ÉLÉMENTS
DE GÉOMÉTRIE.

LIVRE PREMIER.

LES PRINCIPES.

DÉFINITIONS.

I. La Géométrie est une science qui a pour objet la mesure de l'étendue.

L'étendue a trois dimensions, longueur, largeur et hauteur.

II. La *ligne* est une longueur sans largeur.

Les extrémités d'une ligne s'appellent *points* : le point n'a donc pas d'étendue.

III. La *ligne droite* est le plus court chemin d'un point à un autre.

IV. Toute ligne qui n'est ni droite ni composée de lignes droites est une *ligne courbe*.

Ainsi, AB est une ligne droite, ACDB une ligne *brisée* ou composée de lignes droites, et AEB est une ligne courbe. fig. 1.

V. *Surface* est ce qui a longueur et largeur, sans hauteur ou épaisseur.

VI. Le *plan* est une surface, dans laquelle prenant deux points à volonté, et joignant ces deux points par une ligne droite, cette ligne est toute entière dans la surface.

VII. Toute surface qui n'est ni plane ni composée de surfaces planes est une *surface courbe*.

VIII. *Solide* ou *corps* est ce qui réunit les trois dimensions de l'étendue.

fig. 2. IX. Lorsque deux lignes droites AB, AC, se rencontrent, la quantité plus ou moins grande dont elles sont écartées l'une de l'autre, quant à leur position, s'appelle *angle;* le point de rencontre ou d'*intersection* A est le *sommet* de l'angle; les lignes AB, AC, en sont les *côtés*.

L'angle se désigne quelquefois par la lettre du sommet A seulement, d'autres fois par trois lettres BAC ou CAB, ayant soin de mettre la lettre du sommet au milieu.

Les angles sont, comme toutes les quantités, susceptibles d'addition, de soustraction, de multiplication, et de division : ainsi l'angle DCE est la somme des deux angles DCB, BCE, et l'angle DCB est la différence des deux angles DCE, BCE. fig. 20.

fig. 3. X. Lorsque la ligne droite AB rencontre une autre droite CD, de telle sorte que les angles adjacents BAC, BAD soient égaux entre eux, chacun de ces angles s'appelle un *angle droit;* et la ligne AB est dite *perpendiculaire* sur CD.

fig. 4. XI. Tout angle BAC plus petit qu'un angle droit est un *angle aigu;* tout angle plus grand DEF est un *angle obtus*.

fig. 5. XII. Deux lignes sont dites *parallèles*, lorsque, étant situées dans le même plan, elles ne peuvent se rencontrer à quelque distance qu'on les prolonge l'une et l'autre. Telles sont les lignes AB, CD.

XIII. *Figure plane* est un plan terminé de toutes parts par des lignes.

Si les lignes sont droites, l'espace qu'elles renferment s'appelle *figure rectiligne* ou *polygone*, et les lignes elles-mêmes prises ensemble forment le contour ou *périmetre* du polygone. fig. 6.

XIV. Le polygone de trois côtés est le plus simple de tous, il s'appelle *triangle;* celui de quatre côtés s'appelle *quadrilatère;* celui de cinq, *pentagone;* celui de six, *hexagone*, etc.

XV. On appelle triangle *équilatéral* celui qui a ses fig. 7.
trois côtés égaux; triangle *isoscèle*, celui dont deux fig. 8.
côtés seulement sont égaux; triangle *scalène*, celui fig. .
qui a ses trois côtés inégaux.

XVI. Le triangle *rectangle* est celui qui a un angle droit. Le côté opposé à l'angle droit s'appelle *hypoténuse :* ainsi ABC est un triangle rectangle en A, le côté BC est son hypoténuse. fig. 10.

XVII. Parmi les quadrilatères on distingue :

Le *quarré*, qui a ses côtés égaux et ses angles droits. fig. 11.
Voyez la prop. xx, liv. I.)

Le *rectangle*, qui a les angles droits sans avoir les fig. 12.
côtés égaux. (Voyez la même prop.)

Le *parallélogramme* ou *rhombe*, qui a les côtés op- fig. 13.
posés parallèles.

Le *losange*, dont les côtés sont égaux sans que les fig. 14.
angles soient droits.

Enfin le *trapèze*, dont deux côtés seulement sont fig. 15.
parallèles.

XVIII. On appelle *diagonale* la ligne qui joint les sommets de deux angles non adjacents : telle est AC. fig. 42.

XIX. Polygone *équilatéral* est celui dont tous les côtés sont égaux; polygone *équiangle*, celui dont tous les angles sont égaux.

XX. Deux polygones sont *équilatéraux entre eux* lorsqu'ils ont les côtés égaux chacun à chacun, et placés dans le même ordre, c'est-à-dire, lorsqu'en suivant leurs contours dans un même sens, le premier côté de l'un est égal au premier de l'autre, le second de l'un au second de l'autre, le troisième au troisième, et ainsi de suite. On entend de même ce que signifient deux polygones *équiangles entre eux*.

Dans l'un ou l'autre cas, les côtés égaux ou les angles égaux s'appellent côtés ou angles *homologues*.

N. B. Dans les quatre premiers livres il ne sera question que de figures planes ou tracées sur une surface plane.

Explication des termes et des signes.

Axiome est une proposition évidente par elle-même.

Théorême est une vérité qui devient évidente au moyen d'un raisonnement appelé *démonstration*.

Problême est une question proposée qui exige une *solution*.

Lemme est une vérité employée subsidiairement pour la démonstration d'un théorême ou la solution d'un problême.

Le nom commun de *proposition* s'attribue indifféremment aux théorêmes, problêmes, et lemmes.

Corollaire est la conséquence qui découle d'une ou de plusieurs propositions.

Scholie est une remarque sur une ou plusieurs propositions précédentes, tendant à faire apercevoir leur liaison, leur utilité, leur restriction, ou leur extension.

Hypothèse est une supposition faite soit dans l'énoncé d'une proposition, soit dans le courant d'une démonstration.

Le signe $=$ est le signe de l'égalité; ainsi l'expression $A = B$ signifie que A égale B.

Pour exprimer que A est plus petit que B, on écrit $A < B$.

Pour exprimer que A est plus grand que B, on écrit $A > B$.

Le signe $+$ se prononce *plus ;* il indique l'addition.

Le signe $-$ se prononce *moins ;* il indique la soustraction : ainsi $A + B$ représente la somme des quantités A et B ; $A - B$ représente leur différence ou ce qui reste en ôtant B de A ; de même $A - B + C$, ou $A + C - B$, signifie que A et C doivent être ajoutés ensemble, et que B doit être retranché du tout.

Le signe $\times$ indique la multiplication ; ainsi $A \times B$ représente le produit de A multiplié par B. Au lieu du signe $\times$ on emploie quelquefois un point ; ainsi $A . B$ est la même chose que $A \times B$. On indique aussi le même produit sans aucun signe intermédiaire par AB ; mais il ne faut employer cette expression que lorsqu'on n'a pas en même temps à employer celle de la ligne AB distance des points A et B.

L'expression $A \times (B + C - D)$ représente le produit de A par la quantité $B + C - D$. S'il fallait multiplier $A + B$ par $A - B + C$, on indiquerait le produit ainsi $(A + B) \times (A - B + C)$; tout ce qui est renfermé entre parentheses est considéré comme une seule quantité.

Un nombre mis au devant d'une ligne ou d'une quantité, sert de multiplicateur à cette ligne ou à cette quantité ; ainsi, pour exprimer que la ligne AB est prise trois fois, on écrit $3AB$; pour désigner la moitié de l'angle A, on écrit $\frac{1}{2}A$.

Le quarré de la ligne AB se désigne par $\overline{AB}^2$; son cube par $\overline{AB}^3$. On expliquera en son lieu ce que signifient précisément le quarré et le cube d'une ligne.

Le signe $\sqrt{}$ indique une racine à extraire; ainsi $\sqrt{2}$ est la racine quarrée de 2; $\sqrt{A \times B}$ est la racine du produit $A \times B$, ou la moyenne proportionnelle entre A et B.

AXIOMES.

1. Deux quantités égales à une troisieme sont égales entre elles.
2. Le tout est plus grand que sa partie.
3. Le tout est égal à la somme des parties dans lesquelles il a été divisé.
4. D'un point à un autre on ne peut mener qu'une seule ligne droite.
5. Deux grandeurs, ligne, surface ou solide, sont égales, lorsqu'étant placées l'une sur l'autre elles coïncident dans toute leur étendue.

PROPOSITION PREMIÈRE.

THÉORÊME.

fig. 16. *Les angles droits sont tous égaux entre eux.*

Soit la ligne droite CD perpendiculaire à AB, et GH à EF; je dis que les angles ACD, EGH seront égaux entre eux.

Prenez les quatre distances égales CA, CB, GE, GF, la distance AB sera égale à la distance EF, et on pourra placer la ligne EF sur AB, de maniere que le point E tombe en A, et le point F en B. Ces deux lignes ainsi posées coïncideront entièrement l'une avec l'autre; car, sans cela, il y aurait deux lignes droites de A en B, ce qui est impossible*, donc le point G, milieu de EF, tombera sur le point C, milieu de AB. Le côté GE étant ainsi appliqué sur CA, je dis que le côté GH tombera sur CD; car supposons, s'il est possible, qu'il tombe sur une ligne CK différente de CD; puisque, par hypothese*, l'angle EGH = HGF, il faudrait qu'on eût ACK = KCB. Mais l'angle ACK est plus grand que ACD, l'angle KCB est plus petit que BCD; d'ailleurs, par hypothese, ACD = BCD; donc ACK est plus grand que KCB; donc la ligne GH ne peut tomber sur une ligne CK différente de CD; donc elle tombe sur CD, et l'angle EGH sur ACD; donc tous les angles droits sont égaux entre eux.

*ax. 4.

*déf. 10

PROPOSITION II.

THÉORÊME.

Toute ligne droite CD, *qui en rencontre une autre* AB, *fait avec celle-ci deux angles adjacents* ACD, BCD, *dont la somme est égale à deux angles droits*. fig. 17.

Au point C, élevez sur AB la perpendiculaire CE. L'angle ACD est la somme des angles ACE, ECD; donc ACD + BCD sera la somme des trois ACE, ECD, BCD. Le premier de ceux-ci est droit, les deux autres font ensemble l'angle droit BCE; donc la somme des deux angles ACD, BCD est égale à deux angles droits.

Corollaire I. Si l'un des angles ACD, BCD est droit, l'autre le sera pareillement.

Corollaire II. Si la ligne DE est perpendiculaire à AB, réciproquement AB sera perpendiculaire à DE. fig. 18.

Car, de ce que DE est perpendiculaire à AB, il s'ensuit que l'angle ACD est égal à son adjacent DCB, et qu'ils sont tous deux droits. Mais de ce que l'angle ACD est un angle droit, il s'ensuit que son adjacent ACE est aussi un angle droit; donc l'angle ACE=ACD, donc AB est perpendiculaire à DE.

fig. 34. *Corollaire* III. Tous les angles consécutifs BAC, CAD, DAE, EAF, formés d'un même côté de la droite BF, pris ensemble, valent deux angles droits; car leur somme est égale à celle des deux angles adjacents BAC, CAF.

PROPOSITION III.

THÉORÊME.

Deux lignes droites qui ont deux points communs coïncident l'une avec l'autre dans toute leur étendue, et ne forment qu'une seule et même ligne droite.

fig. 19. Soient les deux points communs A et B; d'abord les deux lignes n'en doivent faire qu'une entre A et B, car sans cela il y aurait deux lignes droites de A en B, ce qui est impossible*. Supposons ensuite que ces lignes étant prolongées, elles commencent à se séparer au point C, l'une devenant CD, l'autre CE. Menons au point C la ligne CF, qui fasse avec CA l'angle droit ACF. Puisque la ligne ACD est droite, l'angle FCD sera un angle droit*; puisque la ligne ACE est droite, l'angle FCE sera pareillement un angle droit. Mais la partie FCE ne peut pas être égale au tout FCD; donc les lignes droites qui ont deux points A et B communs, ne peuvent se séparer en aucun point de leur prolongement; donc elles ne forment qu'une seule et même ligne droite.

* ax. 4.

*pr. 2. cor. 1.

PROPOSITION IV.

THÉORÈME.

Si deux angles adjacents ACD, DCB, *valent ensemble deux angles droits, les deux côtés extérieurs* AC, CB, *seront en ligne droite.* fig. 20.

Car si CB n'est pas le prolongement de AC, soit CE ce prolongement; alors la ligne ACE étant droite, la somme des angles ACD, DCE, sera égale à deux droits*. Mais, par hypothèse, la somme des angles ACD, DCB, est aussi égale à deux droits; donc ACD + DCB serait égale à ACD + DCE; retranchant de part et d'autre l'angle ACD, il resterait la partie DCB égale au tout DCE, ce qui est impossible; donc CB est le prolongement de AC. *pr. 2.

PROPOSITION V.

THÉORÈME.

Toutes les fois que deux lignes droites AB, DE, *se coupent, les angles opposés au sommet sont égaux.* fig. 21.

Car puisque la ligne DE est droite, la somme des angles ACD, ACE, est égale à deux droits; et puisque la ligne AB est droite, la somme des angles ACE BCE, est égale aussi à deux droits; donc la somme ACD + ACE est égale à la somme ACE + BCE. Retranchant de part et d'autre le même angle ACE, il restera l'angle ACD égal à son opposé BCE.

On démontrerait de même que l'angle ACE est égal à son opposé BCD.

Scholie. Les quatre angles formés autour d'un point par deux droites qui se coupent valent ensemble quatre angles droits; car les angles ACE, BCE pris ensemble, valent deux angles droits, et les deux autres ACD, BCD, ont la même valeur.

fig. 22. En général, si tant de droites qu'on voudra CA, CB, etc., se rencontrent en un point C, la somme de tous les angles consécutifs ACB, BCD, DCE, ECF, FCA, sera égale à quatre angles droits : car si on formait au point C quatre angles droits au moyen de deux lignes perpendiculaires entre elles, le même espace serait rempli, soit par les quatre angles droits, soit par les angles successifs ACB, BCD, etc.

PROPOSITION VI.

HÉORÊME.

Deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.

fig. 23. Soit l'angle A égal à l'angle D, le côté AB égal à DE, le côté AC égal à DF; je dis que les triangles ABC, DEF, seront égaux.

En effet, ces triangles peuvent être posés l'un sur l'autre de maniere qu'ils coïncident parfaitement. Et d'abord si on place le côté DE sur son égal AB, le point D tombera en A et le point E en B : mais puisque l'angle D est égal à l'angle A, dès que le côté DE sera placé sur AB, le côté DF prendra la direction AC. De plus DF est égal à AC; donc le point F tombera en C, et le troisième côté EF couvrira exactement le troisième côté BC; donc le triangle DEF

ax. 5. est égal au triangle ABC.

Corollaire. De ce que trois choses sont égales dans deux triangles, savoir, l'angle A = D, le côté AB = DE, et le côté AC = DF, on peut conclure que les trois autres le sont, savoir, l'angle B = E, l'angle C = F, et le côté BC = EF.

PROPOSITION VII.

THÉORÊME.

Deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun.

Soit le côté BC égal au côté EF, l'angle B égal à l'angle E, et l'angle C égal à l'angle F; je dis que le triangle DEF sera égal au triangle ABC. fig. 23.

Car, pour opérer la superposition, soit placé EF sur son égal BC, le point E tombera en B, et le point F en C. Puisque l'angle E est égal à l'angle B, le côté ED prendra la direction BA ; ainsi le point D se trouvera sur quelque point de la ligne BA. De même, puisque l'angle F est égal à l'angle C, la ligne FD prendra la direction CA, et le point D se trouvera sur quelque point du côté CA; donc le point D qui doit se trouver à la fois sur les deux lignes BA, CA, tombera sur leur intersection A; donc les deux triangles ABC, DEF, coïncident l'un avec l'autre, et sont parfaitement égaux.

Corollaire. De ce que trois choses sont égales dans deux triangles, savoir, BC = EF, B = E, C = F, on peut conclure que les trois autres le sont, savoir, AB = DE, AC = DF, A = D.

PROPOSITION VIII.

THÉORÊME.

Dans tout triangle un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres.

Car la ligne droite BC, par exemple, est le plus fig. 23.

déf. 3. court chemin de B en C, donc BC est plus petit que BA + AC.

PROPOSITION IX.

THÉORÈME.

fig. 24. *Si d'un point* O *pris au-dedans du triangle* ABC, *on mène aux extrémités d'un côté* BC *les droites* OB, OC, *la somme de ces droites sera moindre que celle des deux autres côtés* AB, AC.

Soit prolongé BO jusqu'à la rencontre du côté AC en D; la ligne droite OC est plus courte que OD + DC*: ajoutant de part et d'autre BO, on aura BO + OC < BO + OD + DC, ou BO + OC < BD + DC.

*pr. 8.

On a pareillement BD < BA + AD; ajoutant de part et d'autre DC, on aura BD + DC < BA + AC. Mais on vient de trouver BO + OC < BD + DC; donc à plus forte raison, BO + OC < BA + AC.

PROPOSITION X.

THÉORÈME.

fig. 25. *Si les deux côtés* AB, AC, *du triangle* ABC *sont égaux aux deux côtés* DE, DF, *du triangle* DEF, *chacun à chacun; si en même temps l'angle* BAC, *compris par les premiers, est plus grand que l'angle* EDF, *compris par les seconds; je dis que le troisième côté* BC *du premier triangle sera plus grand que le troisième* EF *du second.*

Faites l'angle CAG = D, prenez AG = DE, et joignez CG, le triangle GAC sera égal au triangle DEF, puisqu'ils ont par construction un angle égal compris entre côtés égaux*; on aura donc CG = EF.

*pr. 6. Maintenant il peut y avoir trois cas, selon que le point

G tombe hors du triangle ABC, ou sur le côté BC; ou au-dedans du même triangle.

Premier cas. La ligne droite GC est plus courte que $GI + IC$, la ligne droite AB est plus courte que $AI + IB$; donc $GC + AB$ est plus petit que $GI + AI + IC + IB$, ou, ce qui est la même chose, $GC + AB < AG + BC$. Retranchant d'un côté AB et de l'autre son égale AG, il restera $GC < BC$: or $GC = EF$; donc on aura $EF < BC$. fig. 25.

Second cas. Si le point G tombe sur le côté BC, il est évident que GC ou son égale EF sera plus petit que BC. fig 26.

Troisieme cas. Enfin si le point G tombe au-dedans du triangle ABC, on aura, suivant le théorême précédent, $AG + GC < AB + BC$. Retranchant d'une part AG, et de l'autre son égale AB, il restera $GC < BC$, ou $EF < BC$. fig. 27.

Scholie. Réciproquement, si les deux côtés AB, AC, du triangle ABC sont égaux aux deux côtés DE, DF, du triangle DEF; si, de plus, le troisième côté CB du premier triangle est plus grand que le troisième EF du second, je dis que l'angle BAC du premier triangle sera plus grand que l'angle EDF du second.

Car si on nie cette proposition, il faudra que l'angle BAC soit égal à EDF, ou qu'il soit plus petit que EDF: dans le premier cas, le côté CB serait égal à EF*; dans le second, CB serait plus petit que EF; or l'un et l'autre est contraire à la supposition; donc l'angle BAC est plus grand que EDF. * pr. 6.

PROPOSITION XI.

THÉORÊME.

Deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.

fig. 23. Soit le côté AB=DE, AC=DF, BC=EF, je dis qu'on aura l'angle A=D, B=E, C=F.

Car si l'angle A était plus grand que l'angle D, comme les côtés AB, AC, sont égaux aux côtés DE, DF, chacun à chacun, il s'ensuivrait, par le théorême précédent, que le côté BC est plus grand que EF; et si l'angle A était plus petit que l'angle D, il s'ensuivrait que le côté BC est plus petit que EF; or, BC est égal à EF; donc l'angle A ne peut être ni plus grand ni plus petit que l'angle D; donc il lui est égal. On prouvera de même que l'angle B=E, et que l'angle C=F.

Scholie. On peut remarquer que les angles égaux sont opposés à des côtés égaux : ainsi les angles égaux A et D sont opposés aux côtés égaux BC, EF.

PROPOSITION XII.

THÉORÊME.

Dans un triangle isoscèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.

fig. 28. Soit le côté AB=AC, je dis qu'on aura l'angle C=B.

Tirez la ligne AD du *sommet* A au point D, milieu de la *base* BC, les deux triangles ABD, ADC, auront les trois côtés égaux chacun à chacun; savoir AD commun, AB=AC par hypothèse, et BD=DC par construction; donc, en vertu du théorême précédent, l'angle B est égal à l'angle C.

Corollaire. Un triangle équilatéral est en même temps équiangle, c'est-à-dire, qu'il a ses angles égaux.

Scholie. L'égalité des triangles ABD, ACD, prouve en même temps que l'angle BAD=DAC, et que l'angle BDA=ADC; donc ces deux derniers sont droits; *donc la ligne menée du sommet d'un triangle isoscèle au milieu de sa base, est perpendiculaire à cette base, et divise l'angle du sommet en deux parties égales.*

Dans un triangle non isoscèle on prend indifférement pour *base* un côté quelconque, et alors son *sommet* est celui de l'angle opposé. Dans le triangle isoscèle on prend particulièrement pour base le côté qui n'est point égal à l'un des deux autres.

PROPOSITION XIII.

THÉORÊME.

Réciproquement, si deux angles sont égaux dans un triangle, les côtés opposés seront égaux, et le triangle sera isoscèle.

Soit l'angle ABC=ACB, je dis que le côté AC sera égal au côté AB. fig. 29.

Car si ces côtés ne sont pas égaux, soit AB le plus grand des deux. Prenez BD=AC, et joignez DC. L'angle DBC est, par hypothèse, égal à ACB; les deux côtés DB, BC sont égaux aux deux AC, CB; donc le triangle DBC * serait égal au triangle ACB. * pr. 6. Mais la partie ne peut pas être égale au tout; donc il n'y a point d'inégalité entre les côtés AB, AC; donc le triangle ABC est isoscèle.

PROPOSITION XIV.

THÉORÊME.

De deux côtés d'un triangle, celui-là est le plus grand qui est opposé à un plus grand angle, et réciproquement, de deux angles d'un *triangle, celui-là est le plus grand qui est opposé à un plus grand côté.*

fig. 30. 1° Soit l'angle C > B, je dis que le côté AB opposé à l'angle C est plus grand que le côté AC opposé à l'angle B.

Soit fait l'angle BCD = B; dans le triangle BDC on aura * BD = DC. Mais la ligne droite AC est plus courte que AD + DC, et AD + DC = AD + DB = AB; donc AB est plus grand que AC.

*pr. 13.

2° Soit le côté AB > AC, je dis que l'angle C opposé au côté AB sera plus grand que l'angle B opposé au côté AC.

Car si on avait C < B, il s'ensuivrait, par ce qui vient d'être démontré, AB < AC, ce qui est contre la supposition. Si on avait C = B, il s'ensuivrait * AB = AC, ce qui est encore contre la supposition; donc il faut que l'angle C soit plus grand que B.

*pr. 13.

PROPOSITION XV.

THÉORÊME.

fig. 31. *D'un point* A *donné hors d'une droite* DE, *on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à cette droite.*

Car supposons qu'on puisse en mener deux AB et AC; prolongeons l'une d'elles AB d'une quantité BF = AB, et joignons FC.

Le triangle CBF est égal au triangle ABC : car l'angle CBF est droit ainsi que CBA, le côté CB est commun, et le côté BF = AB; donc ces triangles sont égaux *, et il s'ensuit que l'angle BCF = BCA. L'angle BCA est droit par hypothèse; donc l'angle BCF l'est aussi. Mais si les angles adjacents BCA, BCF, valent ensemble deux angles droits, il faut que la ligne

*pr. 6.

ACF soit droite *; d'où il résulte qu'entre les deux mêmes points A et F, on pourrait mener deux lignes droites ABF, ACF; ce qui est impossible *; donc il est pareillement impossible que deux perpendiculaires soient menées d'un même point sur la même ligne droite. *pr. 4. *ax. 4.

Scholie. Par un même point C donné sur la ligne AB, il est également impossible de mener deux perpendiculaires à cette ligne : car si CD et CE étaient ces deux perpendiculaires, l'angle DCB serait droit ainsi que BCE, et la partie serait égale au tout. fig. 17.

PROPOSITION XVI.

THÉORÊME.

Si d'un point A *situé hors d'une droite* DE *on mene la perpendiculaire* AB *sur cette droite, et différentes obliques* AE, AC, AD, *etc., à différents points de cette même droite :* fig. 31.

1° *La perpendiculaire* AB *sera plus courte que toute oblique.*

2° *Les deux obliques* AC, AE, *menées de part et d'autre de la perpendiculaire à des distances égales* BC, BE, *seront égales.*

3° *De deux obliques* AC *et* AD, *ou* AE *et* AD, *menées comme on voudra, celle qui s'écarte le plus de la perpendiculaire sera la plus longue.*

Prolongez la perpendiculaire AB d'une quantité BF=AB, et joignez FC, FD.

1° Le triangle BCF est égal au triangle BCA, car l'angle droit CBF=CBA, le côté CB est commun, et le côté BF=BA; donc* le troisieme côté CF est égal *pr. 6.

au troisieme AC. Or, ABF ligne droite est plus courte que ACF ligne brisée; donc AB moitié de ABF est plus courte que AC moitié de ACF; donc 1°, la perpendiculaire est plus courte que toute oblique.

2° Si on suppose BE=BC, comme on a en outre AB commun et l'angle ABE=ABC, il s'ensuit que le triangle ABE est égal au triangle ABC*; donc les côtés AE, AC sont égaux; donc 2°, deux obliques qui s'écartent également de la perpendiculaire sont égales.

* pr. 6.

3° Dans le triangle DFA la somme des lignes AC, CF, est plus petite* que la somme des côtés AD, DF; donc AC, moitié de la ligne ACF, est plus courte que AD moitié de ADF; donc 3°, les obliques qui s'écartent le plus de la perpendiculaire sont les plus longues.

* pr. 9.

Corollaire I. La perpendiculaire mesure la vraie distance d'un point à une ligne, puisqu'elle est plus courte que toute oblique.

II. D'un même point on ne peut mener à une même ligne trois droites égales : car si cela était, il y aurait d'un même côté de la perpendiculaire deux obliques égales, ce qui est impossible.

PROPOSITION XVII.

THÉORÊME.

fig. 32.

Si par le point C, *milieu de la droite* AB, *on éleve la perpendiculaire* EF *sur cette droite;* 1° *chaque point de la perpendiculaire sera également distant des deux extrémités de la ligne* AB; 2° *tout point situé hors de la perpendiculaire sera inégalement distant des mêmes extrémités* A *et* B.

Car, 1° puisqu'on suppose AC=CB, les deux obliques AD, DB, s'écartent également de la perpendiculaire; donc elles sont égales. Il en est de même des deux obliques AE, EB, des deux AF, FB, etc.; donc 1°, tout point de la perpendiculaire est également distant des extrémités A et B.

2° Soit I un point hors de la perpendiculaire; si on joint IA, IB, l'une de ces lignes coupera la perpendiculaire en D, d'où tirant DB, on aura DB=DA. Mais la ligne droite IB est plus petite que la ligne brisée ID+DB, et ID+DB=ID+DA=IA; donc IB<IA; donc 2°, tout point hors de la perpendiculaire est inégalement distant des extrémités A et B.

PROPOSITION XVIII.

THÉORÈME.

Deux triangles rectangles sont égaux lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un côté égal.

Soit l'hypoténuse AC=DF, et le côté AB=DE, je dis que le triangle rectangle ABC sera égal au triangle rectangle DEF. fig. 33.

L'égalité serait manifeste si le troisieme côté BC était égal au troisieme EF : supposons, s'il est possible, que ces côtés ne soient pas égaux, et que BC soit le plus grand. Prenez BG=EF, et joignez AG. Le triangle ABG est égal au triangle DEF; car l'angle droit B est égal à l'angle droit E, le côté AB=DE, et le côté BG=EF; donc ces deux triangles sont égaux*, et on a par conséquent AG=DF; mais, par hypothese, DF=AC; donc AG=AC. Mais l'oblique AC ne peut être égale à AG*, puisqu'elle est plus éloignée de la perpendiculaire AB; donc il est impossible que

* pr. 6.

* pr. 16.

BC differe de EF; donc le triangle ABC est égal au triangle DEF.

PROPOSITION XIX.

THÉORÊME.

Dans tout triangle, la somme des trois angles est égale à deux angles droits.

Soit ABC le triangle proposé dans lequel nous
fig. 35. supposerons (1) que AB est le plus grand côté et BC le plus petit, et qu'ainsi ACB est le plus grand angle,
* pr. 14. et BAC le plus petit.*

Par le point A et par le point I milieu du côté opposé BC, menez la droite AI que vous prolongerez en C′ jusqu'à ce que AC′=AB; prolongez de même AB en B′ jusqu'à ce que AB′ soit double de AI.

Si on désigne par A, B, C, les trois angles du triangle ABC et semblablement par A′, B′, C′ les trois angles du triangle AB′C′, je dis qu'on aura l'angle C′=B+C, et l'angle A=A′+B′, d'où résulte A+B+C=A′+B′+C′, c'est-à-dire que la somme des trois angles est la même dans les deux triangles.

Pour le prouver, faites AK=AI et joignez C′K, vous aurez le triangle C′AK égal au triangle BAI. Car dans ces deux triangles, l'angle commun A est compris entre côtés égaux chacun à chacun, savoir: AC′=AB, et AK=AI. Donc le troisième côté C′K est égal au troisième BI; donc aussi l'angle AC′K=ABC, et l'angle AKC=AIB.

Je dis maintenant que le triangle B′C′K est égal au triangle ACI, car la somme des deux angles adjacens
* pr. 2. AKC′+C′KB′ est égale à deux angles droits* ainsi que

(1) Cette supposition n'exclut pas le cas où le côté moyen AC serait égal à l'un des extrêmes AB ou BC.

la somme des deux angles $AIC + AIB$; retranchant de part et d'autre les angles égaux AKC', AIB, il restera l'angle $C'KB' = AIC$. Ces angles égaux dans les deux triangles sont compris entre côtés égaux chacun à chacun, savoir $C'K = IB = CI$, et $KB' = AK = AI$, puisqu'on a supposé $AB' = 2AI = 2AK$. Donc les deux triangles $B'C'K$, ACI, sont égaux*; donc le côté $C'B' = AC$, l'angle $B'C'K = ACB$, et l'angle $KB'C' = CAI$. * pr. 6.

Il suit de là 1° que l'angle $AC'B'$ désigné par C' est composé de deux angles égaux aux angles B et C du triangle ABC, et qu'ainsi on a $C' = B + C$; 2° que l'angle A du triangle ABC est composé de l'angle A' ou $C'AB'$ qui appartient au triangle $AB'C'$ et de l'angle CAI égal a l'angle B' du même triangle, ce qui donne $A = A' + B'$; donc $A + B + C = A' + B' + C'$. D'ailleurs puisqu'on a par hypothèse $AC < AB$ et par conséquent $C'B' < AC'$, on voit que dans le triangle $AC'B'$ l'angle en A, désigné par A', est moindre que B', et comme la somme des deux est égale à l'angle A du triangle proposé, il s'en suit qu'on a l'angle $A' < \frac{1}{2} A$.

Si on applique la même construction au triangle $AB'C'$, pour former un troisième triangle $AC''B''$ dont les angles seront désignés par A'', B'', C'', on aura semblablement les deux égalités $C'' = C' + B'$, $A' = A'' + B''$, d'où résulte $A' + B' + C' = A'' + B'' + C''$. Ainsi la somme des trois angles est la même dans ces trois triangles: on aura en même tems l'angle $A'' < \frac{1}{2} A'$, et par conséquent $A'' < \frac{1}{4} A$.

Continuant indéfiniment la suite des triangles $AC'B'$, $AC''B''$, etc. on parviendra à un triangle abc dans lequel la somme des trois angles sera toujours la même que dans le triangle proposé ABC et qui aura l'angle a plus petit que tel terme qu'on voudra de la progression décroissante $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{4}A$, $\frac{1}{8}A$, etc.

On peut donc supposer cette suite de triangles prolongée jusqu'à ce que l'angle a soit moindre que tout angle donné.

Et si au moyen du triangle abc on construit le triangle suivant $a'b'c'$, la somme des angles $a'+b'$ de celui-ci sera égale à l'angle a, et sera par conséquent moindre que tout angle donné ; d'où l'on voit que la somme des trois angles du triangle $a'b'c'$ se réduit presque au seul angle c'.

Pour avoir la mesure précise de cette somme, prolongeons le côté $a'c'$ vers d', et appelons x' l'angle extérieur $b'c'd'$; cet angle x', joint à l'angle c' du triangle $a'b'c'$, fait une somme égale à deux angles
* pr. 2. droits*; ainsi en désignant l'angle droit par D, on aura $c'=2\,D-x'$; donc la somme des angles du triangle $a'c'b'$ sera

$$2\,D+a'+b'-x'.$$

Mais on peut concevoir que le triangle $a'c'b'$ varie dans ses angles et ses côtés, de manière à représenter les triangles successifs qui naissent ultérieurement de de la même construction et s'approchent de plus en plus de la limite où les angles a' et b' seraient nuls. Dans cette limite la droite $a'c'd'$ se confondant avec $a'b'$, les trois points a', c', b', finissent par être exactement en ligne droite; alors les angles b' et x' deviennent nuls en même tems que a', et la quantité $2\,D+a'+b'-x'$, qui mesure la somme des trois angles du triangle $a'c'b'$, se réduit à $2\,D$, donc *dans tout triangle la somme des trois angles est égale à deux angles droits.*

Corollaire I. Deux angles d'un triangle étant donnés, ou seulement leur somme, on connaîtra le troisième en retranchant la somme de ces angles de deux angles droits.

II. Si deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, chacun à chacun, le troisieme de l'un sera égal au troisieme de l'autre, et les deux triangles seront équiangles entre eux.

III. Dans un triangle il ne peut y avoir qu'un seul angle droit; car s'il y en avait deux, le troisieme devrait être nul; à plus forte raison un triangle ne peut-il avoir qu'un seul angle obtus.

IV. Dans un triangle rectangle la somme des deux angles aigus est égale à un angle droit.

V. Dans un triangle équilatéral chaque angle est le tiers de deux angles droits ou les deux tiers d'un angle droit. Donc si l'angle droit est exprimé par 1, l'angle du triangle équilatéral le sera par $\frac{2}{3}$.

VI. Dans tout triangle ABC si on prolonge le côté AB vers D, l'angle extérieur CBD sera égale à la somme des deux intérieurs opposés A et C; car en ajoutant de part et d'autre ABC, les deux sommes sont égales à deux angles droits.

PROPOSITION XX.

THÉORÊME.

La somme de tous les angles intérieurs d'un polygone est égale à autant de fois deux angles droits qu'il y a d'unités dans le nombre des côtés moins deux.

Soit ABCD etc. le polygone proposé; si du sommet d'un même angle A, on mene à tous les sommets des angles opposés, les diagonales AC, AD, AE, etc., il est aisé de voir que le polygone sera partagé en cinq triangles, s'il a sept côtés; en six triangles, s'il avait huit côtés; et en général, en autant de triangles que le polygone a de côtés moins deux; car ces triangles peuvent être considérés comme ayant pour sommet fig. 42.

commun le point A, et pour bases les différents côtés des polygones, excepté les deux qui forment l'angle A. On voit en même temps que la somme des angles de tous ces triangles ne diffère point de la somme des angles du polygone; donc cette dernière somme est égale à autant de fois deux angles droits qu'il y a de triangles, c'est-à-dire, qu'il y a d'unités dans le nombre des côtés du polygone moins deux.

Corollaire I. La somme des angles d'un quadrilatère est égale à deux angles droits multipliés par 4—2, ce qui fait quatre angles droits. Donc si tous les angles d'un quadrilatère sont égaux, chacun d'eux sera un angle droit; ce qui justifie la définition XVII où l'on a supposé que les quatre angles d'un quadrilatère sont droits, dans le cas du rectangle et du quarré.

II. La somme des angles d'un pentagone est égale à deux angles droits multipliés par 5 — 2, ce qui fait 6 angles droits. Donc lorsqu'un pentagone est *équiangle*, c'est-à-dire lorsque ses angles sont égaux les uns aux autres, chacun d'eux est égal au cinquième de six angles droits, ou aux $\frac{6}{5}$ d'un angle droit.

III. La somme des angles d'un hexagone est de $2 \times (6-2)$ ou 8 angles droits; donc dans l'hexagone équiangle, chaque angle est $\frac{8}{6}$ ou $\frac{4}{3}$ d'angle droit.

fig. 43. *Scholie.* Si on voulait appliquer cette proposition à un polygone dans lequel il y aurait un ou plusieurs *angles rentrants*, il faudrait considérer chaque angle rentrant comme étant plus grand que deux angles droits. Mais, pour éviter tout embarras, nous ne considérerons ici et dans la suite, que les polygones à angles *saillants*, qu'on peut appeler autrement *polygones convexes*. Tout polygone convexe est tel, qu'une ligne droite, menée comme on voudra, ne peut rencontrer le contour de ce polygone qu'en deux points.

PROPOSITION XXI.

THÉORÊME.

Si deux lignes droites AB, CD, *sont perpendiculaires à une troisième* FG, *ces deux lignes seront paralleles, c'est-à-dire qu'elles ne pourront se rencontrer à quelque distance qu'on les prolonge.* fig. 36.

Car si elles se rencontraient en un point O, il y aurait deux perpendiculaires OF, OG. abaissées d'un même point O sur une même ligne FG, ce qui est impossible.* *pr. 15.

PROPOSITION XXII.

THÉORÊME.

Si deux lignes droites AB, CD, font avec une troisième EF, deux angles intérieurs BEF, DFE, dont la somme soit égale à deux angles droits, les lignes AB, CD, seront paralleles. fig. 36.

Si les angles BEF, DFE, étaient égaux, ils seraient droits l'un et l'autre, et on tomberait dans le cas de la proposition précédente; supposons donc qu'ils sont inégaux et par le point F, sommet du plus grand, abaissons FG perpendiculaire sur AB

Dans le triangle EFG, la somme des deux angles aigus FEG+EFG est égale à un angle droit *; cette somme étant retranchée de la somme BEF + DFE égale par hypothèse à deux angles droits, il restera l'angle DFG égal à un angle droit. Donc les deux lignes AB, CD, sont perpendiculaires à une même ligne FG, donc elles sont parallèles *. *pr. 19. cor. 4. *pr. 21.

PROPOSITION XXIII.

THÉORÊME.

fig. 37. *Si deux lignes droites AB, CD, font avec une troisieme EF, deux angles intérieurs d'un même côté, dont la somme soit plus petite ou plus grande que deux angles droits, les lignes* AB, CD, *prolongées suffisamment, devront se rencontrer.*

Soit 1°. La somme BEF+EED plus petite que deux angles droits, menez FG de manière que l'angle EFG=AEF, vous aurez la somme BEF+EFG égale à la somme BEF+AEF et par conséquent égale à deux angles droits, et puisque BEF+EFD est plus petite que deux angles droits, la droite DF sera comprise dans l'angle EFG.

Par le point F tirez une oblique FM qui rencontre AB en M, l'angle AMF sera égal à GFM, puisqu'en ajoutant de part et d'autre une même quantité EFM +FEM, les deux sommes sont égales chacune à deux angles droits. Prenez ensuite MN=FM et joignez FN; l'angle AMF, extérieur au triangle FMN, est égal à
pr. 19. cor. 6. la somme des deux intérieurs opposés MFN, MNF; ceux-ci sont égaux entre eux, puisqu'ils sont opposés à des côtés égaux MN, FM; donc l'angle AMF ou son égal MFG est double de MFN; donc la droite FN divise en deux parties égales l'angle GFM et rencontre la ligne AB en un point N situé à la distance MN=FM

Il suit de la même démonstration que si on prend NP=FN, on déterminera sur la ligne AB le point P où aboutit la droite FP qui fait l'angle GFP égal à la moitié de l'angle GFN, ou au quart de l'angle GFM.

On peut donc prendre ainsi successivement la moitié, le quart, le huitieme, etc. de l'angle GFM, et les lignes qui opèrent ces divisions, rencontreront la ligne

AB en des points de plus en plus éloignés, mais faciles à déterminer, puisque MN=FM, NP=FN, PQ=PF etc. On peut même observer que chaque distance d'un de ces points d'intersection au point fixe F, n'est pas tout à fait double de la distance du point d'intersection précédent, car FN par exemple est moindre que FM+MN ou 2FM; on a pareillement FP <2FN, FQ<2FP, etc.

Mais en continuant de sous-diviser l'angle GFM en raison double, on parviendra bientôt à un angle GFZ plus petit que l'angle donné GFD, et il sera encore vrai que FZ prolongée rencontre AB en un point déterminé : donc à plus forte raison la droite FD comdrise dans l'angle EFZ, rencontrera AB.

Supposons 2° que la somme des deux angles intérieurs AEF+CFE est plus grande que deux angles droits, si l'on prolonge AE vers B et CF vers D, la somme des quatre angles AEF, BEF, CFE, EFD, sera égale à quatre angles droits; donc si de cette somme on retranche AEF+CFE plus grande que deux angles droits, il restera la somme BEF+EFD plus petite que deux angles droits. Donc suivant le premier cas les lignes EB, FD, prolongées suffisamment, doivent se rencontrer.

Corollaire. Par un point donné F on ne peut mener qu'une seule parallèle à la ligne donnée AB; car ayant tiré FE à volonté, il n'y a qu'une ligne FG qui fasse la somme des deux angles BEF+EFG, égale à deux angles droits; toute autre droite FD ferait la somme des deux angles BEF+EFD plus petite ou plus grande que deux droits; et rencontrerait par conséquent la ligne AB.

PROPOSITION XXIV.

THÉORÊME.

Si deux lignes paralleles AB, CD, *sont rencontrées par une sécante* EF, *la somme des* fig. 38.

angles intérieurs AGO, GOC, *sera égale à deux angles droits.*

Car si elle était plus grande ou plus petite, les deux droites AB, CD, se rencontreraient d'un côté ou de
pr. 23. l'autre et ne seraient pas paralleles.

Corollaire I. Si l'angle GOC est droit, l'angle AGO sera aussi un angle droit; donc toute ligne perpendiculaire à l'une des paralleles est perpendiculaire à l'autre.

Corollaire II. Puisque la somme AGO + GOC est égale à deux angles droits, et que la somme GOD + GOC est aussi égale à deux angles droits; si on retranche de part et d'autre GOC, on aura l'angle AGO
pr. 5 = GOD. D'ailleurs AGO = BGE, et GOD = COF; donc les quatre angles aigus AGO, BGE, GOD, COF, sont égaux entre eux; il en est de même des quatre angles obtus AGE, BGO, GOC, DOF. On peut observer de plus qu'en ajoutant l'un des quatre angles aigus à l'un des quatre obtus, la somme sera toujours égale à deux angles droits.

Scholie. Les angles dont on vient de parler, comparés deux à deux, prennent différents noms. Nous avons déja appelé les angles AGO, GOC, *intérieurs d'un même côté;* les angles BGO, GOD, ont le même nom; les angles AGO, GOD, s'appellent *alternes-internes*, ou simplement *alternes*, il en est de même des angles BGO, GOC. Enfin on appelle *internes-externes* les angles EGB, GOD, ou EGA, GOC, et *alternes-externes* les angles EGB, COF, ou AGE, DOF. Cela posé on peut regarder les propositions suivantes comme étant déja démontrées.

1° Les angles intérieurs d'un même côté, pris ensemble, valent deux angles droits.

2° Les angles alternes-internes sont égaux, ainsi que les angles internes-externes, et les angles alternes-externes.

Réciproquement si dans ce second cas, deux angles de même nom sont égaux, on peut conclure que les lignes auxquelles ils se rapportent sont paralleles. Soit, par exemple, l'angle AGO = GOD; puisque GOC + GOD, est égal à deux droits, on aura aussi AGO + GOC égal à deux droits, donc* les lignes AG, CO, sont paralleles. *pr. 22.

PROPOSITION XXV.

THÉORÊME.

Deux lignes AB, CD, *paralleles à une troisieme* EF, *sont paralleles entre elles.* fig. 39.

Menez la sécante PQR perpendiculaire à EF. Puisque AB est parallele à EF, la sécante PR sera perpendiculaire à AB*; de même puisque CD est parallele à EF, la sécante PR sera perpendiculaire à CD. Donc AB et CD sont perpendiculaires à la même droite PQ; donc elles sont paralleles*. *cor. 1. pr. 24. *pr. 21.

PROPOSITION XXVI.

THÉORÊME.

Deux paralleles sont partout également distantes.

Étant données les deux paralleles AB, CD, si par deux points pris à volonté, on éleve sur AB les deux perpendiculaires EG, FH, les droites EG, FH, seront en même temps perpendiculaires à CD*; je dis de plus que ces droites seront égales entre elles. fig. 40. *pr. 24.

Car en tirant GF, les angles GFE, FGH, considérés par rapport aux paralleles AB, CD, seront égaux comme alternes-internes*; de même puisque les droites EG, FH, sont perpendiculaires à une même *sch. pr. 24.

droite AB, et par conséquent paralleles entre elles, les angles EGF, GFH, considérés par rapport aux paralleles GE, FH, seront égaux comme alternes-internes. Donc les deux triangles EFG, FGH, ont un côté commun FG adjacent à deux angles égaux, chacun à chacun ; donc ces deux triangles sont
* pr. 7. égaux* ; donc le côté EG qui mesure la distance des paralleles AB, CD, au point E, est égal au côté FH, qui mesure la distance de ces mêmes paralleles au point F.

PROPOSITION XXVII.

THÉORÊME.

fig. 41. *Si deux angles* BAC, DEF, *ont les côtés paralleles, chacun à chacun, et dirigés dans le même sens, ces deux angles seront égaux.*

Prolongez, s'il est nécessaire, DE jusqu'à la rencontre de AC en G; l'angle DEF est égal à DGC,
* pr. 24. parce que EF est parallele à GC* ; l'angle DGC est égal à BAC, parce que DG est parallele à AB; donc l'angle DEF est égal à BAC.

Scholie. On met dans cette proposition la restriction que le côté EF soit dirigé dans le même sens que AC et ED dans le même sens que AB; la raison en est que si on prolonge FE vers H, l'angle DEH aurait ses côtés paralleles à ceux de l'angle BAC, mais ne lui serait pas égal. Dans ce cas, l'angle DE et l'angle BAC feraient ensemble deux angles droits.

PROPOSITION XXVIII.

THÉORÊME.

Les côtés opposés d'un parallélogramme sont égaux, ainsi que les angles opposés.

fig. 44. Tirez la diagonale BD, les deux triangles ADB,

DBC, ont le côté commun BD; de plus, à cause des paralleles AD, BC, l'angle ADB=DBC*, et à cause des paralleles AB, CD, l'angle ABD=BDC; donc les deux triangles ADB, DBC, sont égaux*; donc le côté AB opposé à l'angle ADB est égal au côté DC opposé à l'angle égal DBC, et pareillement le troisieme côté AD est égal au troisieme BC; donc les côtés opposés d'un parallélogramme sont égaux. *pr. 24 *pr. 7.

En second lieu, de l'égalité des mêmes triangles il s'ensuit que l'angle A est égal à l'angle C, et aussi que l'angle ADC, composé des deux angles ADB, BDC, est égal à l'angle ABC, composé des deux angles DBC, ABD, donc les angles opposés d'un parallélogramme sont égaux.

Corollaire. Donc deux paralleles AB, CD, comprises entre deux autres paralleles AD, BC, sont égales.

PROPOSITION XXIX.

THÉORÈME.

Si dans un quadrilatere ABCD *les côtés opposés sont égaux, en sorte qu'on ait* AB=CD, *et* AD=BC, *les côtés egaux seront paralleles, et la figure sera un parallélogramme.* fig. 44.

Car, en tirant la diagonale BD, les deux triangles ABD, BDC, auront les trois côtés égaux chacun à chacun; donc ils seront égaux; donc l'angle ADB opposé au côté AB, est égal à l'angle DBC opposé au côté CD; donc* le côté AD est parallele à BC. Par une semblable raison, AB est parallele à CD; donc le quadrilatere ABCD est un parallélogramme. *pr. 24.

PROPOSITION XXX.

THÉORÊME.

fig. 44 *Si deux côtés opposés* AB, CD, *d'un quadrilatère sont égaux et parallèles, les deux autres côtés seront pareillement égaux et parallèles, et la figure* ABCD *sera un parallélogramme.*

Soit tirée la diagonale BD; puisque AB est parallele à CD, les angles alternes ABD, BDC, sont
*pr. 24. égaux *: d'ailleurs le côté AB=DC, le côté DB est commun, donc le triangle ABD est égal au triangle
pr. 6. DBC; donc le côté AD=BC, l'angle ADB=DBC, et par conséquent AD est parallele à BC; donc la figure ABCD est un parallélogramme.

PROPOSITION XXXI.

THÉORÊME.

fig. 45. *Les deux diagonales* AC, DB, *d'un parallélogramme se coupent mutuellement en deux parties égales.*

Car, en comparant le triangle ADO au triangle COB, on trouve le côté AD=CB, l'angle ADO=
pr. 24. CBO ; et l'angle DAO=OCB; donc ces deux trian-
pr. 27. gles sont égaux; donc AO, côté opposé à l'angle ADO, est égal à OC, côté opposé à l'angle OBC; donc aussi DO=OB.

Scholie. Dans le cas du losange, les côtés AB, BC, étant égaux, les triangles AOB, OBC, ont les trois côtés égaux chacun à chacun, et sont par conséquent égaux; d'où il suit que l'angle AOB=BOC, et qu'ainsi les deux diagonales d'un losange se coupent mutuellement à angles droits.