire avec cinq ou six décimales de plus qu'on n'en veut avoir réellement, afin d'être assuré que les erreurs, qui peuvent se multiplier dans le cours de 5000 opérations, n'influeront cependant pas sur la dixieme décimale des derniers résultats. Le calcul fait, on retranchera les décimales superflues et on ne conservera dans la table que dix décimales.

Au reste, quand il s'agit d'exécuter tant de calculs, on doit chercher à vérifier les résultats aussi souvent qu'il est possible. Dans l'exemple que nous avons apporté d'une table calculée de minute en minute, il serait nécessaire de calculer préalablement les sinus et cosinus de degré en degré, ce qui fera, de 100 termes en 100 termes, une vérification très-utile. Or, pour calculer les sinus de degré en degré, on a les formules et les valeurs qui suivent :

$$\sin(x+1^\circ)-\sin x=\sin x-\sin(x-1^\circ)-h\sin x$$
$$\cos(x+1^\circ)-\cos x=\cos x-\cos(x-1^\circ)-h\cos x$$
$$\sin 1^\circ=0.01570\ 73173\ 11820\ 676$$
$$\cos 1^\circ=0.99987\ 66324\ 81660\ 599$$
$$h=2(1-\cos 1^\circ)=0.00024\ 67350\ 36678\ 802$$

Les sinus calculés de degré en degré se vérifieront eux-mêmes de dix en dix par les valeurs déja connues de $\sin 10^\circ$, $\sin 20^\circ$, etc. Enfin lorsque la table entiere est construite, on peut encore la vérifier de tant de manieres qu'on voudra par l'équation

$$\sin(100^\circ-x)+\sin(20^\circ-x)+\sin(20^\circ+x)=\sin(60^\circ-x)+\sin(60^\circ+x).$$

XLI. Les sinus, tels qu'ils résultent des calculs que nous venons d'indiquer, sont exprimés en parties du rayon, et on les appelle *sinus naturels;* mais on a reconnu dans la pratique, qu'il y a beaucoup d'avantage à se servir des logarithmes des sinus, au lieu des sinus eux-mêmes; en conséquence la plupart des tables ne contiennent point les sinus naturels, mais seulement leurs logarithmes. On conçoit que les sinus étant calculés, il a été facile d'en trouver les logarithmes; mais comme la supposition du rayon $=1$ rendrait négatifs tous les logarithmes des sinus, on a préféré de prendre le rayon $=10000000000$, c'est-à-dire, qu'on a multiplié par 10000000000 tous les sinus trouvés dans la supposition du rayon $=1$. Par ce moyen le rayon ou sinus de 100°, qui se rencontre fréquemment dans les calculs, a pour logarithme 10 unités, et il faudrait que les angles fussent beaucoup plus petits qu'on ne les rencontre dans la pratique, pour que leurs sinus eussent des logarithmes négatifs.

Les logarithmes des sinus étant trouvés, on en déduit très-aisément les logarithmes des tangentes par de simples soustractions; car, puisqu'on a $tang\,x = \frac{R\,sin\,x}{cos\,x}$, il s'ensuit $log.\ tang\,x = 10 + log.\ sin\,x - log.\ cos\,x$. Quant aux logarithmes des sécantes, ils se trouveraient d'une maniere encore plus simple, a l'aide de l'équation $sec.\ x = \frac{R^2}{cos\,x}$. C'est parce qu'on peut y suppléer si facilement qu'on n'insere dans les tables que les logarithmes des sinus et ceux des tangentes.

Il resterait à expliquer l'espece d'interpolation dont on se sert, soit pour trouver les logarithmes des sinus et tangentes des arcs qui contiennent des fractions de minute, soit pour trouver l'arc qui répond à un logarithme donné de sinus ou de tangente, lorsque ce logarithme tombe entre deux logarithmes des tables. Mais pour ces détails on ne peut mieux faire que de consulter l'explication dont les tables sont toujours accompagnées.

Principes pour la résolution des triangles rectilignes.

XLII. *Dans tout triangle rectangle le rayon est au sinus d'un des angles aigus, comme l'hypoténuse est au côté opposé à cet angle.*

Soit ABC le triangle proposé rectangle en A; du point C, comme centre, et du rayon CD, égal au rayon des tables, décrivez l'arc DE qui sera la mesure de l'angle C; abaissez sur CD la perpendiculaire EF qui sera le sinus de l'angle C. Les triangles CBA, CEF sont semblables et donnent la proportion CE : EF :: CB : BA; donc fig. 3.

$$R : sin\,C :: BC : BA.$$

XLIII. *Dans tout triangle rectangle le rayon est à la tangente d'un des angles aigus, comme le côté adjacent à cet angle est au côté opposé.*

Ayant décrit l'arc DE, comme dans l'article précédent, élevez sur CD la perpendiculaire DG qui sera la tangente de l'angle C. Par les triangles semblables CDG, CAB, on aura la proportion CD : DG :: CA : AB; donc

$$R : tang\ C :: CA : AB.$$

XLIV. *Dans un triangle rectiligne quelconque les sinus des angles sont comme les côtés opposés.*

fig. 4. Soit ABC le triangle proposé, AD la perpendiculaire abaissée du sommet A sur le côté opposé BC, il pourra arriver deux cas :

1° Si la perpendiculaire tombe au-dedans du triangle ABC, les triangles rectangles ABD, ACD donneront, suivant l'art. XLII,

$$R : sin\ B :: AB : AD$$
$$R : sin\ C :: AC : AD.$$

Dans ces deux proportions, les extrêmes étant égaux, on pourra, avec les moyens, faire la proportion

$$sin\ C : sin\ B :: AB : AC.$$

fig. 5. 2° Si la perpendiculaire tombe hors du triangle ABC, les triangles rectangles ABD, ACD donneront encore les proportions

$$R : sin\ ABD :: AB : AD$$
$$R : sin\ C :: AC : AD:$$

d'où l'on déduit $sin\ C : sin\ ABD :: AB : AC$. Mais l'angle ABD est supplément de ABC ou B; donc $sin\ ABD = sin\ B$; donc on a encore

$$sin\ C : sin\ B :: AB : AC.$$

XLV. *Dans tout triangle rectiligne le cosinus d'un angle est au rayon, comme la somme des quarrés des côtés qui comprennent cet angle* *moins le quarré du troisieme côté, est au double rectangle des deux premiers côtés; c'est-à-dire qu'on a :*

$cos\ B : R :: \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 : 2\ AB \times BC$, ou $cos\ B =$

$R \times \dfrac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2\ AB \times BC}$.

Soit encore abaissée du sommet A la perpendiculaire AD sur le côté BC :

1° Si cette perpendiculaire tombe au-dedans du triangle, on aura* $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times BD$; donc BD $= \dfrac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2BC}$. Mais dans le triangle rectangle ABD, fig. 4. * 12. 3.

on a $R : sin\ BAD :: AB : BD$; d'ailleurs l'angle BAD étant complément de B, on a $sin\ BAD = cos\ B$; donc $cos\ B = \dfrac{R \times BD}{AB}$, ou en substituant la valeur de BD,

$$cos\ B = R \times \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2\ AB \times BC}$$

2° Si la perpendiculaire tombe au-dehors du triangle, on aura $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2BC \times BD$*; donc BD $= \dfrac{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}{2\ BC}$. Mais dans le triangle rectangle fig. 5. * 13. 3.

BAD, on a toujours sin BAD, ou $cos\ ABD = \dfrac{R \times BD}{AB}$, et l'angle ABD, étant supplément de ABC ou B, on a* $cos\ B = -\ cos\ ABD = -\ \dfrac{R \times BD}{AB}$; donc en substituant la valeur de BD, on aura encore * XI.

$$cos\ B = R \times \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2\ AB \times BC}.$$

XLVI. Soient A, B, C, les trois angles d'un triangle quelconque; a, b, c, les côtés qui leur sont respectivement opposés, on aura, suivant cette dernière proposition $\cos B = R.\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$. Le même principe étant appliqué à chacun des deux autres angles, donnera semblablement $\cos A = R.\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos C = R.\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

Ces trois formules suffisent seules pour résoudre tous les problêmes de la trigonométrie rectiligne ; car étant données trois des six quantités A, B, C, a, b, c, on a par ces formules les équations nécessaires pour déterminer les trois autres. Il faut par conséquent que les principes déja exposés, et ceux qu'on pourrait leur ajouter, ne soient qu'une conséquence de ces trois formules principales.

En effet, la valeur de $\cos B$ donne. . . . .

$$\sin^2 B = R^2 - \cos^2 B = R^2.\frac{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2c^2} = \frac{R^2}{4a^2c^2}$$
$(2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4)$; donc
$$\frac{\sin B}{b} = \frac{R}{2abc}\sqrt{(2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4)}.$$

Le second membre étant une fonction de a, b, c, dans laquelle ces trois lettres entrent toutes également, il est clair qu'on peut faire la permutation de deux de ces lettres à volonté, et qu'ainsi on aura $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$, ce qui est le principe du nº XLIV. Et de celui-ci se déduiraient facilement les principes des nºs XLII et XLIII.

XLVII. *Dans tout triangle rectiligne la somme de deux côtés est à leur différence, comme la tangente de la demi-somme des angles opposés à ces côtés, est à la tangente de la demi-différence de ces mêmes angles.*

Car de la proportion AB : AC :: $\sin$ C : $\sin$ B, on
fig. 4 et 5. tire AC + AB : AC — AB :: $\sin B + \sin C : \sin B - \sin C$.

Mais, d'après les formules de l'art. XXIX, on a

$$sin\ B+sin\ C : sin\ B-sin\ C :: tang\frac{B+C}{2} : tang\frac{B-C}{2};$$

donc

$$AC+AB : AC-AB :: tang\frac{B+C}{2} : tang\frac{B-C}{2};$$

ce qui est le principe énoncé.

Avec ce petit nombre de principes, on est en état de résoudre tous les cas de la trigonométrie rectiligne.

Résolution des triangles rectangles.

XLVIII. Soit A l'angle droit d'un triangle rectangle proposé, B et C les deux autres angles; soit a l'hypoténuse, b le côté opposé à l'angle B, et c le côté opposé à l'angle C. Il faudra se rappeler que les deux angles B et C sont compléments l'un de l'autre, et qu'ainsi, suivant les différents cas, on peut prendre $sin\ C = cos\ B$, $sin\ B = cos\ C$, et pareillement $tang\ B = cot\ C$, $tang\ C = cot\ B$. Cela posé, les différents problêmes qu'on peut avoir à résoudre sur les triangles rectangles se réduiront toujours aux quatre cas suivants.

PREMIER CAS.

XLIX. *Etant donnés l'hypoténuse* a *et un côté* b, *trouver le troisieme côté et les deux angles aigus.*

Pour déterminer l'angle B, on a la proportion* $a : b :: R : sin\ B$. Connaissant l'angle B, on connaîtra en même temps son complément $100^o - B = C$; on pourrait aussi avoir C directement par la proportion $a : b :: R : cos\ C$.

Quant au troisieme côté c, il peut se trouver de

* XLII.

deux manieres. Après avoir trouvé l'angle B, on
* XLIII. peut faire la proportion* R : *cot* B :: $b : c$, qui donnera la valeur de c; ou bien on peut tirer directement la valeur de c, de l'équation $c^2 = a^2 - b^2$ qui donne $c = \sqrt{(a^2 - b^2)}$, et par conséquent

$$\log c = \tfrac{1}{2} \log (a+b) + \tfrac{1}{2} \log (a-b).$$

DEUXIEME CAS.

L. *Étant donnés les deux côtés* b *et* c *de l'angle droit, trouver l'hypoténuse* a *et les angles.*

* XLIII. On aura l'angle B par la proportion * $c : b$ :: R : *tang* B. Ensuite on aura $C = 100^\circ - B$. On trouverait aussi C directement par la proportion $b : c$ :: R : *tang* C.

Connaissant l'angle B, on trouvera l'hypoténuse par la proportion *sin* B : R :: $b : a$; ou bien on peut avoir a directement par l'équation $a = \sqrt{(b^2 + c^2)}$; mais cette expression, dans laquelle $b^2 + c^2$ ne peut se décomposer en facteurs, est peu commode pour le calcul logarithmique.

TROISIEME CAS.

LI. *Etant donnés l'hypoténuse* a *et un angle* B, *trouver les deux autres côtés* b *et* c.

On fera les proportions R : *sin* B :: $a : b$, R : *cos* B :: $a : c$, lesquelles donneront les valeurs de b et c. Quant à l'angle C, il est égal au complément de B.

QUATRIEME CAS.

LII. *Etant donné un côté* b *de l'angle droit, avec l'un des angles aigus, trouver l'hypoténuse et l'autre côté.*

Connaissant l'un des angles aigus on connaîtra l'autre, ainsi on peut supposer connus le côté b, et l'angle opposé B. Ensuite, pour déterminer a et c, on aura les proportions

$$sin\,B : R :: b : a,\ R : cot\,B :: b : c.$$

Résolution des triangles rectilignes en général.

Soient A, B, C, les trois angles d'un triangle rectiligne proposé, et soient a, b, c, les côtés qui leur sont respectivement opposés : les différents problèmes qui peuvent avoir lieu pour déterminer trois de ces quantités par le moyen des trois autres, se réduiront toujours aux quatre cas suivants.

PREMIER CAS.

LIII. *Etant donnés le côté* a *et deux des angles du triangle, trouver les deux autres côtés* b *et* c.

Les deux angles connus feront connaître le troisieme, ensuite on trouvera les deux côtés b et c par les proportions*, * XLIV.

$$sin\,A : sin\,B :: a : b.$$
$$sin\,A : sin\,C :: a : c.$$

DEUXIEME CAS.

LIV. *Etant donnés les deux côtés* a *et* b, *avec l'angle* A *opposé à l'un de ces côtés, trouver le troisieme côté* c *et les deux autres angles* B *et* C.

On trouvera d'abord l'angle B par la proportion

$$a : b :: sin\,A : sin\,B.$$

Soit M l'angle aigu dont le sinus $= \frac{b\,sin\,A}{a}$, on pourra, d'après la valeur de sin B, prendre ou $B = M$ ou $B = 200^o - M$. Mais ces deux solutions n'auront lieu qu'autant qu'on aura à la fois l'angle A aigu et $b > a$. Si l'angle A est obtus, B ne saurait l'être, ainsi il n'y aura qu'une solution; et si A étant aigu on a $b < a$, il n'y aura non plus qu'une solution, parce qu'alors on a $M < A$, et qu'en faisant $B = 200° - M$, on aurait $A + B > 200°$, ce qui ne peut avoir lieu.

Connaissant les angles A et B, on en conclura le troisieme C. Ensuite on aura le troisieme côté c par la proportion

$$\sin A : \sin C :: a : c.$$

On peut aussi déduire c directement de l'équation $\frac{\cos A}{R} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, qui donne $c = \frac{b \cos a}{R} \pm \sqrt{\left(a^2 - \frac{b^2 \sin^2 A}{R^2}\right)}$. Mais cette valeur ne peut se calculer par logarithmes qu'au moyen d'un angle auxiliaire M ou B, ce qui rentre dans la solution précédente.

TROISIEME CAS.

LV. *Etant donnés deux côtés* a *et* b *avec l'angle compris* C, *trouver les deux autres angles* A *et* B *et le troisieme côté* c.

Connaissant l'angle C, on connaîtra la somme des deux autres angles $A + B = 200° - C$ et leur demi-somme $\frac{1}{2}(A + B) = 100° - \frac{1}{2}C$. Ensuite on calculera la demi-différence de ces mêmes angles par la pro-

* XLVII. portion*

$a + b : a - b :: \tang \frac{1}{2}(A + B)$ ou $\cot \frac{1}{2} C : \tang \frac{1}{2}(A - B)$ où l'on suppose $a > b$ et par conséquent $A > B$.

Ayant trouvé la demi-différence $\frac{1}{2}(A - B)$, si on l'ajoute à la demi-somme $\frac{1}{2}(A + B)$, on aura le plus grand angle A; si au contraire on retranche la demi-différence de la demi-somme, on aura le plus petit angle B. Car, A et B étant deux quantités quelconques, on a toujours

$$A = \frac{1}{2}(A + B) + \frac{1}{2}(A - B)$$
$$B = \frac{1}{2}(A + B) - \frac{1}{2}(A - B)$$

Les angles A et B étant connus, pour avoir le troisieme côté c, on fera la proportion

$$\sin A : \sin C :: a : c.$$

LVI. Il arrive souvent dans les calculs trigonométriques que deux côtés a et b sont connus par leurs logarithmes ; alors pour ne pas être obligé de chercher les deux nombres correspondants, on cherchera seulement l'angle φ par la proportion $b : a :: R : tang\,\varphi$. L'angle φ sera plus grand que 50^o, puisqu'on suppose $a > b$; retranchant donc 50^o de φ, on fera la proportion $R : tang\,(\varphi - 50^o) :: cot\,\frac{1}{2}C : tang\,\frac{1}{2}(A - B)$, d'où l'on déterminera comme ci-dessus la valeur de $\frac{1}{2}(A - B)$, et ensuite celles des deux angles A et B.

Cette solution est fondée sur ce que $tang\,(\varphi - 50^o) = \dfrac{R^2\,tang\,\varphi - R^2\,tang\,50^o}{R^2 + tang\,\varphi\,tang\,50^o}$; or $tang\,\varphi = \dfrac{aR}{b}$ et $tang\,50^o = R$; donc $tang\,(\varphi - 50^o) = \dfrac{R\,(a-b)}{a+b}$; donc $a+b : a-b :: R : tang\,(\varphi - 50^o) :: cot\,\frac{1}{2}C : tang\,\frac{1}{2}(A - B)$.

Quant au troisieme côté c, il peut se trouver directement par l'équation $\dfrac{cos\,C}{R} = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, qui donne $c = \sqrt{\left(a^2+b^2-\dfrac{2ab\,cos\,C}{R}\right)}$. Mais cette valeur n'est pas commode à calculer par logarithmes, à moins que les nombres qui représentent a, b, et $cos\,C$, ne soient très-simples.

Il est à remarquer que la valeur de c peut aussi se mettre sous ces deux formes : $c =$

$$\sqrt{\left[(a-b)^2 + 4ab\frac{sin^2\frac{1}{2}C}{R^2}\right]} = \sqrt{\left[(a+b)^2\frac{sin^2\frac{1}{2}C}{R^2} + (a-b)^2\frac{cos^2\frac{1}{2}C}{R^2}\right]}$$

ce qui se vérifie aisément au moyen des formules $sin^2\frac{1}{2}C = \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{2}R\,cos\,C$, $cos^2\frac{1}{2}C = \frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{2}R\,cos\,C$. Ces valeurs seront particulièrement utiles, lorsque l'angle C étant très-petit, ainsi que $a-b$, on voudra calculer c avec beaucoup de précision. La derniere fait voir que c serait l'hypoténuse d'un triangle rectangle formé sur les côtés $(a+b)\,\dfrac{sin\,\frac{1}{2}C}{R}$

et $(a-b)\frac{\cos\frac{1}{2}C}{R}$; et c'est ce qu'on peut aussi trouver par une construction fort simple.

fig. 6. Soit CAB le triangle proposé dans lequel on connaît les deux côtés $CB=a$, $CA=b$, et l'angle compris C. Du point C comme centre et du rayon CB égal au plus grand des deux côtés donnés, décrivez une circonférence qui rencontre en D et E le côté CA prolongé; joignez BD, BE, et menez AF perpendiculaire à BD. L'angle DBE inscrit dans la demi-circonférence sera un angle droit, ainsi les lignes AF, BE, seront paralleles, et on aura la proportion $BF : AE :: DF : AD :: \cos D : R$. On aura aussi dans le triangle rectangle DAF, $AF : DA :: \sin D : R$. Substituant donc les valeurs $DA=DC+CA=a+b$, $AE=CE-CA=a-b$, $D=\frac{1}{2}C$, on aura

$$AF=\frac{(a+b)\sin\frac{1}{2}C}{R},\quad BF=\frac{(a-b)\cos\frac{1}{2}C}{R}.$$

Donc en effet le troisieme côté AB du triangle proposé est l'hypoténuse du triangle rectangle ABF, dont les côtés sont $(a+b)\frac{\sin\frac{1}{2}C}{R}$ et $(a-b)\frac{\cos\frac{1}{2}C}{R}$. Si dans ce même triangle on cherche l'angle ABF opposé au côté AF, et qu'on en retranche l'angle $CBD=\frac{1}{2}C$, on aura l'angle B du triangle ABC. De-là on voit que la résolution du triangle ABC, dans lequel on connaît les deux côtés a et b et l'angle compris C, se réduit immédiatement à celle du triangle rectangle ABF, dans lequel on connaît les deux côtés de l'angle droit, savoir : $AF=(a+b)\frac{\sin\frac{1}{2}C}{R}$ et $BF=(a-b)\frac{\cos\frac{1}{2}C}{R}$. Ainsi, par cette construction, on pourrait se passer de la proposition du n° 47.

QUATRIEME CAS.

LVII. *Etant donnés les trois côtés* a, b, c, *trouver les trois angles* A, B, C.

L'angle A, opposé au côté a, se trouve par la formule $\cos A = R.\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, et on déterminera semblablement les deux autres angles. Mais on peut résoudre ce même cas par une formule plus commode pour le calcul logarithmique.

Si on se rappelle la formule $R^2 - R \cos A = 2 \sin^2 \frac{1}{2} A$, et qu'on y substitue la valeur de $\cos A$, on aura $2 \sin^2 \frac{1}{2} A = R^2.\frac{a^2 - b^2 - c^2 + 2bc}{2bc} = R^2.\frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} = R^2.\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$. Donc $\sin \frac{1}{2} A = R \sqrt{\left(\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}\right)}$. Soit, pour abréger, $\frac{1}{2}(a+b+c) = p$, ou $a+b+c = 2p$, on aura $a+b-c = 2p - 2c$, $a-b+c = 2p - 2b$; donc

$$\sin \frac{1}{2} A = R \sqrt{\left(\frac{(p-b)(p-c)}{bc}\right)}.$$

Formule qui donne aussi la proportion

$$bc : (p-b)(p-c) :: R^2 : \sin^2 \tfrac{1}{2} A$$

et qui est facile à calculer par logarithmes. Connaissant le logarithme de $\sin \frac{1}{2} A$, on connaîtra $\frac{1}{2} A$ dont le double sera l'angle cherché A. On pourra faire de même par rapport à chacun des deux autres angles B et C.

Il y a d'autres formules également propres à résoudre la question. Et d'abord la formule $R^2 + R \cos A = 2 \cos^2 \frac{1}{2} A$ donne $\cos^2 \frac{1}{2} A = R^2.\frac{b^2 + c^2 + 2bc - a^2}{4bc} = R^2.\frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc} = R^2.\frac{(b+c-a)(b+c+a)}{4bc}$. Mais en faisant toujours $a+b+c = 2p$, on a $b+c-a = 2p - 2a$; donc

$$\cos \frac{1}{2} A = R \sqrt{\left(\frac{(p-a)p}{bc}\right)}.$$

Cette valeur étant ensuite combinée avec celle de $sin \frac{1}{2} A$ donnera une autre formule, car ayant $tang \frac{1}{2} A = \frac{R \, sin \frac{1}{2} A}{cos \frac{1}{2} A}$ on en tire

$$tang \tfrac{1}{2} A = R \sqrt{\left(\frac{p-b.p-c}{p.p-a}\right)}.$$

Exemples de la résolution des triangles rectilignes.

LVIII. *Exemple* I. Supposons qu'on veuille avoir
fig. 7. la hauteur d'un édifice AB, dont le pied est accessible.

Ayant mesuré sur le terrain, supposé à-peu-près de niveau, une base AD qui ne soit ni très-grande ni très-petite par rapport à la hauteur AB, on placera en D le pied du cercle ou de l'instrument quelconque avec lequel on doit mesurer l'angle BCE formé par la ligne horizontale CE parallele à AD, et par le rayon visuel CB dirigé au sommet de l'édifice. Supposons qu'on ait trouvé AD ou CE $=$ 67.84 metres et l'angle BCE $= 45^{\circ}\ 64'$; pour avoir BE, il faudra résoudre le triangle rectangle BCE dans lequel on connaît l'angle C et le côté adjacent EC. Ainsi, d'après le cas IV, on fera la proportion R : *tang* $45^{\circ}\ 64'$ :: 67.84 : BE.

L. *tang* $45^{\circ}\ 64'$	9.9403263
L. 67.84	1.8314858
Somme — *log* R $=$	1.7718121

Ce logarithme répond à 59.130, ainsi on a BE $=$ 59^{m}. 13. Ajoutant à BE la hauteur de l'instrument CD ou AE que je suppose 1^{m}. 12, on aura la hauteur cherchée AB $= 60^{m}$. 25.

Si dans le même triangle BEC on veut connaître l'hypoténuse BC, on fera la proportion $cos\ 45^\circ\ 64'$: R :: 67.84 : BC

L. R + L. 67.84	11.8314858
L. cos 45° 64′	9.8772784
Différence	1.9542074 = L. BC.

Donc BC = 89^{m}. 993.

N. B. Si l'on ne voyait que le sommet B de l'édifice ou du lieu quelconque dont on veut connaître la hauteur, on déterminerait la distance BC comme il sera dit dans l'exemple suivant : cette distance et l'angle connu BCE suffisent pour résoudre le triangle rectangle BCE, dont le côté BE augmenté de la hauteur de l'instrument, sera la hauteur demandée.

LIX. *Exemple* II. Pour avoir sur le terrain la distance du point A à un objet inaccessible B, on mesurera une base AD et les deux angles adjacents BAD, ADB. Supposons qu'on ait trouvé AD = 588^{m}. 45, BAD = 115° 48′ et BDA = 40° 8′, on en conclura le troisieme angle ABD = 44° 44′ ; et pour avoir AB, on fera la proportion sin ABD : sin ADB :: AD : AB. fig. 8.

L. AD.	2.7697096
L. sin ADB.	9.7699689
Somme.	2.5396785
L. sin ABD.	9.8080314
L. AB.	2.7316471

Donc la distance cherchée AB = 539^{m}. 07

Si, pour un autre objet inaccessible C, on a trouvé les angles CAD = 39° 17′, ADC = 132° 83′, on en conclura de même la distance AC = 1202^{m}. 32.

LX. *Exemple* III. Pour trouver la distance entre deux objets inaccessibles B et C, on déterminera AB et AC, comme dans l'exemple précédent, et on aura en même temps l'angle compris BAC = BAD − fig. 8.

DAC (1). Supposons qu'on ait trouvé AB $=539^{m}.07$, AC $=1202^{m}.32$, et l'angle BAC $=76^{o}\ 31'$; pour avoir BC, il faudra résoudre le triangle BAC dans lequel on connaît deux côtés, et l'angle compris. Or, d'après le troisieme cas, on a la proportion $AC+AB : AC-AB :: tang\,\frac{B+C}{2} : tang\,\frac{B-C}{2}$, ou

$1741.39 : 663.25 :: tang\ 61^{o}\ 84'\ \frac{1}{2} : tang\,\frac{B-C}{2}$.

L. 663.25	2.8216773
L. *tang* 61° 84′ ½	10.1654748
Somme	12.9871521
L. 1741.39	3.2408960
L. *tang* $\frac{B-C}{2}$	9.7462561

Donc . . . . $\frac{B-C}{2} =$ 32° 37′, 8

Mais on a . . . . . . $\frac{B+C}{2} =$ 61° 84′, 5

Donc . . . . B = 94° 22′, 3

et. . . . . C = 29° 46′. 7

Maintenant, pour avoir la distance BC, on fera la proportion *sin* B : *sin* A :: AC : BC, ou

$$sin\ 94^{o}22'.3 : sin\ 76^{o}\ 31' :: 1202^{m}.32 : BC$$

L. 1202. 32	3.0800200
L. *sin* 76° 31′	9.9692099
Somme	13.0492299
L. *sin* 94° 22′, 3	9.9982096
L. BC.	3.0510203

Donc la distance cherchée BC $=1124^{m}.66$.

(1) Il pourrait arriver que les quatre points A, B, C, D, ne fussent pas dans un même plan ; alors l'angle BAC ne serait plus la différence entre BAD et DAC, et il faudrait avoir, par une mesure directe, la valeur de cet angle : à cela près, l'opération serait la même.

LXI. *Exemple* IV. Trois points A, B, C, étant donnés sur la carte d'un pays, on propose de déterminer la position d'un quatrieme point M, d'où on aurait mesuré les angles AMB, AMC; les quatre points étant supposés dans le même plan. fig. 9.

Sur AB décrivez un segment AMDB, capable de l'angle donné BMA; sur AC, décrivez pareillement un segment AMC capable de l'angle donné AMC; les deux arcs se couperont en A et M, et le point M sera le point requis. Car les points de l'arc AMDB sont les seuls d'où l'on puisse voir AB sous un angle égal à AMB; ceux de l'arc AMC sont les seuls d'où l'on puisse voir AC sous un angle égal à AMC; donc le point M, intersection de ces deux arcs, est aussi le seul d'où l'on puisse voir à la fois AB et AC sous les angles AMB, AMC. Il s'agit maintenant de calculer trigonométriquement la position du point M, d'après cette construction.

Soient les données $AB = 2500^m$, $AC = 7000^m$, $BC = 9000^m$, $AMB = 30^o\ 80'$, $AMC = 121^o\ 40'$. Dans le triangle ABC, où l'on connaît les trois côtés, on déterminera l'angle BAC* par la formule *LVII.

$sin^2 \frac{1}{2} A = R^2 . \frac{6750.2250}{2500.7000}$; d'où l'on tire $2 \log \sin \frac{1}{2} A =$

19.9384483, $\log \sin \frac{1}{2} A = 9.9692241$, $\frac{1}{2} A = 76^o 31'.5$, et enfin $A = 152^o\ 63'$. Tirez le diametre AD et joignez DB; dans le triangle BAD rectangle en B, on aura le côté $BA = 2500$, et l'angle opposé BDA $= BMA = 30^o\ 80'$; d'où résulte l'hypoténuse AD

$= \frac{BA \times R}{\sin BDA} = 5374^m.6$. Tirant de même le diametre

AE et joignant CE, on aura un triangle rectangle CAE dans lequel on connaît le côté $AC = 7000$, et l'angle adjacent $CAE = AMC - 100^o = 21^o 40'$; d'où l'on conclura $AE = \frac{R \times AC}{cos\ CAE} = 7415^m$.

Maintenant si l'on tire MD et ME, les deux angles AMD, AME, étant droits, la ligne DME sera droite. Il reste donc à résoudre le triangle DAE dans lequel la ligne AM, dont il faut déterminer la grandeur et la position, est perpendiculaire à DE. Or, dans ce triangle on a les côtés donnés $AD = 5374.6$, $AE = 7415$, et l'angle compris $DAE = BAC + CAE - DAB = 104^o 83'$. De-là on conclura l'angle $ADE = 56^o 93'$; et enfin par le triangle rectangle DAM on aura $AM = 4190^m. 83$. Cette distance et l'angle $BAM = 112^o 27'$ déterminent entièrement la position du point M.

Nota. Si on veut calculer les mêmes exemples au moyen des tables construites suivant l'ancienne division du cercle, il faudra changer comme il suit l'expression des angles donnés ou calculés; du reste toutes les valeurs logarithmiques et celles des côtés resteront les mêmes.

Exemple I. Angle donné $BCE = 41^o 4' 33''. 6$, ou simplement $BCE = 41^o 4' 30''$, car dans ces sortes d'opérations, quelques secondes de plus ou de moins dans les angles, n'influent pas sensiblement sur les distances qu'on veut déterminer.

Ex. II. Angles donnés $BAD = 103^o 55' 55''. 2$, $BDA = 36^o 4' 19''. 2$, $ABD = 39^o 59' 45''. 6$, $CAD = 35^o 15' 10''. 8$, $ADC = 119^o 32' 49''. 2$.

Ex. III. Angle donné $BAC = 68^o 40' 44''. 4$,
Angle conclu $\frac{1}{2}(B+C) = 55^o 39' 37''. 8$.
Angles calculés $\frac{1}{2}(B-C) = 29^o 8' 24''. 7$
$B = 84^o 48' 2''. 5$, $C = 26^o 31' 13''. 1$.

Ex. IV. Angles donnés $AMB = 27^o 43' 12''$, $AMC = 109^o 15' 36''$, Angles calculés $A = 137^o 22' 1''. 2$, $DAE = 94^o 20' 49''$, 2^o $BAM = 101^o 2' 34''. 8$

Principes pour la résolution des triangles sphériques rectangles.

LXII. *Dans tout triangle sphérique rectangle, le rayon est au sinus de l'hypoténuse, comme le sinus d'un des angles obliques est au sinus du côté opposé.*

Soit ABC le triangle sphérique proposé, A son angle droit, B et C les deux autres angles que nous appellerons *angles obliques*, et qui cependant pourraient être droits l'un ou l'autre, ou tous les deux; je dis qu'on aura la proportion R : *sin* BC :: *sin* B : *sin* AC. fig. 10.

Du centre O de la sphere, menez les rayons OA, OB, OC; prenez ensuite OF égal au rayon des tables, et du point F menez FD perpendiculaire sur OA; la ligne FD sera perpendiculaire au plan OAB, puisque, par hypothese, l'angle A est droit, et qu'ainsi les deux plans OAB, OAC sont perpendiculaires entre eux. Du point D menez DE perpendiculaire sur OB, et joignez EF; la ligne EF sera aussi perpendiculaire sur OB, et ainsi l'angle DEF mesurera l'inclinaison des deux plans OBA, OBC, et sera égal à l'angle B du triangle ABC. Cela posé dans le triangle DEF rectangle en D, on a R : *sin* DEF :: EF : DF; or l'angle DEF $=$ B, et puisque OF $=$ R, on a EF $=$ *sin* EOF $=$ *sin* BC, DF $=$ *sin* AC. Donc R : *sin* B :: *sin* BC : *sin* AC, ou

$$R : \sin BC :: \sin B : \sin AC.$$

Si on appelle a l'hypoténuse ou le côté opposé à l'angle droit A, b le côté opposé à l'angle B, c le côté opposé à l'angle C, on aura donc

$$R : \sin a :: \sin B : \sin b :: \sin C : \sin c,$$

ce qui fournit déja deux équations entre les parties du triangle sphérique rectangle.

25.

LXIII. *Dans tout triangle sphérique rectangle le rayon est au cosinus d'un angle oblique, comme la tangente de l'hypoténuse est à la tangente du côté adjacent à cet angle.*

fig. 10. Soit toujours ABC le triangle proposé rectangle en A, je dis qu'on aura R : *cos* B :: *tang* BC : *tang* AB.

Car en faisant la même construction que ci-dessus, le triangle rectangle DEF donne la proportion R : *cos* DEF :: EF : ED. Or on a DEF $=$ B, EF $=$ *sin* BC, OE $=$ *cos* BC, et dans le triangle OED rectangle en E, on a $\mathrm{DE} = \frac{\mathrm{OE}\ tang\ \mathrm{DOE}}{\mathrm{R}} = \frac{cos\ \mathrm{BC}\ tang\ \mathrm{AB}}{\mathrm{R}}$; donc R : *cos* B :: *sin* BC : $\frac{cos\ \mathrm{BC}\ tang\ \mathrm{AB}}{\mathrm{R}} :: \frac{\mathrm{R}\ sin\ \mathrm{BC}}{cos\ \mathrm{BC}}$: *tang* AB, ou enfin

$$\mathrm{R} : cos\ \mathrm{B} :: tang\ \mathrm{BC} : tang\ \mathrm{AB}.$$

Si on fait comme ci-dessus BC $= a$ et AB $= c$ on aura R : *cos* B :: *tang* a : *tang* c, ou $cos\ \mathrm{B} = \frac{\mathrm{R}\, tang\ c}{tang\ a} = \frac{tang\ c\ cot\ a}{\mathrm{R}}$. Le même principe appliqué à l'angle C, donnera $cos\ \mathrm{C} = \frac{\mathrm{R}\ tang\ b}{tang\ a} = \frac{tang\ b\ cot\ a}{\mathrm{R}}$.

LXIV. *Dans tout triangle sphérique rectangle le rayon est au cosinus d'un côté de l'angle droit, comme le cosinus de l'autre côté est au cosinus de l'hypoténuse.*

Soit ABC le triangle proposé rectangle en A, je
fig. 10. dis qu'on aura R : *cos* AB :: *cos* AC : *cos* BC.

Car la construction étant la même que dans les deux propositions précédentes, le triangle ODF rectangle en D, où l'on a l'hypoténuse OF $=$ R, donnera OD $=$ *cos* DOF $=$ *cos* AC; ensuite le triangle ODE rectangle en E, donnera $OE = \frac{OD\ cos\ DOE}{R} = \frac{cos\ AC\ cos\ AB}{R}$. Mais dans le triangle rectangle OEF, on a $OE = cos\ BC$; donc $cos\ BC = \frac{cos\ AC\ cos\ AB}{R}$, ou, ce qui revient au même,

$$R : cos\ AC :: cos\ AB : cos\ BC.$$

Ce troisieme principe s'exprime par l'équation $R\ cos\ a = cos\ b\ cos\ c$; il n'est pas susceptible d'en fournir une seconde, comme les deux précédents, parce que la permutation faite entre b et c n'apporte aucun changement à l'équation.

LXV. Au moyen de ces trois principes généraux, on en peut trouver trois autres nécessaires pour la résolution des triangles sphériques rectangles. Ces derniers principes pourraient se démontrer directement, chacun par une construction particuliere; mais il est préférable de les déduire des trois premiers par voie d'analyse, ainsi qu'on va le faire.

Les équations $sin\ B = \frac{R\ sin\ b}{sin\ a}$, $cos\ C = \frac{R\ tang\ b}{tang\ a}$ donnent par leur division $\frac{cos\ C}{sin\ B} = \frac{tang\ b}{sin\ b} \cdot \frac{sin\ a}{tang\ a} = \frac{cos\ a}{cos\ b} =$ (suivant le troisieme principe) $\frac{cos\ c}{R}$. On a donc ce quatrieme principe

$$sin\ B : cos\ C :: R : cos\ c,$$

duquel résulte aussi par la permutation des lettres $sin\ C : cos\ B :: R : cos\ b$.

Le premier et le second principe donnent $sin\ B := \frac{R\ sin\ b}{sin\ a}$, $cos\ B = \frac{R\ tang\ c}{tang\ a}$; de là on déduit $\frac{sin\ B}{cos\ B}$ ou $\frac{tang\ B}{R} = \frac{sin\ b\ tang\ a}{sin\ a\ tang\ c} = \frac{R\ sin\ b}{cos\ a\ tang\ c} =$ (en vertu du troisieme principe) $\frac{R^2\ sin\ b}{cos\ b\ cos\ c\ tang\ c} =$

$\frac{tang\ b}{sin\ c}$. Donc on a pour cinquieme principe l'équation $tang\ \mathrm{B} = \frac{\mathrm{R}\ tang\ b}{sin\ c}$, ou l'analogie

$$\mathrm{R} : tang\ \mathrm{B} :: sin\ c : tang\ b\,;$$

d'où résulte aussi par la permutation des lettres:

$$\mathrm{R} : tang\ \mathrm{C} :: sin\ b : tang\ c.$$

Enfin ces deux formules donnent $tang\ \mathrm{B}\ tang\ \mathrm{C} = \frac{\mathrm{R}^2\ tang\ b\ tang\ c}{sin\ b\ sin\ c} = \frac{\mathrm{R}^4}{cos\ b\ cos\ c} =$ (en vertu du troisieme principe) $\frac{\mathrm{R}^3}{cos\ a}$. Donc $\mathrm{R}^3 = cos\ a\ tang\ \mathrm{B}\ tang\ \mathrm{C}$, ou $cot\ \mathrm{B}\ cot\ \mathrm{C} = \mathrm{R}\ cos\ a$, ou

$$tang\ \mathrm{B} : cot\ \mathrm{C} :: \mathrm{R} : cos\ a.$$

C'est le sixieme et dernier principe : il n'est pas susceptible de fournir une autre équation, parce que la permutation entre C et B n'y produit aucun changement.

Voici la récapitulation de ces six principes dont quatre donnent chacun deux équations :

I. $\mathrm{R}\ sin\ b = sin\ a\ sin\ \mathrm{B}$, $\mathrm{R}\ sin\ c = sin\ a\ sin\ \mathrm{C}$
II. $\mathrm{R}\ tang\ b = tang\ a\ cos\ \mathrm{C}$, $\mathrm{R}\ tang\ c = tang\ a\ cos\ \mathrm{B}$
III. $\mathrm{R}\ cos\ a = cos\ b\ cos\ c$,
IV. $\mathrm{R}\ cos\ \mathrm{B} = sin\ \mathrm{C}\ cos\ b$, $\mathrm{R}\ cos\ \mathrm{C} = sin\ \mathrm{B}\ cos\ c$
V. $\mathrm{R}\ tang\ b = sin\ c\ tang\ \mathrm{B}$, $\mathrm{R}\ tang\ c = sin\ b\ tang\ \mathrm{C}$
VI. $\mathrm{R}\ cos\ a = cot\ \mathrm{B}\ cot\ \mathrm{C}$.

Il en résulte dix équations contenant toutes les relations qui peuvent exister entre trois des cinq éléments B, C, a, b, c; de sorte que deux de ces quantités étant connues avec l'angle droit, on connaîtra immédiatement la troisieme par son sinus, son cosinus, sa tangente ou sa cotangente.

LXVI. Il est à remarquer que lorsqu'un élément sera déterminé par son sinus seulement, il y aura deux valeurs de cet élément, et par conséquent deux triangles qui satisferont à la question. le Car même sinus qui convient à un angle ou à un arc, convient aussi à son supplément. Il n'en est pas de même lorsque l'élément inconnu sera déterminé par son cosinus, sa tangente ou sa cotangente. Alors on pourra décider, par le signe de cette valeur, si l'élément dont il s'agit est plus grand ou plus petit que $100°$; l'élément sera plus petit que $100°$, si son cosinus, sa tangente ou sa cotangente a le signe $+$; il sera plus grand que $100°$, si l'une de ces lignes a le signe $-$. On pourrait aussi établir sur ce sujet des préceptes généraux qui ne seraient que des conséquences des six équations démontrées.

Par exemple, il résulte de l'équation $R \cos a = \cos b \cos c$, que les trois côtés d'un triangle sphérique rectangle sont tous moindres que $100°$, ou que des trois côtés deux sont plus grands que $100°$, et le troisieme moindre. Aucune autre combinaison ne peut rendre le signe de $\cos b \cos c$ pareil à celui de $\cos a$, comme cette équation l'exige.

De même l'équation $R \operatorname{tang} c = \sin b \operatorname{tang} C$, où $\sin b$ est toujours positif, prouve que $\operatorname{tang} C$ a toujours le même signe que $\operatorname{tang} c$. Donc *dans tout triangle sphérique rectangle un angle oblique et le côté qui lui est opposé, sont toujours de la même espece; c'est-à-dire, sont tous deux plus grands ou tous deux plus petits que* $100°$.

Résolution des triangles sphériques rectangles.

LXVII. Un triangle sphérique peut avoir trois angles droits, et alors ses trois côtés sont de $100°$; il peut avoir deux angles droits seulement, alors les côtés opposés sont tous deux de $100°$, et il reste un angle avec le côté opposé qui sont mesurés l'un et l'autre par le même nombre de dégrés. Ces deux sortes de triangles ne peuvent, comme on voit, donner lieu à aucun problême; on peut donc faire abstraction de ces cas particuliers, pour ne considérer que les triangles qui ont un angle droit seulement.

Soit A l'angle droit, B et C les deux autres angles qu'on appelle angles obliques, soit *a* l'hypoténuse opposée à l'angle A, *b* et *c* les côtés opposés aux angles B et C. Etant données deux des cinq quantités B, C, *a, b, c,* la résolution du triangle se réduira toujours à l'un des six cas suivants.

PREMIER CAS.

LXVIII. *Etant donnés l'hypoténuse* a *et un côté* b, *on trouvera les deux angles* B *et* C *et le troisieme côté* c *par les équations*

$$\sin B = \frac{R \sin b}{\sin a}, \; \cos C = \frac{\tan b \cot a}{R}, \; \cos c = \frac{R \cos a}{\cos b}.$$

L'angle C ne peut laisser aucune incertitude, non plus que le côté *c;* quant à l'angle B, il doit être de même espece que le côté donné *b*.

DEUXIEME CAS.

LXIX. *Etant donnés les deux côtés de l'angle droit* b *et* c, *on trouvera l'hypoténuse* a *et les angles* B *et* C *par les équations*

$$\cos a = \frac{\cos b \cos c}{R}, \; \tan B = \frac{R \tan b}{\sin c}, \; \tan C = \frac{R \tan c}{\sin b}$$

Il n'y a dans ce cas aucune ambiguité.

TROISIEME CAS.

LXX. *Etant donnés l'hypoténuse* a *et un angle* B, *on aura les deux côtés* b *et* c *et l'autre angle* C *par les équations*

$$\sin b = \frac{\sin a \sin B}{R}, \; \tan c = \frac{\tan a \cos B}{R}, \; \cot C = \frac{\cos a \tan B}{R}$$

Les éléments *c* et C sont déterminés sans ambiguité par ces formules; quant au côté *b,* il sera de même espece que l'angle B.

QUATRIEME CAS.

LXXI. *Etant donné le côté de l'angle droit* b *avec l'angle opposé* B, *on trouvera les trois autres éléments* a, c *et* C *par les formules*

$$sin\ a = \frac{R\ sin\ b}{sin\ B},\ sin\ c = \frac{tang\ b\ cot\ B}{R},\ sin\ C = \frac{R\ cos\ B}{cos\ b}.$$

Dans ce cas, les trois éléments inconnus sont déterminés par des sinus, ainsi la question est susceptible de deux solutions. Il est évident en effet que le triangle ABC et le triangle AB′C sont tous deux rectangles en A, ont tous deux le même côté AC $= b$ et le même angle opposé B $=$ B′. Au reste, les valeurs doubles doivent se combiner de maniere que c et C soient de la même espece; ensuite l'espece de c et b détermine celle de a par l'inspection de la formule $cos\ b\ cos\ c = R\ cos\ a$, mais la valeur de a se déterminera directement par l'équation $sin\ a = \frac{R\ sin\ b}{sin\ B}$. fig 11.

CINQUIEME CAS.

LXXII. *Etant donné un côté de l'angle droit* b *avec l'angle adjacent* C, *on trouvera les trois autres éléments* a, c, B, *par les formules*

$$cot\ a = \frac{cot\ b\ cos\ C}{R},\ tang\ c = \frac{sin\ b\ tang\ C}{R},\ cos\ B = \frac{cos\ b\ sin\ C}{R}.$$

Dans ce cas il ne peut rester aucune incertitude sur l'espece des éléments inconnus.

SIXIEME CAS.

LXXIII. *Etant donnés les angles obliques* B *et* C, *on trouvera les trois côtés* a, b, c, *par les formules*

$$cos\ a = \frac{cot\ B\ cot\ C}{R},\ cos\ b = \frac{R\ cos\ B}{sin\ C},\ cos\ c = \frac{R\ cos\ C}{sin\ B}$$

Et dans ce cas il ne reste encore aucune incertitude.

REMARQUE.

LXXIV. Le triangle sphérique dont A, B, C, sont les angles, et a, b, c les côtés opposés, répond toujours à un triangle polaire dont les angles sont suppléments des côtés a, b, c, et les côtés suppléments des angles A, B, C; de sorte que si on appelle A', B', C', les angles du triangle polaire, et a', b', c', les côtés opposés à ces angles, on aura

$$A' = 200^\circ - a,\ B' = 200^\circ - b,\ C' = 200^\circ - c$$
$$a' = 200^\circ - A,\ b' = 200^\circ - B,\ c' = 200^\circ - C.$$

Cela posé, si un triangle sphérique a un côté a égal au quadrant, il est visible que l'angle correspondant A' du triangle polaire sera droit, et qu'ainsi ce triangle sera rectangle. Donc les deux données qu'on doit avoir, outre le côté de 100°, pour résoudre le triangle proposé, serviront à trouver la solution du triangle polaire, et par suite celle du triangle proposé. On pourrait tirer de là des formules semblables aux précédentes pour résoudre directement les triangles sphériques qui ont un côté de 100°.

Un triangle isoscele se partage en deux triangles rectangles égaux dans toutes leurs parties, ainsi la résolution des triangles sphériques isosceles dépend encore de celle des triangles sphériques rectangles.

fig. 12. Soit ABC un triangle sphérique, tel que les deux côtés AB, BC soient suppléments l'un de l'autre; si on prolonge les côtés AB, AC jusqu'à leur rencontre en D, il est clair que BC et BD seront égaux comme étant suppléments d'un même côté AB; d'ailleurs il est visible que les parties du triangle BCD étant connues, on connaît celles du triangle ABC qui est le reste du fuseau AD, et *vice versâ*. Donc la résolution du triangle ABC, dans lequel deux côtés font ensemble 200°, se réduit à celle du triangle isoscele BCD, ou à celle du triangle rectangle BDE qui est la moitié de CBD.

Lorsque les deux côtés AB, BC, sont suppléments l'un de l'autre, il faut que les angles opposés ACB, BAC, soient aussi suppléments l'un de l'autre; car BCD est supplément de BCA; or BCD=D=A. Donc on ne peut avoir $a+c=200°$, sans avoir en même temps $A+C=200°$, ce qui est réciproque.

De là on voit que la résolution des triangles sphériques rectangles comprend, 1° celle des triangles sphériques qui ont un côté égal au quadrant; 2° celle des triangles sphériques isosceles; 3° celle des triangles sphériques dans lesquels la somme de deux côtés est de 200°, ainsi que celle des deux angles opposés.

Principes pour la résolution des triangles sphériques en général.

LXXV. *Dans tout triangle sphérique les sinus des angles sont comme les sinus des côtés opposés.*

Soit ABC un triangle sphérique quelconque, je dis qu'on aura *sin* B : *sin* C :: *sin* AC : *sin* AB. fig. 13.

Du sommet A abaissez l'arc AD perpendiculaire sur le côté opposé BC, les triangles rectangles ABD ACD donneront les proportions

sin B : R :: *sin* AD : *sin* AB
R : *sin* C :: *sin* AC : *sin* AD.

Multipliant ces deux proportions par ordre et omettant les facteurs communs, on aura

sin B : *sin* C :: *sin* AC : *sin* AB.

Si la perpendiculaire AD tombait au dehors du triangle ABC, on aurait les deux mêmes proportions dans l'une desquelles *sin* C désignerait *sin* ACD; mais comme l'angle ACD et l'angle ACB sont suppléments l'un de l'autre, leurs sinus sont égaux; ainsi on aurait toujours *sin* B : *sin* C :: *sin* AC : *sin* AB. fig. 14.

Soient a, b, c, les côtés opposés aux angles A, B, C, chacun à chacun, on aura, suivant cette proposition, $\sin A : \sin a :: \sin B : \sin b :: \sin C : \sin c$; ce qui donne la double équation :

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}.$$

LXXVI. *Dans tout triangle sphérique le cosinus d'un angle est égal au quarré du rayon multiplié par le cosinus du côté opposé, moins le produit du rayon par les cosinus des côtés adjacents, le tout divisé par le produit des sinus de ces mêmes côtés : c'est-à-dire qu'on a pour l'angle* C, *par exemple*, $\cos C = \frac{R^2 \cos c - R \cos a \cos b}{\sin a \sin b}$. *On aurait semblablement pour les deux autres angles*, $\cos A = \frac{R^2 \cos a - R \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$, *et* $\cos B = \frac{R^2 \cos b - R \cos a \cos c}{\sin a \sin c}$.

fig. 15. Soit ABC le triangle proposé dans lequel on fait $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Du point O, centre de la sphere, tirez les droites indéfinies OA, OB, OC; prenez OD à volonté, et par le point D, menez DE dans le plan OCA et DF dans le plan OCB, toutes deux perpendiculaires à OD, lesquelles rencontrent en E et F les rayons OA, OB, prolongés ; enfin joignez EF.

L'angle D du triangle EDF est par construction la mesure de l'angle que font entre eux les plans OCA, OCB, ainsi l'angle EDF est égal à l'angle C du triangle sphérique ACB : or dans les triangles
LXV. DEF, OEF, on a

$$\frac{\cos EDF}{R} = \frac{\overline{DE}^2 + \overline{DF}^2 - \overline{EF}^2}{2 DE . DF}$$

$$\frac{\cos \mathrm{EOF}}{\mathrm{R}} = \frac{\overline{\mathrm{OE}}^2 + \overline{\mathrm{OF}}^2 - \overline{\mathrm{EF}}^2}{2\,\mathrm{OE}.\mathrm{OF}}$$

Prenant dans la seconde la valeur de $\overline{\mathrm{EF}}^2$, et la substituant dans la premiere, on aura

$$\frac{\cos \mathrm{EDF}}{\mathrm{R}} = \frac{\overline{\mathrm{DE}}^2 + \overline{\mathrm{DF}}^2 - \overline{\mathrm{OE}}^2 - \overline{\mathrm{OF}}^2 + 2\,\mathrm{OE}.\mathrm{OF}\,\frac{\cos \mathrm{EOF}}{\mathrm{R}}}{2\,\mathrm{DE}.\mathrm{DF}}$$

Or $\overline{\mathrm{OE}}^2 - \overline{\mathrm{DE}}^2 = \overline{\mathrm{OD}}^2$ et $\overline{\mathrm{OF}}^2 - \overline{\mathrm{DF}}^2 = \overline{\mathrm{OD}}^2$, on a donc

$$\cos \mathrm{EDF} = \frac{\mathrm{OE}.\mathrm{OF}.\cos \mathrm{EOF} - \overline{\mathrm{OD}}^2.\mathrm{R}}{\mathrm{DE}.\mathrm{DF}}.$$

Il ne s'agit plus que de substituer dans cette équation les valeurs relatives au triangle sphérique : or on a $\mathrm{EDF} = \mathrm{C}$, $\mathrm{EOF} = \mathrm{AB} = c$, $\frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{DE}} = \frac{\mathrm{R}}{\sin \mathrm{DOE}} = \frac{\mathrm{R}}{\sin b}$, $\frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{DF}} = \frac{\mathrm{R}}{\sin \mathrm{DOF}} = \frac{\mathrm{R}}{\sin a}$, $\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{DE}} = \frac{\cos \mathrm{DOE}}{\sin \mathrm{DOE}} = \frac{\cos b}{\sin b}$, $\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{DF}} = \frac{\cos \mathrm{DOF}}{\sin \mathrm{DOF}} = \frac{\cos a}{\sin a}$. Donc

$$\cos \mathrm{C} = \frac{\mathrm{R}^2 \cos c - \mathrm{R} \cos a \cos b}{\sin a \sin b}.$$

Ce principe, qui, étant appliqué successivement aux trois angles, fournit trois équations, suffit pour la résolution de tous les problêmes de la trigonométrie sphérique : il a, par rapport aux triangles sphériques, la même généralité que le principe de l'art. XLV, par rapport aux triangles plans. En effet, puisqu'on a toujours trois éléments donnés par le moyen desquels il faut déterminer les trois autres, il est clair que ce principe donne les équations nécessaires pour résoudre le problême; équations qu'il appartient à l'analyse de développer ultérieurement, pour en tirer, suivant les différents cas, les formules le plus simples et les mieux adaptées au calcul logarithmique.

LXXVII. Puisque le principe dont nous parlons est absolument général, il doit renfermer tous les autres principes relatifs aux triangles sphériques, et notamment le principe du n° LXXV. C'est ce qu'il est facile devérifier.

En effet l'équation $cos\ C = \frac{R^2\ cos\ c - R\ cos\ a\ cos\ b}{sin\ a\ sin\ b}$ donne $R^2 - cos^2\ C$ ou $sin^2\ C =$

$$\frac{R^2 sin^2 a\, sin^2 b - R^2 cos^2 a\, cos^2 b + 2R^3 cos\, a\, cos\, b\, cos\, c - R^4 cos^2 c}{sin^2 a\ sin^2 b}$$

Or $sin^2\ a\ sin^2\ b = (R^2 - cos^2\ a)\ (R^2 - cos^2\ b) = R^4 - R^2\ cos^2\ a - R^2\ cos^2\ b + cos^2\ a\ cos^2\ b$. Donc en substituant et extrayant la racine, on aura

$$sin\ C = \frac{R}{sin\, a\, sin\, b} \sqrt{(R^4 - R^2 cos^2 a - R^2 cos^2 b - R^2 cos^2 c + 2R\, cos\, a\, cos\, b\, cos\, c)}.$$

Soit pour abréger $Z =$
$\sqrt{(R^4 - R^2 cos^2 a - R^2 cos^2 b - R^2 cos^2 c + 2\,R\, cos\, a\, cos\, b\, cos\, c)}$, on aura donc

$$sin\ C = \frac{RZ}{sin\ a\ sin\ b},\ \text{ou}\ \frac{sin\ C}{sin\ c} = \frac{RZ}{sin\ a\ sin\ b\ sin\ c}.$$

Les valeurs de cos A et de cos B donneraient semblablement

$$\frac{sin\ A}{sin\ a} = \frac{RZ}{sin\ a\ sin\ b\ sin\ c},\ \frac{sin\ B}{sin\ b} = \frac{RZ}{sin\ a\ sin\ b\ sin\ c};$$

car la quantité Z ne change pas, lorsqu'on fait la permutation entre deux des quantités a, b, c donc on a $\frac{sin\ A}{sin\ a} = \frac{sin\ B}{sin\ b} = \frac{sin\ C}{sin\ c}$, ce qui est le principe du n° LXXV.

LXXVIII. Les valeurs que nous venons de trouver pour cos C et sin C, peuvent servir à trouver les angles d'un triangle sphérique dont on connaît les trois côtés ; mais il existe d'autres formules plus commodes pour le calcul logarithmique.

En effet, si dans la formule $R^2 - R\ cos\ C =$

$2 \, sin^2 \frac{1}{2} C$, on substitue la valeur de $cos \, C$, on aura

$$\frac{2 \, sin^2 \frac{1}{2} C}{R^2} = 1 - \frac{cos \, C}{R} = \frac{cos \, a \, cos \, b + sin \, a \, sin \, b - R \, cos \, c}{sina \, sin \, b}$$

Le numérateur de cette expression se réduit à $R \, cos \, (a - b) - R \, cos \, c$; or, d'après la formule $R \, cos \, q - R \, cos \, p = 2 \, sin \frac{1}{2} (p + q) \, sin \frac{1}{2} (p - q)$*, on trouve $R \, cos \, (a - b) - R \, cos \, c = 2 \, sin \frac{1}{2} (c - b + a)$ $sin \frac{1}{2} (c - a + b)$; donc * XXVIII.

$$\frac{sin^2 \frac{1}{2} C}{R^2} = \frac{sin \left(\frac{c + b - a}{2} \right) sin \left(\frac{c + a - b}{2} \right)}{sin \, a \, sin \, b},$$

$$\text{ou } sin \tfrac{1}{2} C = R \sqrt{ \left\{ \frac{sin \frac{c + b - a}{2} \, sin \frac{c + a - b}{2}}{sin \, a \, sin \, b} \right\} }.$$

Il est évident qu'on aurait des formules semblables pour exprimer $sin \frac{1}{2} A$ et $sin \frac{1}{2} B$, par le moyen des trois côtés a, b, c.

LXXIX. Le problême général de la trigonométrie sphérique consiste, comme nous l'avons déja dit, à déterminer trois des six quantités A, B, C, a, b, c, par le moyen des trois autres. Il est nécessaire, pour cet objet, d'avoir des équations entre quatre de ces quantités, prises de toutes les manieres possibles; or, six quantités combinées quatre à quatre ou deux à deux, donnent $\frac{6 \, . \, 5}{1 \, . \, 2}$ ou 15 combinaisons, ainsi il y aura quinze équations à former; mais si on ne considere que les combinaisons essentiellement différentes, ces quinze équations se réduisent à quatre.

En effet, on a, 1° la combinaison $a \, b \, c \, A$, qui comprend, par la permutation des lettres, $a \, b \, c \, A$, $a \, b \, c \, B$, $a \, b \, c \, C$;

2° La combinaison $a \, b \, A \, B$, d'où résultent $a \, b \, A \, B$, $b \, c \, B \, C$, $a \, c \, A \, C$;

3° La combinaison $abAC$, qui comprend les six $abAC$, $abBC$, $acAB$, $acBC$, $bcAB$, $bcAC$;

4° Enfin, la combinaison $aABC$, qui comprend les trois $aABC$, $bABC$, $cABC$.

Il y a donc en tout quinze combinaisons, mais il n'y en a que quatre essentiellement différentes.

LXXX. L'équation $\cos A = \dfrac{R^2 \cos a - R \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$, représente déja la premiere combinaison $abcA$ et celles qui en dépendent.

Pour former l'équation qui répond à la combinaison $abAB$, il faut éliminer c des deux formules qui donnent les valeurs de $\cos A$ et $\cos B$; mais l'élimination a déja été faite (LXXVII), et le résultat est $\dfrac{\sin A}{\sin a} = \dfrac{\sin B}{\sin b}$.

La troisieme combinaison se forme de la relation entre a, b, A, C; pour cela ayant les deux équations

$$\cos A \sin b \sin c = R^2 \cos a - R \cos b \cos c,$$
$$\cos C \sin b \sin a = R^2 \cos c - R \cos b \cos a,$$

on en éliminera d'abord $\cos c$, ce qui donnera $R \cos A \sin c + \cos C \sin a \cos b = R \cos a \sin b$: mettant ensuite dans celle-ci la valeur $\sin c = \dfrac{\sin a \sin C}{\sin A}$, on aura pour la troisieme combinaison

$$\cot A \sin C + \cos C \cos b = \cot a \sin b. \text{ (1)}$$

(1) Pour retenir aisément cette formule et la retrouver au besoin, voici une règle de Mnémonique :

1°. Avec un côté a et l'angle opposé A,
Avec un autre côté b et l'angle adjacent C,
formez l'équation fictive $\cot a \cot A = \cot b \cot C$, en observant de mettre les petites lettres avant les grandes.

2° Multipliez de part et d'autre par $\sin b \sin C$, en supposant le rayon $R = 1$, vous aurez

Enfin, pour avoir la relation entre A, B, C, a, j'observe que dans l'équitation précédente le terme

$cot\ a\ sin\ b = \text{R}\ cos\ a . \frac{sin\ b}{sin\ a} = \text{R}\ cos\ a \frac{sin\ \text{B}}{sin\ \text{A}}$; donc,

en multipliant cette équitation par sin A, on aura

$$\text{R}\ cos\ \text{A}\ sin\ \text{C} = \text{R}\ cos\ a\ sin\ \text{B} - sin\ \text{A}\ cos\ \text{C}\ cos\ b.$$

Si dans cette équitation on permute entre elles les lettres A et B, ainsi que a et b, on aura

$$\text{R}\ cos\ \text{B}\ sin\ \text{C} = \text{R}\ cos\ b\ sin\ \text{A} - sin\ B\ cos\ \text{C}\ cos\ a.$$

Et de ces deux-ci on tire, en chassant $cos\ b$,

$$\text{R}^2\ cos\ \text{A}\ sin\ \text{C} + \text{R}\ cos\ \text{B}\ sin\ \text{C}\ cos\ \text{C} = cos\ a\ sin\ \text{B}\ sin^2\ \text{C}.$$

Donc enfin

$$cos\ a = \frac{\text{R}^2\ cos\ \text{A} + \text{R}\ cos\ \text{B}\ cos\ \text{C}}{sin\ \text{B}\ sin\ \text{C}}.$$

C'est la relation cherchée entre A, B, C, a, ou la quatrieme des équitations nécessaires pour la résolution des triangles sphériques.

LXXXI. Cette derniere équitation entre A, B, C, a, offre une analogie frappante avec la premiere entre a, b, c, A : et on peut rendre raison de cette analogie par la propriété des triangles polaires ou supplémentaires. En effet, on sait que le triangle dont les angles sont, A, B, C, et les côtés opposés a, b, c, répond toujours à un triangle polaire, dont les côtés sont $200^\circ - \text{A}$, $200^\circ - \text{B}$, $200^\circ - \text{C}$, et les angles opposés $200^\circ - a$, $200^\circ - b$, $200^\circ - c$. Or le principe de l'article LXXVI étant appliqué à ce dernier triangle, il en résulte

---

$$cot\ a\ sin\ b\ cot\ \text{A}\ sin\ \text{C} = cos\ b\ cos\ \text{C}.$$

3° Dans le premier membre, séparez les petites lettres des grandes, en mettant à celles-ci le signe — vous aurez l'équitation vraie

$$cot\ a\ sin\ b - cot\ \text{A}\ sin\ \text{C} = cos\ b\ cos\ \text{C},$$

laquelle étant homogène aura lieu, même sans supposer R = 1.

$$cos(200^\circ - a) = \frac{R^2 cos(200^\circ - A) - R cos(200^\circ - B) cos(200^\circ - C)}{sin(200^\circ - B) sin(200^\circ - C)};$$

ce qui se réduit à

$$cos\ a = \frac{R^2 cos\ A + R\ cos\ B\ cos\ C}{sin\ B\ sin\ C},$$

ainsi que nous l'avons trouvé par une autre voie.

Cette formule résout immédiatement le cas où l'on veut déterminer un côté par le moyen de trois angles; mais, pour avoir une formule plus commode pour le calcul logarithmique, on substituera la valeur de $cos\ a$ dans l'équation $1 - \frac{cos\ a}{R} = \frac{2\,sin^2 \frac{1}{2}a}{R^2}$, ce qui donnera $\frac{sin^2 \frac{1}{2}a}{R^2} = \ldots\ldots$ $\frac{sin\,B\,sin\,C - cos\,B\,cos\,C - R\,cos\,A}{2\,sin\,B\,sin\,C} = \frac{-R\,cos(B+C) - R\,cos A}{2\,sin\,B\,sin\,C}$

Et parce qu'on a en général* $R\,cos\,p + R\,cos\,q = 2\,cos\frac{1}{2}(p+q)\,cos\frac{1}{2}(p-q)$, cette équation se réduit à

$$\frac{sin^2 \frac{1}{2}a}{R^2} = \frac{-cos\frac{1}{2}(A+B+C)\,cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{sin\ B\ sin\ C},$$

où il faut observer que le second membre, quoique sous une forme négative, est néanmoins toujours positif. Car on a en général $sin\,(x - 100^\circ) = \frac{sin\,x\,cos\,100^\circ - cos\,x\,sin\,100^\circ}{R} = -cos\,x$ donc

$$-cos\tfrac{1}{2}(A+B+C) = sin\left(\frac{A+B+C}{2} - 100^\circ\right)$$

quantité qui est toujours positive, parce que $A + B + C$ étant toujours compris entre 200° et 600°, l'angle $\frac{1}{2}(A+B+C) - 100^\circ$ est compris entre zéro et 200°; d'ailleurs $cos\frac{1}{2}(B+C-A)$ est toujours positif, parce que $B + C - A$ ne peut pas surpasser 200°; en effet dans le triangle polaire le côté $200^\circ - A$ est plus petit que la somme des deux autres

$200° - B$, $200° - C$; donc on a $200° - A < 400° - B - C$, ou $B + C - A < 200°$.

Etant ainsi assuré que le résultat sera toujours positif, on aura, pour déterminer un côté par le moyen des angles, la formule

$$\sin \tfrac{1}{2} a = R \sqrt{\left\{\frac{-\cos \frac{A+B+C}{2} \cos \frac{B+C-A}{2}}{\sin B \sin C}\right\}}$$

LXXXII. Avant d'aller plus loin, nous remarquerons que de ces formules générales, on peut déduire celles qui concernent les triangles sphériques rectangles. Pour cet effet, on fera $A = 100°$, tant dans les quatre formules principales que dans celles qui en dérivent par la permutation des lettres. Et d'abord l'équation $\cos A \sin b \sin c = R^2 \cos a - R \cos b \cos c$, donnera par cette substitution

$$R \cos a = \cos b \cos c. \qquad (1)$$

Les dérivées de l'équation générale ne contiennent point A, et ainsi ne donnent aucune relation nouvelle dans le cas de $A = 100°$.

L'équation $\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b}$, donne dans le cas de $A = 100°$,

$$\frac{R}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b}. \qquad (2)$$

Et la dérivée $\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin C}{\sin c}$, donnerait également $\frac{R}{\sin a} = \frac{\sin C}{\sin c}$; mais celle-ci est elle-même une dérivée de l'équation (2).

L'équation $\cot A \sin C + \cos C \cos b = \cot a \sin b$, donne dans le cas de $A = 100°$, $\cos C \cos b = \cot a \sin b$, ou

$$\cos C \tan a = R \tan b. \qquad (3)$$

La dérivée $\cot C \sin A + \cos A \cos b = \cot c \sin b$, donne dans le même cas, $R \cot C = \cot c \sin b$, ou

$$R \tan c = \sin b \tan C. \qquad (4)$$

Enfin la quatrieme équation principale *sin* B *sin* C *cos* $a = R^2$ *cos* A + R *cos* B *cos* C, et sa dérivée *sin* A *sin* C *cos* $b = R^2$ *cos* B + R *cos* A *cos* C, donnent dans le cas de A = 100°, *sin* B *sin* C *cos* a = R*cos* B *cos* C et *sin* C *cos* b = R *cos* B, ou

$$\cot B \cot C = R \cos a, \qquad (5)$$
$$\sin C \cos b = R \cos B. \qquad (6)$$

Ce sont les six équations sur lesquelles la résolution des triangles rectangles est fondée.

LXXXIII. Nous terminerons ces principes par la démonstration des *Analogies de Néper*, qui servent à simplifier plusieurs cas de la résolution des triangles sphériques.

Par la combinaison des valeurs de *cos* A et *cos* C exprimées en a, b, c, nous avons déja obtenu
*LXX. l'équation *

$$R \cos A \sin c = R \cos a \sin b - \cos C \sin a \cos b.$$

Celle-ci donne par une simple permutation :

$$R \cos B \sin c = R \cos b \sin a - \cos C \sin b \cos a.$$

Donc en ajoutant ces deux équations, et réduisants on aura

$$\sin c\,(\cos A + \cos B) = (R - \cos C)\sin(a + b).$$

Mais puisque $\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B}$, on a

$$\sin c\,(\sin A + \sin B) = \sin C\,(\sin a + \sin b)$$
et $$\sin c\,(\sin A - \sin B) = \sin C\,(\sin a - \sin b).$$

Divisant successivement ces deux équations par la précédente, on aura

$$\frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \frac{\sin C}{R - \cos C} \cdot \frac{\sin a + \sin b}{\sin(a + b)}$$
$$\frac{\sin A - \sin B}{\cos A + \cos B} = \frac{\sin C}{R - \cos C} \cdot \frac{\sin a - \sin}{\sin(a + b)}$$

Et en réduisant celles-ci par les formules des articles XXIX et XXX, il viendra

$$tang\tfrac{1}{2}(A+B)=cot\tfrac{1}{2}C.\frac{cos\tfrac{1}{2}(a-b)}{cos\tfrac{1}{2}(a+b)}$$
$$tang\tfrac{1}{2}(A-B)=cot\tfrac{1}{2}C.\frac{sin\tfrac{1}{2}(a-b)}{sin\tfrac{1}{2}(a+b)}.$$

Donc étant donnés les deux côtés a et b avec l'angle comprîs C, on trouvera les deux autres angles A et B par les analogies,

$$cos\tfrac{1}{2}(a+b):cos\tfrac{1}{2}(a-b)::cot\tfrac{1}{2}C:tang\tfrac{1}{2}(A+B)$$
$$sin\tfrac{1}{2}(a+b).sin\tfrac{1}{2}(a-b)::cot\tfrac{1}{2}C:tang\tfrac{1}{2}(A-B).$$

Si on applique ces mêmes analogies au triangle polaire du triangle ABC, il faudra mettre 200^o-A, 200^o-B, 200^o-a, 200^o-b, 200^o-c, à la place de a, b, A, B, C, respectivement, et on aura pour résultat ces deux analogies

$$cos\tfrac{1}{2}(A+B):cos\tfrac{1}{2}(A-B)::tang\tfrac{1}{2}c:tang\tfrac{1}{2}(a+b)$$
$$sin\tfrac{1}{2}(A+B):sin\tfrac{1}{2}(A-B)::tang\tfrac{1}{2}c:tang\tfrac{1}{2}(a-b),$$

au moyen desquelles, étant donnés un côté c et les deux angles adjacents A et B, on pourra trouver les deux autres côtés a et b. Ces quatre proportions sont connues sous le nom d'*Analogies de Néper*.

Résolution des triangles sphériques en général.

La résolution des triangles sphériques comprend six cas généraux, que nous allons développer successivement.

PREMIER CAS.

LXXXIV. *Etant donnés les trois côtés* a, b, c, *on trouvera un angle quelconque, par exemple, l'angle* A *opposé au côté* a, *par la formule :*

$$sin\tfrac{1}{2}A=R\sqrt{\left\{\frac{sin\frac{a+b-c}{2}\,sin\frac{a+c-b}{2}}{sin\,b\,sin\,c}\right\}}.$$

DEUXIEME CAS.

LXXXV. *Étant donnés deux côtés* a *et* b *avec l'angle* A *opposé à l'un de ces côtés, trouver le troisieme côté* c *et les deux autres angles* B *et* C.

1° L'angle B se trouvera par l'équation $\sin B = \frac{\sin A \sin b}{\sin a}$.

2° Pour avoir l'angle C, il faut résoudre l'équation

$$\cot A \sin C + \cos C \cos b = \cot a \sin b.$$

Soit pris pour cet effet un angle auxiliaire φ de maniere qu'on ait $\tang \varphi = \frac{\cos b \tang A}{R}$, ou $\cot A = \frac{\cos b \cos \varphi}{\sin \varphi}$; cette valeur de $\cot A$ étant substituée dans l'équation à résoudre, donne $\frac{\cos b}{\sin \varphi}(\cos \varphi \sin C + \sin \varphi \cos C) = \cot a \sin b$, d'où l'on tire

$$\sin(C + \varphi) = \frac{\tang b \sin \varphi}{\tang a}.$$

Par cet artifice, on voit que les deux termes inconnus dans l'équation proposée se réduisent à un seul, d'où il est facile de tirer l'angle C.

3° Le côté c se trouvera par l'équation

$$\sin c = \frac{\sin a \sin C}{\sin A}.$$

On peut aussi le déterminer directement par la résolution de l'équation :

$$R \cos b \cos c + \cos A \sin b \sin c = R^2 \cos a.$$

Pour cet effet, soit $\cos A \sin b = \frac{R \cos b \sin \varphi}{\cos \varphi}$, ou $\tang \varphi = \frac{\cos A \tang b}{R}$, on aura $\frac{\cos b}{\cos \varphi}(\cos c \cos \varphi + \sin c \sin \varphi) = R \cos a$. Donc, en cherchant d'abord l'auxiliaire φ par l'équation $\tang \varphi$

$=\frac{\cos A \tang b}{R}$, on aura le côté c par l'équation

$$\cos(c-\varphi)=\frac{\cos a \cos \varphi}{\cos b}.$$

Ce second cas peut avoir deux solutions, ainsi que le cas analogue des triangles rectilignes.

TROISIEME CAS.

LXXXVI. *Étant donnés deux côtés* a *et* b *avec l'angle compris* C, *trouver les deux autres angles* A *et* B *et le troisieme côté* c.

1° Les angles A et B se trouvent par ces deux équations

$$\cot A=\frac{\cot a \sin b-\cos C \cos b}{\sin C}$$

$$\cot B=\frac{\cot b \sin a-\cos C \cos a}{\sin C},$$

dans lesquelles les seconds membres pourraient être réduits à un seul terme, au moyen d'un auxiliaire; mais il est plus simple, dans ce cas, de se servir des analogies de Néper, qui donnent

$$\tang \frac{A-B}{2}=\cot\tfrac{1}{2}C.\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}$$

$$\tang \frac{A+B}{2}=\cot\tfrac{1}{2}C.\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}.$$

2° Connaissant les angles A et B, on pourra calculer le troisieme côté c par l'équation $\sin c=\sin a.\frac{\sin C}{\sin A}$; mais pour déterminer c directement, on a l'équation

$$R^2 \cos c=\sin a \sin b \cos C+R \cos a \cos b.$$

Soit pris l'auxiliaire φ, de maniere qu'on ait $\sin b \cos C=\cos b \tang \varphi$, ou $\tang \varphi=\frac{\cos C \tang b}{R}$, on aura

$$\cos c=\frac{\cos b}{\cos \varphi}\cos(a-\varphi).$$

QUATRIEME CAS.

LXXXVII. *Étant donnés deux angles* A *et* B *avec le côté adjacent* c, *trouver les deux autres côtés* a *et* b, *et le troisieme angle* C.

1° Les deux côtés a et b sont donnés par les formules

$$cot\ a = \frac{cot\ A\ sin\ B + cos\ B\ cos\ c}{sin\ c}$$

$$cot\ b = \frac{cot\ B\ sin\ A + cos\ A\ cos\ c}{sin\ c},$$

mais on peut les calculer plus facilement par les analogies de Néper, savoir :

$$sin\ \frac{A+B}{2} : sin\ \frac{A-B}{2} :: tang\ \tfrac{1}{2}c : tang\ \frac{a-b}{2}$$

$$cos\ \frac{A+B}{2} : cos\ \frac{A-B}{2} :: tang\ \tfrac{1}{2}c : tang\ \frac{a+b}{2}.$$

2° Connaissant a et b, on trouvera C par l'équation $sin\ C = \frac{sin\ c\ sin\ A}{sin\ a}$; mais on peut aussi trouver C directement par l'équation

$$R^2\ cos\ C = cos\ c\ sin\ A\ sin\ B - R\ cos\ A\ cos\ B.$$

Soit pris l'auxiliaire φ, de maniere qu'on ait

$$cos\ c\ sin\ B = cos\ B\ cot\ \varphi, \text{ ou } cot\ \varphi = \frac{cos\ c\ tang\ B}{R},$$

on aura

$$cos\ C = cos\ B \,.\, \frac{sin\ (A-\varphi)}{sin\ \varphi}.$$

Ce cas et le précédent ne laissent aucune indétermination.

CINQUIEME CAS.

LXXXVIII. *Étant donnés deux angles* A *et* B *avec le côté* a *opposé à l'un de ces angles, trouver les deux autres côtés* b, c, *et le troisieme angle* C.

1° Le côté b se trouvera par l'équation $\sin b = \sin a \cdot \frac{\sin \mathrm{B}}{\sin \mathrm{A}}$.

2° Le côté c dépend de l'équation

$$\cot a \sin c - \cos \mathrm{B} \cos c = \cot \mathrm{A} \sin \mathrm{B}.$$

Soit $\cot a = \cos \mathrm{B} \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$ ou $\operatorname{tang} \varphi = \frac{\cos \mathrm{B} \operatorname{tang} a}{\mathrm{R}}$, on aura $\frac{\cos \mathrm{B}}{\sin \varphi}(\sin c \cos \varphi - \cos c \sin \varphi) = \cot \mathrm{A} \sin \mathrm{B}$; donc

$$\sin(c - \varphi) = \frac{\operatorname{tang} \mathrm{B} \sin \varphi}{\operatorname{tang} \mathrm{A}}.$$

3° L'angle C se trouvera par la résolution de l'équation

$$\cos a \sin \mathrm{B} \sin \mathrm{C} - \mathrm{R} \cos \mathrm{B} \cos \mathrm{C} = \mathrm{R}^2 \cos \mathrm{A}.$$

Soit pour cet effet $\cos a \sin \mathrm{B} = \frac{\mathrm{R} \cos \mathrm{B} \cos \varphi}{\sin \varphi}$, ou $\cot \varphi = \frac{\cos a \operatorname{tang} \mathrm{B}}{\mathrm{R}}$, on aura $\frac{\cos \mathrm{B}}{\sin \varphi}(\sin \mathrm{C} \cos \varphi - \cos \mathrm{C} \sin \varphi) = \mathrm{R} \cos \mathrm{A}$; donc

$$\sin(\mathrm{C} - \varphi) = \frac{\cos \mathrm{A} \sin \varphi}{\cos \mathrm{B}}.$$

Ce cinquieme cas est, comme le second, susceptible de deux solutions, ainsi que cela a lieu dans le cas analogue des triangles rectilignes.

SIXIEME CAS.

LXXXIX. *Etant donnés les trois angles* A, B, C, *on trouvera un côté quelconque, par exemple, le côté opposé à l'angle* A, *par la formule*

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \mathrm{R} \sqrt{\left(\frac{-\cos \frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}) \cos \frac{1}{2}(\mathrm{B}+\mathrm{C}-\mathrm{A})}{\sin \mathrm{B} \sin \mathrm{C}}\right)}.$$

On peut remarquer que de ces six cas généraux les trois derniers pourraient se déduire des trois premiers, par la propriété des triangles polaires : de sorte qu'à proprement parler, il n'y a que trois cas différents dans la résolution générale des triangles sphériques. Le premier cas se résout par une seule analogie, comme les triangles rectangles; le troisieme se résout d'une maniere presque aussi simple, au moyen des analogies de Néper. Quant au second, il exige deux analogies; et d'ailleurs, il admet quelquefois deux solutions, tandis que le premier et le troisieme n'en admettent jamais qu'une.

xc. Pour distinguer dans le second cas si, pour des valeurs particulieres données de A, a, b, il y a deux
fig. 16. triangles qui satisfont à la question ou seulement un; supposons d'abord l'angle $A < 100°$, et soient prolongés les deux côtés AC, AB jusqu'à ce qu'ils se rencontrent de nouveau en A'. Si on prend l'arc AC $< 100°$ et qu'on abaisse CD perpendiculaire sur AB, les côtés AD, CD du triangle rectangle ACD, seront tous deux plus petits que 100°, la ligne CD sera la distance la plus courte du point C à l'arc AB, et en prenant $DB' = DB$, les obliques CB', CB seront égales et d'autant plus longues qu'elles s'écarteront plus de la perpendiculaire. Soit $AC = b$, $CB = a$, on voit donc qu'un triangle dans lequel on a $A < 100°$, $b < 100°$, et $a < b$, a nécessairement deux solutions ACB, ACB'; mais si, en supposant toujours A et b plus petits que 100°, on a $a > b$, alors le point B' passerait au-delà du point A, et il n'y aurait qu'une solution représentée par ABC.

Soit ensuite $AC' > 100°$, si on abaisse la perpendiculaire C'D' sur ABA', on aura de même $C'D' < A'C'$, et l'arc C'B''' mené entre D' et A', sera $> C'D'$ et $> C'A'$; donc si on fait $AC' = b$, $C'B'' = C'B''' = a$, on voit que la supposition $A < 100°$ et $b > 100°$ donnera deux solutions si $a + b < 200°$, et n'en donnera qu'une si $a + b > 200°$, parce qu'alors le point B''' passerait au-delà de A'. Discutant de la même maniere le cas où l'angle A est $> 100°$, on pourra établir ainsi les symptômes qui déterminent si, dans le cas II, la question admet deux solutions ou n'en admet qu'une.

$$A < 100^\circ, b < 100^\circ \begin{cases} a > b & \text{une solution.} \\ a < b & \text{deux solutions.} \end{cases}$$

$$A < 100^\circ, b > 100^\circ \begin{cases} a + b > 200^\circ & \text{une solution.} \\ a + b < 200^\circ & \text{deux solutions.} \end{cases}$$

$$A > 100^\circ, b < 100^\circ \begin{cases} a + b > 200^\circ & \text{deux solutions.} \\ a + b < 200^\circ & \text{une solution.} \end{cases}$$

$$A > 100^\circ, b > 100^\circ \begin{cases} a > b & \text{deux solutions.} \\ a < b & \text{une seule solution.} \end{cases}$$

Il n'y aura qu'une solution si on a $A = 100^\circ$, soit $a = b$, soit $a + b = 200^\circ$. Il y en aura deux si on a $b = 100^\circ$.

XCI. Ces mêmes résultats peuvent s'appliquer au cas cinquieme par la voïe du triangle polaire, et on en tirera les symptômes suivants, qui feront connaître si pour des valeurs données de A, B, a, il y a deux triangles qui satisfont à la question, ou s'il n'y en a qu'un.

$$a > 100^\circ, B > 100^\circ \begin{cases} A < B & \text{une solution.} \\ A > B & \text{deux solutions.} \end{cases}$$

$$a > 100^\circ, B < 100^\circ \begin{cases} A + B < 200^\circ & \text{une solution.} \\ A + B > 200^\circ & \text{deux solutions.} \end{cases}$$

$$a < 100^\circ, B > 100^\circ \begin{cases} A + B < 200^\circ & \text{deux solutions.} \\ A + B > 200^\circ & \text{une solution.} \end{cases}$$

$$a < 100^\circ, B < 100^\circ \begin{cases} A < B & \text{deux solutions.} \\ A > B & \text{une solution.} \end{cases}$$

Il n'y aura qu'une solution si l'une des égalités suivantes a lieu $a = 100^\circ$, $A = B$, $A + B = 200^\circ$. Il y en aura deux si $B = 100^\circ$.

XCII. Dans tous les cas, pour écarter les solutions inutiles ou fausses, il faut se rappeler, 1° que tout angle ou tout côté doit être plus petit que 200°;

2° Que les plus grands angles sont opposés aux plus grands côtés, en sorte que si on a $A > B$, il faut qu'on ait aussi $a > b$, et *vice versâ*.

Exemples de la résolution des triangles sphériques.

XCIII. *Exemple* I. Soient O, M, N trois points situés dans un plan incliné à l'horizon ; si de ces fig. 15.

trois points on abaisse les perpendiculaires OD, M m, N n, sur le plan horizontal DEF, les objets situés en O, M, N devront être représentés sur le plan horizontal par leurs *projections* D, m, n, et l'angle MON par m D n. Cela posé, étant donné l'angle MON, et les inclinaisons de ses deux côtés OM, ON sur la verticale OD, il s'agit de trouver l'angle de projection m D n.

Du point O comme centre et d'un rayon $= 1$, décrivez une surface sphérique qui rencontre en A, B, C, les côtés OM, ON et la verticale OD, vous aurez un triangle sphérique ABC, dont les trois côtés sont connus; on pourra donc déterminer l'angle C égal à m D n par la formule du premier cas.

Soit par exemple, l'angle MON $=$ AB $= 64^\circ\ 44'\ 60''$; l'angle DOM $=$ AC $= 98^\circ\ 12'$, et l'angle DON $=$ BC $= 105^\circ\ 42'$, on aura par la formule citée

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} C = R^2 . \frac{\sin 28^\circ\ 57'\ 30''\ \sin 35^\circ\ 87'\ 30''}{\sin 98^\circ\ 12'\ \sin 105^\circ\ 42'}.$$

Valeur que l'on calculera ainsi :

L. sin $28^\circ\ 57'\ 30''$	...9.6373956	L. sin $98^\circ\ 12'$	...9.9998106
L. sin $35^\circ\ 87'\ 30''$	...9.7276562	L. sin $105^\circ 42'$	...9.9984242
somme + 2 LR.	39.3650518		19.9982348
	19.9982348		
2 L. sin $\frac{1}{2}$ C......	19.3668170		
L. sin $\frac{1}{2}$ C.......	9.6834085	$\frac{1}{2}$ C $= 32^\circ\ 4'\ 70''.5$	
		C $= 64\ \ 9\ \ 41$	

Donc l'angle $64^\circ\ 44'\ 60''$, mesuré dans un plan incliné à l'horizon, se réduit à $64^\circ\ 9'\ 41''$, lorsqu'il est projeté sur le plan de l'horizon.

Ce problême est utile dans l'art de lever les plans, lorsque les points qu'on veut déterminer sont situés à des hauteurs sensiblement différentes au-dessus d'un même plan horizontal.

XCIV. *Exemple* II. Connaissant les latitudes de deux points du globe, et leur différence en longitude, trouver leur plus courte distance.

On imaginera un triangle sphérique ACB formé par le pole boréal C, et les deux lieux A et B dont il s'agit; dans ce triangle on connaîtra l'angle au pôle ACB, qui est la différence en longitude des deux points A et B, et les deux côtés compris AC, CB, qui sont les compléments des latitudes des points A et B. On déterminera donc le troisieme côté AB par les formules du cas III.

Soient, par exemple, A et B les observatoires de Paris et de Pekin ; la latitude boréale de l'un de ces lieux est de $54^o\ 26'\ 36''$, celle de l'autre est de $44^o\ 33'\ 73''$, et leur différence en longitude est de $126^o\ 80'\ 56''$. Ainsi on aura

$$a = 45^o 73' 64''$$
$$b = 55\ \ 66\ \ 27$$
$$C = 126\ \ 80\ \ 56.$$

D'après ces données on aura pour déterminer c, les formules $tang\ \varphi = \frac{\cos C\ tang\ b}{R}$, $\cos c = \frac{\cos b \cos (a - \varphi)}{\cos \varphi}$, dont voici le calcul

L. *cos* C	9.6114352
L. *tang* b. . . .	10.0776707
L. *tang* φ. . . .	9.6891059

L'angle φ que donnent les tables par le moyen de ce logarithme-tangente est $28^o\ 94'\ 23''$. Mais il faut observer que $\cos$ C est négatif, et qu'ainsi $tang\ \varphi$ étant négatif, on doit prendre $\varphi = -28^o\ 94'\ 23''$, ce qui donnera $a - \varphi = 74^o\ 67'\ 87''$. Cela posé, en observant que $\cos(-\varphi) = \cos \varphi$, on achevera ainsi le calcul

L. *cos* $(a-\varphi)$ . .	9.5880938
L. *cos* b	9.8071953
	19.3952891
L. *cos* φ.	9.9534823
L. *cos* c.	9.4418068

Donc la distance cherchée $c = 82^{\circ}\ 16'\ 05''$. Cette même distance peut s'exprimer en myriametres par 821.605 ; car un myriametre est la longueur d'un arc de dix minutes, et un metre est celle d'un arc d'un dixieme de seconde.

XCV. *Exemple* III. Pour donner un exemple du cas cinquieme, proposons-nous de résoudre le triangle sphérique dans lequel on connaît les deux angles $A = 78^{\circ}\ 50'$, $B = 54^{\circ}\ 0'$, et le côté opposé à l'un d'eux $a = 99^{\circ}\ 20'\ 17''$. Au moyen de ces données, on trouve d'après le tableau de l'art. XCI, qu'il ne doit y avoir qu'une solution, parce qu'on a tout à la fois $a < 100^{\circ}$, $B < 100^{\circ}$ et $A > B$. Voici le calcul de cette solution.

1° Le côté b se trouvera par la formule $\sin b = \sin a \dfrac{\sin B}{\sin A}$.

L. *sin* a	9.9999659
L. *sin* B	9.8751256
10 — L. *sin* A	0.0252525
L. *sin* b	9.9003440

Ce qui donne $b = 58^{\circ}\ 50'\ 14''$ ou son supplément $141^{\circ}\ 49'\ 86''$; mais puisque l'angle B est $<$ A, il faut que le côté b soit $< a$, ainsi la premiere valeur est la seule qui puisse avoir lieu.

2° Pour avoir le côté c on doit faire $\tan \varphi = \dfrac{\cos B \tan a}{R}$, $\sin (c-\varphi) = \dfrac{\tan B \sin \varphi}{\tan A} = \dfrac{\tan B \cot A \sin \varphi}{R^2}$,

		L. *sin* φ.	9.9999220
L. *cos* B. . . .	9.8204063	L. *tang* B — LR	0.0547193
L. *tang* a — LR	1.9016731	L. *cot* A.	9.5455236
L. *tang* φ. . . .	11.7220794	L. *sin* $(c-\varphi)$. .	9.6001649
	$\varphi = 98^\circ\ 79'\ 28''.8$		$c-\varphi = 26^\circ\ 7'\ 70''.5.$

Ici on a encore le choix de prendre pour $c-\varphi$ la valeur $26^\circ\ 7'\ 70''.5$, ou son supplément $173^\circ\ 92'\ 29''.5$; mais en prenant cette seconde valeur, on aurait $c > 200^\circ$, ainsi il faut s'en tenir à la premiere, qui donne $c = 124^\circ\ 81'\ 99''.3$.

3° Enfin, pour calculer directement l'angle C, nous prendrons les formules $cot\ \psi = \frac{cos\ a\ tang\ B}{R}$, $sin\ (C-\psi) = \frac{cos\ A\ sin\ \psi}{cos\ B}$.

		L. *sin* ψ.	9.9999563
L. *cos* a.	8.0982928	L. *cos* A.	9.5202711
L. *tang* B — L R	0.0547193	L. R — L *cos* B.	0.1795937
L. *cot* ψ.	8.1530121	L. *sin* $(C-\psi)$	9.6998211
	$\psi = 99^\circ\ 9'\ 45''.5$		$C-\psi = 33^\circ\ 40'\ 54''.5$
			ψ . 99 9 45 .5
			$C = 132\ \ 50\ \ 0\ .0$

On n'a pas pu prendre pour $C-\psi$ le supplément de $33^\circ\ 40'\ 54''.5$, parce qu'il aurait donné pour C une valeur plus grande que 200°. Ainsi on voit qu'en effet le problême proposé n'est susceptible que d'une solution.

Nota. Si on fait usage de l'ancienne division du cercle pour le calcul de ces exemples, les angles donnés ou calculés seront exprimés comme il suit :

Exemple I. Angles donnés. MON $= 58^\circ\ 0'\ 5''$. . . . : DOM $= 88^\circ\ 18'\ 28'',8$, DON $= 94^\circ\ 52'\ 40'',8$. Angle calculé $C = 57^\circ\ 41'\ 4'',9$.

Ex. II. Angles et côtés donnés. $a = 41^\circ 9' 46''$, . . . $b = 50^\circ\ 5'\ 47''$, $C = 114^\circ\ 7'\ 30''$. Côté conclu. $c = 73^\circ 46' 40''$.

Ex. III. Angles et côtés donnés. $A = 70^\circ\ 39'$, $B = 48^\circ\ 36'$, $a = 89^\circ\ 16'\ 53'',5$. Angles et côtés calculés. $b = 52^\circ 39' 4''5$, $= 112^\circ\ 20'\ 16'',6$, $C = 119^\circ\ 15'\ 0''$.