LIVRE VI.

LES POLYÈDRES.

DÉFINITIONS.

I. On appelle *solide polyèdre*, ou simplement *polyèdre*, tout solide terminé par des plans ou des faces planes. (Ces plans sont nécessairement terminés eux-mêmes par des lignes droites.) On appelle en particulier *tétraèdre* le solide qui a quatre faces; *hexaèdre* celui qui en a six; *octaèdre* celui qui en a huit; *dodécaèdre* celui qui en a douze; *icosaèdre* celui qui en a vingt, etc.

Le tétraèdre est le plus simple des polyèdres; car il faut au moins trois plans pour former un angle solide, et ces trois plans laissent un vide qui, pour être fermé, exige au moins un quatrieme plan.

II. L'intersection commune de deux faces adjacentes d'un polyèdre s'appelle *côté* ou *arête* du polyèdre.

III. On appelle *polyèdre régulier* celui dont toutes les faces sont des polygones réguliers égaux, et dont tous les angles solides sont égaux entre eux. Ces polyèdres sont au nombre de cinq. *Voyez l'appendice aux livres VI et VII.*

IV. Le *prisme* est un solide compris sous plusieurs plans parallélogrammes, terminés de part et d'autre par deux plans polygones égaux et paralleles.

Pour construire ce solide, soit ABCDE un polygone quelçonque; si dans un plan parallele à ABC, on mene les lignes FG, GH, HI, etc., égales et paralleles aux côtés AB, BC, CD, etc., ce qui formera fig. 200

le polygone FGHIK égal à ABCDE; si ensuite on joint d'un plan à l'autre les sommets des angles homologues par les droites AF, BG, CH, etc., les faces ABGF, BCHG, etc., seront des parallélogrammes, et le solide ainsi formé ABCDEFGHIK sera un prisme.

V. Les polygones égaux et paralleles ABCDE, FGHIK, s'appellent les *bases du prisme;* les autres plans parallélogrammes pris ensemble constituent la *surface latérale* ou *convexe du prisme*. Les droites égales AF, BG, CH, etc., s'appellent les *côtés* du prisme.

VI. La *hauteur d'un prisme* est la distance de ses deux bases, ou la perpendiculaire abaissée d'un point de la base supérieure sur le plan de la base inférieure.

VII. Un *prisme* est *droit* lorsque les côtés AF, BG, etc., sont perpendiculaires aux plans des bases: alors chacun d'eux est égal à la hauteur du prisme. Dans tout autre cas le prisme est *oblique*, et la hauteur est plus petite que le côté.

VIII. Un *prisme* est *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonal*, *hexagonal*, etc., selon que la base est un triangle, un quadrilatere, un pentagone, un hexagone, etc.

fig. 206. IX. Le prisme qui a pour base un parallélogramme, a toutes ses faces parallélogrammiques; il s'appelle *parallélipipede.*

Le *parallélipipede* est *rectangle* lorsque toutes ses faces sont des rectangles.

X. Parmi les parallélipipedes rectangles on distingue le *cube* ou hexaèdre régulier compris sous six quarrés égaux.

fig. 196. XI. La *pyramide* est le solide formé lorsque plusieurs plans triangulaires partent d'un même point S, et sont terminés aux différents côtés d'un même plan polygonal ABCDE.

Le polygone ABCDE s'appelle la *base* de la pyramide, le point S en est le *sommet*, et l'ensemble des triangles ASB, BSC, etc., forme la *surface convexe* ou *latérale* de la pyramide.

XII. La *hauteur* de la pyramide est la perpendiculaire abaissée du sommet sur le plan de la base, prolongé s'il est nécessaire.

XIII. La pyramide est *triangulaire*, *quadrangulaire*, etc., selon que la base est un triangle, un quadrilatere, etc.

XIV. Une pyramide est *réguliere*, lorsque la base est un polygone régulier, et qu'en même temps la perpendiculaire abaissée du sommet sur le plan de la base passe par le centre de cette base : cette ligne s'appelle alors l'*axe* de la pyramide.

XV. *Diagonale* d'un polyèdre est la droite qui joint les sommets de deux angles solides non adjacents.

XVI. J'appellerai *polyèdres symétriques* deux polyèdres qui, ayant une base commune, sont construits semblablement, l'un au-dessus du plan de cette base, l'autre au-dessous, avec cette condition que les sommets des angles solides homologues soient situés à égales distances du plan de la base, sur une même droite perpendiculaire à ce plan.

Par exemple, si la droite ST est perpendiculaire au plan ABC, et qu'au point O, où elle rencontre ce plan, elle soit divisée en deux parties égales, les deux pyramides SABC, TABC, qui ont la base commune ABC, seront deux polyèdres symétriques. fig. 202.

XVII. Deux *pyramides triangulaires* sont *semblables*, lorsqu'elles ont deux faces semblables chacune à chacune, semblablement placées et également inclinées entre elles.

Ainsi, en supposant les angles ABC = DEF, BAC = EDF, ABS = DET, BAS = EDT, si en outre l'inclinaison des plans ABS, ABC, est égale à celle de fig. 203.

leurs homologues DTE, DEF, les pyramides SABC, TDEF, seront semblables.

XVIII. Ayant formé un triangle avec les sommets de trois angles pris sur une même face ou base d'un polyèdre, on peut imaginer que les sommets des différents angles solides du polyèdre, situés hors du plan de cette base, soient ceux d'autant de pyramides triangulaires qui ont pour base commune le triangle désigné, et chacune de ces pyramides déterminera la position de chaque angle solide du polyèdre par rapport à la base. Cela posé :

Deux *polyèdres* sont *semblables* lorsqu'ayant des bases semblables, les sommets des angles solides homologues, hors de ces bases, sont déterminés par des pyramides triangulaires semblables chacune à chacune.

XIX. J'appellerai *sommets* d'un polyèdre les points situés aux sommets de ses différents angles solides.

N. B. Tous les polyèdres que nous considérons sont des polyèdres à angles saillants ou polyèdres *convexes*. Nous appelons ainsi ceux dont la surface ne peut être rencontrée par une ligne droite en plus de deux points. Dans ces sortes de polyèdres le plan prolongé d'une face ne peut couper le solide; il est donc impossible que le polyèdre soit en partie au-dessus du plan d'une face, en partie au-dessous; il est tout entier d'un même côté de ce plan.

PROPOSITION PREMIERE.

THÉORÊME.

Deux polyèdres ne peuvent avoir les mêmes sommets et en même nombre sans coïncider l'un avec l'autre.

Car supposons l'un de polyédres déja construit, si on veut en construire un autre qui ait les mêmes sommets et en même nombre, il faudra que les plans de celui-ci ne passent pas tous par les mêmes points que dans le premier, sans quoi ils ne différeraient pas l'un de l'autre : mais alors il est clair que quelques-uns des nouveaux plans couperaient le premier polyèdre; il y aurait des sommets au-dessus de ces plans, et des sommets au-dessous, ce qui ne peut convenir à un polyèdre convexe : donc, si deux polyèdres ont les mêmes sommets et en même nombre, ils doivent nécessairement coïncider l'un avec l'autre.

Scholie. Etant donnés de position les points A, B, C, K, etc., qui doivent servir de sommets à un polyèdre, il est facile de décrire le polyèdre.

Choisissez d'abord trois points voisins D, E, H, fig. 204. tels que le plan DEH passe, s'il y a lieu, par de nouveaux points K, C, mais laisse tous les autres d'un même côté, tous au-dessus du plan ou tous au-dessous; le plan DEH ou DEHKC, ainsi déterminé, sera une face du solide. Suivant un de ses côtés EH, conduisez un plan que vous ferez tourner jusqu'à ce qu'il rencontre un nouveau sommet F, ou plusieurs à-la-fois F, I; vous aurez une seconde face qui sera FEH ou FEHI. Continuez ainsi en faisant passer des plans par les côtés trouvés jusqu'à ce que le solide soit terminé de toutes parts : ce solide sera le polyèdre demandé, car il n'y en a pas deux qui puissent avoir les mêmes sommets.

PROPOSITION II.

THÉORÊME.

Dans deux polyèdres symétriques les faces homologues sont égales chacune à chacune, et l'inclinaison de deux faces adjacentes, dans un de ces solides, est égale à l'inclinaison des faces homologues dans l'autre.

Soit ABCDE la base commune aux deux polyèdres, fig. 205

soient M et N les sommets de deux angles solides quelconques de l'un des polyèdres, M' et N' les sommets homologues de l'autre polyèdre; il faudra, suivant la définition, que les droites MM', NN', soient perpendiculaires au plan ABC, et qu'elles soient divisées en deux parties égales aux points *m* et *n* où elles rencontrent ce plan. Cela posé, je dis que la distance MN est égale à M'N'.

Car si on fait tourner le trapeze *m*M'N'*n* autour de *mn* jusqu'à ce que son plan s'applique sur le plan *m*MN*n*; à cause des angles droits en *m* et en *n*, le côté *m*M' tombera sur son égal *m*M, et *n*N' sur *n*N; donc les deux trapezes coïncideront, et on aura MN = M'N'.

Soit P un troisieme sommet du polyèdre supérieur, et P' son homologue dans l'autre, on aura de même MP = M'P' et NP = N'P'; donc le *triangle* MNP, *qui joint trois sommets quelconques du polyèdre supérieur*, *est égal au triangle* M'N'P' *qui joint les trois sommets homologues de l'autre polyèdre.*

Si parmi ces triangles on considere seulement ceux qui sont formés à la surface des polyèdres, on peut déja conclure que les surfaces des deux polyèdres sont composées d'un même nombre de triangles égaux chacun à chacun.

Je dis maintenant que si des triangles sont dans un même plan sur une surface et forment une même face polygone, les triangles homologues seront dans un même plan sur l'autre surface et formeront une face polygone égale.

En effet, soient MPN, NPQ, deux triangles adjacents qu'on suppose dans un même plan, et soient M'P'N', N'P'Q', leurs homologues. On a l'angle MNP = M'N'P', l'angle PNQ = P'N'Q'; et si on joignait MQ et M'Q', le triangle MNQ serait égal à M'N'Q', ainsi on aurait l'angle MNQ = M'N'Q'.

Mais puisque MPNQ est un seul plan, on a l'angle $MNQ = MNP + PNQ$; donc on aura aussi $M'N'Q' = M'N'P' + P'N'Q'$. Or, si les trois plans $M'N'P'$, $P'N'Q$, $M'N'Q'$, n'étaient pas confondus en un seul, ces trois plans formeraient un angle solide, et on aurait * l'angle $M'N'Q' < M'N'P' + P'N'Q'$; * 20, 5.
donc, puisque cette condition n'a pas lieu, les deux triangles $M'N'P'$, $P'N'Q'$, sont dans un même plan.

Il suit de là que chaque face, soit triangulaire, soit polygone, dans un polyèdre, répond à une face égale dans l'autre, et qu'ainsi les deux polyèdres sont compris sous un même nombre de plans égaux, chacun à chacun.

Il reste à prouver que l'inclinaison de deux faces adjacentes quelconques dans l'un des polyèdres est égale à l'inclinaison des deux faces homologues dans l'autre.

Soient MPN, NPQ, deux triangles formés sur l'arête commune NP dans les plans des deux faces adjacentes; soient $M'P'N'$, $N'P'Q'$, leurs homologues; on peut concevoir en N un angle solide formé par les trois angles plans MNQ, MNP, PNQ, et en N' un angle solide formé par les trois $M'N'Q'$, $M'N'P'$, $P'N'Q'$. Or, on a déja prouvé que ces angles plans sont égaux chacun à chacun; donc l'inclinaison des deux plans MNP, PNQ, est égale à celle de leurs homologues $M'N'P'$, $P'N'Q'$ *. * 22, 5.

Donc, dans les polyèdres symétriques, les faces sont égales chacune à chacune, et les plans de deux faces quelconques adjacentes d'un des solides, ont entre eux la même inclinaison que les plans des deux faces homologues de l'autre solide.

Scholie. On peut remarquer que *les angles solides d'un polyèdre sont les symétriques des angles solides de l'autre polyèdre;* car si l'angle solide N est formé par les plans MNP, PNQ, QNR, etc., son homologue N′ est formé par les plans M′N′P′, P′N′Q′, Q′N′R′, etc. Ceux-ci paraissent disposés dans le même ordre que les autres; mais comme les deux angles solides sont dans une situation inverse l'un par rapport à l'autre, il s'ensuit que la disposition réelle des plans qui forment l'angle solide N′ est l'inverse de celle qui a lieu dans l'angle homologue N. D'ailleurs les inclinaisons des plans consécutifs sont égales dans l'un et dans l'autre angle solide; donc ces angles solides sont symétriques l'un de l'autre. *Voyez le scholie de la prop. XXIII, liv. V.*

Cette remarque prouve qu'un *polyèdre quelconque ne peut avoir qu'un seul polyèdre symétrique.* Car si on construisait sur une autre base un nouveau polyèdre symétrique au polyèdre donné, les angles solides de celui-ci seraient toujours symétriques des angles du polyèdre donné; donc ils seraient égaux à ceux du polyèdre symétrique construit sur la premiere base. D'ailleurs les faces homologues seraient toujours égales; donc ces deux polyèdres symétriques construits sur une base ou sur une autre auraient les faces égales et les angles solides égaux; donc ils coïncideraient par la superposition, et ne feraient qu'un seul et même polyèdre.

PROPOSITION III.

THÉORÊME.

Deux prismes sont égaux lorsqu'ils ont un angle solide compris entre trois plans égaux chacun à chacun et semblablement placés.

fig. 206. Soit la base ABCDE égale à la base *abcde*, le parallélogramme ABGF égal au parallélogramme *abgf*, et le parallélogramme BCHG égal au parallélogramme *bchg*; je dis que le prisme ABCI sera égal au prisme *abci*.

Car soit posée la base ABCDE sur son égale *abcde*, ces deux bases coïncideront : mais les trois angles plans qui forment l'angle solide B sont égaux aux trois angles plans qui forment l'angle solide *b*, chacun à chacun, savoir, ABC $=$ *abc*, ABG $=$ *abg*, et GBC $=$ *gbc*; de plus ces angles sont semblablement placés : donc les angles solides B et *b* sont égaux, et par conséquent le côté BG tombera sur son égal *bg*. On voit aussi qu'à cause des parallélogrammes égaux ABGF, *abgf*, le côté GF tombera sur son égal *gf*, et semblablement GH sur *gh*; donc la base supérieure FGHIK coïncidera entièrement avec son égale *fghik*, et les deux solides seront confondus en un seul, puisqu'ils auront les mêmes sommets *. * 1.

Corollaire. Deux prismes droits qui ont des bases égales et des hauteurs égales sont égaux. Car ayant le côté AB égal à *ab*, et la hauteur BG égale à *bg*, le rectangle ABGF sera égal au rectangle *abgf*; il en sera de même des rectangles BGHC, *bghc*; ainsi les trois plans qui forment l'angle solide B sont égaux aux trois qui forment l'angle solide *b*. Donc les deux prismes sont égaux.

PROPOSITION IV.

THÉORÊME.

Dans tout parallélipipede les plans opposés sont égaux et paralleles.

Suivant la définition de ce solide, les bases ABCD, EFGH, sont des parallélogrammes égaux, et leurs côtés sont paralleles : il reste donc à démontrer que la même chose a lieu pour deux faces latérales opposées, telles que AEHD, BFGC. Or, AD est égale et parallele à BC, puisque la figure ABCD est un paral- fig. 206.

lélogramme; par une raison semblable AE est égale et parallele à BF : donc l'angle DAE est égal à l'angle
* 13, 5. CBF*, et le plan DAE parallele à CBF; donc aussi le parallélogramme DAEH est égal au parallélogramme CBFG. On démontrera de même que les parallélogrammes opposés ABFE, DCGH, sont égaux et paralleles.

Corollaire. Puisque le parallélipipede est un solide compris sous six plans dont les opposés sont égaux et paralleles, il s'ensuit qu'une face quelconque et son opposée peuvent être prises pour les bases du parallélipipede.

Scholie. Étant données trois droites, AB, AE, AD, passant par un même point A, et faisant entre elles des angles donnés, on peut sur ces trois droites construire un parallélipipede; il faut pour cela mener par l'extrémité de chaque droite un plan parallele au plan des deux autres; savoir, par le point B un plan parallele à DAE, par le point D un plan parallele à BAE, et par le point E un plan parallele à BAD. Les rencontres mutuelles de ces plans formeront le parallélipipede demandé.

PROPOSITION V.

THÉORÊME.

Dans tout parallélipipede les angles solides opposés sont symétriques l'un de l'autre; et les diagonales menées par les sommets de ces angles se coupent mutuellement en deux parties égales.

fig. 206. Comparons, par exemple, l'angle solide A à son opposé G; l'angle EAB, égal à EFB, est aussi égal à HGC, l'angle DAE = DHE = CGF, et l'angle DAB = DCB = HGF; donc les trois angles plans qui for-

ment l'angle solide A sont égaux aux trois qui forment l'angle solide G, chacun à chacun; d'ailleurs il est facile de voir que leur disposition est différente dans l'un et dans l'autre; donc 1° les deux angles solides A et G sont symétriques l'un de l'autre *. *23,5.

En second lieu, imaginons deux diagonales EC, AG, menées l'une et l'autre par des sommets opposés: puisque AE est égale et parallele à CG, la figure AEGC est un parallélogramme; donc les diagonales EC, AG, se couperont mutuellement en deux parties égales. On démontrera de même que la diagonale EC et une autre DF se couperont aussi en deux parties égales; donc 2° les quatre diagonales se couperont mutuellement en deux parties égales, dans un même point qu'on peut regarder comme le centre du parallélipipede.

PROPOSITION VI.

THÉORÊME.

Le plan BDHF, *qui passe par deux arêtes paralleles opposées* BF, DH, *divise le parallélipipede* AG *en deux prismes triangulaires* ABDHEF, GHFBCD, *symétriques l'un de l'autre.* fig. 207.

D'abord ces deux solides sont des prismes; car les triangles ABD, EFH, ayant leurs côtés égaux et paralleles, sont égaux, et en même temps les faces latérales ABFE, ADHE, BDHF, sont des parallélogrammes; donc le solide ABDHEF est un prisme: il en est de même du solide GHFBCD. Je dis maintenant que ces deux prismes sont symétriques l'un de l'autre.

Sur la base ABD faites le prisme ABDE'F'H' qui soit le symétrique du prisme ABDEFH. Suivant ce qui a été démontré *, le plan ABF'E' est égal à * 2.

ABFE, et le plan ADH'E' est égal à ADHE; mais si on compare le prisme GHFBCD au prisme ABDH'E'F', la base GHF est égale à ABD; le parallélogramme GHDC, qui est égal à ABFE, est aussi égal à ABF'E', et le parallélogramme GFBC, qui est égal à ADHE, est aussi égal à ADH'E'; donc les trois plans qui forment l'angle solide G dans le prisme GHFBCD, sont égaux aux trois plans qui forment l'angle solide A dans le prisme ABDH'E'F', chacun à chacun, d'ailleurs ils sont disposés sem-
* 3. blablement; donc ces deux prismes sont égaux *, et pourraient être superposés. Mais l'un d'eux ABDH'E'F' est symétrique du prisme ABDHEF; donc l'autre, GHFBCD, est aussi le symétrique de ABDHEF.

PROPOSITION VII.

LEMME.

fig. 201. *Dans tout prisme* ABCI, *les sections* NOPQR STVXY, *faites par des plans paralleles, sont des polygones égaux.*

Car les côtés NO, ST, sont paralleles, comme étant les intersections de deux plans paralleles par un troisieme plan ABGF; ces mêmes côtés NO, ST, sont compris entre les paralleles NS, OT, qui sont côtés du prisme; donc NO est égal à ST. Par une semblable raison les côtés OP, PQ, QR, etc., de la section NOPQR, sont égaux respectivement aux côtés TV, VX, XY, etc., de la section STVXY. D'ailleurs les côtés égaux étant en même temps paralleles, il s'ensuit que les angles NOP, OPQ, etc. de la premiere section, sont égaux respectivement aux angles STV, TVX, etc., de la seconde. Donc les deux sections NOPQR, STVXY, sont des polygones égaux.

Corollaire. Toute section faite dans un prisme parallèlement à sa base, est égale à cette base.

PROPOSITION VIII.

THÉORÊME.

Les deux prismes triangulaires symétriques ABDHEF, BCDFGH, *dans lesquels se décompose le parallélipipede* AG, *sont équivalents entre eux*. fig. 208.

Par les sommets B et F menez perpendiculairement au côté BF, les plans B*adc*, F*ehg*, qui rencontreront, d'une part en *a*, *d*, *c*, de l'autre en *e*, *h*, *g*. les trois autres côtés AE, DH, CG, du même parallélipipede; les sections B*adc*, F*ehg*, seront des parallélogrammes égaux. Ces sections sont égales, parce qu'elles sont faites par des plans perpendiculaires à une même droite et par conséquent paralleles *; elles sont des parallélogrammes, parce que deux côtés opposés d'une même section *a*B, *dc*, sont les intersections de deux plans paralleles ABFE, DCGH, par un même plan. * 7.

Par une raison semblable, la figure B*ae*F est un parallélogramme, ainsi que les autres faces latérales BF*gc*, *cdhg*, *adhe*, du solide B*adc*F*ehg*; donc ce solide est un prisme *; et ce prisme est droit, puisque le côté BF est perpendiculaire au plan de la base. * déf. 4.

Cela posé, si par le plan BFHD on divise le prisme droit B*h* en deux prismes triangulaires droits *a*B*de*F*h*, B*dc*F*hg*; je dis que le prisme triangulaire oblique ABDEFH, sera équivalent au prisme triangulaire droit *a*B*de*F*h*.

En effet ces deux prismes ayant une partie commune ABD*he*F, il suffira de prouver que les parties restantes, savoir, les solides B*a*AD*d*, F*e*EH*h* sont équivalents entre eux.

Or, à cause des parallélogrammes ABFE, $aBFe$, les côtés AE, ae, égaux à leur parallele BF, sont égaux entre eux; ainsi, en ôtant la partie commune Ae, il restera $Aa = Ee$. On prouvera de même que $Dd = Hh$.

Maintenant, pour opérer la superposition des deux solides $BaADd$, $FeEHh$, plaçons la base Feh sur son égale Bad; alors le point e tombant en a, et le point h en d, les côtés eE, hH, tomberont sur leurs égaux aA, dD, puisqu'ils sont perpendiculaires au même plan Bad. Donc les deux solides dont il s'agit coïncideront entièrement l'un avec l'autre; donc le prisme oblique BADFEH est équivalent au prisme droit $BadFeh$.

On démontrera semblablement que le prisme oblique BDCFHG est équivalent au prisme droit $BdcFhg$. Mais les deux prismes droits $BadFeh$, $BdcFhg$ sont égaux entre eux, puisqu'ils ont même hauteur BF, et que leurs bases Bad, Bdc sont moitiés d'un même
*3 cor. parallélogramme *. Donc les deux prismes triangulaires BADFEH, BDCFHG, équivalents à des prismes égaux, sont équivalents entre eux.

Corollaire. Tout prisme triangulaire ABDHEF est la moitié du parallélipipede AG, construit sur le même angle solide A, avec les mêmes arêtes AB, AD AE.

PROPOSITION IX.

THÉORÊME.

fig. 209. *Si deux parallélipipedes* AG, AL, *ont une base commune* ABCD, *et que leurs bases supérieures* EFGH, IKLM, *soient comprises dans un même plan et entre les mêmes paralleles* EK, HL, *ces deux parallélipipedes seront équivalents entre eux.*

Il peut arriver trois cas, selon que EI est plus grand, plus petit ou égal à EF; mais la démonstration est la même pour tous : et d'abord je dis que le prisme triangulaire AEIDHM est égal au prisme triangulaire BFKCGL.

En effet, puisque AE est parallele à BF et HE à GF, l'angle AEI = BFK, HEI = GFK, et HEA = GFB. De ces six angles les trois premiers forment l'angle solide E, les trois autres forment l'angle solide F; donc, puisque les angles plans sont égaux chacun à chacun, et semblablement disposés, il s'ensuit que les angles solides E et F sont égaux. Maintenant, si on pose le prisme AEM sur le prisme BFL, et d'abord la base AEI sur la base BFK, ces deux bases étant égales coïncideront; et puisque l'angle solide E est égal à l'angle solide F, le côté EH tombera sur son égal FG : il n'en faut pas davantage pour prouver que les deux prismes coïncideront dans toute leur étendue; car la base AEI et l'arête EH déterminent le prisme AEM, comme la base BFK et l'arête FG déterminent le prisme BFL * : donc ces prismes sont égaux. *3.

Mais si du solide AL on retranche le prisme AEM, il restera le parallélipipede AIL; et si du même solide AL on retranche le prisme BFL, il restera le parallélipipede AEG; donc les deux parallélipipedes AIL, AEG, sont équivalents entre eux.

PROPOSITION X.

THÉORÊME.

Deux parallélipipedes de même base et de même hauteur sont équivalents entre eux.

Soit ABCD la base commune aux deux parallélipipedes AG, AL; puisqu'ils ont même hauteur, leurs bases supérieures EFGH, IKLM, seront sur le même fig. 210.

plan. De plus les côtés EF et AB sont égaux et paralleles, il en est de même de IK et AB ; donc EF est égal et parallèle à IK : par une raison semblable GF est égal et parallele à LK. Soient prolongés les côtés EF, HG, ainsi que LK, IM, jusqu'à ce que les uns et les autres forment par leurs intersections le parallélogramme NOPQ, il est clair que ce parallélogramme sera égal à chacune des bases EFGH, IKLM. Or si on imagine un troisieme parallélipipede qui, avec la même base inférieure ABCD, ait pour base supérieure NOPQ, ce troisieme parallélipipede serait équivalent
* 9. au parallélipipede AG*, puisqu'ayant même base inférieure, les bases supérieures sont comprises dans un même plan et entre les paralleles GQ, FN. Par la même raison ce troisieme parallélipipede serait équivalent au parallélipipede AL ; donc les deux parallélipipedes AG, AL, qui ont même base et même hauteur, sont équivalents entre eux.

PROPOSITION XI.

THÉORÊME.

Tout parallélipipede peut être changé en un parallélipipede rectangle équivalent qui aura même hauteur et une base équivalente.

fig. 210. Soit AG le parallélipipede proposé ; des points A, B, C, D, menez AI, BK, CL, DM, perpendiculaires au plan de la base, vous formerez ainsi le parallélipipede AL équivalent au parallélipipe de AG, et dont les faces latérales AK, BL, etc., seront des rectangles. Si donc la base ABCD est un rectangle, AL sera le parallélipipede rectangle équivalent au parallélipipede proposé AG. Mais si ABCD n'est pas un rectangle, menez
fig. 211. AO et BN perpendiculaires sur CD, ensuite OQ et NP perpendiculaires sur la base, vous aurez le solide ABNOIKPQ qui sera un parallélipipede rectangle ;

en effet, par construction, la base ABNO et son opposée IKPQ sont des rectangles; les faces latérales en sont aussi, puisque les arêtes AI, OQ, etc., sont perpendiculaires au plan de la base; donc le solide AP est un parallélipipede rectangle. Mais les deux parallélipipedes AP, AL, peuvent être censés avoir même base ABKI et même hauteur AO : donc ils sont équivalents; donc le parallélipipede AG, qu'on avait d'abord changé en un parallélipipede équivalent AL, se trouve de nouveau changé en un parallélipipede rectangle équivalent AP, qui a la même hauteur AI, et dont la base ABNO est équivalente à la base ABCD. fig. 210 et 211.

PROPOSITION XII.

THÉORÊME.

Deux parallélipipedes rectangles AG, AL, *qui ont la même base* ABCD, *sont entre eux comme leurs hauteurs* AE, AI. fig. 212.

Supposons d'abord que les hauteurs AE, AI, soient entre elles comme deux nombres entiers, par exemple, comme 15 est à 8. On divisera AE en 15 parties égales, dont AI contiendra 8, et par les points de division x, y, z, etc., on menera des plans paralleles à la base. Ces plans partageront le solide AG en 15 parallélipipedes partiels qui seront tous égaux entre eux, comme ayant des bases égales et des hauteurs égales; des bases égales, parce que toute section comme MIKL, faite dans un prisme parallèlement à sa base ABCD, est égale à cette base*; des hauteurs égales, parce que ces hauteurs sont les divisions mêmes Ax, xy, xz, etc. Or, de ces 15 parallélipipedes égaux, huit sont contenus dans AL; donc le solide AG est au solide AL comme 15 est à 8, ou en général comme la hauteur AE est à la hauteur AI. * 7.

En second lieu, si le rapport de AE à AI ne peut s'exprimer en nombres, je dis qu'on n'en aura pas moins *solid.* AG : *solid.* AL : : AE : AI. Car, si cette proportion n'a pas lieu, supposons qu'on ait *sol.* AG : *sol.* AL : : AE : AO. Divisez AE en parties égales dont chacune soit plus petite que OI, il y aura au moins un point de division *m* entre O et I. Soit P le parallélepipede qui a pour base ABCD et pour hauteur A*m*; puisque les hauteurs AE, A*m* sont entre elles comme deux nombres entiers, on aura *sol.* AG : P : : AE : A*m*. Mais on a, par hypothese, *sol.* AG : *sol.* AL : : AE : AO; de là résulte *sol.* AL : P : : AO : A*m*. Mais AO est plus grand que A*m*; donc il faudrait, pour que la proportion eût lieu, que le solide AL fût plus grand que P. Or au contraire il est plus petit : donc il est impossible que le quatrieme terme de la proportion *sol.* AG : *sol.* AL : : AE : x, soit une ligne plus grande que AI. Par un raisonnement semblable on démontrerait que le quatrieme terme ne peut être plus petit que AI; donc il est égal à AI; donc les parallélepipedes rectangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.

PROPOSITION XIII.

THÉORÊME.

fig. 213. *Deux parallélepipedes rectangles* AG, AK, *qui ont même hauteur* AE, *sont entre eux comme leurs bases* ABCD, AMNO.

Ayant placé les deux solides l'un à côté de l'autre, comme la figure les représente, prolongez le plan ONKL, jusqu'à ce qu'il rencontre le plan DCGH suivant PQ, vous aurez un troisieme parallélepipede AQ, qu'on pourra comparer à chacun des parallélepipedes AG, AK. Les deux solides AG, AQ, ayant même base

AEHD, sont entre eux comme leurs hauteurs AO, AB; pareillement les deux solides AQ, AK, ayant même base AOLE, sont entre eux comme leurs hauteurs AD, AM. Ainsi on aura les deux proportions,

sol. AG : *sol.* AQ :: AB : AO,

sol. AQ : *sol.* AK :: AD : AM.

Multipliant ces deux proportions par ordre, et omettant, dans le résultat, le multiplicateur commun *sol.* AQ, on aura,

sol. AG : *sol.* AK :: AB $\times$ AD : AO $\times$ AM.

Mais AB $\times$ AD représente la base ABCD, et AO $\times$ AM représente la base AMNO; donc deux parallélepipedes rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.

PROPOSITION XIV.

THÉORÊME.

Deux parallélepipedes rectangles quelconques sont entre eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs, ou comme les produits de leurs trois dimensions.

Car ayant placé les deux solides AG, AZ, de maniere que leurs surfaces aient l'angle commun BAE, prolongez les plans nécessaires pour former le troisieme parallélepipede AK de même hauteur avec le parallélepipede AG. On aura, par la proposition précédente, fig. 213.

sol. AG : *sol.* AK :: ABCD : AMNO.

Mais les deux parallélepipedes AK, AZ, qui ont même base AMNO, sont entre eux comme leurs hauteurs AE, AX; ainsi on a,

sol. AK : *sol.* AZ :: AE : AX.

Multipliant ces deux proportions par ordre, et omettant, dans le résultat, le multiplicateur commun *sol.* AK, on aura

sol. AG : *sol.* AZ :: ABCD × AE : AMNO × AX.

A la place des bases ABCD et AMNO, on peut mettre AB × AD et AO × AM, ce qui donnera,

sol. AG : *sol.* AZ :: AB × AD × AE : AO × AM × AX.

Donc deux parallélipipedes rectangles quelconques sont entre eux, etc.

Scholie. Il suit de là qu'on peut prendre pour mesure d'un parallélipipede rectangle le produit de sa base par sa hauteur, ou le produit de ses trois dimensions. C'est sur ce principe que nous évaluerons tous les autres solides.

Pour l'intelligence de cette mesure il faut se rappeler qu'on entend par produit de deux ou de plusieurs lignes, le produit des nombres qui représentent ces lignes, et ces nombres dépendent de l'unité linéaire qu'on peut prendre à volonté : cela posé, le produit des trois dimensions d'un parallélipipede est un nombre qui ne signifie rien en lui-même, et qui serait différent si on avait pris une autre unité linéaire. Mais si on multiplie de même les trois dimensions d'un autre parallélipipede, en les évaluant d'après la même unité linéaire, les deux produits seront entre eux comme les solides, et donneront l'idée de leur grandeur relative.

La grandeur d'un solide, son volume ou son étendue constituent ce qu'on appelle sa *solidité*, et le mot de *solidité* est employé particulièrement pour désigner la mesure d'un solide : ainsi on dit que la solidité d'un parallélipipede rectangle est égale au produit de sa base par sa hauteur, ou au produit de ses trois dimensions.

Les trois dimensions du cube étant égales entre elles, si le côté est 1, la solidité sera 1 × 1 × 1, ou 1; si le côté est 2, la solidité sera 2 × 2 × 2, ou 8; si le côté est 3, la solidité sera $3 \times 3 \times 3$, ou 27, et ainsi de suite; ainsi les côtés des cubes étant comme les nombres 1, 2, 3, etc., les cubes eux-mêmes ou leurs solidités sont comme les nombres 1, 8, 27, etc. De là vient qu'on appelle en arithmétique *cube* d'un nombre le produit qui résulte de trois facteurs égaux à ce nombre.

Si on proposait de faire un cube double d'un cube donné, il faudrait que le côté du cube cherché fût au côté du cube donné comme la racine cube de 2 est à l'unité. Or on trouve facilement, par une construction géométrique, la racine quarrée de 2; mais on ne peut pas trouver de même sa racine cube, du moins par les simples opérations de la géométrie élémentaire, lesquelles consistent à n'employer que des lignes droites dont on connaît deux points, et des cercles dont les centres et les rayons sont déterminés.

A raison de cette difficulté le problême de la *duplication du cube* a été célebre parmi les anciens géometres, comme celui de la *trisection de l'angle*, qui est à-peu-près du même ordre. Mais on connaît depuis long-temps les solutions dont ces sortes de problêmes sont susceptibles, lesquelles, quoique moins simples que les constructions de la géométrie élémentaire, ne sont cependant ni moins exactes, ni moins rigoureuses.

PROPOSITION XV.

THÉORÊME.

La solidité d'un parallélipipede, et en général la solidité d'un prisme quelconque, est égale au produit de sa base par sa hauteur.

Car 1° un parallélipipede quelconque est équivalent à un parallélipipede rectangle de même hauteur et de base équivalente*. Or la solidité de celui-ci est * 11.

égale à sa base multipliée par sa hauteur; donc la solidité du premier est pareillement égale au produit de sa base par sa hauteur.

2° Tout prisme triangulaire est la moitié du parallélepipede construit de maniere qu'il ait la même hau-
* 8. teur et une base double *. Or la solidité de celui-ci est égale à sa base multipliée par sa hauteur; donc celle du prisme triangulaire est égale au produit de sa base, moitié de celle du parallélepipede, multipliée par sa hauteur.

3° Un prisme quelconque peut être partagé en autant de prismes triangulaires de même hauteur qu'on peut former de triangles dans le polygone qui lui sert de base. Mais la solidité de chaque prisme triangulaire est égale à sa base multipliée par sa hauteur; et puisque la hauteur est la même pour tous, il s'ensuit que la somme de tous les prismes partiels sera égale à la somme de tous les triangles qui leur servent de bases, multipliée par la hauteur commune. Donc la solidité d'un prisme polygonal quelconque est égale au produit de sa base par sa hauteur.

Corollaire. Si on compare deux prismes qui ont même hauteur, les produits des bases par les hauteurs seront comme les bases; donc *deux prismes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases;* par une raison semblable, *deux prismes de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.*

PROPOSITION XVI.

LEMME.

fig. 214. *Si une pyramide* SABCDE *est coupée par un plan* abd *parallele à sa base*,

1° *Les côtés* SA, SB, SC,.... *et la hauteur* SO, *seront divisés proportionnellement en* a, b, c,.. *et* o;

2° *La section* abcde *sera un polygone semblable à la base* ABCDE.

Car 1° les plans ABC, abc, étant paralleles, leurs intersections AB, ab, par un troisième plan SAB, seront paralleles*; donc les triangles SAB, Sab, sont semblables, et on a la proportion SA : Sa :: SB : Sb; on aurait de même SB : Sb :: SC : Sc, et ainsi de suite. Donc tous les côtés SA, SB, SC, etc., sont coupés proportionnellement en a, b, c, etc. La hauteur SO est coupée dans la même proportion au point o; car BO et bo sont paralleles, et ainsi on a SO : So :: SB : Sb. * 10, 5

2° Puisque ab est parallele à AB, bc à BC, cd à CD, etc., l'angle abc = ABC, l'angle bcd = BCD, et ainsi de suite. De plus, à cause des triangles semblables SAB, Sab, on a AB : ab :: SB · Sb; et à cause des triangles semblables SBC, Sbc, on a SB : Sb :: BC : bc; donc AB : ab :: BC : bc; on aurait de même BC : bc :: CD : cd, et ainsi de suite. Donc les polygones ABCDE, $abcde$, ont les angles égaux chacun à chacun et les côtés homologues proportionnels ; donc ils sont semblables.

Corollaire. Soient SABCDE, SXYZ, deux pyramides dont le sommet est commun, et qui ont même hauteur, ou dont les bases sont situées dans un même plan; si on coupe ces pyramides par un même plan parallele au plan des bases, et qu'il en résulte les sections $abcde$, xyz; je dis que *les sections* abcde, xyz, *seront entre elles comme les bases* ABCDE, XYZ.

Car les polygones ABCDE, $abcde$, étant semblables, leurs surfaces sont comme les quarrés des côtés homologues AB, ab; mais AB : ab :: SA : Sa; donc ABCDE : $abcde$ :: $\overline{SA}^2 : \overline{Sa}^2$. Par la même raison, XYZ : xyz :: $\overline{SX}^2 : \overline{Sx}^2$. Mais puisque $abcxyz$ n'est qu'un même plan, on a aussi SA : Sa :: SX : Sx; donc ABCDE : $abcde$ :: XYZ : xyz; donc les sections $abcde$,

xyz, sont entre elles comme les bases ABCDE, XYZ. Donc si les bases ABCDE, XYZ sont équivalentes, les sections faites à égale hauteur sont pareillement équivalentes.

PROPOSITION XVII.

THÉORÊME.

Deux pyramides triangulaires qui ont des bases équivalentes et des hauteurs égales, sont équivalentes.

fig. 215. Soient SABC, $sabc$ les deux pyramides dont les bases ABC, abc, que nous supposons placées sur un même plan, sont équivalentes et qui ont même hauteur TA; si ces pyramides ne sont pas équivalentes, soit $sabc$ la plus petite et soit Ax la hauteur d'un prisme qui étant construit sur la base ABC, serait égal à leur différence.

Divisez la hauteur commune AT en parties égales plus petites que Ax, et soit k une de ces parties; par les points de division de la hauteur, faites passer des plans paralleles au plan des bases; les sections faites par chacun de ces plans dans les deux pyramides, seront
* 16. cor. équivalentes*, telles que DEF et def, GHI et ghi, etc. cela posé, sur les triangles ABC, DEF, GHI etc., pris pour bases, construisez des prismes extérieurs qui aient pour arêtes les parties AD, DG, GK, etc. du coté SA; de même sur les triangles def, ghi, klm, *etc.*, pris pour bases, construisez dans la seconde pyramide des prismes intérieurs qui aient pour arêtes les parties correspondantes du côté sa; tous ces prismes partiels auront pour hauteur commune k.

La somme des prismes extérieurs de la pyramide SABC, est plus grande que cette pyramide, la somme des prismes intérieurs de la pyramide *sabc* est plus petite que cette pyramide; donc par ces deux raisons la différence entre les deux sommes de prismes devra être plus grande que la différence entre les deux pyramides.

Or à partir des bases ABC, *abc*, le second prisme extérieur DEFG est équivalent au premier prisme intérieur *defa*, puisque leurs bases DEF, *def*, sont équivalentes et qu'ils ont une même hauteur *k*; sont équivalens par la même raison le troisiéme prisme extérieur GHIK et le second intérieur *ghid*, le quatrième extérieur et le troisième intérieur, ainsi de suite jusqu'au dernier des uns et des autres. Donc tous les prismes extérieurs de la pyramide SABC, à l'exception du premier ABCD, ont leurs équivalens dans les prismes intérieurs de la pyramide *sabc*. Donc le prisme ABCD est la différence entre la somme des prismes extérieurs de la pyramide SABC et la somme des prismes intérieurs de la pyramide *sabc*; mais la différence de ces deux sommes est plus grande que la différence des deux pyramides; donc il faudrait que leprisme ABCD fût plus grand que le prisme ABCX; or au contraire il est plus petit, puisqu'ils ont une même base ABC, et que la hauteur *k* du premier est moindre que la hauteur A*x* du second. Donc l'hypothèse d'où l'on est parti ne saurait avoir lieu; donc les deux pyramides SABC, *sabc*, de bases équivalentes et de hauteurs égales, sont équivalentes.

PROPOSITION XVIII.

THÉORÊME.

Toute pyramide triangulaire est le tiers du prisme triangulaire de même base et de même hauteur.

Soit SABC une pyramide triangulaire, ABCDES un fig. 216.

prisme triangulaire de même base et de même hauteur, je dis que la pyramide est le tiers du prisme.

Retranchez du prisme la pyramide SABC, il restera le solide SACDE qu'on peut considérer comme une pyramide quadrangulaire dont le sommet est S et qui a pour base le parallélogramme ACDE; tirez la diagonale CE et conduisez le plan SCE qui partagera la pyramide quadrangulaire en deux pyramides triangulaires SACE, SDCE. Ces deux pyramides ont pour hauteur commune la perpendiculaire abaissée du sommet S sur le plau ACDE; elles ont des bases égales, puisque les triangles ACE, DCE, sont les deux moitiés du même parallélogramme; donc les deux pyramides SACE, SDCE, sont équivalentes entre elles; mais la pyramide SDCE et la pyramide SABC ont des bases égales ABC, DES; elles ont aussi même hauteur, car cette hauteur est la distance des plans paralleles ABC, DES. Donc les deux pyramides SABC, SDCE, sont équivalentes; mais on a démontré que la pyramide SDCE est équivalente à la pyramide SACE; donc les trois pyramides SABC, SDCE, SACE, qui composent le prisme ABD sont équivalentes entre elles. Donc la pyramide SABC est le tiers du prisme ABD qui a même base et même hauteur.

Corollaire. La solidité d'une pyramide triangulaire est égale au tiers du produit de sa base par sa hauteur.

PROPOSITION XIX.

THÉORÊME.

fig. 214. *Toute pyramide* SABCDE *a pour mesure le tiers du produit de sa base* ABCDE *par sa hauteur* AO.

Car en faisant passer les plans SEB, SEC, par les diagonales EB, EC, on divisera la pyramide polygonale SABCDE, en plusieurs pyramides triangulaires qui auront toutes la même hauteur SO. Mais par le théorême précédent chacune de ces pyramides se mesure en multipliant chacune des bases ABE, BCE, CDE, par le tiers de sa hauteur SO; donc la somme des pyramides triangulaires, ou la pyramide polygonale SABCDE, aura pour mesure la somme des triangles ABE, BCE, CDE, ou le polygone ABCDE, multiplié par $\frac{1}{3}$SO; donc toute pyramide a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.

Corollaire I. Toute pyramide est le tiers du prisme de même base et de même hauteur.

Corollaire II. Deux pyramides de même hauteur sont entre elles comme leurs bases, et deux pyramides de même base sont entre elles comme leurs hauteurs.

Scholie. On peut évaluer la solidité de tout corps polyèdre en le décomposant en pyramides, et cette décomposition peut se faire de plusieurs manieres: une des plus simples est de faire passer les plans de division par le sommet d'un même angle solide; alors on aura autant de pyramides partielles qu'il y a de faces dans le polyèdre, excepté celles qui forment l'angle solide d'où partent les plans de division.

PROPOSITION XX.

THÉORÊME.

Deux polyèdres symmétriques sont équivalents entre eux ou égaux en solidité.

Car 1° deux pyramides triangulaires symmétriques, fig. 202.
telles que SABC, TABC, ont pour mesure commune

le produit de la base ABC par le tiers de la hauteur SO ou TO; donc ces pyramides sont équivalentes entre elles.

2° Si on partage d'une maniere quelconque l'un des polyèdres symmétriques en pyramides triangulaires, on pourra partager de même l'autre polyèdre en pyramides triangulaires symmétriques; or les pyramides triangulaires symmétriques sont équivalentes chacune à chacune; donc les polyèdres entiers seront équivalents entre eux ou égaux en solidité.

Scholie. Cette proposition semblait résulter immédiatement de la proposition II, où l'on a fait voir que dans deux polyèdres symmétriques, toutes les parties constituantes d'un solide sont égales aux parties constituantes de l'autre; mais il n'en était pas moins nécessaire de la démontrer d'une maniere rigoureuse.

PROPOSITION XXI.

THÉORÊME.

Si une pyramide est coupée par un plan parallele à sa base, le tronc qui reste en ôtant la petite pyramide, est égal à la somme de trois pyramides qui auraient pour hauteur commune la hauteur du tronc, et dont les bases seraient la base inférieure du tronc, sa base supérieure, et une moyenne proportionnelle entre ces deux bases.

fig. 217. Soit ABCDE une pyramide coupée par le plan *abd* parallele à la base; soit TFGH une pyramide triangulaire dont la base et la hauteur soient égales ou équivalentes à celles de la pyramide SABCDE. On peut supposer les deux bases situées sur un même plan; et alors le plan *abd*, prolongé, déterminera dans la py-

ramide triangulaire une section *fgh*, située à la même hauteur au-dessus du plan commun des bases : d'où il résulte que la section *fgh* est à la section *abd* comme la base FGH est à la base ABD *; et puisque les bases sont équivalentes, les sections le seront aussi. Les pyramides S*abcde*, T*fgh*, sont donc équivalentes, puisqu'elles ont même hauteur et des bases équivalentes. Les pyramides entieres SABCDE, TFGH, sont équivalentes par la même raison; donc les troncs ABD*dab*, FGH*hfg*, sont équivalents, et par conséquent il suffira de démontrer la proposition énoncée, pour le seul cas du tronc de pyramide triangulaire. * 16.

Soit FGH*hfg* un tronc de pyramide triangulaire à bases paralleles : par les trois points F, *g*, H, conduisez le plan F*g*H, qui retranchera du tronc la pyramide triangulaire *g*FGH. Cette pyramide a pour base la base inférieure FGH du tronc, elle a aussi pour hauteur la hauteur du tronc, puisque le sommet *g* est dans le plan de la base supérieure *fgh*. fig. 218.

Après avoir retranché cette pyramide, il restera la pyramide quadrangulaire *gfh*HF, dont le sommet est *g* et la base *fh*HF. Par les trois points *f*, *g*, H, conduisez le plan *fg*H, qui partagera la pyramide quadrangulaire en deux triangulaires *g*F*f*H, *gfh*H. Cette derniere a pour base la base supérieure *gfh* du tronc, et pour hauteur la hauteur du tronc, puisque son sommet H appartient à la base inférieure : ainsi nous avons déja deux des trois pyramides qui doivent composer le tronc.

Il reste à considérer la troisieme *g*F*f*H : or, si on mene *g*K parallele à *f*F, et qu'on imagine une nouvelle pyramide *f*FHK, dont le sommet est K et la base F*f*H, ces deux pyramides auront même base F*f*H; elles auront aussi même hauteur, puisque les sommets *g* et K sont situés sur une ligne *g*K parallele à F*f*, et par conséquent parallele au plan de la base; donc ces

pyramides sont équivalentes. Mais la pyramide fFKH peut être considérée comme ayant son sommet en f, et ainsi elle aura même hauteur que le tronc ; quant à sa base FKH, je dis qu'elle est moyenne proportionnelle entre les bases FGH, fgh. En effet les triangles FHK, fgh, ont un angle égal F $=f$, et un côté égal
24, 3. FK $=fg$; on a donc FHK : fgh :: FH : fh. On a aussi FHG : FHK : : FG : FK ou fg. Mais les triangles semblables FGH, fgh, donnent FG : fg : : FH : fh ; donc FGH : FHK . : FHK : fgh ; et ainsi la base FHK est moyenne proportionnelle entre les deux bases FGH, fgh. Donc un tronc de pyramide triangulaire, à bases paralleles, équivaut à trois pyramides qui ont pour hauteur commune la hauteur du tronc, et dont les bases sont la base inférieure du tronc, sa base supérieure, et une moyenne proportionnelle entre ces deux bases.

PROPOSITION XXII.

THÉORÊME.

fig. 216. *Si on coupe un prisme triangulaire dont* ABC *est la base, par un plan* DES *incliné à cette base, le solide* ABCDES, *qui résulte de cette section, sera égal à la somme de trois pyramides dont les sommets sont* D, E, S, *et la base commune* ABC.

Par les trois points S, A, C, faites passer le plan SAC, qui retranchera du prisme tronqué ABCDES la pyramide triangulaire SABC : cette pyramide a pour base ABC et pour sommet le point S.

Après avoir retranché cette pyramide, il restera la pyramide quadrangulaire SACDE, dont S est le sommet et ACDE la base. Par les trois points S, E, C, menez encore un plan SEC, qui divisera la pyramide quadrangulaire en deux pyramides triangulaires SACE, SCDE.

La pyramide SAEC, qui a pour base le triangle AEC et pour sommet le point S, est équivalente à une pyramide EABC, qui aurait pour base AEC et pour sommet le point B. Car ces deux pyramides ont même base; elles ont aussi même hauteur, puisque la ligne BS, étant parallele à chacune des lignes AE, CD, est parallele à leur plan ACE; donc la pyramide SAEC est équivalente à la pyramide EABC, laquelle peut être considérée comme ayant pour base ABC et pour sommet le point E.

La troisieme pyramide SCDE peut être changée d'abord en ASCD; car ces deux pyramides ont la même base SCD; elles ont aussi la même hauteur, puisque AE est parallele au plan SCD; donc la pyramide SCDE est équivalente à ASCD. Ensuite la pyramide ASCD peut être changée en ABCD, car ces deux pyramides ont la base commune ACD; elles ont aussi la même hauteur, puisque leurs sommets S et B sont situés sur une parallele au plan de la base. Donc la pyramide SCDE, équivalente à ASCD, est aussi équivalente à ABCD; or, celle-ci peut être regardée comme ayant pour base ABC et pour sommet le point D.

Donc enfin le prisme tronqué ABCDES est égal à la somme de trois pyramides qui ont pour base commune ABC, et dont les sommets sont respectivement les points D, E, S.

Corollaire. Si les arêtes AE, BS, CD, sont perpendiculaires au plan de la base, elles seront en même temps les hauteurs des trois pyramides qui composent le prisme tronqué; de sorte que la solidité du prisme tronqué, sera exprimée par $\frac{1}{3}ABC \times AE + \frac{1}{3}ABC \times BS$

$+ \frac{1}{3}$ ABC $\times$ CD, quantité qui se réduit à $\frac{1}{8}$ ABC $\times$ (AE $+$ BS $+$ CD).

PROPOSITION XXIII.

THÉORÊME.

Deux pyramides triangulaires semblables ont les faces homologues semblables, et les angles solides homologues égaux.

Suivant la définition, les deux pyramides triangulaires SABC, TDEF, sont semblables, si les deux triangles SAB, ABC, sont semblables aux deux TDE, DEF, et semblablement placés, c'est-à-dire, si l'on a l'angle ABS$=$DET, BAS$=$EDT, ABC$=$DEF, BAC $=$EDF, et si en outre l'inclinaison des plans SAB, ABC, est égale à celle des plans TDE, DEF : cela posé, je dis que ces pyramides ont toutes les faces semblables chacune à chacune, et les angles solides homologues égaux.

fig. 203.

Prenez BG$=$ED, BH$=$EF, BI$=$ET, et joignez GH, GI, IH. La pyramide TDEF est égale à la pyramide IGBH ; car ayant pris les côtés GB, BH, égaux aux côtés DE, EF, et l'angle GBH étant, par hypothese, égal à l'angle DEF, le triangle GBH est égal à DEF ; donc, pour opérer la superposition des deux pyramides, on peut d'abord placer la base DEF sur son égale GBH ; ensuite, puisque le plan DTE est incliné sur DEF autant que le plan SAB sur ABC, il est clair que le plan DET tombera indéfiniment sur le plan ABS. Mais, par hypothese, l'angle DET$=$GBI, donc ET tombera sur son égale BI ; et puisque les quatre points D, E, F, T, coïncident avec les quatre G, B, H, I, il s'ensuit * que la pyramide TDEF coïncide avec la pyramide IGBH.

* 1.

Or, à cause des triangles égaux DEF, GBH, on a l'angle BGH = EDF = BAC; donc GH est parallele à AC. Par une raison semblable GI est parallele à AS; donc le plan IGH est parallele à SAC*. De là il suit * 13, 5.
que le triangle IGH, ou son égal TDF, est semblable à SAC*, et que le triangle IBH, ou son égal TEF, est * 15.
semblable à SBC; donc les deux pyramides triangulaires semblables SABC, TDEF, ont les quatre faces semblables chacune à chacune : de plus elles ont les angles solides homologues égaux.

Car on a déja placé l'angle solide E sur son homologue B, et on pourrait faire de même pour deux autres angles solides homologues; mais on voit immédiate ment que deux angles solides homologues sont égaux, par exemple, les angles T et S, parce qu'ils sont formés par trois angles plans égaux chacun à chacun, et semblablement placés.

Donc, deux pyramides triangulaires semblables ont les faces homologues semblables et les angles solides homologues égaux.

Corollaire I. Les triangles semblables dans les deux pyramides fournissent les proportions AB : DE :: BC : EF :: AC : DF :: AS : DT .. SB : TE :: SC : TF; donc, *dans les pyramides triangulaires semblables, les côtés homologues sont proportionnels.*

II. Et puisque les angles solides homologues sont égaux, il s'ensuit que *l'inclinaison de deux faces quelconques d'une pyramide est égale à l'inclinaison des deux faces homologues de la pyramide semblable.*

III. Si on coupe la pyramide triangulaire SABC par un plan GIH parallele à l'une des faces SAC, la pyramide partielle BGIH sera semblable à la pyramide entiere BASC : car les triangles BGI, BGH, sont semblables aux triangles BAS, BAC, chacun à chacun, et semblablement placés; l'inclinaison de leurs plans est la même de part et d'autre; donc les deux pyramides sont semblables.

fig. 214. IV. En général, *si on coupe une pyramide quelconque* SABCDE *par un plan* abcde *parallele à la base, la pyramide partielle* Sabcde *sera semblable à la pyramide entiere* SABCDE. Car les bases ABCDE, *abcde*, sont semblables, et en joignant AC, *ac*, on vient de prouver que la pyramide triangulaire SABC est semblable à la pyramide S*abc*; donc le point S est déterminé par rapport à la base ABC comme le point S l'est par rapport à la base *abc**; donc les deux pyramides SABCDE, S*abcde*, sont semblables.

*def. 18.

Scholie. Au lieu des cinq données requises par la définition pour que deux pyramides triangulaires soient semblables, on pourrait en substituer cinq autres, suivant différentes combinaisons, et il en résulterait autant de théorêmes, parmi lesquels on peut distinguer celui-ci : *Deux pyramides triangulaires sont semblables lorsqu'elles ont les côtés homologues proportionnels.*

fig. 203. Car, si on a les proportions AB : DE :: BC : EF :: AC : DF :: AS : DT :: SB : TE .: SC : TF, ce qui renferme cinq conditions, les triangles ABS, ABC, seront semblables aux triangles DET, DEF, et semblablement placés. On aura aussi le triangle SBC semblable à TEF; donc les trois angles plans qui forment l'angle solide B, seront égaux aux angles plans qui forment l'angle solide E, chacun à chacun; d'où il suit que l'inclinaison des plans SAB, ABC, est égale à celle de leurs homologues TDE, DEF, et qu'ainsi les deux pyramides sont semblables.

PROPOSITION XXIV.

THÉORÊME.

Deux polyèdres semblables ont les faces homologues semblables, et les angles solides homologues égaux.

Soit ABCDE la base d'un polyèdre ; soient M et N fig. 219.
les sommets de deux angles solides, hors de cette base, déterminés par les pyramides triangulaires MABC, NABC, dont la base commune est ABC ; soient dans l'autre polyèdre, *abcde* la base homologue ou semblable à ABCDE, *m* et *n* les sommets homologues à M et N, déterminés par les pyramides *mabc*, *nabc*, semblables aux pyramides MABC, NABC ; je dis d'abord que les distances MN, *mn*, sont proportionnelles aux côtés homologues AB, *ab*.

En effet, les pyramides MABC, *mabc*, étant semblables, l'inclinaison des plans MAC, BAC, est égale à celle des plans *mac*, *bac* ; pareillement les pyramides NABC, *nabc*, étant semblables, l'inclinaison des plans NAC, BAC, est égale à celle des plans *nac*, *bac* : donc, si on retranche les premieres inclinaisons des dernieres, il restera l'inclinaison des plans NAC, MAC, égale à celle des plans *nac*, *mac*. Mais, à cause de la similitude des mêmes pyramides, le triangle MAC est semblable à *mac*, et le triangle NAC est semblable à *nac* : donc les deux pyramides triangulaires MNAC, *mnac*, ont deux faces semblables chacune à chacune, semblablement placées et également inclinées entre elles ; donc ces pyramides sont semblables *, et leurs 21.
côtés homologues donnent la proportion MN : *mn* :: AM : *am*. D'ailleurs AM : *am* :: AB : *ab* ; donc MN : *mn* :: AB : *ab*.

Soient P et *p* deux autres sommets homologues des mêmes polyèdres, et on aura semblablement PN : *pn* :: AB : *ab*, PM : *pm* :: AB : *ab*. Donc MN : *mn* :: PN : *pn* :: PM : *pm*. Donc *le triangle* PNM *qui joint trois sommets quelconques d'un polyèdre est semblable au triangle* pnm *qui joint les trois sommets homologues de l'autre polyèdre.*

Soient encore Q et *q* deux sommets homologues, et le triangle PQN sera semblable à *pqn*. Je dis de plus que l'inclinaison des plans PQN, PMN, est égale à celle des plans *pqn*, *pmn*.

Car si on joint QM et *qm*, on aura toujours le triangle QNM semblable a *qnm*, et par conséquent l'angle QNM égal à *qnm*. Concevez en N un angle solide formé par les trois angles plans QNM, QNP, PNM, et en *n* un angle solide formé par les trois angles plans *qnm*, *qnp*, *pnm* : puisque ces angles plans sont égaux chacun à chacun, il s'ensuit que les angles solides sont égaux. Donc l'inclinaison des deux plans PNQ, PNM, est égale à celle de leurs homologues *pnq*, *pnm*; donc, si les deux triangles PNQ, PNM, étaient dans un même plan, auquel cas on aurait l'angle QNM$=$QNP$+$PNM, on aurait aussi l'angle $qnm = qnp + pnm$, et les deux triangles *qnp*, *pnm*, seraient aussi dans un même plan.

Tout ce qui vient d'être démontré a lieu, quels que soient les angles M, N, P, Q, comparés à leurs homologues *m*, *n*, *p*, *q*.

Supposons maintenant que la surface de l'un des polyèdres soit partagée en triangles ABC, ACD, MNP, NPQ, etc., on voit que la surface de l'autre polyèdre contiendra un pareil nombre de triangles *abc*, *acd*, *mnp*, *npq*, etc., semblables et semblablement placés ; et si plusieurs triangles, comme MPN, NPQ, etc., appartiennent à une même face et sont dans un même plan, leurs homologues *mpn*, *npq*, etc., seront pareillement dans un même plan. Donc toute face polygone dans un polyèdre répondra à une face polygone semblable dans l'autre polyèdre ; donc les deux polyèdres seront compris sous un même nombre de plans semblables et semblablement placés. Je dis de plus que les angles solides homologues seront égaux.

Car, si l'angle solide N, par exemple, est formé par les angles plans QNP, PNM, MNR, QNR, l'angle solide homologue *n* sera formé par les angles plans qnp, pnm, mnr, qnr. Or, ces angles plans sont égaux chacun à chacun, et l'inclinaison de deux plans adjacents est égale à celle de leurs homologues ; donc les deux angles solides sont égaux, comme pouvant être superposés.

Donc enfin deux polyèdres semblables ont les faces homologues semblables et les angles solides homologues égaux.

Corollaire. Il suit de la démonstration précédente que si, avec quatre sommets d'un polyèdre, on forme une pyramide triangulaire, et qu'on en forme une seconde avec les quatre sommets homologues d'un polyèdre semblable, ces deux pyramides seront semblables; car elles auront les côtés homologues proportionnels*. *21, sch.

On voit en même temps que deux diagonales homologues*, par exemple, AN, an, sont entre elles comme deux côtés homologues AB, ab. *17, 2.

PROPOSITION XXV.

THÉORÈME.

Deux polyèdres semblables peuvent se partager en un même nombre de pyramides triangulaires semblables chacune à chacune, et semblablement placées.

Car on a déja vu que les surfaces de deux polyèdres peuvent se partager en un même nombre de triangles semblables chacun à chacun, et semblablement placés. Considérez tous les triangles d'un polyèdre, excepté ceux qui forment l'angle solide A, comme les bases d'autant de pyramides triangulaires dont le sommet est en A; ces pyramides prises ensemble composeront le polyèdre : partagez de même l'autre polyèdre en pyramides qui aient pour sommet commun celui de l'angle a homologue à A ; il est clair que la pyramide qui joint quatre sommets d'un polyèdre sera semblable à la pyramide qui joint les quatre sommets homologues de l'autre polyèdre. Donc deux polyèdres semblables, etc.

PROPOSITION XXVI.

THÉORÊME.

Deux pyramides semblables sont entre elles comme les cubes des côtés homologues.

fig. 214. Car deux pyramides étant semblables, la plus petite pourra être placée dans la plus grande, de maniere qu'elles aient l'angle solide S commun. Alors les bases ABCDE, *abcde*, seront paralleles ; car, puisque les
* 22. faces homologues sont semblables *, l'angle Sab est égal à SAB, ainsi que Sbc à SBC ; donc le plan abc
* 13, 5. est parallele au plan ABC *. Cela posé, soit SO la perpendiculaire abaissée du sommet S sur le plan ABC, et soit o le point où cette perpendiculaire rencontre le plan abc ; on aura, suivant ce qui a été déja
* 15. démontré *, $SO : So :: SA : Sa :: AB . ab$; et par conséquent,

$$\tfrac{1}{3}SO : \tfrac{1}{3}So :: AB : ab,$$

Mais les bases ABCDE, *abcde*, étant des figures semblables, on a,

$$ABCDE : abcde :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2.$$

Multipliant ces deux proportions terme à terme, il en résultera la proportion,

$$ABCDE \times \tfrac{1}{3}SO : abcde \times \tfrac{1}{3}So :: \overline{AB}^3 : \overline{ab}^3 ;$$

or, $ABCDE \times \frac{1}{3}SO$ est la solidité de la pyramide
* 18. SABCDE *, et $abcde \times \frac{1}{3}So$ est celle de la pyramide S$abcde$; donc deux pyramides semblables sont entre elles comme les cubes de leurs côtés homologues.

PROPOSITION XXVII.

THÉORÈME.

Deux polyèdres semblables sont entre eux comme les cubes des côtés homologues.

Car deux polyèdres semblables peuvent être partagés en un même nombre de pyramides triangulaires semblables chacune à chacune*. Or, les deux pyramides semblables APNM, *apnm*, sont entre elles comme les cubes des côtés homologues AM, *am*, ou comme les cubes des côtés homologues AB, *ab*. Le même rapport aura lieu entre deux autres pyramides homologues quelconques; donc la somme de toutes les pyramides qui composent un polyèdre, ou le polyèdre lui-même, est à l'autre polyèdre, comme le cube d'un côté quelconque du premier est au cube du côté homologue du second. fig. 219.

* 23.

Scholie général.

On peut présenter en termes algébriques, c'est-à-dire, de la maniere la plus succincte, la récapitulation des principales propositions de ce livre concernant les solidités des polyèdres.

Soit B la base d'un prisme, H sa hauteur; la solidité du prisme sera $B \times H$ ou BH.

Soit B la base d'une pyramide, H sa hauteur; la solidité de la pyramide sera $B \times \frac{1}{3}H$, ou $H \times \frac{1}{3}B$, ou $\frac{1}{3}BH$.

Soit H la hauteur d'un tronc de pyramide à bases paralleles, soient A et B ses bases; $\sqrt{AB}$ sera la moyenne proportionnelle entre elles, et la solidite du tronc sera $\frac{1}{3}H \times (A + B + \sqrt{AB}.)$

Soit B la base d'un tronc de prisme triangulaire, H, H', H'', les hauteurs de ses trois sommets supérieurs, la solidité du prisme tronqué sera $\frac{1}{3}B \times (H + H' + H'')$.

Soient enfin P et p les solidités de deux polyèdres semblables, A et a deux côtés ou deux diagonales homologues de ces polyèdres, on aura $P : p :: A^3 : a$.