LIVRE VII.

LA SPHERE

DÉFINITIONS.

I. La *sphere* est un solide terminé par une surface courbe, dont tous les points sont également distants d'un point intérieur qu'on appelle *centre.*

On peut imaginer que la sphere est produite par la révolution du demi-cercle DAE autour du diametre DE : car la surface décrite dans ce mouvement par la courbe DAE aura tous ses points à égales distances du centre C. fig. 220.

II. Le *rayon de la sphere* est une ligne droite menée du centre à un point de la surface ; le *diametre* ou *axe* est une ligne passant par le centre, et terminée de part et d'autre à la surface.

Tous les rayons de la sphere sont égaux ; tous les diametres sont égaux et doubles du rayon.

III. Il sera démontré * que toute section de la sphere, faite par un plan, est un cercle : cela posé, on appelle *grand cercle* la section qui passe par le centre, *petit cercle* celle qui n'y passe pas. * pr. 1.

IV. Un *plan* est *tangent* à la sphere lorsqu'il n'a qu'un point commun avec sa surface.

V. Le *pole d'un cercle* de la sphere est un point de la surface également éloigné de tous les points de la circonférence de ce cercle. On fera voir * que tout cercle, grand ou petit, a toujours deux poles. * pr. 6.

VI. *Triangle sphérique* est une partie de la surface de la sphere comprise par trois arcs de grands cercles.

Ces arcs, qui s'appellent les *côtes* du triangle, sont toujours supposés plus petits que la demi-circonférence. Les angles que leurs plans font entre eux sont les angles du triangle.

VII. Un triangle sphérique prend le nom de *rectangle*, *isoscele*, *équilatéral*, dans les mêmes cas qu'un triangle rectiligne.

VIII. *Polygone sphérique* est une partie de la surface de la sphere terminée par plusieurs arcs de grands cercles.

IX. *Fuseau* est la partie de la surface de la sphere comprise entre deux demi-grands cercles qui se terminent à un diametre commun.

X. J'appellerai *coin* ou *onglet sphérique* la partie du solide de la sphere comprise entre les mêmes demi-grands cercles, et à laquelle le fuseau sert de base.

XI. *Pyramide sphérique* est la partie du solide de la sphere comprise entre les plans d'un angle solide dont le sommet est au centre. La *base* de la pyramide est le polygone sphérique intercepté par les mêmes plans.

XII. On appelle *zone* la partie de la surface de la sphere comprise entre deux plans paralleles qui en sont les *bases*. L'un de ces plans peut être tangent à la sphere, alors la zone n'a qu'une base.

XIII. *Segment sphérique* est la portion du solide de la sphere comprise entre deux plans paralleles qui en sont les bases.

L'un de ces plans peut être tangent à la sphere, alors le segment sphérique n'a qu'une base.

fig. 220. XIV. *La hauteur d'une zone* ou *d'un segment* est la distance des deux plans paralleles qui sont les bases de la zone ou du segment.

XV. Tandis que le demi-cercle DAE tournant autour du diametre DE décrit la sphere, tout secteur circulaire, comme DCF ou FCH, décrit un solide qu'on appelle *secteur sphérique*.

PROPOSITION PREMIERE.

THÉORÊME.

Toute section de la sphere, faite par un plan, est un cercle.

Soit AMB la section faite par un plan dans la sphere fig. 221.
dont le centre est C. Du point C menez la perpendiculaire CO sur le plan AMB, et différentes lignes CM, CM, à différents points de la courbe AMB qui termine la section.

Les obliques CM, CM, CB, sont égales, puisqu'elles sont des rayons de la sphere, elles sont donc également éloignées de la perpendiculaire CO*; donc toutes * 5, 5.
les lignes OM, OM, OB, sont égales; donc la section AMB est un cercle dont le point O est le centre.

Corollaire I. Si la section passe par le centre de la sphere, son rayon sera le rayon de la sphere; donc tous les grands cercles sont égaux entre eux.

II. Deux grands cercles se coupent toujours en deux parties égales; car leur intersection commune, passant par le centre, est un diametre.

III. Tout grand cercle divise la sphere et sa surface en deux parties égales; car si, après avoir séparé les deux hémispheres, on les applique sur la base commune en tournant leur convexité du même côté, les deux surfaces coïncideront l'une avec l'autre, sans quoi il y aurait des points plus près du centre les uns que les autres.

IV. Le centre d'un petit cercle et celui de la sphere fig. 221.
sont sur une même droite perpendiculaire au plan du petit cercle.

V. Les petits cercles sont d'autant plus petits qu'ils sont plus éloignés du centre de la sphere; car plus la distance CO est grande, plus est petite la corde AB, diametre du petit cercle AMB.

VI. Par deux points donnés sur la surface d'une sphere, on peut faire passer un arc de grand cercle; car les deux points donnés et le centre de la sphere sont trois points qui déterminent la position d'un plan. Si cependant les deux points donnés étaient aux extrémités d'un diametre, alors ces deux points et le centre seraient en ligne droite, et il y aurait une infinité de grands cercles qui pourraient passer par les deux points donnés.

PROPOSITION II.

THÉORÊME.

fig. 222. *Dans tout triangle sphérique* ABC, *un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres.*

Soit O le centre de la sphere, et soient menés les rayons OA, OB, OC. Si on imagine les plans AOB, AOC, COB, ces plans formeront au point O un angle solide, et les angles AOB, AOC, COB, auront pour mesure les côtés AB, AC, BC, du triangle sphérique ABC. Or, chacun des trois angles plans qui composent l'angle solide est moindre que la somme des deux autres*; donc un côté quelconque du triangle ABC est moindre que la somme des deux autres.

*21, 5.

PROPOSITION III.

THÉORÊME.

Le plus court chemin d'un point à un autre, sur la surface de la sphère, est l'arc de grand cercle qui joint les deux points donnés.

fig. 223. Soit ANB l'arc de grand cercle qui joint les points

A et B, et soit hors de cet arc, s'il est possible, M un point de la ligne la plus courte entre A et B. Par le point M menez les arcs de grands cercles MA, MB, et prenez BN = MB.

Suivant le théorême précédent l'arc ANB est plus court que AM + MB; retranchant de part et d'autre BN = BM, il restera AN < AM. Or, la distance de B en M, soit qu'elle se confonde avec l'arc BM, ou qu'elle soit toute autre ligne, est égale à la distance de B et N; car en faisant tourner le plan du grand cercle BM autour du diametre qui passe par B, on peut amener le point M sur le point N, et alors la ligne la plus courte de M en B, quelle qu'elle soit, se confondra avec celle de N en B; donc les deux chemins de A en B, l'un en passant par M, l'autre en passant par N, ont une partie égale de M en B et de N en B. Le premier chemin est, par hypothese, le plus court; donc la distance de A en M est plus courte que la distance de A en N, ce qui serait absurde, puisque l'arc AM est plus grand que AN; donc aucun point de la ligne la plus courte entre A et B ne peut être hors de l'arc ANB; donc cet arc est lui-même la ligne la plus courte entre ses extrémités.

PROPOSITION IV.

THÉORÊME.

La somme des trois côtés d'un triangle sphérique est moindre que la circonférence d'un grand cercle.

Soit ABC un triangle sphérique quelconque; prolongez les côtés AB, AC, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent de nouveau en D. Les arcs ABD, ACD, seront des demi-circonférences, puisque deux grands cercles se coupent toujours en deux parties égales*; mais dans le triangle BCD on a le côté BC < BD + CD*; ajoutant

fig. 224.

* 1.

* 2.

de part et d'autre AB + AC, on aura AB + AC + BC < ABD + ACD, c'est-à-dire, plus petit qu'une circonférence.

PROPOSITION V.

THÉORÊME.

La somme des côtés de tout polygone sphérique est moindre que la circonférence d'un grand cercle.

fig. 225. Soit, par exemple, le pentagone ABCDE : prolongez les côtés AB, DC, jusqu'à leur rencontre en F ; puisque BC est plus petit que BF + CF, le contour du pentagone ABCDE est plus petit que celui du quadrilatere AEDF. Prolongez de nouveau les côtés AE, FD, jusqu'à leur rencontre en G, on aura ED < EG + GD ; donc le contour du quadrilatere AEDF est plus petit que celui du triangle AFG ; celui-ci est plus petit que la circonférence d'un grand cercle ; donc *a fortiori* le contour du polygone ABCDE est moindre que cette même circonférence.

Scholie. Cette proposition est au fond la même que la XXII[e] du livre V ; car, si O est le centre de la sphere, on peut imaginer au point O un angle solide formé par les angles plans AOB, BOC, COD, etc., et la somme de ces angles doit être plus petite que quatre angles droits, ce qui ne differe pas de la proposition présente. La démonstration que nous venons de donner est différente de celle du livre V ; l'une et l'autre supposent que le polygone ABCDE est convexe, ou qu'aucun côté prolongé ne coupe la figure.

PROPOSITION VI.

THÉORÊME.

fig. 220. *Si on mene le diametre* DE *perpendiculaire au plan du grand cercle* AMB, *les extrémités*

D et E de ce diametre seront les pôles du cercle AMB, et de tous les petits cercles, comme FNG, *qui lui sont paralleles.*

Car DC, étant perpendiculaire au plan AMB, est perpendiculaire à toutes les droites CA, CM, CB, etc., menées par son pied dans ce plan ; donc tous les arcs DA, DM, DB, etc., sont des quarts de circonférence : il en est de même des arcs EA, EM, EB, etc. ; donc les points D et E sont chacun également éloignés de tous les points de la circonférence AMB ; donc ils sont les pôles de cette circonférence *. * def. 5.

En second lieu, le rayon DC, perpendiculaire au plan AMB, est perpendiculaire à son parallele FNG ; donc il passe par le centre O du cercle FNG * ; donc * 1. si on tire les obliques DF, DN, DG, ces obliques s'écarteront également de la perpendiculaire DO et seront égales. Mais les cordes étant égales, les arcs sont égaux ; donc tous les arcs DF, DN, DG, etc., sont égaux entre eux ; donc le point D est le pôle du petit cercle FNG, et par la même raison le point E est l'autre pôle.

Corollaire I. Tout arc DM mené d'un point de l'arc de grand cercle AMB à son pôle est un quart de circonférence, que nous appellerons pour abréger un *quadrans*, ou un quadrant, et ce quadrant fait en même temps un angle droit avec l'arc AM. Car la ligne DC étant perpendiculaire au plan AMC, tout plan DMC qui passe par la ligne DC est perpendiculaire au plan AMC * ; donc l'angle de ces plans, ou suivant la * 18, 6. déf. VI, l'angle AMD, est un angle droit.

II. Pour trouver le pôle d'un arc donné AM, menez l'arc indéfini MD perpendiculaire à AM, prenez MD égal à un quadrant, et le point D sera un des pôles de l'arc MD ; ou bien menez aux deux points A et M les arcs AD et MD perpendiculaires à AM, le point de concours D de ces deux arcs sera le pôle demandé.

III. Réciproquement, si la distance du point D à chacun des points A et M est égale à un quadrant, je dis que le point D sera le pôle de l'arc AM, et qu'en même temps les angles DAM, AMD, seront droits.

Car soit C le centre de la sphere, et soient menés les rayons CA, CD, CM: puisque les angles ACD, MCD, sont droits, la ligne CD est perpendiculaire aux deux droites CA, CM ; donc elle est perpendiculaire à leur plan ; donc le point D est le pôle de l'arc AM ; et par suite les angles DAM, AMD, sont droits.

Scholie. Les propriétés des pôles permettent de tracer sur la surface de la sphere des arcs de cercle avec la même facilité que sur une surface plane. On voit, par exemple, qu'en faisant tourner l'arc DF ou toute autre ligne de même intervalle autour du point D, l'extrémité F décrira le petit cercle FNG; et si on fait tourner le quadrant DFA autour du point D, l'extrémité A décrira l'arc de grand cercle AM.

S'il faut prolonger l'arc AM, ou si on ne donne que les points A et M par lesquels cet arc doit passer, on déterminera d'abord le pôle D par l'intersection de deux arcs décrits des points A et M comme centres avec un intervalle égal au quadrant. Le pôle D étant trouvé, on décrira du point D, comme centre et avec le même intervalle, l'arc AM et son prolongement.

Enfin, s'il faut du point donné P abaisser un arc perpendiculaire sur l'arc donné AM, on prolongera celui-ci en S jusqu'à ce que l'intervalle PS soit égal à un quadrant; ensuite du pôle S et du même intervalle on décrira l'arc PM, qui sera l'arc perpendiculaire demandé.

PROPOSITION VII.

THÉORÊME.

Tout plan perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon est tangent à la sphere.

Soit FAG un plan perpendiculaire à l'extrémité du rayon OA; si on prend un point quelconque M sur ce plan, et qu'on joigne OM et AM, l'angle OAM sera droit, et ainsi la distance OM sera plus grande que OA. Le point M est donc hors de la sphere; et, comme il en est de même de tout autre point du plan FAG, il s'ensuit que ce plan n'a que le seul point A commun avec la surface de la sphere; donc il est tangent à cette surface *. fig. 226. *déf. 4.

Scholie. On peut prouver de même que deux spheres n'ont qu'un point commun, et sont par conséquent tangentes l'une à l'autre : lorsque la distance de leurs centres est égale à la somme ou à la différence de leurs rayons, alors les centres et le point de contact sont en ligne droite.

PROPOSITION VIII.

THÉORÊME.

L'angle BAC *que font entre eux deux arcs de grands cercles* AB, AC, *est égal à l'angle* FAG, *formé par les tangentes de ces arcs au point* A : *il a aussi pour mesure l'arc* DE, *décrit du point* A *comme pôle entre les côtés* AB, AC, *prolongés s'il est nécessaire.* fig. 226.

Car la tangente AF, menée dans le plan de l'arc AB, est perpendiculaire au rayon AO; la tangente AG, menée dans le plan de l'arc AC, est perpendiculaire au même rayon AO. Donc l'angle FAG est

* 17, 5. égal à l'angle des plans OAB, OAC*, qui est celui des arcs AB, AC, et qui se désigne par BAC.

Pareillement, si l'arc AD est égal à un quadrant, ainsi que AE, les lignes OD, OE, seront perpendiculaires à AO, et l'angle DOE sera encore égal à l'angle des plans AOD, AOE; donc l'arc DE est la mesure de l'angle de ces plans, ou la mesure de l'angle CAB.

Corollaire. Les angles des triangles sphériques peuvent se comparer entre eux par les arcs de grands cercles décrits de leurs sommets comme pôles et compris entre leurs côtés : ainsi il est facile de faire un angle égal à un angle donné.

fig. 238. *Scholie.* Les angles opposés au sommet, tels que ACO et BCN sont égaux; car l'un ou l'autre est toujours l'angle formé par les deux plans ACB, OCN.

On voit aussi que dans la rencontre de deux arcs ACB, OCN, les deux angles adjacents ACO, OCB, pris ensemble, valent toujours deux angles droits.

PROPOSITION IX.

THÉORÈME.

fig. 227. *Étant donné le triangle* ABC, *si des points* A, B, C, *comme pôles, on décrit les arcs* EF, FD, DE, *qui forment le triangle* DEF; *réciproquement les trois points* D, E, F, *seront les pôles des côtés* BC, AC, AB.

Car le point A étant le pôle de l'arc EF, la distance AE est un quadrant; le point C étant le pôle de l'arc DE, la distance CE est pareillement un quadrant; donc le point E est éloigné d'un quadrant de chacun
* 6, des points A et C; donc il est le pôle de l'arc AC*.
cor. 3. On démontrera de même que D est le pôle de l'arc BC, et F celui de l'arc AB.

Corollaire. Donc le triangle ABC peut être décrit par le moyen de DEF, comme DEF par le moyen de ABC.

PROPOSITION X.

THÉORÊME.

Les mêmes choses étant posées que dans le théorême précédent, chaque angle de l'un des triangles ABC, DEF, *aura pour mesure la demi-circonférence moins le côté opposé dans l'autre triangle.* fig. 227.

Soient prolongés, s'il est nécessaire, les côtés AB, AC, jusqu'à la rencontre de EF en G et H ; puisque le point A est le pôle de l'arc GH, l'angle A aura pour mesure l'arc GH. Mais l'arc EH est un quadrant ainsi que GF, puisque E est le pôle de AH, et F le pôle de AG ; donc EH + GF vaut une demi-circonférence. Or EH + GF est la même chose que EF + GH ; donc l'arc GH qui mesure l'angle A est égal à une demi-circonférence moins le côté EF ; de même l'angle B aura pour mesure $\frac{1}{2}$ *circ.* — DF, et l'angle C, $\frac{1}{2}$ *circ.* — DE.

Cette propriété doit être réciproque entre les deux triangles, puisqu'ils se décrivent de la même maniere l'un par le moyen de l'autre. Ainsi on trouvera que les angles D, E, F, du triangle DEF, ont pour mesures respectivement $\frac{1}{2}$ *circ.* — BC, $\frac{1}{2}$ *circ.* — AC, $\frac{1}{2}$ *circ.* — AB. En effet l'angle D, par exemple, a pour mesure l'arc MI ; or MI + BC = MC + BI = $\frac{1}{2}$ *circ.* : donc l'arc MI, mesure de l'angle D, = $\frac{1}{2}$ *circ.* — BC, et ainsi des autres.

Scholie. Il faut remarquer qu'outre le triangle DEF fig. 228. on en pourrait former trois autres par l'intersection des trois arcs DE, EF, DF. Mais la proposition actuelle n'a lieu que pour le triangle central, qui est distingué des trois autres en ce que les deux angles A et D sont situés d'un même côté de BC, les deux B fig. 227.

et E d'un même côté de AC, et les deux C et F d'un même côté de AB.

On donne différents noms aux deux triangles ABC, DEF; nous les appellerons *triangles polaires.*

PROPOSITION XI.

LEMME.

fig. 229. *Etant donné le triangle* ABC, *si du pôle* A *et de l'intervalle* AC *on décrit l'arc de petit cercle* DEC; *si du pôle* B *et de l'intervalle* BC *on décrit pareillement l'arc* DFC, *et que du point* D, *où les arcs* DEC, DFC, *se coupent, on mene les arcs de grands cercles* AD, DB; *je dis que le triangle* ADB *ainsi formé aura ses parties égales à celles du triangle* ACB.

Car par construction le côté AD = AC, DB = BC, AB est commun; donc ces deux triangles ont les côtés égaux chacun à chacun. Je dis maintenant que les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.

En effet, si le centre de la sphere est supposé en O, on peut concevoir un angle solide formé au point O par les trois angles plans AOB, AOC, BOC; on peut concevoir de même un second angle solide formé par les trois angles plans AOB, AOD, BOD. Et puisque les côtés du triangle ABC sont égaux à ceux du triangle ADB, il s'ensuit que les angles plans qui forment un de ces angles solides sont égaux aux angles plans qui forment l'autre angle solide, chacun à
* 23, 5. chacun : mais dans ce cas il a été démontré* que les plans dans lesquels sont les angles égaux sont également inclinés entre eux; donc les angles du triangle sphérique DAB sont égaux à ceux du triangle CAB, savoir DAB = BAC, DBA = ABC, et ADB = ACB; donc les côtés et les angles du triangle ADB sont égaux aux côtés et aux angles du triangle ACB.

Scholie. L'égalité de ces triangles n'est cependant pas une égalité absolue ou de superposition, car il serait impossible de les appliquer l'un sur l'autre exactement, à moins qu'ils ne fussent isosceles. L'égalité dont il s'agit est ce que nous avons déja appelé une égalité par *symmétrie*, et par cette raison nous appellerons les triangles ACB, ADB, *triangles symmétriques*.

PROPOSITION XII.

THÉORÊME.

Deux triangles situés sur la même sphere, ou sur des spheres égales, sont égaux dans toutes leurs parties, lorsqu'ils ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun.

Soit le côté AB=EF, le côté AC=EG, et l'angle BAC=FEG, le triangle EFG pourra être placé sur le triangle ABC ou sur son symmétrique ABD, de la même maniere qu'on superpose deux triangles rectilignes qui ont un angle égal compris entre côtés égaux. Donc toutes les parties du triangle EFG seront égales à celles du triangle ABC, c'est-à-dire qu'outre les trois parties qui sont supposées égales, on aura le côté BC=FG, l'angle ABC=EFG, et l'angle ACB =EGF. fig. 230.

PROPOSITION XIII.

THÉORÊME.

Deux triangles situés sur la même sphere, ou sur des spheres égales, sont égaux dans toutes leurs parties, lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun.

Car l'un de ces triangles peut être placé sur l'autre ou sur son symmétrique, comme on le fait dans le cas pareil des triangles rectilignes. *Voyez prop. VII, liv. I.*

PROPOSITION XIV.

THÉORÊME.

Si deux triangles situés sur la même sphere, ou sur des spheres égales, sont équilatéraux entre eux, ils seront aussi équiangles, et les angles égaux seront opposés aux côtés égaux.

fig. 229. Cela est manifeste par la proposition XI, où l'on a vu qu'avec trois côtés donnés AB, AC, BC, on ne peut faire que deux triangles ACB, ABD, différents quant à la position des parties, mais égaux quant à la grandeur de ces mêmes parties. Donc deux triangles équilatéraux entre eux sont ou absolument égaux, ou au moins égaux par symmétrie ; dans l'un et l'autre cas ils sont équiangles, et les angles égaux sont opposés aux côtés égaux.

PROPOSITION XV.

THÉORÊME.

Dans tout triangle sphérique isoscele les angles opposés aux côtés égaux sont égaux ; et réciproquement, si deux angles d'un triangle sphérique sont égaux, le triangle sera isoscele.

fig. 231. 1° Soit le côté AB=AC ; je dis qu'on aura l'angle C=B : car si du sommet A au point D, milieu de la base, on mene l'arc AD, les deux triangles ABD, ADC, auront les trois côtés égaux chacun à chacun; savoir, AD commun, BD=DC, et AB=AC : donc, par le théorême précédent, ces triangles auront les angles égaux, et on aura B=C.

2° Soit l'angle B=C ; je dis qu'on aura AC=AB : car si le côté AB n'est pas égal à AC, soit AB le plus grand des deux, prenez BO = AC, et joignez OC. Les deux côtés BO, BC, sont égaux aux deux AC, BC; l'angle compris par les premiers OBC est égal à l'angle compris par les seconds ACB. Donc les deux triangles BOC, ACB, ont les autres parties égales *, et on a *21. l'angle OCB = ABC : mais l'angle ABC, par hypothese, = ACB; donc on aurait OCB = ACB, ce qui est impossible; donc on ne peut supposer AB différent de AC; donc les côtés AB, AC, opposés aux angles égaux B et C, sont égaux.

Scholie. La même démonstration prouve que l'angle BAD = DAC, et que l'angle BDA = ADC. Donc ces deux derniers sont droits; donc *l'arc mené du sommet d'un triangle sphérique isoscele au milieu de sa base est perpendiculaire à cette base, et divise l'angle du sommet en deux parties égales.*

PROPOSITION XVI.

THÉORÊME.

Dans un triangle sphérique ABC, *si l'angle* A fig. 232 *est plus grand que l'angle* B, *le côté* BC *opposé à l'angle* A *sera plus grand que le côté* AC *opposé à l'angle* B; *réciproquement, si le côté* BC *est plus grand que* CA, *l'angle* A *sera plus grand que l'angle* B.

1° Soit l'angle A > B, faites l'angle BAD = B, vous aurez AD = DB * : mais AD + DC est plus grand que *15. AC; à la place de AD mettant DB, on aura DB + DC ou BC > AC.

2° Si on suppose BC > AC, je dis que l'angle BAC sera plus grand que ABC : car, si BAC était égal à ABC, on aurait BC = AC; et si on avait BAC < ABC, il s'ensuivrait, par ce qui vient d'être démontré, qu'on a BC < AC; ce qui est contre la supposition. Donc l'angle BAC est plus grand que ABC.

PROPOSITION XVII.

THÉORÊME.

fig. 233. *Si les deux côtés* AB, AC, *du triangle sphérique* ABC *sont égaux aux deux côtés* DE, DF, *du triangle* DEF *tracé sur une sphere égale, si en même temps l'angle* A *est plus grand que l'angle* D, *je dis que le troisieme côté* BC *du premier triangle sera plus grand que le troisieme* EF *du second.*

La démonstration est absolument semblable à celle de la prop. x, livre I.

PROPOSITION XVIII.

THÉORÊME.

Si deux triangles tracés sur la même sphere ou sur des spheres égales sont équiangles entre eux, ils seront aussi équilatéraux.

Soient A et B les deux triangles donnés, P et Q leurs triangles polaires. Puisque les angles sont égaux dans les triangles A et B, les côtés seront égaux dans les po-
* 10. laires P et Q*: mais de ce que les triangles P et Q sont équilatéraux entre eux, il s'ensuit qu'ils sont aussi
* 14. équiangles *; enfin, de ce que les angles sont égaux
* 10. dans les triangles P et Q, il s'ensuit * que les côtés sont égaux dans leurs polaires A et B. Donc les triangles équiangles A et B sont en même temps équilatéraux entre eux.

On peut encore démontrer la même proposition sans le secours des triangles polaires de la maniere suivante.

fig. 234. Soient ABC, DEF, deux triangles équiangles entre eux, de sorte qu'on ait A=D, B=E, C=F; je dis qu'on aura le côté AB=DE, AC=DF, BC=EF.

Sur le prolongement des côtés AB, AC, prenez $AG = DE$, et $AH = DF$; joignez GH et prolongez les arcs BC, GH, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en I et K.

Les deux côtés AG, AH, sont par construction égaux aux deux DF, DE; l'angle compris $GAH = BAC = EDF$; donc * les triangles AGH, DEF, sont égaux * 12. dans toutes leurs parties, donc l'angle $AGH = DEF = ABC$, et l'angle $AHG = DFE = ACB$.

Dans les triangles IBG, KBG, le côté BG est commun, l'angle $IGB = GBK$; et puisque $IGB + BGK$ est égal à deux droits, ainsi que $GBK + IBG$, il s'ensuit que $BGK = IBG$. Donc les triangles IBG, GBK, sont égaux *, donc $IG = BK$, et $IB = GK$. * 13.

Pareillement, de ce que l'angle $AHG = ACB$, on conclura que les triangles ICH, HCK, ont un côté égal adjacent à deux angles égaux; donc ils sont égaux; donc $IH = CK$, et $HK = IC$.

Maintenant, si des égales BK, IG, on retranche les égales CK, IH, les restes BC, GH, seront égaux. D'ailleurs l'angle $BCA = AHG$, et l'angle $ABC = AGH$. Donc les triangles ABC, AHG, ont un côté égal adjacent à deux angles égaux; donc ils sont égaux: mais le triangle DEF est égal dans toutes ses parties au triangle AHG; donc il est égal aussi au triangle ABC, et on aura $AB = DE$, $AC = DF$, $BC = EF$; donc, si deux triangles sphériques sont équiangles entre eux, les côtés opposés aux angles égaux seront égaux.

Scholie. Cette proposition n'a pas lieu dans les triangles rectilignes, où de l'égalité des angles on ne peut conclure que la proportionnalité des côtés. Mais il est aisé de rendre compte de la différence qui se trouve à cet égard entre les triangles rectilignes et les triangles sphériques. Dans la proposition présente, ainsi que dans les prop. XII, XIII, XIV et XVII, où il s'agit de la comparaison des triangles, il est dit expressément que ces triangles sont tracés sur la même sphere ou sur des spheres égales. Or les arcs semblables sont proportionnels aux rayons; donc, sur des spheres égales, deux triangles ne peuvent être semblables sans être égaux. Il n'est donc pas surprenant que l'égalité des angles entraîne l'égalité des côtés.

Il en serait autrement si les triangles étaient traces sur des spheres inégales; alors les angles étant égaux, les triangles seraient semblables, et les côtés homologues seraient entre eux comme les rayons des spheres.

PROPOSITION XIX.

THÉORÊME.

La somme des angles de tout triangle sphérique est moindre que six et plus grande que deux angles droits.

Car 1° chaque angle d'un triangle sphérique est moindre que deux angles droits (*voyez le scholie ci-après*); donc la somme des trois angles est moindre que six angles droits.

2° La mesure de chaque angle d'un triangle sphérique est égale à la demi-circonférence moins le côté
* 10. correspondant du triangle polaire*; donc la somme des trois angles a pour mesure trois demi-circonférences moins la somme des côtés du triangle polaire. Or cette derniere somme est plus petite qu'une cir-
* 4. conférence*; donc, en la retranchant de trois demi-circonférences, le reste sera plus grand qu'une demi-circonférence, qui est la mesure de deux angles droits; donc 2° la somme des trois angles d'un triangle sphérique est plus grande que deux angles droits.

Corollaire I. La somme des angles d'un triangle sphérique n'est pas constante comme celle des triangles rectilignes ; elle varie depuis deux angles droits jusqu'à six, sans pouvoir être égale à l'une ni à l'autre limite. Ainsi deux angles donnés ne font pas connaître le troisieme.

Corollaire II. Un triangle sphérique peut avoir deux ou trois angles droits, deux ou trois angles obtus.

Si le triangle ABC est *bi-rectangle*, c'est-à-dire s'il a deux angles droits B et C, le sommet A sera le pôle de la base BC*; et les côtés AB, AC, seront des quadrants. fig. 235. * 6.

Si en outre l'angle A est droit, le triangle ABC sera *tri-rectangle*, ses angles seront tous droits et ses côtés des quadrants. Le triangle tri-rectangle est contenu huit fois dans la surface de la sphere ; c'est ce que l'on voit par la fig. 236, en supposant l'arc MN égal à un quadrant.

Scholie. Nous avons supposé dans tout ce qui précede, et conformément à la définit. VI, que les triangles sphériques ont leurs côtés toujours plus petits que la demi-circonférence ; alors il s'ensuit que les angles sont toujours plus petits que deux angles droits : car, si le côté AB est moindre que la demi-circonférence, ainsi que AC, ces arcs doivent être prolongés tous deux pour se rencontrer en D. Or les deux angles ABC, CBD, pris ensemble, valent deux angles droits; donc l'angle ABC tout seul est moindre que deux angles droits. fig. 224.

Nous observerons cependant qu'il existe des triangles sphériques dont certains côtés sont plus grands que la demi-circonférence, et certains angles plus grands que deux angles droits. Car, si on prolonge le côté AC en une circonférence entiere ACE, ce qui reste, en retranchant de la demi-sphere le triangle ABC, est un nouveau triangle, qu'on peut désigner aussi par ABC, et dont les côtés sont AB, BC, AEDC.

On voit donc que le côté AEDC est plus grand que la demi-circonférence AED ; mais en même temps l'angle opposé en B surpasse deux angles droits de la quantité CBD.

Au reste si on a exclu de la définition les triangles dont les côtés et les angles sont si grands, c'est que leur résolution ou la détermination de leurs parties se réduit toujours à celle des triangles renfermés dans la définition. En effet on voit aisément que si on connaît les angles et les côtés du triangle ABC, on connaîtra immédiatement les angles et les côtés du triangle de même nom qui est le reste de la demi-sphere.

PROPOSITION XX.

THÉORÊME.

fig. 236. *Le fuseau* AMBNA *est à la surface de la sphere comme l'angle* MAN *de ce fuseau est à quatre angles droits, ou comme l'arc* MN *qui mesure cet angle est à la circonférence.*

Supposons d'abord que l'arc MN soit à la circonférence MNPQ dans un rapport rationnel, par exemple, comme 5 est à 48. On divisera la circonférence MNPQ en 48 parties égales, dont MN contiendra 5; joignant ensuite le pôle A et les points de division par autant de quarts de circonférence, on aura 48 triangles dans la demi-sphere AMNPQ, lesquels seront tous égaux entre eux, puisqu'ils auront toutes leurs parties égales. La sphere entiere contiendra donc 96 de ces triangles partiels, et le fuseau AMBNA en contiendra 10 ; donc le fuseau est à la sphere comme 10 est à 96, ou comme 5 est à 48, c'est-à-dire comme l'arc MN est à la circonférence.

Si l'arc MN n'est pas commensurable avec la circonférence, on prouvera par le même raisonnement dont on a déja vu beaucoup d'exemples, que le fuseau est toujours à la sphere comme l'arc MN est à la circonférence.

Corollaire I. Deux fuseaux sont entre eux comme leurs angles respectifs.

Corollaire II. On a déja vu que la surface entiere de la sphere est égale à huit triangles tri-rectangles*; * 19.
donc, si l'aire d'un de ces triangles est prise pour l'unité, la surface de la sphere sera représentée par 8. Cela posé, la surface du fuseau dont l'angle est A sera exprimée par 2A (si toutefois l'angle A est évalué en prenant l'angle droit pour unité); car on a $2A : 8 :: A : 4$. Il y a donc ici deux unités différentes; l'une pour les angles, c'est l'angle droit; l'autre pour les surfaces, c'est le triangle sphérique tri-rectangle, ou celui dont tous les angles sont droits, et les côtés des quarts de circonférence.

Scholie. L'onglet sphérique compris par les plans AMB, ANB, est au solide entier de la sphere comme l'angle A est à quatre angles droits. Car les fuseaux étant égaux, les onglets sphériques seront pareillement égaux: donc deux onglets sphériques sont entre eux comme les angles formés par les plans qui les comprennent.

PROPOSITION XXI.

THÉORÊME.

Deux triangles sphériques symmétriques sont égaux en surface.

Soient ABC, DEF deux triangles symmétriques, fig. 237.
c'est-à-dire, deux triangles qui ont les côtés égaux, AB = DE, AC = DF, CB = EF, et qui cependant ne pourraient être superposés; je dis que la surface ABC est égale à la surface DEF.

Soit P le pôle du petit cercle qui passerait par le trois points A, B, C (1); de ce point soient menés les
*6. arcs égaux * PA, PB, PC; au point F faites l'angle DFQ=ACP, l'arc FQ=CP, et joignez DQ, EQ.

Les côtés DF, FQ, sont égaux aux côtés AC, CP, l'angle DFQ=ACP; donc les deux triangles DFQ,
* 12. ACP, sont égaux dans toutes leurs parties *; donc ie côté DQ=AP, et l'angle DQF=APC.

Dans les triangles proposés DFE, ABC, les angles DFE, ACB, opposés aux côtés égaux DE, AB, étant
* 11. égaux *, si on en retranche les angles DFQ, ACP, égaux par construction, il restera l'angle QFE égal à PCB. D'ailleurs les côtés QF, FE, sont égaux aux côtés PC, CB; donc les deux triangles FQE, CPB, sont égaux dans toutes leurs parties; donc le côté QE=PB, et l'angle FQE=CPB.

Si on observe maintenant que les triangles DFQ, ACP, qui ont les côtés égaux chacun à chacun, sont en même temps isosceles, on verra qu'ils peuvent s'appliquer l'un sur l'autre; car, ayant placé PA sur son égal QF, le côté PC tombera sur son égal QD, et ainsi les deux triangles seront confondus en un seul: donc ils sont égaux, donc la surface DQF=APC. Par une raison semblable la surface FQE=CPB, et la surface DQE=APB; donc on a DQF+FQE—DQE=APC+CPB—APB; ou DFE=ABC; donc les deux triangles symmétriques ABC, DEF, sont égaux en surface.

Scholie. Les pôles P et Q pourraient être situés audedans des triangles ABC, DEF; alors il faudrait ajouter les trois triangles DQF, FQE, DQE, pour

(1) Le cercle qui passe par les trois points A, B, C, ou qui est circonscrit au triangle ABC, ne peut être qu'un petit cercle de la sphere; car, si c'était un grand cercle, les trois côtés AB, BC, AC, seraient situés dans un même plan, et le triangle ABC se réduirait à un de ses côtés.

en composer le triangle DEF, et pareillement il faudrait ajouter les trois triangles APC, CPB, APB, pour en composer le triangle ABC; d'ailleurs la démonstration et la conclusion seraient toujours les mêmes.

PROPOSITION XXII.

THÉORÊME.

Si deux grands cercles AOB, COD, *se coupent comme on voudra dans l'hémisphere* AOCBD, *la somme des triangles opposés* AOC, BOD, *sera égale au fuseau dont l'angle est* BOD. fig. 238.

Car, en prolongeant les arcs OB, OD, dans l'autre hémisphere jusqu'à leur rencontre en N, OBN sera une demi-circonférence, ainsi que AOB; retranchant de part et d'autre OB, on aura BN = AO. Par une raison semblable on a DN = CO, et BD = AC; donc les deux triangles AOC, BDN, ont les trois côtés égaux: d'ailleurs leur position est telle qu'ils sont symmétriques l'un de l'autre; donc ils sont égaux en surface *, et la somme des triangles AOC, BOD, est équivalente au fuseau OBNDO dont l'angle est BOD. * 21.

Scholie. Il est clair aussi que les deux pyramides sphériques qui ont pour bases les triangles AOC, BOD, prises ensemble, équivalent à l'onglet sphérique dont l'angle est BOD.

PROPOSITION XXIII.

THÉORÊME.

La surface d'un triangle sphérique quelconque a pour mesure l'excès de la somme de ses trois angles sur deux angles droits.

Soit ABC le triangle proposé; prolongez ses côtés fig. 239.

jusqu'à ce qu'ils rencontrent le grand cercle DEFG, mené comme on voudra hors du triangle. En vertu du théorême précédent, les deux triangles ADE, AGH, pris ensemble, équivalent au fuseau dont l'angle est
* 20. A, et qui a pour mesure 2A* : ainsi on aura $ADE + AGH = 2A$; par une raison semblable $BGF + BID = 2B$, $CIH + CFE = 2C$. Mais la somme de ces six triangles excede la demi-sphere de deux fois le triangle ABC, d'ailleurs la demi-sphere est représentée par 4; donc le double du triangle ABC est égal à $2A + 2B + 2C - 4$, et par conséquent $ABC = A + B + C - 2$; donc tout triangle sphérique a pour mesure la somme de ses angles moins deux angles droits.

Corollaire I. Autant il y aura d'angles droits dans cette mesure, autant le triangle proposé contiendra de triangles tri-rectangles ou de huitiemes de sphere
* 20. qui sont l'unité de surface*. Par exemple, si les angles sont égaux chacun aux $\frac{4}{3}$ d'un angle droit, alors les trois angles vaudront 4 angles droits, et le triangle proposé sera représenté par $4 - 2$ ou 2; donc il sera égal à deux triangles tri-rectangles ou au quart de la surface de la sphere.

Corollaire II. Le triangle sphérique ABC est équivalent au fuseau dont l'angle est $\frac{A+B+C}{2} - 1$; de même la pyramide sphérique, dont la base est ABC, équivaut à l'onglet sphérique dont l'angle est $\frac{A+B+C}{2} - 1$.

Scholie. En même temps qu'on compare le triangle sphérique ABC au triangle tri-rectangle, la pyramide sphérique qui a pour base ABC se compare avec la pyramide tri-rectangle, et il en résulte la même proportion. L'angle solide au sommet de la pyramide se compare de même avec l'angle solide au sommet de la pyramide tri-rectangle : en effet la comparaison s'établit par la coïncidence des parties. Or, si les bases des pyramides coïncident, il est évident que les pyramides elles-mêmes coïncideront, ainsi que les angles solides à leur sommet. De là résultent plusieurs conséquences.

1° Deux pyramides triangulaires sphériques sont entre elles comme leurs bases; et, puisqu'une pyramide polygonale peut se partager en plusieurs pyramides triangulaires, il s'ensuit que deux pyramides sphériques quelconques sont entre elles comme les polygones qui leur servent de bases.

2° Les angles solides au sommet des mêmes pyramides sont également dans la proportion des bases; donc, pour comparer deux angles solides quelconques, il faut placer leurs sommets au centre de deux spheres égales, et ces angles solides seront entre eux comme les polygones sphériques interceptés entre leurs plans ou faces.

L'angle au sommet de la pyramide tri-rectangle est formé par trois plans perpendiculaires entre eux : cet angle, qu'on peut appeler *angle solide droit*, est très-propre à servir d'unité de mesure aux autres angles solides. Cela posé, le même nombre qui donne l'aire d'un polygone sphérique donnera la mesure de l'angle solide correspondant. Par exemple, si l'aire du polygone sphérique est $\frac{3}{4}$, c'est-à-dire, s'il est les $\frac{3}{4}$ du triangle tri-rectangle, l'angle solide correspondant sera aussi les $\frac{3}{4}$ de l'angle solide droit.

PROPOSITION XXIV.

THÉORÊME.

La surface d'un polygone sphérique a pour mesure la somme de ses angles, moins le pro-

duit de deux angles droits par le nombre des côtés du polygone moins deux.

fig. 240. D'un même sommet A soient menées à tous les autres sommets les diagonales AC, AD; le polygone ABCDE sera partagé en autant de triangles moins deux qu'il a de côtés. Mais la surface de chaque triangle a pour mesure la somme de ses angles moins deux angles droits, et il est clair que la somme de tous les angles des triangles est égale à la somme des angles du polygone : donc la surface du polygone est égale à la somme de ses angles diminuée d'autant de fois deux angles droits qu'il a de côtés moins deux.

Scholie. Soit s la somme des angles d'un polygone sphérique, n le nombre de ses côtés; l'angle droit étant supposé l'unité, la surface du polygone aura pour mesure $s - 2(n-2)$ ou $s - 2n + 4$.

PROPOSITION XXV.

THÉORÊME.

Soit S *le nombre des angles solides d'un polyèdre*, H *le nombre de ses faces*, A *le nombre de ses arêtes; je dis qu'on aura toujours* $S + H = A + 2$.

Prenez au-dedans du polyèdre un point d'où vous menerez des lignes droites aux sommets de tous ses angles; imaginez ensuite que du même point comme centre on décrive une surface sphérique qui soit rencontrée par toutes ces lignes en autant de points; joignez ces points par des arcs de grands cercles, de maniere à former sur la surface de la sphere des polygones correspondants et en même nombre
fig. 240. avec les faces du polyèdre. Soit ABCDE un de ces polygones et soit n le nombre de ses côtés; sa surface sera $s - 2n + 4$, s étant la somme des angles A, B, C, D, E. Si on évalue semblablement la surface de chacun des autres polygones sphériques, et qu'on les ajoute toutes ensemble, on en conclura que leur somme, ou la surface de la sphere représentée par 8, est égale à la somme de tous les angles des polygones,

moins deux fois le nombre de leurs côtés, plus 4 pris autant de fois qu'il y a de faces. Or, comme tous les angles qui s'ajustent autour d'un même point A valent quatre angles droits, la somme de tous les angles des polygones est égale à 4 pris autant de fois qu'il y a d'angles solides; elle est donc égale à 4S. Ensuite le double du nombre des côtés AB, BC, CD, etc. est égal au quadruple du nombre des arêtes ou $=4A$, puisque la même arête sert de côté à deux faces: donc on aura $8=4S-4A+4H$; ou, en prenant le quart de chaque membre, $2=S-A+H$; donc $S+H=A+2$.

Corollaire. Il suit de là que *la somme des angles plans qui forment les angles solides d'un polyèdre est égale à autant de fois quatre angles droits qu'il y a d'unités dans* $S-2$, S *étant le nombre des angles solides du polyèdre.*

Car, si on considere une face dont le nombre de côtés est n, la somme des angles de cette face sera $2n-4$ angles droits*. Mais la somme de tous les $2n$, ou le double du nombre des côtés de toutes les faces, $=4A$, et 4 pris autant de fois qu'il y a de faces $=4H$; donc la somme des angles de toutes les faces $=4A-4H$. Or, par le théorême qu'on vient de démontrer, on a $A-H=S-2$, et par conséquent $4A-4H=4\ (S-2)$. Donc *la somme des angles plans*, etc. * 25, 1.

PROPOSITION XXVI.

THÉORÊME.

De tous les triangles sphériques formés avec deux côtés donnes CB, CA, *et un troisieme à volonté, le plus grand* ABC *est celui dans lequel l'angle* C, *compris par les côtés donnés, est égal à la somme des deux autres angles* A *et* B. fig. 272 et 273.

Prolongez les deux côtés AC, AB, jusqu'à leur rencontre en D, vous aurez un triangle sphérique BCD, dans lequel l'angle DBC sera aussi égal à la somme des deux autres angles BDC, BCD: car $BCD+BCA$ étant égal à deux angles droits, ainsi que $CBA+CBD$, on a $BCD+BCA=CBA+CBD$; ajoutant de part et d'autre $BDC=BAC$, on aura $BCD+BCA+BDC=CBA+CBD+BAC$. Or, par hypothese, $BCA=CBA+BAC$; donc $CBD=BCD+BDC$

Menez BI qui fasse l'angle $CBI = BCD$, et par suite $IBD = BDC$; les deux triangles IBC, IBD, seront isosceles, et on aura $IC = IB = ID$. Donc le point I, milieu de DC, est à égale distance des trois points B, C, D : par une raison semblable le point O, milieu de AB, sera également distant des trois points A, B, C.

fig. 272. Soit maintenant $CA' = CA$ et l'angle $BCA' > BCA$; si l'on joint A'B, et qu'on prolonge les arcs A'C, A'B, jusqu'à leur rencontre en D', l'arc D'CA' sera une demi-circonférence ainsi que DCA; donc puisqu'on a $CA' = CA$, on aura aussi $CD' = CD$. Mais dans le triangle CID', on a $CI + ID' > CD'$; donc $ID' > CD - CI$, ou $ID' > ID$.

Dans le triangle isoscele CIB divisons l'angle du sommet I en deux également par l'arc EIF qui sera perpendiculaire sur le milieu de BC. Si on prend un point L entre I et E, la distance BL, égale à LC, sera moindre que BI; car on peut démontrer, comme dans la prop. IX, liv. I, qu'on a $BL + LC < BI + IC$; donc en prenant les moitiés de part et d'autre, on aura $BL < BI$. Mais dans le triangle D'LC on a $D'L > D'C - CL$, et à plus forte raison $D'L > DC - CI$, ou $D'L > DI$, ou $D'L > BI$; donc $D'L > BL$. Donc si on cherche sur l'arc EIF un point également distant des trois points B, C, D', ce point ne saurait se trouver que sur le prolongement de EI vers F. Soit I' le point cherché, en sorte qu'on ait $D'I' = BI' = CI'$; les triangles I'CB, I'CD', I'BD', étant isosceles, on aura les angles égaux $I'BC = I'CB$, $I'BD' = I'D'B$, $I'CD' = I'D'C$. Mais les angles $D'BC + CBA'$ valent deux angles droits, ainsi que $D'CB + BCA'$; donc

$$D'BI' + I'BC + CBA' = 2,$$
$$BCI' - I'CD' + BCA' = 2.$$

Ajoutant les deux sommes et observant qu'on a $I'BC = BCI'$ et $D'BI' - I'CD' = BD'I' - I'D'C = CD'B = CA'B$, on aura

$$2I'BC + CA'B + CBA' + BCA' = 4.$$

Donc $CA'B + CBA' + BCA' - 2$ (mesure de l'aire du triangle A'BC) $= 2 - 2I'BC$; de sorte qu'on a *aire* $A'BC = 2 - 2$ *angle* I'BC; semblablement dans le triangle ABC, on aurait *aire* $ABC = 2 - 2$ *angle* IBC. Or, on a démontré que l'angle I'BC est plus grand que IBC; donc l'aire A'BC est plus petite que ABC.

La même démonstration et la même conclusion auraient lieu, si, en prenant toujours l'arc CA' = CA, on faisait l'angle BCA' < BCA; donc ABC est le triangle le plus grand entre tous ceux qui ont deux côtés donnés et le troisième à volonté. fig. 273.

Scholie I. Le triangle ABC, le plus grand entre tous ceux qui ont deux côtés donnés CA, CB, peut être inscrit dans un demi-cercle dont la corde du troisième côté AB sera le diametre; car O étant le milieu de AB, on a vu que les distances OC, OB, sont égales; donc la circonférence de petit cercle décrite du point O comme pole et de l'intervalle OB passera par les trois points A, B, C. De plus la ligne droite BA est un diametre de ce petit cercle; car le centre qui doit se trouver à la fois dans le plan du petit cercle et dans le plan de l'arc de grand cercle* BOA, se trouvera nécessairement dans l'intersection de ces deux plans qui est la droite BA, et ainsi BA sera un diamètre. fig. 241. * pr. 1, cor. 4.

II. Dans le triangle ABC, l'angle C étant égal à la somme des deux autres A et B, il s'ensuit que la somme des trois angles est double de l'angle C. Mais cette somme est toujours plus grande que deux angles droits*; donc l'angle C est plus grand qu'un droit. * 19.

III. Si l'on prolonge les côtés CB, CA, jusqu'à leur rencontre en E, le triangle BAE sera égal au quart de la surface de la sphere. Car l'angle E = C = ABC + CAB; donc les trois angles du triangle BAE équivalent aux quatre ABC, ABE, CAB, BAE dont la somme est égale à quatre angles droits; donc la surface du triangle BAE* = 4 − 2 = 2, qui est le quart de la surface de la sphere. * 24.

IV. Il n'y aurait pas lieu à *maximum*, si la somme des deux côtés donnés CA, CB, était égale ou plus grande que la demi-circonférence d'un grand cercle. Car puisque le triangle ABC doit être inscrit dans un demi-cercle de la sphere, la somme des deux côtés CA, CB, sera moindre que la demi-circonférence BCA*, et par conséquent moindre que la demi-circonférence d'un grand cercle. * 3.

La raison pourquoi il n'y a pas de *maximum*, lorsque la somme des deux côtés donnés est plus grande que la demi-circonférence d'un grand cercle, c'est qu'alors le triangle augmente de plus en plus à mesure que l'angle compris par les côtés donnés est plus grand; enfin, lorsque cet angle sera égal à deux droits, les trois côtés seront dans un même plan, et formeront une circonférence entiere; le triangle sphérique deviendra donc égal à la demi-sphere, mais il cessera alors d'être triangle.

PROPOSITION XXVII.

THÉORÊME.

De tous les triangles sphériques formés avec un côté donné et un périmetre donné, le plus grand est celui dans lequel les deux côtés non déterminés sont égaux.

fig. 242. Soit AB le côté donné commun aux deux triangles ACB, ADB, et soit $AC + CB = AD + DB$; je dis que le triangle isoscele ACB, dans lequel $AC = CB$, est plus grand que le non-isoscele ADB.

Car ces triangles ayant la partie commune AOB, il suffit de faire voir que le triangle BOD est plus petit que AOC. L'angle CBA égal à CAB, est plus grand que OAB; ainsi
21. le côté AO est plus grand que OB; prenez $OI = OB$, faites $OK = OD$, et joignez KI; le triangle OKI sera égal à DOB*. Si on nie maintenant que le triangle DOB ou son égal KOI soit plus petit que OAC, il faudra qu'il soit égal ou plus grand; dans l'un et l'autre cas, puisque le point I est entre les points A et O, il faudra que le point K soit sur OC prolongé, sans quoi le triangle OKI serait contenu dans le triangle CAO, et par conséquent plus petit. Cela posé, le plus court chemin de C en A étant CA, on a $CK + KI + IA > CA$. Mais $CK = OD - CO$, $AI = AO - OB$, $KI = BD$; donc $OD - CO + AO - OB + BD > CA$, et en réduisant $AD - CB + BD > CA$, ou $AD + BD > AC + CB$. Or cette inégalité est contraire à l'hypothese $AD + BD = AC + CB$, donc le point K ne peut tomber sur le prolongement de OC; donc il tombe entre O et C, et par conséquent le triangle KOI, ou son égal ODB, est plus petit que ACO; donc le triangle isoscele ACB est plus grand que le non-isoscele ADB de même base et de même périmetre.

Scholie. Ces deux dernieres propositions sont analogues aux propositions I et III de l'appendice au liv. IV; ainsi on peut en tirer, par rapport aux polygones sphériques, les conséquences qui ont lieu pour les polygones rectilignes.

Voici les principales :

1° *De tous les polygones sphériques isopérimetres et d'un même nombre de côtés, le plus grand est un polygone équilatéral.*

Même démonstration que pour la prop. II de l'appendice au livre IV.

2° *De tous les polygones sphériques formés avec des côtés donnés et un dernier à volonté, le plus grand est celui qu'on peut inscrire dans un demi-cercle dont la corde du côté non déterminé sera le diametre.*

La démonstration se déduit de la prop. XXVI, comme on l'a vu dans la prop. IV de l'appendice cité; il faut pour l'existence du *maximum*, que la somme des côtés donnés soit moindre que la demi-circonférence d'un grand cercle.

3° *Le plus grand des polygones sphériques formés avec des côtés donnés, est celui qu'on peut inscrire dans un cercle de la sphere.*

Même démonstration que pour la prop. VI de l'appendice au livre IV.

4° *Le plus grand des polygones sphériques qui ont le même périmetre et le même nombre de côtés, est celui qui a ses angles égaux et ses côtés égaux.*

C'est ce qui résulte des corollaires 1 et 3 qui précèdent.

Nota. Toutes les propositions de *maximum* concernant les polygones sphériques s'appliquent aux angles solides dont ces polygones sont la mesure.

APPENDICE AUX LIVRES VI ET VII.

LES POLYEDRES RÉGULIERS.

PROPOSITION PREMIERE.

THÉORÊME.

Il ne peut y avoir que cinq polyèdres réguliers.

Car on a défini *polyèdres réguliers* ceux dont toutes les faces sont des polygones réguliers égaux, et dont tous les angles solides sont égaux entre eux. Ces conditions ne peuvent avoir lieu que dans un petit nombre de cas.

1° Si les faces sont des triangles équilatéraux, on peut former chaque angle solide du polyèdre avec trois angles de ces triangles, ou avec quatre, ou avec cinq : de là naissent trois corps réguliers, qui sont le tétraèdre, l'octaèdre, et l'icosaèdre. On n'en peut pas former un plus grand nombre avec des triangles équilatéraux, car six angles de ces triangles valent quatre angles droits, et ne peuvent former
21,5. d'angle solide.

2° Si les faces sont des quarrés, on peut assembler leurs angles trois à trois; et de là résulte l'hexaèdre ou cube.

Quatre angles de quarrés valent quatre angles droits, et ne peuvent former d'angle solide.

3° Enfin, si les faces sont des pentagones réguliers, on pourra encore assembler leurs angles trois à trois, et il en résultera le dodécaèdre régulier.

On ne peut aller plus loin; car trois angles d'hexagones réguliers valent quatre angles droits, et trois d'heptagones encore plus.

Donc il ne peut y avoir que cinq polyedres réguliers, trois formés avec des triangles équilatéraux, un avec des quarrés, et un avec des pentagones.

Scholie. On va prouver dans la proposition suivante que ces cinq polyèdres existent réellement, et qu'on peut en déterminer toutes les dimensions lorsqu'on connaît une de leurs faces.

PROPOSITION II.

PROBLÊME.

Etant donnée l'une des faces d'un polyèdre régulier, ou seulement son côté, construire le polyèdre.

Ce problême en présente cinq qui vont être résolus successivement.

Construction du tétraèdre.

Soit ABC le triangle équilatéral qui doit être une des faces du tétraèdre; au point O, centre de ce triangle élevez OS perpendiculaire au plan ABC; terminez cette perpendiculaire au point S, de sorte que $AS = AB$; joignez SB, SC, et la pyramide SABC sera le tétraèdre requis. fig. 243.

Car, à cause des distances égales OA, OB, OC, les obliques SA, SB, SC, s'écartent également de la perpendiculaire SO et sont égales. L'une d'elles $SA = AB$; donc les quatre faces de la pyramide SABC sont des triangles égaux au triangle donné ABC. D'ailleurs les angles solides de cette pyramide sont égaux entre eux, puisqu'ils sont formés chacun avec trois angles plans égaux; donc cette pyramide est un tétraèdre régulier.

Construction de l'hexaèdre.

Soit ABCD un quarré donné: sur la base ABCD construisez un prisme droit dont la hauteur AE soit égale au côté AB. Il est clair que les faces de ce prisme sont des quarrés égaux, et que ses angles solides sont égaux entre eux comme étant formés chacun avec trois angles droits; donc ce prisme est un hexaèdre régulier ou cube. fig. 244.

Construction de l'octaèdre.

Soit AMB un triangle équilatéral donné: sur le côté AB décrivez le quarré ABCD; au point O, centre de ce quarré, élevez sur son plan la perpendiculaire TS, terminée de part et d'autre en T et S, de maniere que $OT = OS = AO$; fig 245.

joignez ensuite SA, SB, TA, etc., vous aurez un solide SABCDT, composé de deux pyramides quadrangulaires SABCD, TABCD, adossées par leur base commune ABCD, ce solide sera l'octaèdre régulier demandé.

En effet, le triangle AOS est rectangle en O, ainsi que le triangle AOD; les côtés AO, OS, OD, sont égaux; donc ces triangles sont égaux, donc AS = AD. On démontrera de même que tous les autres triangles rectangles AOT, BOS, COT, etc., sont égaux au triangle AOD; donc tous les côtés AB, AS, AT, etc. sont égaux entre eux, et par conséquent le solide SABCDT est compris sous huit triangles égaux au triangle équilatéral donné ABM. Je dis de plus que les angles solides du polyèdre sont égaux entre eux : par exemple, l'angle S est égal à l'angle B.

Car il est visible que le triangle SAC est égal au triangle DAC, et qu'ainsi l'angle ASC est droit; donc la figure SATC est un quarré égal au quarré ABCD. Mais si on compare la pyramide BASCT à la pyramide SABCD, la base ASCT de la premiere peut se placer sur la base ABCD de la seconde; alors le point O étant un centre commun, la hauteur OB de la premiere coïncidera avec la hauteur OS de la seconde, et les deux pyramides se confondront en une seule; donc l'angle solide S est égal à l'angle solide B; donc le solide SABCDT est un octaèdre régulier.

Scholie. Si trois droites égales, AC, BD, ST, sont perpendiculaires entre elles et se coupent dans leur milieu, les extrémités de ces droites seront les sommets d'un octaèdre régulier.

Construction du dodécaèdre.

fig. 246. Soit ABCDE un pentagone régulier donné; soient ABP, CBP, deux angles plans égaux à l'angle ABC : avec ces angles plans formez l'angle solide B, et déterminez par la proposition XXIV, livre V, l'inclinaison mutuelle de deux de ces plans, inclinaison que j'appelle K. Formez semblablement aux points C, D, E, A, des angles solides égaux à l'angle solide B, et situés de la même maniere : le plan CBP sera le même avec le plan BCG, puisqu'ils sont inclinés l'un et l'autre de la même quantité K sur le plan ABCD. On peut donc dans le plan PBCG décrire le pentagone BCGFP égal

au pentagone ABCDE. Si on fait de même dans chacun des autres plans CDI, DEL, etc., on aura une surface convexe PFGH, etc. composée de six pentagones réguliers égaux et inclinés chacun sur son adjacent de la même quantité K. Soit *pfgh*, etc. une seconde surface égale à PFGH, etc., je dis que ces deux surfaces peuvent être réunies de maniere à ne former qu'une seule surface convexe continue. En effet l'angle *opf*, par exemple, peut se joindre aux deux angles OPB, BPF, pour faire un angle solide P égal à l'angle B; et dans cette jonction il ne sera rien changé à l'inclinaison des plans BPF, BPO, puisque cette inclinaison est telle qu'il le faut pour la formation de l'angle solide. Mais en même temps que l'angle solide P se forme, le côté *pf* s'appliquera sur son égal PF, et au point F se trouveront réunis trois angles plans PFG, *pfe*, *efg*, qui formeront un angle solide égal à chacun des angles déja formés; cette jonction se fera sans rien changer ni à l'état de l'angle P, ni à celui de la surface *efgh*, etc.; car les plans PFG, *efp*, déja réunis en P, ont entre eux l'inclinaison convenable K, ainsi que les plans *efg*, *efp*. Continuant ainsi de proche en proche, on voit que les deux surfaces s'ajusteront mutuellement l'une avec l'autre, pour ne former qu'une seule surface continue et rentrante sur elle-même : cette surface sera celle d'un dodécaèdre régulier, puisqu'elle est composée de douze pentagones réguliers égaux, et que tous ses angles solides sont égaux entre eux.

Construction de l'icosaèdre.

Soit ABC une de ses faces; il faut d'abord former un angle solide avec cinq plans égaux au plan ABC et également inclinés chacun sur son adjacent. Pour cela, sur le côté B′C′, égal à BC, faites le pentagone régulier B′C′H′I′D′; au centre de ce pentagone élevez sur son plan une perpendiculaire, que vous terminerez en A′ de maniere que B′A′ = B′C′; joignez A′C′, A′H′, A′I′, A′D′, et l'angle solide A′, formé par les cinq plans B′A′C′, C′A′H′, etc., sera l'angle solide requis. Car les obliques A′B′, A′C′, etc. sont égales, et l'une d'elles A′B′ est égale au côté B′C′; donc tous les triangles B′A′C′, C′A′H′, etc. sont égaux entre eux et au triangle donné ABC. fig. 247.

Il est visible d'ailleurs que les plans B'A'C', C'A'H', etc. sont également inclinés chacun sur son adjacent; car les angles solides B', C', etc. sont égaux entre eux, puisqu'ils sont formés chacun avec deux angles de triangles équilatéraux et un de pentagone régulier. Appelons K l'inclinaison des deux plans où sont les angles égaux, inclinaison qu'on peut déterminer par la proposition XXIV, liv. V; l'angle K sera en même temps l'inclinaison de chacun des plans qui composent l'angle solide A' sur son adjacent.

Cela posé, si on fait aux points A, B, C, des angles solides égaux chacun à l'angle A', on aura une surface convexe DEFG, etc. composée de dix triangles équilatéraux, dont chacun sera incliné sur son adjacent de la quantité K; et les angles D, E, F, etc. de son contour réuniront alternativement trois et deux angles de triangles équilatéraux. Imaginez une seconde surface égale à la surface DEFG, etc.; ces deux surfaces pourront s'adapter mutuellement, en joignant chaque angle triple de l'une à un angle double de l'autre; et, comme les plans de ces angles ont déja entre eux l'inclinaison K nécessaire pour former un angle solide quintuple égal à l'angle A, il ne sera rien changé dans cette jonction à l'état de chaque surface en particulier, et les deux ensemble formeront une seule surface continue, composée de vingt triangles équilatéraux. Cette surface sera celle de l'icosaèdre régulier, puisque d'ailleurs tous les angles solides sont égaux entre eux.

PROPOSITION III.

PROBLÊME.

Trouver l'inclinaison de deux faces adjacentes d'un polyèdre régulier.

Cette inclinaison se déduit immédiatement de la construction qui vient d'être donnée des cinq polyèdres réguliers; à quoi il faut ajouter la proposition XXIV, liv. V, par laquelle étant donnés les trois angles plans qui forment un angle solide, on détermine l'angle que deux de ces plans font entre eux.

fig. 243 *Dans le tétraèdre.* Chaque angle solide est formé de trois angles de triangles équilatéraux : il faut donc chercher par le problême cité l'angle que deux de ces plans font entre eux, cet angle sera l'inclinaison de deux faces adjacentes du tétraèdre.

Dans l'hexaèdre. L'angle de deux faces adjacentes est un angle droit. fig. 244.

Dans l'octaèdre. Formez un angle solide avec deux angles de triangles équilatéraux et un angle droit; l'inclinaison des deux plans où sont les angles des triangles sera celle de deux faces adjacentes de l'octaèdre. fig. 245.

Dans le dodécaèdre. Chaque angle solide est formé avec trois angles de pentagones réguliers; ainsi l'inclinaison des plans de deux de ces angles sera celle de deux faces adjacentes du dodécaèdre. fig. 246.

Dans l'icosaèdre. Formez un angle solide avec deux angles de triangles équilatéraux et un angle de pentagone régulier, l'inclinaison des deux plans où sont les angles des triangles sera celle de deux faces adjacentes de l'icosaèdre. fig. 247.

PROPOSITION IV.

PROBLÊME.

Etant donné le côté d'un polyèdre régulier, trouver le rayon de la sphere inscrite et celui de la sphere circonscrite au polyèdre.

Il faut d'abord démontrer que tout polyèdre régulier peut être inscrit dans la sphere, et qu'il peut lui être circonscrit. fig. 248.

Soit AB le côté commun à deux faces adjacentes; soient C et E les centres de ces deux faces, et CD, ED, les perpendiculaires abaissées de ces centres sur le côté commun AB, lesquelles tomberont au point D, milieu de ce côté. Les deux perpendiculaires CD, DE, font entre elles un angle connu, qui est égal à l'inclinaison de deux faces adjacentes, déterminée par le problême précédent. Or si, dans le plan CDE, perpendiculaire à AB, on mene sur CD et ED les perpendiculaires indéfinies CO et EO, qui se rencontrent en O, je dis que le point O sera le centre de la sphere inscrite et celui de la sphere circonscrite; le rayon de la première étant OC, et celui de la seconde OA.

En effet, puisque les apothêmes CD, DE, sont égales, et l'hypoténuse DO commune, le triangle rectangle CDO est
* 18, 1. égal au triangle rectangle ODE * et la perpendiculaire OC est égale à la perpendiculaire OE. Mais AB étant perpendiculaire au plan CDE, le plan ABC est perpendiculaire à
* 17, 5. CDE *, ou CDE à ABC; d'ailleurs CO, dans le plan CDE, est perpendiculaire à CD, intersection commune des plans
* 18, 5. CDE, ABC; donc CO * est perpendiculaire au plan ABC. Par la même raison EO est perpendiculaire au plan ABE; donc les deux perpendiculaires CO, EO, menées aux plans de deux faces adjacentes par les centres de ces faces, se rencontrent en un même point O et sont égales. Supposons maintenant que ABC et ABE représentent deux autres faces adjacentes quelconques, l'apothême CD restera toujours de la même grandeur, ainsi que l'angle CDO, moitié de CDE; donc le triangle rectangle CDO et son côté CO seront égaux pour toutes les faces du polyèdre; donc, si du point O comme centre et du rayon OC on décrit une sphere, cette sphere touchera toutes les faces du polyèdre dans leurs centres (car les plans ABC, ABE, seront perpendiculaires à l'extrémité d'un rayon), et la sphere sera inscrite dans le polyèdre, ou le polyèdre circonscrit à la sphere.

Joignez OA, OB; à cause de CA = CB, les deux obliques OA, OB, s'écartant également de la perpendiculaire, seront égales; il en sera de même de deux autres lignes quelconques menées du centre O aux extrémités d'un même côté; donc toutes ces lignes sont égales entre elles; donc si du point O comme centre et du rayon OA on décrit une surface sphérique, cette surface passera par les sommets de tous les angles solides du polyèdre, et la sphere sera circonscrite au polyèdre ou le polyèdre inscrit dans la sphere.

Cela posé, la solution du problême proposé n'a plus aucune difficulté, et peut s'effectuer ainsi :

fig. 249. Étant donné le côté d'une face du polyèdre, décrivez cette face, et soit CD son apothême. Cherchez par le problême précédent l'inclinaison de deux faces adjacentes du polyèdre, et faites l'angle CDE égal à cette inclinaison. Prenez DE égale à CD, menez CO et EO perpendiculaires à CD et ED; ces deux perpendiculaires se rencontreront

en un point O, et CO sera le rayon de la sphere inscrite dans le polyèdre

Sur le prolongement de DC prenez CA égale au rayon du cercle circonscrit à une face du polyèdre, et OA sera le rayon de la sphere circonscrite à ce même polyèdre.

Car les triangles rectangles CDO, CAO, de la fig. 249, sont égaux aux triangles de même nom dans la figure 248 : ainsi, tandis que CD et CA sont les rayons des cercles inscrit et circonscrit à une face du polyèdre, OC et OA sont les rayons des sphères inscrite et circonscrite au même polyèdre.

Scholie. On peut tirer des propositions précédentes plusieurs conséquences.

1° Tout polyèdre régulier peut être partagé en autant de pyramides régulieres que le polyèdre a de faces : le sommet commun de ces pyramides sera le centre du polyèdre, qui est en même temps celui des spheres inscrite et circonscrite.

2° La solidité d'un polyèdre régulier est égale à sa surface multipliée par le tiers du rayon de la sphere inscrite.

3° Deux polyèdres réguliers de même nom sont deux solides semblables, et leurs dimensions homologues sont proportionnelles; donc les rayons des spheres inscrites ou circonscrites sont entre eux comme les côtés de ces polyèdres.

4° Si on inscrit un polyèdre régulier dans une sphere, les plans menés du centre le long des différents côtés partageront la surface de la sphere en autant de polygones sphériques égaux et semblables que le polyèdre a de faces.