# LIVRE V.

## LES PLANS ET LES ANGLES SOLIDES.

### DÉFINITIONS.

I. Une ligne droite est *perpendiculaire à un plan*, lorsqu'elle est perpendiculaire à toutes les droites qui passent par son *pied* dans le plan *. Réciproquement le plan est perpendiculaire à la ligne. * pr. 4.

Le *pied* de la perpendiculaire est le point où cette ligne rencontre le plan.

II. Une ligne est *parallele à un plan*, lorsqu'elle ne peut le rencontrer à quelque distance qu'on les prolonge l'un et l'autre. Réciproquement le plan est parallele à la ligne.

III. Deux *plans* sont *paralleles* entre eux, lorsqu'ils ne peuvent se rencontrer à quelque distance qu'on les prolonge l'un et l'autre.

IV. Il sera démontré * que l'intersection commune de deux plans qui se rencontrent est une ligne droite : cela posé, *l'angle* ou *l'inclinaison* mutuelle *de deux plans* est la quantité plus ou moins grande dont ils sont écartés l'un de l'autre ; cette quantité se mesure * par l'angle que font entre elles les deux perpendiculaires menées dans chacun de ces plans au même point de l'intersection commune. * pr. 3. * pr. 7.

Cet angle peut être aigu, droit, ou obtus.

V. S'il est droit, les deux *plans* sont *perpendiculaires* entre eux.

VI. *Angle solide* est l'espace angulaire compris entre plusieurs plans qui se réunissent en un même point.

fig. 199. Ainsi l'angle solide S est formé par la réunion des plans ASB, BSC, CSB, DSA.

Il faut au moins trois plans pour former un angle solide.

## PROPOSITION PREMIERE.

### THÉORÊME.

*Une ligne droite ne peut être en partie dans un plan, en partie au dehors.*

Car, suivant la définition du plan, dès qu'une ligne droite a deux points communs avec un plan, elle est tout entiere dans ce plan.

*Scholie.* Pour reconnaître si une surface est plane, il faut appliquer une ligne droite en différents sens sur cette surface, et voir si elle touche la surface dans toute son étendue.

## PROPOSITION II.

### THÉORÊME.

*Deux lignes droites qui se coupent sont dans un même plan, et en déterminent la position.*

fig. 181. Soient AB, AC, deux lignes droites qui se coupent en A : on peut concevoir un plan où se trouve la ligne droite AB; si ensuite on fait tourner ce plan autour de AB, jusqu'à ce qu'il passe par le point C, alors la ligne AC, qui a deux de ses points A et C dans ce plan, y sera toute entiere, donc la position de ce plan est déterminée par la seule condition de renfermer les deux droites AB, AC.

*Corollaire* I. Un triangle ABC, ou trois points A, B, C, non en ligne droite, déterminent la position d'un plan.

fig 182 *Corollaire* II. Donc aussi deux paralleles AB, CD, déterminent la position d'un plan; car si on mene la sécante EF, le plan des deux droites AE, EF, sera celui des paralleles AB, CD.

## PROPOSITION III.

### THÉORÊME.

*Si deux plans se coupent, leur intersection commune sera une ligne droite.*

Car, si dans les points communs aux deux plans on en trouvait trois qui ne fussent pas en ligne droite, les deux plans dont il s'agit, passant chacun par ces trois points, ne feraient qu'un seul et même plan*, ce qui est contre la supposition. * 2.

## PROPOSITION IV.

### THÉORÊME.

*Si une ligne droite* AP *est perpendiculaire à deux autres* PB, PC, *qui se croisent à son pied dans le plan* MN, *elle sera perpendiculaire à une droite quelconque* PQ *menée par son pied dans le même plan, et ainsi elle sera perpendiculaire au plan* MN. fig. 183.

Par un point Q, pris à volonté sur PQ, tirez la droite BC dans l'angle BPC, de maniere que BQ=QC*, joignez AB, AQ, AC. *prob.5, liv. 3.

La base BC étant divisée en deux parties égales au point Q, le triangle BPC donnera*, * 14, 3.

$$\overline{PC}^2+\overline{PB}^2=2\overline{PQ}^2+2\overline{QC}^2.$$

Le triangle BAC donnera pareillement,

$$\overline{AC}^2+\overline{AB}^2=2\overline{AQ}^2+2\overline{QC}^2.$$

Retranchant la premiere égalité de la seconde, et observant que les triangles APC, APB, tous deux rectangles en P, donnent $\overline{AC}^2-\overline{PC}^2=\overline{AP}^2$, et $\overline{AB}^2-\overline{PB}^2=\overline{AP}^2$; on aura,

$$\overline{AP}^2+\overline{AP}^2=2\overline{AQ}^2-2\overline{PQ}^2.$$

Donc, en prenant les moitiés de part et d'autre, on a $\overline{AP}^2 = \overline{AQ}^2 - \overline{PQ}^2$, ou $\overline{AQ}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PQ}^2$, donc le
* 13. 3. triangle APQ est rectangle en P*; donc AP est perpendiculaire à PQ.

*Scholie.* On voit par là, non seulement qu'il est possible qu'une ligne droite soit perpendiculaire à toutes celles qui passent par son pied dans un plan, mais que cela arrive toutes les fois que cette ligne est perpendiculaire à deux droites menées dans le plan; c'est ce qui démontre la légitimité de la définition I.

*Corollaire* I. La perpendiculaire AP est plus courte qu'une oblique quelconque AQ; donc elle mesure la vraie distance du point A au plan PQ.

*Corollaire* II. Par un point P donné sur un plan, on ne peut élever qu'une seule perpendiculaire à ce plan; car si on pouvait élever deux perpendiculaires par le même point P, conduisez, suivant ces deux perpendiculaires, un plan dont l'intersection avec le plan MN soit PQ; alors les deux perpendiculaires dont il s'agit seraient perpendiculaires à la ligne PQ, au même point et dans le même plan, ce qui est impossible.

Il est pareillement impossible d'abaisser d'un point donné hors d'un plan deux perpendiculaires à ce plan; car soient AP, AQ, ces deux perpendiculaires, alors le triangle APQ aurait deux angles droits APQ, AQP, ce qui est impossible.

## PROPOSITION V.

### THÉORÊME.

*Les obliques également éloignées de la perpendiculaire sont égales; et, de deux obliques inégalement éloignées de la perpendiculaire, celle qui s'en éloigne le plus est la plus longue.*

Car les angles APB, APC, APD étant droits, si on suppose les distances PB, PC, PD, égales entre elles, les triangles APB, APC, APD, auront un angle égal compris entre côtés égaux; donc ils seront égaux; donc les hypoténuses ou les obliques AB, AC, AD, seront égales entre elles. Pareillement, si la distance PE est plus grande que PD ou son égale PB, il est clair que l'oblique AE sera plus grande que AB, ou son égale AD. fig. 184.

*Corollaire.* Toutes les obliques égales AB, AC, AD, etc., aboutissent à la circonférence BCD, décrite du pied de la perpendiculaire P comme centre; donc étant donné un point A hors d'un plan, si on veut trouver sur ce plan le point P où tomberait la perpendiculaire abaissée de A, il faut marquer sur ce plan trois points B, C, D, également éloignés du point A, et chercher ensuite le centre du cercle qui passe par ces points; ce centre sera le point cherché P.

*Scholie.* L'angle ABP est ce qu'on appelle l'*inclinaison de l'oblique* AB *sur le plan* MN; on voit que cette inclinaison est égale pour toutes les obliques AB, AC, AD, etc., qui s'écartent également de la perpendiculaire; car tous les triangles ABP, ACP, ADP, etc., sont égaux entre eux.

## PROPOSITION VI.

### THÉORÊME.

*Soit* AP *une perpendiculaire au plan* MN *et* BC *une ligne située dans ce plan; si du pied* P *de la perpendiculaire on abaisse* PD *perpendiculaire sur* BC, *et qu'on joigne* AD, *je dis que* AD *sera perpendiculaire à* BC. fig. 185.

Prenez DB=DC, et joignez PB, PC, AB, AC: puisque DB=DC, l'oblique PB=PC; et par rapport à la perpendiculaire AP, puisque PB=PC,

* 5. l'oblique AB = AC *; donc la ligne AD a deux de ses points A et D également distants des extrémités B et C; donc AD est perpendiculaire sur le milieu de BC.

*Corollaire.* On voit en même temps que BC est perpendiculaire au plan APD, puisque BC est perpendiculaire à-la-fois aux deux droites AD, PD.

*Scholie.* Les deux lignes AE, BC, offrent l'exemple de deux lignes qui ne se rencontrent point, parce que elles ne sont pas situées dans un même plan. La plus courte distance de ces lignes est la droite PD, qui est à-la-fois perpendiculaire à la ligne AP et à la ligne BC. La distance PD est la plus courte entre ces deux lignes; car si on joint deux autres points, comme A et B, on aura AB > AD, AD > PD; donc, à plus forte raison, AB > PD.

Les deux lignes AE, CB, quoique non situées dans un même plan, sont censées faire entre elles un angle droit, parce que AD et la parallele menée par un de ses points à la ligne BC feraient entre elles un angle droit. De même la ligne AB et la ligne PD, qui représentent deux droites quelconques non situées dans le même plan, sont censées faire entre elles le même angle que ferait avec AB la parallele à PD menée par un des points de AB.

## PROPOSITION VII.

### THÉORÊME.

fig. 186. *Si la ligne* AP *est perpendiculaire au plan* MN, *toute ligne* DE *parallele à* AP *sera perpendiculaire au même plan.*

Suivant les paralleles AP, DE, conduisez un plan dont l'intersection avec le plan MN sera PD; dans le plan MN menez BC perpendiculaire à PD, et joignez AD.

Suivant le corollaire du théorême précédent, BC est perpendiculaire au plan APDE; donc l'angle BDE est droit : mais l'angle EDP est droit aussi, puisque AP est perpendiculaire à PD, et que DE est parallele à AP; donc la ligne DE est perpendiculaire aux deux droites DP, DB; donc elle est perpendiculaire à leur plan MN.

*Corollaire* I. Réciproquement si les droites AP, DE sont perpendiculaires au même plan MN, elles seront paralleles; car si elles ne l'étaient pas, conduisez par le point D une parallele à AP, cette parallele sera perpendiculaire au plan MN; donc on pourrait, par un même point D, élever deux perpendiculaires à un même plan, ce qui est impossible*. *4.

*Corollaire* II. Deux lignes A et B, paralleles à une troisieme C, sont paralleles entre elles; car imaginez un plan perpendiculaire à la ligne C, les lignes A et B, paralleles à cette perpendiculaire, seront perpendiculaires au même plan; donc, par le corollaire précédent, elles seront paralleles entre elles.

Il est entendu que les trois lignes ne sont pas dans le même plan, sans quoi la proposition serait déja connue*. *25, 1.

## PROPOSITION VIII.

### THÉORÊME.

*Si la ligne* AB *est parallele à une droite* CD *menée dans le plan* MN, *elle sera parallele à ce plan.* fig 187.

Car si la ligne AB, qui est dans le plan ABCD, rencontrait le plan MN, ce ne pourrait être qu'en quelque point de la ligne CD, intersection commune des deux plans : or, AB ne peut rencontrer CD, puisqu'elle lui est parallele; donc elle ne rencontrera pas non plus le plan MN; donc elle est parallele à ce plan*. *déf. 2.

## PROPOSITION IX.

### THÉORÈME.

fig. 188. *Deux plans* MN, PQ, *perpendiculaires à une même droite* AB, *sont paralleles entre eux.*

Car s'ils se rencontraient quelque part, soit O un de leurs points communs, et joignez OA, OB; la ligne AB, perpendiculaire au plan MN, est perpendiculaire à la droite OA menée par son pied dans ce plan; par la même raison AB est perpendiculaire à BO; donc OA et OB seraient deux perpendiculaires abaissées du même point O sur la même ligne droite, ce qui est impossible; donc les plans MN, PQ, ne peuvent se rencontrer; donc ils sont paralleles.

## PROPOSITION X.

### THÉORÈME.

fig. 189. *Les intersections* EF, GH, *de deux plans paralleles* MN, PQ, *par un troisieme plan* FG, *sont paralleles.*

Car si les lignes EF, GH, situées dans un même plan, ne sont pas paralleles, prolongées elles se rencontreront; donc les plans MN, PQ, dans lesquels elles sont, se rencontreraient aussi; donc ils ne seraient pas paralleles.

## PROPOSITION XI.

### THÉORÈME.

fig. 188. *La ligne* AB, *perpendiculaire au plan* MN, *est perpendiculaire au plan* PQ *parallele à* MN.

Ayant tiré à volonté la ligne BC dans le plan PQ, suivant AB et BC, conduisez un plan ABC dont l'intersection avec le plan MN soit AD, l'intersection AD sera parallele à BC*; mais la ligne AB perpendiculaire au plan MN est perpendiculaire à la droite AD; donc elle sera aussi perpendiculaire à sa parallele BC; et puisque la ligne AB est perpendiculaire à toute ligne BC menée par son pied dans le plan PQ, il s'ensuit qu'elle est perpendiculaire au plan PQ. * 10.

## PROPOSITION XII.

### THÉORÊME.

*Les paralleles* EG, FH, *comprises entre deux plans paralleles* MN, PQ, *sont égales.* fig. 189.

Par les paralleles EG, FH, faites passer le plan EGHF, qui rencontrera les plans paralleles suivant EF et GH. Les intersections EF, GH, sont paralleles entre elles*, ainsi que EG, FH; donc la figure EGHF est un parallélogramme; donc EG = FH. * 10.

*Corollaire.* Il suit de là que *deux plans paralleles sont par-tout à égale distance;* car si EG et FH sont perpendiculaires aux deux plans MN, PQ, elles seront paralleles entre elles*; donc elles sont égales. * 7.

## PROPOSITION XIII.

### THÉORÊME.

*Si deux angles* CAE, DBF, *non situés dans le même plan, ont leurs côtés paralleles et dirigés dans le même sens, ces angles seront égaux et leurs plans seront paralleles.* fig. 190.

Prenez AC = BD, AE = BF, et joignez CE, DF, AB, CD, EF. Puisque AC est égale et parallele à BD, a figure ABDC est un parallélogramme*; donc CD est égale et parallele à AB. Par une raison semblable * 11, 3.

EF est égale et parallele à AB ; donc aussi CD est égale et parallele à EF, la figure CEFD est donc un parallélogramme, et ainsi le côté CE est égal et parallele à DF ; donc les triangles CAE, DBF, sont équilatéraux entre eux ; donc l'angle CAE = DBF.

En second lieu je dis que le plan ACE est parallele au plan BDF ; car, supposons que le plan parallele à BDF, mené par le point A, rencontre les lignes CD, EF, en d'autres points que C et E, par exemple en G et H ; alors, suivant la proposition XII, les trois lignes AB, GD, FH, seront égales : mais les trois AB, CD, EF, le sont déja ; donc on aurait CD = GD, et FH = EF, ce qui est absurde ; donc le plan ACE est parallele à BDF.

*Corollaire.* Si deux plans paralleles MN, PQ, sont rencontrés par deux autres plans CABD, EABF, les angles CAE, DBF, formés par les intersections des plans paralleles, seront égaux ; car l'intersection AC
* 10. est parallele à BD*, AE l'est à BF, donc l'angle CAE = DBF.

## PROPOSITION XIV.

### THÉORÊME.

fig. 190. *Si trois droites* AB, CD, EF, *non situées dans le même plan, sont égales et paralleles, les triangles* ACE, BDF, *formés de part et d'autre en joignant les extrémités de ces droites, seront égaux, et leurs plans seront paralleles.*

Car, puisque AB est égale et parallele à CD, la figure ABDC est un parallélogramme ; donc le côté AC est égal et parallele à BD. Par une raison semblable les côtés AE, BF, sont égaux et paralleles, ainsi que CE, DF ; donc les deux triangles ACE, BDF, sont égaux : on prouvera d'ailleurs, comme dans la proposition précédente, que leurs plans sont paralleles.

## PROPOSITION XV.

### THÉORÊME.

*Deux droites comprises entre trois plans paralleles, sont coupées en parties proportionnelles.*

Supposons que la ligne AB rencontre les plans paralleles MN, PQ, RS, en A, E, B, et que la ligne CD rencontre les mêmes plans en C, F, D; je dis qu'on aura AE : EB : : CF : FD. fig. 191.

Tirez AD qui rencontre le plan PQ en G, et joignez AC, EG, GF, BD; les intersections EG, BD, des plans paralleles PQ, RS, par le plan ABD, sont paralleles *; donc AE:EB::AG:GD; pareillement les intersections AC, GF, étant paralleles, on a AG:GD:: CF:FD; donc, à cause du rapport commun, AG: GD, on aura AE : EB : : CF : FD. * 10.

## PROPOSITION XVI.

### THÉORÊME.

*Soit* ABCD *un quadrilatere quelconque situé ou non situé dans un même plan; si on coupe les côtés opposés proportionnellement par deux droites* EF, GH, *de sorte qu'on ait* AE:EB::DF:FC, *et* BG:GC::AH:HD; *je dis que les droites* EF, GH, *se couperont en un point* M, *de maniere qu'on aura* HM:MG::AE:EB, *et* EM:MF::AH:HD. fig. 192.

Conduisez suivant AD un plan quelconque A*b*H*c*D qui ne passe pas suivant GH; par les points E, B, C, F, menez à GH les paralleles E*e*, B*b*, C*c*, F*f*, qui rencontrent ce plan en *e*, *b*, *c*, *f*. A cause des paralleles B*b*, GH, C*c**, on aura *b*H:H*c*::BG:GC::AH:HD; donc* les triangles AH*b*, DH*c*, sont semblables. On aura ensuite A*e*:*eb*::AE:EB, et D*f*: *15, 3. *20, 3.

$c$ :: DF : FC ; donc A$e$ : $eb$ :: D$f$ : $fc$, ou, *componendo*, A$e$ : D$f$ :: A$b$ : D$c$ ; mais, à cause des triangles semblables AH$b$, DH$c$, on a A$b$ : D$c$ :: AH : HD ; donc A$e$ : D$f$ :: AH : HD : d'ailleurs les triangles AH$b$, $c$HD, étant semblables, l'angle HA$e$

*20, 3. = HD$f$; donc les triangles AH$e$, DH$f$, sont semblables*, donc l'angle AH$e$ = DH$f$. Il s'ensuit d'abord que $e$H$f$ est une ligne droite, et qu'ainsi les trois paralleles E$e$, GH, F$f$, sont situées dans un même plan, lequel contiendra les deux droites EF, GH; donc *celles-ci doivent se couper en un point* M. Ensuite, à cause des paralleles E$e$, MH, F$f$, on aura EM : MF :: $e$H : H$f$ :: AH : HD.

Par une construction semblable, rapportée au côté AB, on démontrerait que HM : MG :: AE : EB.

## PROPOSITION XVII.

### THÉORÊME.

fig. 193. *L'angle compris entre les deux plans* MAN, MAP, *peut être mesuré, conformément à la définition, par l'angle* NAP *que font entre elles les deux perpendiculaires* AN, AP, *menées dans chacun de ces plans à l'intersection commune* AM.

Pour démontrer la légitimité de cette mesure, il faut prouver, 1° qu'elle est constante, ou qu'elle serait la même en quelque point de l'intersection commune qu'on menât les deux perpendiculaires.

En effet, si on prend un autre point M, et qu'on mene MC dans le plan MN, et MB dans le plan MP, perpendiculaires à l'intersection commune AM ; puisque MB et AP sont perpendiculaires à une même ligne AM, elles sont paralleles entre elles. Par la même raison MC est parallele à AN ; donc l'angle BMC = PAN * ; donc il est indifférent de mener les perpen-

*13. diculaires au point M ou au point A ; l'angle compris sera toujours le même.

2° Il faut prouver que si l'angle des deux plans augmente ou diminue dans un certain rapport, l'angle PAN augmentera ou diminuera dans le même rapport.

Dans le plan PAN décrivez du centre A et d'un rayon à volonté l'arc NDP, du centre M et d'un rayon égal décrivez l'arc CEB, tirez AD à volonté ; les deux plans PAN, BMC, étant perpendiculaires à une même droite MA, seront paralleles*; donc les intersections AD, ME, de ces deux plans par un troisieme AMD, seront paralleles ; donc l'angle BME sera égal à PAD*.

* 9.
* 13.

Appelons pour un moment *coin* l'angle formé par deux plans MP, MN ; cela posé, si l'angle DAP était égal à DAN, il est clair que le coin DAMP serait égal au coin DAMN ; car la base PAD se placerait exactement sur son égale DAN, la hauteur AM serait toujours la même ; donc les deux coins coïncideraient l'un avec l'autre. On voit de même que si l'angle DAP était contenu un certain nombre de fois juste dans l'angle PAN, le coin DAMP serait contenu autant de fois dans le coin PAMN. D'ailleurs du rapport en nombre entier à un rapport quelconque la conclusion est légitime, et a été démontrée dans une circonstance tout-à-fait semblable * ; donc quel que soit le rapport de l'angle DAP à l'angle PAN, le coin DAMP sera dans ce même rapport avec le coin PAMN donc l'angle NAP peut être pris pour la mesure du coin PAMN, ou de l'angle que font entre eux les deux plans MAP, MAN.

* 17,

*Scholie*. Il en est des angles formés par deux plans comme des angles formés par deux droites. Ainsi lorsque deux plans se traversent mutuellement, les angles opposés au sommet sont égaux, et les angles adjacents valent ensemble deux angles droits ; donc si un plan est perpendiculaire à un autre, celui-ci est perpendiculaire au premier. Pareillement dans la rencontre des plans paralleles par un troisieme plan, il existe les mêmes égalités et les mêmes propriétés que dans la rencontre de deux lignes paralleles par une troisieme ligne.

## PROPOSITION XVIII.

### THÉORÊME.

.194. *La ligne* AP *étant perpendiculaire au plan* MN, *tout plan* APB, *conduit suivant* AP, *sera perpendiculaire au plan* MN.

Soit BC l'intersection des plans AB, MN; si dans le plan MN on mene DE perpendiculaire à BP, la ligne AP, étant perpendiculaire au plan MN, sera perpendiculaire à chacune des deux droites BC, DE: mais l'angle APD, formé par les deux perpendiculaires PA, PD, à l'intersection commune BP, mesure l'angle des deux plans AB, MN; donc, puisque cet angle est droit,

*déf. 5. les deux plans sont perpendiculaires entre eux*.

*Scholie.* Lorsque trois droites, telles que AP, BP, DP, sont perpendiculaires entre elles, chacune de ces droites est perpendiculaire au plan des deux autres et les trois plans sont perpendiculaires entre eux.

## PROPOSITION XIX.

### THÉORÊME.

fig. 194. *Si le plan* AB *est perpendiculaire au plan* MN, *et que dans le plan* AB *on mene la ligne* PA *perpendiculaire à l'intersection commune* PB, *je dis que* PA *sera perpendiculaire au plan* MN.

Car si dans le plan MN on mene PD perpendiculaire à PB, l'angle APD sera droit, puisque les plans sont perpendiculaires entre eux; donc la ligne AP est perpendiculaire aux deux droites PB, PD; donc elle est perpendiculaire à leur plan MN.

*Corollaire.* Si le plan AB est perpendiculaire au plan MN, et que par un point P de l'intersection commune on éleve une perpendiculaire au plan MN, je dis que cette perpendiculaire sera dans le plan AB; car, si elle n'y était pas, on pourrait mener dans le plan AB une perpendiculaire AP à l'intersection commune BP, laquelle serait en même temps perpendiculaire au plan MN; donc au même point P il y aurait deux perpendiculaires au plan MN; ce qui est impossible*. * 4.

## PROPOSITION XX.

### THÉORÊME.

*Si deux plans* AB, AD, *sont perpendiculaires à un troisieme* MN, *leur intersection commune* AP *sera perpendiculaire à ce troisieme plan.* fig. 194.

Car si par le point P on éleve une perpendiculaire au plan MN, cette perpendiculaire doit se trouver à-la-fois dans le plan AB et dans le plan AD*; donc elle est leur intersection commune AP. *cor. 19.

## PROPOSITION XXI.

### THÉORÊME.

*Si un angle solide est formé par trois angles plans, la somme de deux quelconques de ces angles sera plus grande que le troisieme.* fig. 195.

Il n'y a lieu à démontrer la proposition que lorsque l'angle plan qu'on compare à la somme des deux autres est plus grand que chacun de ceux-ci. Soit donc l'angle solide S formé par trois angles plans ASB, ASC, BSC, et supposons que l'angle ASB soit le plus grand des trois; je dis qu'on aura ASB < ASC + BSC.

Dans le plan ASB faites l'angle BSD = BSC, tirez à volonté la droite ADB ; et, ayant pris SC = SD, joignez AC, BC.

Les deux côtés BS, SD, sont égaux aux deux BS, SC, l'angle BSD = BSC ; donc les deux triangles BSD, BSC sont égaux ; donc BD = BC. Mais on a AB < AC + BC ; retranchant d'un côté BD, et de l'autre son égale BC, il restera AD < AC. Les deux côtés AS, SD, sont égaux aux deux AS, SC, le troisieme AD
*10, 1. est plus petit que le troisieme AC ; donc* l'angle ASD < ASC. Ajoutant BSD = BSC, on aura ASD + BSD ou ASB < ASC + BSC.

## PROPOSITION XXII.

### THÉORÊME.

*La somme des angles plans qui forment un angle solide, est toujours moindre que quatre angles droits.*

fig 196. Coupez l'angle solide S par un plan quelconque ABCDE ; d'un point O pris dans ce plan menez à tous les angles les lignes OA, OB, OC, OD, OE.

La somme des angles des triangles ASB, BSC, etc., formés autour du sommet S, équivaut à la somme des angles d'un pareil nombre de triangles AOB, BOC, etc., formés autour du sommet O. Mais au point B les angles ABO, OBC, pris ensemble, font l'angle ABC plus petit que la somme des angles ABS,
* 21. SBC* ; de même au point C on a BCO + OCD < BCS + SCD ; et ainsi à tous les angles du polygone ABCDE. Il suit de là que dans les triangles dont le sommet est en O, la somme des angles à la base est plus petite que la somme des angles à la base dans les triangles dont le sommet est en S ; donc, par compensation, la somme des angles formés autour du point O est plus grande que la somme des angles autour du point S. Mais la somme des angles autour

du point O est égale à quatre angles droits*; donc la somme des angles plans qui forment l'angle solide S est moindre que quatre angles droits. * 5, 1.

*Scholie.* Cette démonstration suppose que l'angle solide est convexe, ou que le plan d'une face prolongée ne peut jamais couper l'angle solide; s'il en était autrement, la somme des angles plans n'aurait plus de bornes et pourrait être d'une grandeur quelconque.

## PROPOSITION XXIII.

### THÉORÊME.

*Si deux angles solides sont composés de trois angles plans égaux chacun à chacun, les plans dans lesquels sont les angles égaux seront également inclinés entre eux.*

Soit l'angle ASC=DTF, l'angle ASB=DTE, et l'angle BSC=ETF; je dis que les deux plans ASC, ASB, auront entre eux une inclinaison égale à celle des plans DTF, DTE. fig. 197.

Ayant pris SB à volonté, menez BO perpendiculaire au plan ASC; du point O, où cette perpendiculaire rencontre le plan, menez OA, OC, perpendiculaires sur SA, SC; joignez AB, BC; prenez ensuite TE=SB; menez EP perpendiculaire sur le plan DTF; du point P menez PD, PF, perpendiculaires sur TD, TF; enfin joignez DE, EF.

Le triangle SAB est rectangle en A, et le triangle TDE en D*, et puisque l'angle ASB=DTE, on a aussi SBA=TED. D'ailleurs SB=TE; donc le triangle SAB est égal au triangle TDE*; donc SA=TD, et AB=DE. On démontrera semblablement que SC=TF, et BC=EF. Cela posé, le quadrilatere SAOC est égal au quadrilatere TDPF; car posant l'angle ASC sur son égal DTF, à cause de * 6. * 5, 1.

SA=TD et SC=TF, le point A tombera en D et le point C en F. En même temps AO, perpendiculaire à SA, tombera sur DP perpendiculaire à TD, et pareillement OC sur PF; donc le point O tombera sur le point P, et on aura AO=DP. Mais les triangles AOB, DPE, sont rectangles en O et P, l'hypoténuse AB=DE, et le côté AO=DP; donc ces triangles
* 18, 1. sont égaux*; donc l'angle OAB=PDE. L'angle OAB est l'inclinaison des deux plans ASB, ASC; l'angle PDE est celle des deux plans DTE, DTF; donc ces deux inclinaisons sont égales entre elles.

Il faut observer cependant que l'angle A du triangle rectangle OAB n'est proprement l'inclinaison des deux plans ASB, ASC, que lorsque la perpendiculaire BO tombe, par rapport à SA, du même côté que SC; si elle tombait de l'autre côté, alors l'angle des deux plans serait obtus, et, joint à l'angle A du triangle OAB, il ferait deux angles droits. Mais dans le même cas l'angle des deux plans TDE, TDF, serait pareillement obtus, et, joint à l'angle D du triangle DPE, il ferait deux angles droits; donc, comme l'angle A serait toujours égal à D, on conclurait de même que l'inclinaison des deux plans ASB, ASC, est égale à celle des deux plans TDE, TDF.

*Scholie*. Si deux angles solides sont composés de trois angles plans égaux chacun à chacun, et qu'en même temps les angles égaux ou homologues soient *disposés de la même maniere* dans les deux angles solides, alors ces angles seront égaux, et posés l'un sur l'autre ils coïncideront. En effet on a déja vu que le quadrilatere SAOC peut être placé sur son égal TDPF; ainsi en plaçant SA sur TD, SC tombe sur TF, et le point O sur le point P. Mais, à cause de l'égalité des triangles AOB, DPE, la perpendiculaire OB au plan ASC est égale à la perpendiculaire

PE au plan TDF ; de plus ces perpendiculaires sont dirigées dans le même sens ; donc le point B tombera sur le point E, la ligne SB sur TE, et les deux angles solides coïncideront entièrement l'un avec l'autre.

Cette coïncidence cependant n'a lieu qu'en supposant que les angles plans égaux sont *disposés de la même maniere* dans les deux angles solides ; car si les angles plans égaux étaient *disposés dans un ordre inverse*, ou, ce qui revient au même, si les perpendiculaires OB, PE, au lieu d'être dirigées dans le même sens par rapport aux plans ASC, DTF, étaient dirigées en sens contraires, alors il serait impossible de faire coïncider les deux angles solides l'un avec l'autre. Il n'en serait cependant pas moins vrai, conformément au théorême, que les plans dans lesquels sont les angles égaux seraient également inclinés entre eux ; de sorte que les deux angles solides seraient égaux dans toutes leurs parties constituantes, sans néanmoins pouvoir être superposés. Cette sorte d'égalité, qui n'est pas absolue ou de superposition, mérite d'être distinguée par une dénomination particuliere : nous l'appellerons *égalité par symétrie*.

Ainsi les deux angles solides dont il s'agit, qui sont formés par trois angles plans égaux chacun à chacun, mais disposés dans un ordre inverse, s'appelleront *angles égaux par symétrie*, ou simplement *angles symétriques*.

La même remarque s'applique aux angles solides formés de plus de trois angles plans : ainsi un angle solide formé par les angles plans A, B, C, D, E, et un autre angle solide formé par les mêmes angles dans un ordre inverse A, E, D, C, B, peuvent être tels que les plans dans lesquels sont les angles égaux soient également inclinés entre eux. Ces deux angles solides, qui seraient égaux sans que la superposition fût possible, s'appelleront *angles solides égaux par symétrie*, ou *angles solides symétriques*.

Dans les figures planes il n'y a point proprement d'égalité par symétrie, et toutes celles qu'on voudrait appeler ainsi seraient des égalités absolues ou de superposition : la raison en est qu'on peut renverser une figure plane, et prendre indifféremment le dessus pour le dessous. Il en est autrement dans les solides où la troisieme dimension peut être prise dans deux sens différents.

## PROPOSITION XXIV.

### PROBLÊME.

*Étant donnés les trois angles plans qui forment un angle solide, trouver par une construction plane l'angle que deux de ces plans font entre eux.*

fig. 198. Soit S l'angle solide proposé, dans lequel on connaît les trois angles plans ASB, ASC, BSC ; on demande l'angle que font entre eux deux de ces plans, par exemple les plans ASB, ASC.

Imaginons qu'on ait fait la même construction que dans le théorême précédent, l'angle OAB serait l'angle requis. Il s'agit donc de trouver le même angle par une construction plane ou tracée sur un plan.

Pour cela faites sur un plan les angles B'SA, ASC, B''SC, égaux aux angles BSA, ASC, BSC, dans la figure solide ; prenez B'S et B''S égaux chacun à BS de la figure solide ; des points B' et B'' abaissez B'A et B''C perpendiculaires sur SA et SC, lesquelles se rencontreront en un point O. Du point A comme centre et du rayon AB' décrivez la demi-circonférence B'*b*E ; au point O élevez sur B'E la perpendiculaire O, qui rencontre la *b* circonférence enz*b*, joigne A*b*, et l'angle EA$b$ sera l'inclinaison cherchée des deux plans ASC, ASB, dans l'angle solide.

Tout se réduit à faire voir que le triangle AO$b$ de la figure plane est égal au triangle AOB de la figure solide. Or les deux triangles B'SA, BSA, sont rectangles en A, les angles en S sont égaux ; donc les angles en B et B' sont pareillement égaux. Mais l'hypoténuse SB' est égale à l'hypoténuse SB ; donc ces triangles sont égaux ; donc SA de la figure plane est égale à SA de la figure solide, et aussi AB', ou son égale A$b$ dans la figure plane est égale à AB dans la figure solide. On démontrera de même que SC est égal de part et d'autre ; d'où il suit que le quadrilatere SAOC est égal dans l'une et dans l'autre figure, et qu'ainsi AO de la figure plane est égal à AO de la figure solide ; donc dans l'une et dans l'autre les triangles rectangles AO$b$, AOB, ont l'hypoténuse égale et un côté égal ; donc ils sont égaux, et l'angle EA$b$, trouvé par la construction plane, est égal à l'inclinaison des deux plans SAB, SAC, dans l'angle solide.

Lorsque le point O tombe entre A et B' dans la figure plane, l'angle EA$b$ devient obtus, et mesure toujours la vraie inclinaison des plans : c'est pour cela que l'on a désigné par EA$b$, et non par OA$b$, l'inclinaison demandée, afin que la même solution convienne à tous les cas sans exception.

*Scholie.* On peut demander si, en prenant trois angles plans à volonté, on pourra former avec ces trois angles plans un angle solide.

D'abord il faut que la somme des trois angles donnés soit plus petite que quatre angles droits, sans quoi l'angle solide ne peut être formé*; il faut de plus qu'après avoir pris deux des angles à volonté B'SA, ASC, le troisieme CSB'' soit tel, que la perpendiculaire B''C au côté SC rencontre le diametre B'E entre * 22.

ses extrémités B′ et E. Ainsi les limites de la grandeur de l'angle CSB″ sont celles qui font aboutir la perpendiculaire B″C aux points B′ et E. De ces points abaissez sur CS les perpendiculaires B′I, EK, qui rencontrent en I et K la circonférence décrite du rayon SB″, et les limites de l'angle CSB″ seront CSI et CSK.

Mais dans le triangle isoscele B′SI, la ligne CS prolongée étant perpendiculaire à la base B′I, on a l'angle CSI = CSB′ = ASC + ASB′. Et dans le triangle isoscele ESK, la ligne SC étant perpendiculaire à EK, on a l'angle CSK = CSE. D'ailleurs, à cause des triangles égaux ASE, ASB′, l'angle ASE = ASB′; donc CSE ou CSK = ASC — ASB′.

Il résulte de là que le problême sera possible toutes les fois que le troisieme angle CSB″ sera plus petit que la somme des deux autres ASC, ASB′, et plus grand que leur différence : condition qui s'accorde avec le théorême XXI; car, en vertu de ce théorême, il faut qu'on ait CSB″ < ASC + ASB′; il faut aussi qu'on ait ASC < CSB″ + ASB′, ou CSB″ > ASC — ASB′.

## PROPOSITION XXV.

### PROBLÊME.

*Étant donnés deux des trois angles plans qui forment un angle solide, avec l'angle que leurs plans font entre eux, trouver le troisieme angle plan.*

fig. 198. Soient ASC, ASB′, les deux angles plans donnés, et supposons pour un moment que CSB″ soit le troisieme angle que l'on cherche, alors, en faisant la même construction que dans le problême précédent, l'angle compris entre les plans des deux premiers serait EA*b*. Or, de même qu'on détermine l'angle

EA$b$ par le moyen de CSB$''$, les deux autres étant donnés; de même on peut déterminer CSB$''$ par le moyen de EA$b$, ce qui résoudra le problême proposé.

Ayant pris SB$'$ à volonté, abaissez sur SA la perpendiculaire indéfinie B$'$E, faites l'angle EA$b$ égal à l'angle des deux plans donnés; du point $b$ où le côté A$b$ rencontre la circonférence décrite du centre A et du rayon AB$'$, abaissez sur AE la perpendiculaire $b$O, et du point O abaissez sur SC la perpendiculaire indéfinie OCB$''$, que vous terminerez en B$''$ de maniere que SB$''$=SB$'$; l'angle CSB$''$ sera le troisieme angle plan demandé.

Car si on forme un angle solide avec les trois angles plans B$'$SA, ASC, CSB$''$, l'inclinaison des plans où sont les angles donnés ASB$'$, ASC, sera égale à l'angle donné EA$b$.

*Scholie*. Si un angle solide est *quadruple*, ou formé par quatre angles plans ASB, BSC, CSD, DSA, la connaissance de ces angles ne suffit pas pour déterminer les inclinaisons mutuelles de leurs plans; car avec les mêmes angles plans on pourrait former une infinité d'angles solides. Mais si on ajoute une condition, par exemple, si on donne l'inclinaison des deux plans ASB, BSC, alors l'angle solide est entièrement déterminé, et on pourra trouver l'inclinaison de deux de ses plans quelconques. En effet, imaginez un angle solide *triple* formé par les angles plans ASB, BSC, ASC; les deux premiers angles sont donnés, ainsi que l'inclinaison de leurs plans; on pourra donc déterminer, par le problême qu'on vient de résoudre, le troisieme angle ASC. Ensuite, si on considere s'angle solide triple formé par les angles plans ASC, ASD, DSC, ces trois angles sont connus; ainsi l'angle lolide est entièrement déterminé. Mais l'angle solide quadruple est formé par la réunion des deux angles fig. 199.

solides triples dont on vient de parler ; donc, puisque ces angles partiels sont connus et déterminés, l'angle total sera pareillement connu et déterminé.

L'angle des deux plans ASD, DSC, se trouverait immédiatement par le moyen du second angle solide partiel. Quant à l'angle des deux plans BSC, CSD, il faudrait dans un angle solide partiel chercher l'angle compris entre les deux plans ASC, DSC, et dans l'autre l'angle compris entre les deux plans ASC, BSC ; la somme de ces deux angles serait l'angle compris entre les plans BSC, DSC.

On trouvera de la même maniere que, pour déterminer un angle solide quintuple, il faut connaître, outre les cinq angles plans qui le composent, deux des inclinaisons mutuelles de leurs plans ; il en faudrait trois dans l'angle solide sextuple, et ainsi de suite.