LIVRE II.

LE CERCLE ET LA MESURE DES ANGLES.

DÉFINITIONS.

I. La *circonference du cercle* est une ligne courbe, dont tous les points sont également distants d'un point intérieur qu'on appelle *centre*. fig. 46.

Le *cercle* est l'espace terminé par cette ligne courbe.

N. B. Quelquefois dans le discours on confond le cercle avec sa circonférence; mais il sera toujours facile de rétablir l'exactitude des expressions, en se souvenant que le cercle est une surface qui a longueur et largeur, tandis que la circonférence n'est qu'une ligne.

II. Toute ligne droite CA, CE, CD, etc., menée du centre à la circonférence, s'appelle *rayon* ou *demi-diametre;* toute ligne, comme AB, qui passe par le centre, et qui est terminée de part et d'autre à la circonférence, s'appelle *diametre*.

En vertu de la définition du cercle, tous les rayons sont égaux; tous les diametres sont égaux aussi, et doubles du rayon.

III. On appelle *arc* une portion de circonférence telle que FHG.

La *corde* ou *sous-tendante* de l'arc est la ligne droite FG qui joint ses deux extrémités.

IV. *Segment* est la surface ou portion de cercle comprise entre l'arc et la corde.

N. B. A la même corde FG répondent toujours deux arcs FHG, FEG, et par conséquent aussi deux segments; mais c'est toujours le plus petit dont on entend parler, à moins qu'on n'exprime le contraire.

V. *Secteur* est la partie du cercle comprise entre un arc DE et les deux rayons CD, CE, menés aux extrémités de cet arc.

fig. 47. VI. On appelle *ligne inscrite dans le cercle*, celle dont les extrémités sont à la circonférence, comme AB;

Angle inscrit, un angle tel que BAC, dont le sommet est à la circonférence, et qui est formé par deux cordes;

Triangle inscrit, un triangle tel que BAC, dont les trois angles ont leurs sommets à la circonférence;

Et en général *figure inscrite*, celle dont tous les angles ont leurs sommets à la circonférence: en même temps on dit que le cercle est *circonscrit* à cette figure.

fig. 48. VII. On appelle *sécante* une ligne qui rencontre la circonférence en deux points : telle est AB.

VIII. *Tangente* est une ligne qui n'a qu'un point de commun avec la circonférence : telle est CD.

Le point commun M s'appelle *point de contact*.

IX. Pareillement deux circonférences sont *tangentes* l'une à l'autre, lorsqu'elles n'ont qu'un point de commun.

fig. 160. X. Un polygone est *circonscrit à un cercle*, lorsque tous ses côtés sont des tangentes à la circonférence; dans le même cas on dit que le cercle est *inscrit* dans le polygone.

PROPOSITION PREMIERE.

THÉORÊME.

fig. 49. *Tout diametre* AB *divise le cercle et sa circonférence en deux parties égales.*

Car si on applique la figure AEB sur AFB, en conservant la base commune AB, il faudra que la ligne courbe AEB tombe exactement sur la ligne courbe AFB, sans quoi il y aurait dans l'une ou dans l'autre des points inégalement éloignés du centre, ce qui est contre la définition du cercle.

PROPOSITION II.

THÉORÊME.

Toute corde est plus petite que le diametre.

Car si aux extrémités de la corde AD on mene les rayons AC, CD, on aura la ligne droite AD < AC + CD, ou AD < AB. fig. 49.

Corollaire. Donc la plus grande ligne droite qu'on puisse inscrire dans un cercle est égale à son diametre.

PROPOSITION III.

THÉORÊME.

Une ligne droite ne peut rencontrer une circonférence en plus de deux points.

Car si elle la rencontrait en trois, ces trois points seraient également distants du centre; il y aurait donc trois droites égales menées d'un même point sur une même ligne droite, ce qui est impossible *. *pr. 16, liv. 1.

PROPOSITION IV.

THÉORÊME.

Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, les arcs égaux sont sous-tendus par des cordes égales, et réciproquement les cordes égales sous-tendent des arcs égaux.

Le rayon AC étant égal au rayon EO, et l'arc AMD égal à l'arc ENG, je dis que la corde AD sera égale à la corde EG. fig. 50.

Car le diametre AB étant égal au diametre EF, le demi-cercle AMDB pourra s'appliquer exactement sur le demi-cercle ENGF, et la ligne courbe AMDB coïncidera entièrement avec la ligne courbe ENGF. Mais on suppose la portion AMD égale à la portion ENG; donc le point D tombera sur le point G; donc la corde AD est égale à la corde EG.

Réciproquement, en supposant toujours le rayon AC=EO, si la corde AD=EG, je dis que l'arc AMD sera égal à l'arc ENG.

Car en tirant les rayons CD, OG, les deux triangles ACD, EOG, auront les trois côtés égaux chacun à chacun, savoir, AC=EO, CD=OG, et AD=
11, 1. EG; donc ces triangles sont égaux; donc l'angle ACD=EOG. Mais en posant le demi-cercle ADB sur son égal EGF, puisque l'angle ACD=EOG, il est clair que le rayon CD tombera sur le rayon OG, et le point D sur le point G; donc l'arc AMD est égal à l'arc ENG.

PROPOSITION V.

THÉORÊME.

Dans le même cercle ou dans des cercles égaux, un plus grand arc est sous-tendu par une plus grande corde, et réciproquement, si toutefois les arcs dont il s'agit sont moindres qu'une demi-circonférence.

fig. 50. Car soit l'arc AH plus grand que AD, et soient menées les cordes AD, AH, et les rayons CD, CH: les deux côtés AC, CH, du triangle ACH sont égaux aux deux côtés AC, CD, du triangle ACD: l'angle
*10, 1. ACH est plus grand que ACD; donc * le troisieme côté AH est plus grand que le troisieme AD; donc la corde qui sous-tend le plus grand arc est la plus grande.

Réciproquement, si la corde AH est supposée plus grande que AD, on conclura des mêmes triangles que l'angle ACH est plus grand que ACD, et qu'ainsi l'arc AH est plus grand que AD.

Scholie. Nous supposons que les arcs dont il s'agit sont plus petits que la demi-circonférence. S'ils étaient plus grands, la propriété contraire aurait lieu; l'arc augmentant, la corde diminuerait, et réciproquement : ainsi l'arc AKBD étant plus grand que AKBH, la corde AD du premier est plus petite que la corde AH du second.

PROPOSITION VI.

THÉORÈME.

Le rayon CG, *perpendiculaire à une corde* AB, *divise cette corde et l'arc sous-tendu* AGB, *chacun en deux parties égales.* fig. 51.

Menez les rayons CA, CB; ces rayons sont, par rapport à la perpendiculaire CD, deux obliques égales; donc ils s'écartent également de la perpendiculaire*; donc AD=DB. * 16, 1.

En second lieu, puisque AD=DB, CG est une perpendiculaire élevée sur le milieu de AB; donc * tout point de cette perpendiculaire doit être également distant des deux extrémités A et B. Le point G est un de ces points; donc la distance AG=BG. Mais si la corde AG est égale à la corde GB, l'arc AG sera égal à l'arc GB*; donc le rayon CG, perpendiculaire à la corde AB, divise l'arc sous-tendu par cette corde en deux parties égales au point G. * 17, 1. * pr 4.

Scholie. Le centre C, le milieu D de la corde AB, et le milieu G de l'arc sous-tendu par cette corde, sont trois points situés sur une même ligne perpendiculaire à la corde. Or il suffit de deux points pour déterminer la position d'une ligne droite; donc toute ligne droite qui passe par deux des points mentionnés, passera nécessairement par le troisieme, et sera perpendiculaire à la corde.

Il s'ensuit aussi que *la perpendiculaire élevée sur le milieu d'une corde passe par le centre et par le milieu de l'arc sous-tendu par cette corde.*

Car cette perpendiculaire n'est autre que celle qui serait abaissée du centre sur la même corde, puisqu'elles passent toutes deux par le milieu de la corde.

PROPOSITION VII.

THÉORÊME.

fig. 52. *Par trois points donnés,* A, B, C, *non en ligne droite, on peut toujours faire passer une circonférence, mais on n'en peut faire passer qu'une.*

Joignez AB, BC, et divisez ces deux droites en deux parties égales par les perpendiculaires DE, FG; je dis d'abord que ces perpendiculaires se rencontreront en un point O.

Car les lignes DE, FG, se couperont nécessairement si elles ne sont pas paralleles. Or supposons qu'elles fussent paralleles; la ligne AB, perpendiculaire à DE, serait perpendiculaire à FG*, et l'angle K serait droit; mais BK, prolongement de BD, est différente de BF, puisque les trois points A, B, C, ne sont pas en ligne droite; donc il y aurait deux perpendiculaires BF, BK, abaissées d'un même point sur la même ligne, ce qui est impossible*; donc les perpendiculaires DE, FG, se couperont toujours en un point O.

Maintenant le point O, comme appartenant à la perpendiculaire DE, est à égale distance des deux points A et B*; le même point O, comme appartenant

* 24, 1.

* 15, 1.

* 17, 1.

à la perpendiculaire FG, est à égale distance des deux points B, C; donc les trois distances OA, OB, OC, sont égales; donc la circonférence décrite du centre O et du rayon OB passera par les trois points donnés A, B, C.

Il est prouvé par-là qu'on peut toujours faire passer une circonférence par trois points donnés, non en ligne droite; je dis de plus qu'on n'en peut faire passer qu'une.

Car s'il y avait une seconde circonférence qui passât par les trois points donnés A, B, C, son centre ne pourrait être hors de la ligne DE*, puisqu'alors il serait inégalement éloigné de A et de B; il ne pourrait être non plus hors de la ligne FG par une raison semblable; donc il serait à-la-fois sur les deux lignes DE, FG. Or deux lignes droites ne peuvent se couper en plus d'un point; donc il n'y a qu'une circonférence qui puisse passer par trois points donnés. * 17, 1.

Corollaire. Deux circonférences ne peuvent se rencontrer en plus de deux points; car si elles avaient trois points communs, elles auraient le même centre, et ne feraient qu'une seule et même circonférence.

PROPOSITION VIII.

THÉORÊME.

Deux cordes égales sont également éloignées du centre; et de deux cordes inégales, la plus petite est la plus éloignée du centre.

1° Soit la corde AB=DE : divisez ces cordes en deux également par les perpendiculaires CF, CG, et tirez les rayons CA, CD. fig. 53.

Les triangles rectangles CAF, DCG, ont les hypoténuses CA, CD, égales; de plus le côté AF moitié de AB, est égal au côté DG, moitié de DE; donc ces triangles sont égaux*, et le troisieme côté CF est égal au troisieme CG; donc, 1° les deux cordes égales AB, DE, sont également éloignées du centre.

2° Soit la corde AH plus grande que DE, l'arc
pr. 5. AKH sera plus grand que l'arc DME: sur l'arc AKH prenez la partie ANB=DME, tirez la corde AB, et abaissez CF, perpendiculaire sur cette corde, et CI, perpendiculaire sur AH; il est clair que CF
16, 1. est plus grand que CO, et CO plus grand que CI; donc à plus forte raison CF > CI. Mais CF=CG, puisque les cordes AB, DE, sont égales; donc on a CG > CI; donc de deux cordes inégales la plus petite est la plus éloignée du centre.

PROPOSITION IX.

THÉORÊME.

fig. 54. *La perpendiculaire* BD, *menée à l'extrémité du rayon* CA, *est une tangente à la circonférence.*

Car toute oblique CE est plus longue que la per-
16, 1. pendiculaire CA; donc le point E est hors du cercle; donc la ligne BD n'a que le point A commun avec la
déf. 8. circonférence; donc BD est une tangente.

Scholie. On ne peut mener par un point donné A qu'une seule tangente AD à la circonférence; car si on en pouvait mener une autre, celle-ci ne serait plus perpendiculaire au rayon CA; donc, par rapport à cette nouvelle tangente, le rayon CA serait une oblique, et la perpendiculaire, abaissée du centre sur cette tangente, serait plus courte que CA; donc cette prétendue tangente entrerait dans le cercle, et serait une sécante.

PROPOSITION X.

THÉORÊME.

Deux paralleles AB, DE, *interceptent sur la circonférence des arcs égaux* MN, PQ. fig. 55.

Il peut arriver trois cas.

1° Si les deux paralleles sont sécantes, menez le rayon CH perpendiculaire à la corde MP, il sera en même temps perpendiculaire à sa parallele NQ*; donc le point H sera à-la-fois le milieu de l'arc MHP et celui de l'arc NHQ*; on aura donc l'arc MH=HP, et l'arc NH=HQ: de-là résulte MH—NH=HP—HQ, c'est-à-dire MN=PQ. * 24, 1. * 6.

2° Si des deux paralleles AB, DE, l'une est sécante, l'autre tangente; au point de contact H menez le rayon CH; ce rayon sera perpendiculaire à la tangente DE*, et aussi à sa parallele MP. Mais puisque CH est perpendiculaire à la corde MP, le point H est le milieu de l'arc MHP; donc les arcs MH, HP, compris entre les paralleles AB, DE, sont égaux. fig. 56. * 9.

3° Enfin si les deux paralleles DE, IL, sont tangentes, l'une en H, l'autre en K, menez la sécante parallele AB, vous aurez, par ce qui vient d'être démontré, MH=HP et MK=KP; donc l'arc entier HMK=HPK, et de plus on voit que chacun de ces arcs est une demi-circonférence.

PROPOSITION XI.

THÉORÊME.

Si deux circonférences se coupent en deux points, la ligne qui passe par leurs centres sera perpendiculaire à la corde qui joint les points d'intersection, et la divisera en deux parties égales.

fig. 57 et 58. Car la ligne AB, qui joint les points d'intersection, est une corde commune aux deux cercles. Or, si sur le milieu de cette corde on élève une perpendiculaire, * 6. elle doit passer par chacun des deux centres C et D*. Mais par deux points donnés on ne peut mener qu'une seule ligne droite; donc la ligne droite, qui passe par les centres, sera perpendiculaire sur le milieu de la corde commune.

PROPOSITION XII.

THÉORÊME.

Si la distance des deux centres est plus courte que la somme des rayons, et si en même temps le plus grand rayon est moindre que la somme du plus petit et de la distance des centres, les deux cercles se couperont.

fig. 57 et 58. Car pour qu'il y ait lieu à intersection, il faut que le triangle CAD soit possible : il faut donc non seu- fig. 57. lement que CD soit $<$ AC + AD, mais aussi que le fig. 58. plus grand rayon AD soit $<$ AC + CD. Or, toutes les fois que le triangle CAD pourra être construit, il est clair que les circonférences décrites des centres C et D, se couperont en A et B.

PROPOSITION XIII.

THÉORÊME.

Si la distance CD *des centres de deux cercles est égale à la somme de leurs rayons* CA, AD, *ces deux cercles se toucheront extérieurement.*

Il est clair qu'ils auront le point A commun; mais ils n'auront que ce point; car, pour qu'ils eussent deux points communs, il faudrait que la distance des centres fût plus petite que la somme des rayons. *

PROPOSITION XIV.

THÉORÊME.

Si la distance CD *des centres de deux cercles est égale à la différence de leurs rayons* CA, AD, *ces deux cercles se toucheront intérieurement.*

D'abord il est clair qu'ils ont le point A commun: ils n'en peuvent avoir d'autre; car pour cela il faudrait que le plus grand rayon AD fût plus petit que la somme faite du rayon AC et de la distance des centres CD*, ce qui n'a pas lieu. * 12.

Corollaire. Donc, si deux cercles se touchent, soit intérieurement, soit extérieurement, les centres et le point de contact sont sur la même ligne droite.

fig. 59 et 60. *Scholie.* Tous les cercles qui ont leurs centres sur la droite CD, et qui passent par le point A, sont tangents les uns aux autres; ils n'ont entre eux que le seul point A de commun. Et si par le point A on mene AE perpendiculaire à CD, la droite AE sera une tangente commune à tous ces cercles.

PROPOSITION XV.

THÉORÊME.

Dans le même cercle ou dans des cercles égaux, les angles égaux ACB, DCE, *dont le sommet est au centre, interceptent sur la circonférence des arcs égaux* AB, DE. fig. 61.

Réciproquement, si les arcs AB, DE, *sont égaux, les angles* ACB, DCE, *seront aussi égaux.*

Car, 1° si l'angle ACB est égal à l'angle DCE, ces deux angles pourront se placer l'un sur l'autre; et comme leurs côtés sont égaux, il est clair que le point A tombera en D, et le point B en E. Mais alors l'arc AB doit aussi tomber sur l'arc DE; car si les deux arcs n'étaient pas confondus en un seul, il y aurait dans l'un ou dans l'autre des points inégalement éloignés du centre, ce qui est impossible; donc l'arc AB=DE.

2° Si on suppose AB=DE, je dis que l'angle ACB sera égal à DCE; car si ces angles ne sont pas égaux, soit ACB le plus grand, et soit pris ACI=DCE; on aura, par ce qui vient d'être démontré, AI=DE : mais, par hypothese, l'arc AB=DE; donc on aurait AI=AB, ou la partie égale au tout, ce qui est impossible; donc l'angle ACB=DCE.

PROPOSITION XVI.

THÉORÊME.

fig. 62. *Dans le même cercle ou dans des cercles égaux, si deux angles au centre* ACB, DCE, *sont entre eux comme deux nombres entiers, les arcs interceptés* AB, DE, *seront entre eux comme les mêmes nombres, et on aura cette proportion:* Angle ACB : angle DCE : : arc AB : arc DE.

Supposons, par exemple, que les angles ACB, DCE, soient entre eux comme 7 est à 4; ou, ce qui revient au même, supposons que l'angle M, qui servira de commune mesure, soit contenu sept fois dans l'angle ACB, et quatre dans l'angle DCE. Les angles partiels ACm, mCn, nCp, etc. DCx, xCy, etc., étant égaux entre eux, les arcs partiels Am, mn,
* 15. np, etc., Dx, xy, etc., seront aussi égaux entre eux*; donc l'arc entier AB sera à l'arc entier DE comme 7 est à 4. Or il est évident que le même raisonnement aurait toujours lieu, quand à la place de 7 et 4 on aurait d'autres nombres quelconques; donc, si le rapport des angles ACB, DCE, peut être exprimé

en nombres entiers, les arcs AB, DE, seront entre eux comme les angles ACB, DCE.

Scholie. Réciproquement, si les arcs AB, DE, étaient entre eux comme deux nombres entiers, les angles ACB, DCE, seraient entre eux comme les mêmes nombres, et on aurait toujours ACB : DCE :: AB : DE; car les arcs partiels A*m*, *mn*, etc., D*x*, *xy*, etc., étant égaux, les angles partiels AC*m*, *m*C*n*, etc., DC*x*, *x*C*y*, etc., sont aussi égaux.

PROPOSITION XVII.

THÉORÊME.

Quel que soit le rapport des deux angles ACB, ACD, *ces deux angles seront toujours entre eux comme les arcs* AB, AD, *interceptés entre leurs côtés et décrits de leurs sommets comme centres avec des rayons égaux.* fig. 36.

Supposons le plus petit angle placé dans le plus grand: si la proposition énoncée n'a pas lieu, l'angle ACB sera à l'angle ACD comme l'arc AB est à un arc plus grand ou plus petit que AD. Supposons cet arc plus grand, et représentons-le par AO, nous aurons ainsi :

Angle ACB : angle ACD :: arc AB : arc AO.

Imaginons maintenant que l'arc AB soit divisé en parties égales dont chacune soit plus petite que DO, il y aura au moins un point de division entre D et O : soit I ce point, et joignons CI; les arcs AB, AI, seront entre eux comme deux nombres entiers, et on aura en vertu du théorême précédent :

Angle ACB : angle ACI :: arc AB : arc AI.

Rapprochant ces deux proportions l'une de l'autre, et observant que les antécédents sont les mêmes, on en conclura que les conséquents sont proportionnels, et qu'ainsi

Angle ACD : angle ACI :: arc AO : arc AI.

Mais l'arc AO est plus grand que l'arc AI : il faudrait donc, pour que la proportion subsistât, que l'angle ACD fût plus grand que l'angle ACI ; or au contraire il est plus petit ; donc il est impossible que l'angle ACB soit à l'angle ACD comme l'arc AB est à un arc plus grand que AD.

On démontrerait par un raisonnement entièrement semblable que le quatrieme terme de la proportion ne peut être plus petit que AD ; donc il est exactement AD ; donc on a la proportion :

Angle ACB : angle ACD :: arc AB : arc AD.

Corollaire. Puisque l'angle au centre du cercle et l'arc intercepté entre ses côtés ont une telle liaison que quand l'un augmente ou diminue dans un rapport quelconque, l'autre augmente ou diminue dans le même rapport, on est en droit d'établir l'une de ces grandeurs pour la mesure de l'autre : ainsi nous prendrons désormais l'arc AB pour la mesure de l'angle ACB. Il faut seulement observer, dans la comparaison des angles entre eux, que les arcs qui leur servent de mesure doivent être décrits avec des rayons égaux ; car c'est ce que supposent toutes les propositions précédentes.

Scholie I. Il paraît plus naturel de mesurer une quantité par une quantité de la même espèce, et sur ce principe il conviendrait de rapporter tous les angles à l'angle droit : ainsi l'angle droit étant l'unité de mesure, un angle aigu serait exprimé par un nombre compris entre 0 et 1, et un angle obtus par un nombre entre 1 et 2. Mais cette maniere d'exprimer les angles ne serait pas la plus commode dans l'usage ; on a trouvé beaucoup plus simple de les mesurer par des arcs de cercle, à cause de la facilité de faire des arcs égaux à des arcs donnés, et pour beaucoup d'autres raisons. Au reste, si la mesure des angles par les arcs de cercle est en quelque sorte indirecte, il n'en est pas moins facile d'obtenir par leur moyen la mesure directe et absolue; car si vous comparez l'arc qui sert de mesure à un angle avec le quart de la circonférence, vous aurez le rapport de l'angle donné à l'angle droit, ce qui est la mesure absolue.

Scholie II. Tout ce qui a été démontré dans les trois propositions précédentes pour la comparaison des angles avec les arcs, a lieu également pour la comparaison des secteurs avec les arcs : car les secteurs sont égaux lorsque les angles le sont, et en général ils sont proportionnels aux angles; donc *deux secteurs* ACB, ACD, *pris dans le même cercle ou dans des cercles égaux, sont entre eux comme les arcs* AB, AD, *bases de ces mêmes secteurs.*

On voit par-là que les arcs de cercle qui servent de mesure aux angles peuvent aussi servir de mesure aux différents secteurs d'un même cercle ou de cercles égaux.

PROPOSITION XVIII.

THÉORÊME.

L'angle inscrit BAD *a pour mesure la moitié de l'arc* BD *compris entre ses côtés.* fig. 64 et 65.

Supposons d'abord que le centre du cercle soit situé dans l'angle BAD, on menera le diametre AE et les rayons CB, CD. L'angle BCE, extérieur au triangle ABC, est égal à la somme des deux intérieurs CAB, ABC * : mais le triangle BAC étant isoscele, l'angle CAB=ABC; donc l'angle BCE est double de BAC. L'angle BCE, comme angle au centre, a pour mesure l'arc BE; donc l'angle BAC aura pour mesure la moitié de BE. Par une raison semblable, fig. 64. * 19, 1.

l'angle CAD aura pour mesure la moitié de ED; donc BAC+CAD ou BAD aura pour mesure la moitié de BE+ED ou la moitié de BD.

fig. 65. Supposons en second lieu que le centre C soit situé hors de l'angle BAD, alors menant le diametre AE, l'angle BAE aura pour mesure la moitié de BE, l'angle DAE la moitié de DE; donc leur différence BAD aura pour mesure la moitié de BE moins la moitié de ED, ou la moitié de BD.

Donc tout angle inscrit a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.

fig. 66. *Corollaire* I. Tous les angles BAC, BDC, etc., inscrits dans le même segment sont égaux; car ils ont pour mesure la moitié du même arc BOC.

fig. 67. II. Tout angle BAD inscrit dans le demi-cercle est un angle droit; car il a pour mesure la moitié de la demi-circonférence BOD, ou le quart de la circonférence.

Pour démontrer la même chose d'une autre maniere, tirez le rayon AC; le triangle BAC est isoscele, ainsi l'angle BAC=ABC; le triangle CAD est pareillement isoscele; donc l'angle CAD=ADC; donc BAC+CAD ou BAD=ABD+ADB. Mais si les deux angles B et D du triangle ABD valent ensemble le troisieme BAD, les trois angles du triangle vaudront deux fois l'angle BAD; ils valent d'ailleurs deux angles droits; donc l'angle BAD est un angle droit.

fig. 66. III. Tout angle BAC inscrit dans un segment plus grand que le demi-cercle, est un angle aigu; car il a pour mesure la moitié de l'arc BOC moindre qu'une demi-circonférence.

Et tout angle BOC, inscrit dans un segment plus petit que le demi-cercle, est un angle obtus; car il a pour mesure la moitié de l'arc BAC plus grande qu'une demi-circonférence.

IV. Les angles opposés A et C d'un quadrilatere inscrit ABCD, valent ensemble deux angles droits; car l'angle BAD a pour mesure la moitié de l'arc BCD, l'angle BCD a pour mesure la moitié de l'arc BAD; donc les deux angles BAD, BCD, pris ensemble, ont pour mesure la moitié de la circonférence; donc leur somme équivaut à deux angles droits. fig. 68.

PROPOSITION XIX.

THÉORÊME.

L'angle BAC, *formé par une tangente et une corde, a pour mesure la moitié de l'arc* AMDC *compris entre ses côtés.* fig. 69.

Au point de contact A menez le diametre AD; l'angle BAD est droit *, il a pour mesure la moitié de la demi-circonférence AMD, l'angle DAC a pour mesure la moitié de DC; donc BAD + DAC ou BAC a pour mesure la moitié de AMD, plus la moitié de DC, ou la moitié de l'arc entier AMDC. *9.

On démontrerait de même que l'angle CAE a pour mesure la moitié de l'arc AC compris entre ses côtés.

Problêmes relatifs aux deux premiers livres.

PROBLÊME PREMIER.

Diviser la droite donnée AB *en deux parties égales.* fig. 70.

Des points A et B, comme centres, avec un rayon plus grand que la moitié de AB, décrivez deux arcs qui se coupent en D; le point D sera également éloigné des points A et B : marquez de même au-dessus ou au-dessous de la ligne AB un second point E également éloigné des points A et B, par les deux points D, E, tirez la ligne DE; je dis que DE coupera la ligne AB en deux parties égales au point C.

Car les deux points D et E étant chacun également éloignés des extrémités A et B, ils doivent se trouver tous deux dans la perpendiculaire élevée sur le milieu de AB. Mais par deux points donnés il ne peut passer qu'une seule ligne droite; donc la ligne DE sera cette perpendiculaire elle-même qui coupe la ligne AB en deux parties égales au point C.

PROBLÈME II.

fig. 71. *Par un point* A, *donné sur la ligne* BC, *élever une perpendiculaire à cette ligne.*

Prenez les points B et C à égale distance de A, ensuite des points B et C, comme centres, et d'un rayon plus grand que BA, décrivez deux arcs qui se coupent en D; tirez AD qui sera la perpendiculaire demandée.

Car le point D, étant également éloigné de B et de C, appartient à la perpendiculaire élevée sur le milieu de BC; donc AD est cette perpendiculaire.

Scholie. La même construction sert à faire un angle droit BAD en un point donné A sur une ligne donnée BC.

PROBLÈME III.

fig. 72. *D'un point* A, *donné hors de la droite* BD, *abaisser une perpendiculaire sur cette droite.*

Du point A, comme centre, et d'un rayon suffisamment grand, décrivez un arc qui coupe la ligne BD aux deux points B et D; marquez ensuite un point E également distant des points B et D, et tirez AE qui sera la perpendiculaire demandée.

Car les deux points A et E sont chacun également distants des points B et D ; donc la ligne AE est perpendiculaire sur le milieu de BD.

PROBLÈME IV.

Au point A *de la ligne* AB, *faire un angle égal à l'angle donné* K. fig. 73.

Du sommet K, comme centre, et d'un rayon à volonté, décrivez l'arc IL terminé aux deux côtés de l'angle ; du point A, comme centre, et d'un rayon AB égal à KI, décrivez l'arc indéfini BO ; prenez ensuite un rayon égal à la corde LI ; du point B, comme centre, et de ce rayon, décrivez un arc qui coupe en D l'arc indéfini BO ; tirez AD, et l'angle DAB sera égal à l'angle donné K.

Car les deux arcs BD, LI, ont des rayons égaux et des cordes égales ; donc ils sont égaux * ; donc l'angle BAD = IKL. *4, 2.

PROBLÈME V.

Diviser un angle ou un arc donné en deux parties égales. fig. 74.

1° S'il faut diviser l'arc AB en deux parties égales, des points A et B, comme centres, et avec un même rayon, décrivez deux arcs qui se coupent en D ; par le point D et par le centre C tirez CD qui coupera l'arc AB en deux parties égales au point E.

Car les deux points C et D sont chacun également distants des extrémités A et B de la corde AB ; donc la ligne CD est perpendiculaire sur le milieu de cette corde ; donc elle divise l'arc AB en deux parties égales au point E *. * 6, 2.

2° S'il faut diviser en deux parties égales l'angle ACB, on commencera par décrire du sommet C, comme centre, l'arc AB, et le reste comme il vient d'être dit. Il est clair que la ligne CD divisera en deux parties égales l'angle ACB.

Scholie. On peut, par la même construction, diviser chacune des moitiés AE, EB, en deux parties égales; ainsi, par des sous-divisions successives, on divisera un angle ou un arc donné en quatre parties égales, en huit, en seize, etc.

PROBLÊME VI.

fig. 75. *Par un point donné* A, *mener une parallele à la ligne donnée* BC.

Du point A, comme centre, et d'un rayon suffisamment grand, décrivez l'arc indéfini EO; du point E, comme centre, et du même rayon, décrivez l'arc AF, prenez ED = AF, et tirez AD qui sera la parallele demandée.

Car en joignant AE, on voit que les angles alternes AEF, EAD, sont égaux; donc les lignes AD, EF, sont
*24, 1. paralleles *.

PROBLÊME VII.

fig. 76. *Deux angles* A *et* B *d'un triangle étant donnés, trouver le troisieme.*

Tirez la ligne indéfinie DEF, faites au point E l'angle DEC = A, et l'angle CEH = B : l'angle restant HEF sera le troisieme angle requis; car ces trois angles pris ensemble valent deux angles droits.

PROBLÊME VIII.

fig. 77. *Étant donnés deux côtés* B *et* C *d'un triangle et l'angle* A *qu'ils comprennent, décrire le triangle.*

Ayant tiré la ligne indéfinie DE, faites au point D l'angle EDF égal à l'angle donné A; prenez ensuite DG = B, DH = C, et tirez GH; DGH sera le triangle demandé.

PROBLÈME IX.

Étant donnés un côté et deux angles d'un triangle, décrire le triangle.

Les deux angles donnés seront ou tous deux adjacents au côté donné, ou l'un adjacent, l'autre opposé : dans ce dernier cas, cherchez le troisieme *, vous aurez ainsi les deux angles adjacents. Cela posé, tirez la droite DE égale au côté donné, faites au point D l'angle EDF égal à l'un des angles adjacents, et au point E l'angle DEG égal à l'autre ; les deux lignes DF, EG, se couperont en H, et DEH sera le triangle requis. *prob. 7. fig. 78.

PROBLÈME X.

Les trois côtés A, B, C, *d'un triangle étant donnés, décrire le triangle.* fig. 79.

Tirez DE égal au côté A ; du point E, comme centre, et d'un rayon égal au second côté B, décrivez un arc ; du point D, comme centre, et d'un rayon égal au troisieme côté C, décrivez un autre arc qui coupera le premier en F ; tirez DF, EF, et DEF sera le triangle requis.

Scholie. Si l'un des côtés était plus grand que la somme des deux autres, les arcs ne se couperaient pas ; mais la solution sera toujours possible, si la somme de deux côtés, pris comme on voudra, est plus grande que le troisieme.

PROBLÈME XI.

Étant donnés deux côtés A *et* B *d'un triangle, avec l'angle* C *opposé au côté* B, *décrire le triangle.*

Il y a deux cas : 1° si l'angle C est droit ou obtus, faites l'angle EDF égal à l'angle C ; prenez DE = A, du point E, comme centre, et d'un rayon égal au côté donné B, décrivez un arc qui coupe en F la fig. 80.

ligne DF; tirez EF, et DEF sera le triangle demandé.

Il faut, dans ce premier cas, que le côté B soit plus grand que A, car l'angle C étant droit ou obtus, est le plus grand des angles du triangle; donc le côté opposé doit être aussi le plus grand.

fig. 81. 2° Si l'angle C est aigu, et que B soit plus grand que A, la même construction a toujours lieu, et DEF est le triangle requis.

fig. 82. Mais si, l'angle C étant aigu, le côté B est moindre que A, alors l'arc décrit du centre E avec le rayon EF=B, coupera le côté DF en deux points F et G, situés du même côté de D; donc il y aura deux triangles DEF, DEG, qui satisferont également au problême.

Scholie. Le problême serait impossible dans tous les cas, si le côté B était plus petit que la perpendiculaire abaissée de E sur la ligne DF.

PROBLÊME XII.

fig. 83. *Les côtés adjacents* A *et* B *d'un parallélogramme étant donnés avec l'angle* C *qu'ils comprennent, décrire le parallélogramme.*

Tirez la ligne DE=A, faites au point D l'angle FDE=C, prenez DF=B; décrivez deux arcs, l'un du point F comme centre, et d'un rayon FG=DE, l'autre du point E comme centre, et d'un rayon EG=DF : au point G, où ces deux arcs se coupent, tirez FG, EG; et DEGF sera le parallélogramme demandé.

Car, par construction, les côtés opposés sont égaux;
* 30, 1. donc la figure décrite est un parallélogramme*, et ce parallélogramme est formé avec les côtés donnés et l'angle donné.

Corollaire. Si l'angle donné est droit, la figure sera un rectangle; si, de plus, les côtés sont égaux, ce sera un quarré.

PROBLÊME XIII.

Trouver le centre d'un cercle ou d'un arc donné.

Prenez à volonté dans la circonférence ou dans l'arc trois points A, B, C; joignez ou imaginez qu'on joigne AB et BC, divisez ces deux lignes en deux parties égales par les perpendiculaires DE, FG; le point O, où ces perpendiculaires se rencontrent, sera le centre cherché. fig. 84.

Scholie. La même construction sert à faire passer une circonférence par les trois points donnés A, B, C, et aussi à décrire une circonférence dans laquelle le triangle donné ABC soit inscrit.

PROBLÊME XIV.

Par un point donné mener une tangente à un cercle donné.

Si le point donné A est sur la circonférence, tirez le rayon CA, et menez AD perpendiculaire à CA; AD sera la tangente demandée*. fig. 85. *9, 2.

Si le point A est hors du cercle, joignez le point A et le centre par la ligne droite CA; divisez CA en deux également au point O; du point O, comme centre, et du rayon OC, décrivez une circonférence qui coupera la circonférence donnée au point B; tirez AB, et AB sera la tangente demandée. fig. 86.

Car en menant CB, l'angle CBA, inscrit dans le demi-cercle, est un angle droit*; donc AB est perpendiculaire à l'extrémité du rayon CB, donc elle est tangente. *18, 2.

Scholie. Le point A étant hors du cercle, on voit qu'il y a toujours deux tangentes égales AB, AD, qui passent par le point A : elles sont égales, car les triangles rectangles CBA, CDA, ont l'hypoténuse CA

commune, et le côté CB = CD; donc ils sont
18, I. égaux; donc AD = AB, et en même temps l'angle CAD = CAB.

PROBLÈME XV.

fig. 87. *Inscrire un cercle dans un triangle donné* ABC.

Divisez les angles A et B en deux également par les lignes AO et BO qui se rencontreront en O; du point O abaissez les perpendiculaires OD, OE, OF, sur les trois côtés du triangle; je dis que ces perpendiculaires seront égales entre elles; car, par construction, l'angle DAO = OAF, l'angle droit ADO = AFO; donc le troisieme angle AOD est égal au troisieme AOF. D'ailleurs le côté AO est commun aux deux triangles AOD, AOF, et les angles adjacents au côté égal sont égaux; donc ces deux triangles sont égaux; donc DO = OF. On prouvera de même que les deux triangles BOD, BOE, sont égaux; donc OD = OE, donc les trois perpendiculaires OD, OE, OF, sont égales entre elles.

Maintenant si du point O, comme centre, et du rayon OD, on décrit une circonférence, il est clair que cette circonférence sera inscrite dans le triangle ABC; car le côté AB, perpendiculaire à l'extrémité du rayon OD, est une tangente : il en est de même des côtés BC, AC.

Scholie. Les trois lignes qui divisent en deux également les trois angles d'un triangle, concourent en un même point.

PROBLÈME XVI.

fig. 88 et 89. *Sur une droite donnée* AB, *décrire un segment* capable *de l'angle donné* C, *c'est-à-dire, un segment tel que tous les angles qui y sont inscrits soient égaux à l'angle donné* C.

Prolongez AB vers D, faites au point B l'angle DBE = C, tirez BO perpendiculaire à BE, et GO perpendiculaire sur le milieu de AB; du point de rencontre O, comme centre, et du rayon OB, décrivez un cercle, le segment demandé sera AMB.

Car puisque BF est perpendiculaire à l'extrémité du rayon OB, BF est une tangente, et l'angle ABF a pour mesure la moitié de l'arc AKB*; d'ailleurs l'angle AMB, comme angle inscrit, a aussi pour mesure la moitié de l'arc AKB, donc l'angle AMB = ABF = EBD = C; donc tous les angles inscrits dans le segment AMB sont égaux à l'angle donné C. * 19, 2.

Scholie. Si l'angle donné était droit, le segment cherché serait le demi-cercle décrit sur le diametre AB.

PROBLÊME XVII.

Trouver le rapport numérique de deux lignes droites données AB, CD, *si toutefois ces deux lignes ont entre elles une mesure commune.* fig. 90.

Portez la plus petite CD sur la plus grande AB autant de fois qu'elle peut y être contenue; par exemple, deux fois, avec le reste BE.

Portez le reste BE sur la ligne CD, autant de fois qu'il peut y être contenu, une fois, par exemple, avec le reste DF.

Portez le second reste DF sur le premier BE, autant de fois qu'il peut y être contenu, une fois, par exemple, avec le reste BG.

Portez le troisieme reste BG sur le second DF, autant de fois qu'il peut y être contenu.

Continuez ainsi jusqu'à ce que vous ayez un reste qui soit contenu un nombre de fois juste dans le précédent.

Alors ce dernier reste sera la commune mesure des lignes proposées, et, en le regardant comme l'unité, on trouvera aisément les valeurs des restes précédents et enfin celles des deux lignes proposées, d'où l'on conclura leur rapport en nombres.

Par exemple, si l'on trouve que GB est contenu deux fois juste dans FD, BG sera la commune mesure des deux lignes proposées. Soit BG = 1, on aura FD = 2; mais EB contient une fois FD plus GB; donc EB = 3; CD contient une fois EB plus FD; donc CD = 5; enfin AB contient deux fois CD plus EB; donc AB = 13; donc le rapport des deux lignes AB, CD, est celui de 13 à 5. Si la ligne CD était prise pour unité, la ligne AB serait $\frac{13}{5}$, et si la ligne AB était prise pour unité, la ligne CD serait $\frac{5}{13}$.

Scholie. La méthode qu'on vient d'expliquer est la même que prescrit l'arithmétique pour trouver le commun diviseur de deux nombres; ainsi elle n'a pas besoin d'une autre démonstration.

Il est possible que, quelque loin qu'on continue l'opération, on ne trouve jamais un reste qui soit contenu un nombre de fois juste dans le précédent. Alors les deux lignes n'ont point de commune mesure, et sont ce qu'on appelle *incommensurables :* on en verra ci-après un exemple dans le rapport de la diagonale au côté du quarré. On ne peut donc alors trouver le rapport exact en nombres : mais en négligeant le dernier reste, on trouvera un rapport plus ou moins approché, selon que l'opération aura été poussée plus ou moins loin.

PROBLÊME XVIII.

fig. 91. *Deux angles* A *et* B *étant donnés, trouver leur commune mesure, s'ils en ont une, et de-là leur rapport en nombres.*

Décrivez avec des rayons égaux les arcs CD, EF, qui servent de mesure à ces angles; procédez ensuite pour la comparaison des arcs CD, EF, comme dans le problême précédent; car un arc peut être porté sur un arc de même rayon, comme une ligne droite sur une ligne droite. Vous parviendrez ainsi à la commune mesure des arcs CD, EF, s'ils en ont une, et a leur rapport en nombres. Ce rapport sera le même que celui des angles donnés *; et si DO est la commune mesure des arcs, DAO sera celle des angles. * 17, 2.

Scholie. On peut ainsi trouver la valeur absolue d'un angle en comparant l'arc qui lui sert de mesure à toute la circonférence : par exemple, si l'arc CD est à la circonférence comme 3 est à 25, l'angle A sera les $\frac{3}{25}$ de quatre angles droits, ou $\frac{12}{25}$ d'un angle droit.

Il pourra arriver aussi que les arcs comparés n'aient pas de commune mesure; alors on n'aura pour les angles que des rapports en nombres plus ou moins approchés, selon que l'opération aura été poussée plus ou moins loin.