Quadratur und Rectification der Curven

sowie

Berechnung des körperlichen Inhalts und der Oberfläche der Revolutionskörper ohne Integralrechnung.

(Schluß der Abhandlung im vorjährigen Programm.)

II. Rectification der Curven.

§ 1. Bogenlänge der Ellipse.

Figur 1. Es sei AEFD eine halbe Ellipse und ABCD ein über deren großer Achse errichteter Halbkreis. Ist BC ein unendlich kleiner Theil des Halbkreises, so können wir ihn als mit der Tangente zusammenfallend betrachten, und es wäre dann $\angle BCG = \angle BJA$. Nennen wir BJA nun α und ξ den Bogen BC, so ist:

$$BG = \xi \sin \alpha. \quad CG = \xi \cos \alpha.$$

Da $EH = BG$ und $FH = \frac{b}{a} \cdot CG$ ist, so ist, wenn wir EF seiner außerordentlichen Kleinheit wegen ebenfalls als grade Linie betrachten

$$EF = \sqrt{\left(\xi^2 (\sin \alpha)^2 + \xi^2 \frac{b^2}{a^2} (\cos \alpha)^2\right)}$$

Da aber $(\sin \alpha)^2 = 1 - (\cos \alpha)^2$ ist, so ist

$$EF = \sqrt{\left(\xi^2 - \left(\xi^2 - \xi^2 \frac{b^2}{a^2}\right)(\cos \alpha)^2\right)}$$

Nennen wir jetzt e das Verhältniß der großen Achse zur Entfernung der beiden Brennpunkte von einander:

$$ae = \sqrt{(a^2 - b^2)} \text{ oder } e = \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)}, \text{ so erhalten wir}$$

$$EF = \sqrt{[\xi^2 - \xi^2 e^2 (\cos \alpha)^2]}$$
$$EF = \xi \sqrt{[1 - e^2 (\cos \alpha)^2]}$$

Lassen wir jetzt α von 0 bis ω wachsen und nennen die entsprechenden Bögen $c_1, c_2, c_3 \ldots . c_n$, so erhalten wir

$$c_1 = \xi \sqrt{[1 - e^2 (\cos \alpha)^2]} \qquad c_2 = \xi \sqrt{[1 - e^2 (\cos 2\alpha)^2]}$$

$$c_3 = \xi \sqrt{[1 - e^2 (\cos 3\alpha)^2]} \ldots \qquad c_n = \xi \sqrt{[1 - e^2 (\cos \omega)^2]}$$

Nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt, ist

$$c_1 = \xi \, [1 - e^2 (\cos \alpha)^2 P_1 + e^4 (\cos \alpha)^4 P_2 - e^6 (\cos \alpha)^6 P_3 \ldots]$$

$$c_2 = \xi \, [1 - e^2 (\cos 2\alpha)^2 P_1 + e^4 (\cos 2a)^4 P_2 - e^6 (\cos 2\alpha)^6 P_3 \ldots]$$

$$c_3 = \xi \, [1 - e^2 (\cos 3\alpha)^2 P_1 + e^4 (\cos 3\alpha)^4 P_2 - e^6 (\cos 3\alpha)^6 P_3 \ldots]$$

$$c_n = \xi \, [1 - e^2 (\cos \omega)^2 P_1 + e^4 (\cos \omega)^4 P_2 - e^6 (\cos \omega)^6 P_3 \ldots]$$

$$C = n\xi \Big[1 - e^2 P_1 \text{ med } [\cos {}^2(0 \text{ bis } \omega)] + e^4 P_2 \text{ med } [\cos {}^4(0 \text{ bis } \omega)] - e^6 P_3 \text{ med } [\cos {}^6(0 \text{ bis } \omega)] \ldots . \Big]$$

$$C = \omega \Big[1 - P_1 e^2 \text{ med } [\cos {}^2(0 \text{ bis } \omega)] + P_2 e^4 \text{ med } [\cos {}^4(0 \text{ bis } \omega)] - P_3 e^6 \text{ med } [\cos {}^6(0 \text{ bis } \omega)] \ldots \Big]$$

Für den Quadranten der Ellipse ist ω = dem Viertelkreise $= \frac{a\,\pi}{2}$, med $[\cos {}^2(0 \text{ bis } 90^0)] = \frac{1}{2}$, med $[\cos {}^4(0 \text{ bis } 90^0)] = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$ u. s. w., und es ist daher die Länge des Quadranten der Ellipse

$$= \frac{a\,\pi}{2} \left[1 - P_1 \cdot e^2 \cdot \frac{1}{2} + P_2 \cdot e^4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} - P_3 \cdot e^6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \ldots . \right]$$

Da aber $P_1 = \frac{1}{2}$, $P_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$, $P_3 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)$ u. s. w. ist,

so ist jene Quadrantenlänge

$$Q = \frac{a\,\pi}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\, e\right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}\, e^2\right)^2 - \frac{1}{5} \left(\frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6}\, e^3\right)^2 \ldots . \right]$$

Dieselbe Formel durch Integralrechnung hergeleitet findet sich: Navier's Differential- und Integralrechnung, Theil I §. 321.

§. 2. Rectification der Parabel.

Figur 2. Die Ordinate CB sei in unendlich viele gleiche Theile getheilt, so daß $n\eta = y$, und durch die Theilungspunkte mit der Achse AB Parallelen gezogen, die den Parabelbogen AC in n Punkten treffen, so werden diese Punkte die Ordinaten $y_1 = \eta$, $y_2 = 2\eta$, $y_3 = 3\eta$ u. s. w. haben.

Die zugehörigen Abscissen sind daher $x_1 = \frac{\eta^2}{p}$, $x_2 = \frac{4\eta^2}{p}$, $x_3 = \frac{9\eta^2}{p} \ldots x_n = \frac{n^2\eta^2}{p}$

D und F seien zwei aufeinanderfolgende Theilungspunkte der Parabel, die unendlich nahe liegen werden, weshalb man DFE als ein rechtwinkliges Dreieck betrachten kann. Nun ist:

$$FE = m\eta - (m - 1)\,\eta = \eta.$$

$$DE = AH - AG = \frac{m^2\eta}{p} - \frac{(m-1)^2\,\eta^2}{p} = \frac{(2m - 1)\,\eta^2}{p.}$$

$$DF = c_m = \sqrt{\left(\eta^2 + \frac{(2m-1)^2\,\eta^4}{p^2}\right)}$$

Ebenso ist:

$$c_1 = \sqrt{\left(\eta^2 + \frac{\eta^4}{p^2}\right)} \qquad c_2 = \sqrt{\left(\eta^2 + \frac{9\eta^4}{p^2}\right)}$$

$$c_7 = \sqrt{\left(\eta^2 = \frac{169\eta^4}{p^2}\right)} \qquad c_n = \sqrt{\left(\eta^2 + \frac{(2n-1)^2\,\eta^4}{p^2}\right)}$$

Entwickeln wir jetzt diese Werthe von c_1, c_2, c_3 u. s. w. nach dem binomischen Lehrsatze, so ist

$$c_1 = \eta + \frac{P_1\eta^3}{p^2} + \frac{P_2\eta^5}{p^4} + \frac{P_3\eta^7}{p^6} \ldots .$$

$$c_2 = \eta + \frac{P_1 3^2\eta^3}{p^2} + \frac{P_2 3^4\eta^5}{p^4} + \frac{P_3 3^6\eta^7}{p^6} \ldots .$$

$$c_3 = \eta + \frac{P_1 5^2\eta^3}{p^2} + \frac{P_2 5^4\eta^5}{p^4} + \frac{P_3 5^6\eta^7}{p^6} \ldots .$$

$$c_n = \eta + \frac{P_1\,(2n-1)^2\,\eta^3}{p^2} + \frac{P_2\,(2n-1)^4\,\eta^5}{p^4} + \frac{P_3\,(2n-1)^6\,\eta^7}{p^6} \ldots .$$

Wenn wir die verticalen Reihen addiren und die Ausdrücke wegfallen lassen, in denen η in einer höhern Potenz als n vorkömmt, so erhalten wir als Summe der ersten Reihe $\varsigma_1 = n\eta$.

$$\varsigma_2 = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3}\,1\,.\,2\,.\,2^2\,\frac{P_1\eta^3}{p^2} = \frac{2^2 P_1 n^3\eta^3}{3p^2}$$

$$\varsigma_3 = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\,1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,\frac{2^4 P_2\eta^5}{p^4} = \frac{2^4 P_2 n^5\eta^5}{5p^4}$$

$$\varsigma_4 = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7}\,1.2.3.4.5.6\,\frac{2^6 P_3\eta^7}{p^6} = \frac{2^6 P_3 n^7\eta^7}{7p^6} \text{ u. s. w.}$$

Da aber $n\eta = y$, so ist:

$$C = y + \frac{2^2 P_1 y^3}{3p^2} + \frac{2^4 y^5 P_2}{5p^4} + \frac{2^6 y^7 P_3}{7p^6} \text{ u. s. w.}$$

Sollen Parabelbögen berechnet werden, die in der Nähe des Scheitels liegen, so ist die obige Formel zur Rechnung viel bequemer, als die durch Integralrechnung gefundene Formel

$$c = x\sqrt{\left(1 + \frac{p}{x}\right)} - \frac{p}{8}\,l\left[\frac{\sqrt{\left(1 + \frac{p}{x}\right)} - 1}{\sqrt{\left(1 + \frac{p}{x}\right)} + 1}\right]$$

wo der Mittelpunkt als Anfang der Abscissen gerechnet ist. Es convergirt übrigens unsere Reihe nur dann ins Unendliche fort, wenn $y < \frac{p}{2}$. Ist y größer als $\frac{p}{2}$, so muß man eine andere Formel entwickeln, indem man bei der Herleitung $DF = \sqrt{\left(\eta^2 + \frac{(2m-1)^2\,\eta^4}{p^2}\right)}$ den letzten Ausdruck zum ersten in der Binomialformel macht.

§. 3. Rectification der Hyperbel.

Figur 3. Die Gleichung der Hyperbel zwischen den Asymptoten ist
$$y = \frac{a^2}{x}.$$

Es ist klar, daß für $x = 0$ die Hyperbel unendlich wird; wir wollen daher das zwischen $Y = \frac{a^2}{X}$ und $y = \frac{a^2}{x}$ liegende Stück derselben berechnen.

Es sei $X = m\xi$ und $x = n\xi$, dann ist
$$AB = y_r - y_{r+1} = \frac{a^2}{r\xi} - \frac{a^2}{(r+1)\xi} = \frac{a^2}{r(r+1)\xi}$$

DC sei parallel mit der Abscissenachse gezogen und AD senkrecht auf DC, dann ist, wenn wir den Asymptotenwinkel φ nennen
$$AD = \frac{a^2}{r(r+1)\xi}\sin\varphi. \qquad DC = \xi - \frac{a^2}{r(r+1)\xi}\cos\varphi.$$

Denken wir uns nun A und C unendlich nahe liegend, dann ist ADC ein rechtwinkliges Dreieck, und es ist
$$AC = c_r = \sqrt{\left(\frac{a^4}{(r(r+1)\xi)^2}(\sin\varphi)^2 + \xi^2 + \frac{a^4}{(r(r+1)\xi)^2}(\cos\varphi)^2 - \frac{2a^2\cos\varphi}{r(r+1)}\right)}$$
$$c_r = \sqrt{\left(\frac{a^4}{(r(r+1)\xi)^2} + \xi^2 - \frac{2a^2\cos\varphi}{r(r+1)}\right)}$$

Offenbar ist es erlaubt, weil r unendlich groß ist, für $\frac{a^4}{(r(r+1)\xi)^2}$ den Ausdruck $\frac{a^4}{r^4\xi^2}$ zu setzen; dann wird:
$$c_r = \sqrt{\left(\frac{a^4}{r^4\xi^2} + \xi^2 - \frac{2a^2\cos\varphi}{r^2}\right)}$$

Ebenso ist $c_n = \sqrt{\left(\frac{a^4}{n^4\xi^2} + \xi^2 - \frac{2a^2\cos\varphi}{n^2}\right)}$

Betrachten wir die unter dem Wurzelzeichen befindliche Größe als ein Binom, dessen erster Theil $\frac{a^4}{n^4\xi^2}$, und dessen zweiter Theil $\xi^2 - \frac{2a^2\cos\varphi}{n^2}$ ist, so erhält man:
$$c_n = \frac{a^2}{n^2\xi} + \frac{\left(\xi^2 - \frac{2a^2\cos\varphi}{n^2}\right)n^2\xi}{a^2}P_1 + \frac{\left(\xi^2 - \frac{2a^2\cos\varphi}{n^2}\right)^2 n^6\xi^3}{a^6}P_2 \ldots$$
$$c_{(n+1)} = \frac{a^2}{(n+1)^2\xi} + \frac{\left(\xi^2 - \frac{2a^2\cos\varphi}{(n+1)^2}\right)(n+1)^2\xi}{a^2}P_1 + \frac{\left(\xi^2 - \frac{2a^2\cos\varphi}{(n+1)^2}\right)^2(n+1)^6\xi^3}{a^6}P_2 \ldots$$
$$c_m = \frac{a^2}{m^2\xi} + \frac{\left(\xi^2 - \frac{2a^2\cos\varphi}{m^2}\right)m^2\xi}{a^2} + \frac{\left(\xi^2 - \frac{2a^2\cos\varphi}{m^2}\right)^2 m^6\xi^3}{a^6}P_2 \ldots$$
oder
$$c_n = \frac{a^2}{n^2\xi} + \frac{n^2\xi^3 - 2a^2\xi\cos\varphi}{a^2}P_1 + \frac{(n^3\xi^3 - 2a^2n\xi\cos\varphi)^2\xi}{a^6}P_2 \ldots$$
$$c_{n+1} = \frac{a^2}{(n+1)^2\xi} + \frac{(n+1)^2\xi - 2a^2\xi\cos\varphi}{a^2}P_1 + \frac{((n+1)^3\xi^3 - 2a^2(n+1)\xi\cos\varphi)^2\xi}{a^6}P_2 \ldots$$
$$c_m = \frac{a^2}{m^2\xi} + \frac{m^2\xi^3 - 2a^2\xi\cos\varphi}{a^2}P_1 + \frac{(m^3\xi^3 - 2a^2m\xi\cos\varphi)^2\xi}{a^6}P_2 \ldots$$

Die Summe der ersten Verticalreihe ist nach I. §. 11 des vorigjährigen Programms $\frac{a^2 (m - n)}{mn\xi}$

$$\varsigma_1 = \frac{a^2 (m\xi - n\xi)}{mn\xi^2} = \frac{a^2 (X - x)}{Xx.}$$

$$\varsigma_2 = \frac{\frac{1}{3} (m^3 - n^3) \xi^3 - 2a^2 \cos\varphi (m - n) \xi}{a^2} P_1 = \frac{(\frac{1}{3} X^3 - x^3) - 2a^2 \cos\varphi (X - x)}{a^2} P_1$$

$$\varsigma_3 = \frac{\frac{1}{7} (m^7 - n^7) \xi^7 - \frac{4}{5} (m^5 - n^5) \xi^5 a^2 \cos\varphi + \frac{4}{3} a^4 (m^3 - n^3) \xi^3 (\cos\varphi)^2}{a^6} P_2$$

$$= \frac{\frac{1}{7} (X^7 - x^7) - \frac{4}{5} (X^5 - x^5) a^2 \cos\varphi + \frac{4}{3} (X^3 - x^3) a^4 (\cos\varphi)^2}{a^{10}} P_2$$

Ebenso ist

$$\varsigma_4 = \frac{\frac{1}{11} (X^{11} - x^{11}) - \frac{6}{9} (X^9 - x^9) a^2 \cos\varphi + \frac{12}{7} (X^7 - x^7) a^4 (\cos\varphi)^2 + \frac{8}{5} (X^5 - x^5) a^6 (\cos\varphi)^3}{a^{10}} P_3$$

$$\varsigma_5 = \frac{\frac{1}{15} (X^{15} - x^{15}) - \frac{8}{13} (X^{13} - x^{13}) a^2 \cos\varphi + \frac{24}{11} (X^{11} - x^{11}) a^4 (\cos\varphi)^2}{a^{14}}$$

$$+ \frac{- \frac{32}{9} (X^9 - x^9) a^6 (\cos\varphi)^3 + \frac{16}{7} (X^7 - x^7) a^8 (\cos\varphi)^4}{a^{14}} P_4$$

Ist die Hyperbel gleichseitig, d. h. $\cos\varphi = 0$, so erhalten wir:

$$C = \frac{a^2 (X - x)}{Xx} + \frac{1}{3} \frac{(X^3 - x^3)}{a^2} P_1 + \frac{1}{7} \frac{(X^7 - x^7)}{a^6} P_2 + \frac{1}{11} \frac{(X^{11} - x^{11})}{a^{10}} P_3 \ldots.$$

§. 4. Die Cycloide zu rectificiren, deren Gleichungen:

$$x = r\omega - r \sin\omega \qquad y = r - r\cos\omega.$$

Seien $x_n = rn\alpha - r \sin n\alpha$ und $x_{(n+1)} = r (n + 1) \alpha - r \sin (n + 1) \alpha$ zwei unendlich nahe auf einander folgende Abscissen und $y_n = r - r \cos n\alpha$ und $y_{(n+1)} = r - r \cos (n + 1) \alpha$ die zugehörigen Ordinaten, und betrachte ich das zwischen den Ordinaten liegende unendlich kleine Stück der Cycloide als gerade, so finde ich offenbar die Größe desselben, indem ich das Quadrat der Differenz der Abscissen zum Quadrat der Differenz der Ordinaten addire und aus der Summe die Quadratwurzel ziehe.

$$c_n = \sqrt{\left[(r\alpha + r \sin n\alpha - r \sin (n + 1) \alpha)^2 + (r \cos n\alpha - r \cos (n + 1) \alpha)^2\right]}$$

$$c_n = r \sqrt{\left[\alpha^2 + (\sin n\alpha)^2 + (\sin (n + 1) \alpha)^2 + 2\alpha \sin n\alpha - 2\alpha \sin (n + 1) \alpha - 2 \sin n\alpha \sin (n + 1) \alpha \right.}$$

$$\left. + (\cos n\alpha)^2 + (\cos (n + 1) \alpha)^2 - 2 \cos n\alpha \,.\, \cos (n + 1) \alpha)\right]$$

oder da $(\sin n\alpha)^2 + (\cos n\alpha)^2 = 1$ und $- 2 \sin n\alpha \,.\, \sin (n + 1) \alpha - 2 \cos n\alpha \,.\, \cos (n + 1) \alpha = - 2 \cos\alpha$.

$$c_n = \sqrt{(\alpha^2 + 2 + 2\alpha \sin n\alpha - 2\alpha \sin (n + 1) \alpha - 2 \cos\alpha)}$$

$$\alpha^2 = \alpha^2$$

$$2 = 2$$

$$2\alpha \sin n\alpha = 2n\alpha^2 - \frac{2n^3\alpha^4}{1.2.3} + \frac{2n^5\alpha^6}{1.2.3.4.5.} \ldots.$$

$$- 2\alpha \sin (n + 1) \alpha = - 2 (n + 1) \alpha^2 + \frac{2 (n + 1)^3\alpha^4}{1.2.3} - \frac{2 (n + 1)^5\alpha^6}{1.2.3.4.5}$$

$$- 2 \cos\alpha = - 2 + \frac{2\alpha^2}{1.2} - \frac{2\alpha^4}{1.2.3.4} + \frac{2\alpha^6}{1.2.3.4.5}$$

Bei der Addition heben die beiden ersten unter einander stehenden Reihen sich ganz. In den übrigen können wir wieder die höhern Ordnungen der unendlich kleinen Größen gegen die niedern vernachlässigen und erhalten:

$$\varsigma = \frac{2\,.\,3\,.\,n^2\alpha^4}{1\,.\,2\,.\,3} - \frac{2\,.\,5n^4\alpha^6}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} + \frac{2\,.\,7\,.\,n^6\alpha^8}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7} \ldots\ldots$$

$$\varsigma = \frac{2n^2\alpha^4}{1\,.\,2} - \frac{2n^4\alpha^6}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \frac{2n^6\alpha^8}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6} \ldots\ldots$$

$$-\frac{\varsigma}{\alpha^2} = -\frac{2n^2\alpha^2}{1\,.\,2} + \frac{2n^4\alpha^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \frac{2n^6\alpha^6}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6} \ldots\ldots$$

$$2 - \frac{\varsigma}{\alpha^2} = 2 - \frac{n^2\alpha^2}{1\,.\,2} + \frac{2n^4\alpha^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \frac{2n^6\alpha^6}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6} \ldots\ldots$$

$$2 - \frac{\varsigma}{\alpha^2} = 2 \cos n\alpha$$

$$\varsigma = 2\alpha^2 - 2\alpha^2 \cos n\alpha$$

Es war $c_n = r\sqrt{\varsigma} = \alpha r\sqrt{2}\,\sqrt{(1 - \cos n\alpha)} = \alpha r\sqrt{2}\,\sqrt{\left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - n\alpha\right)\right)}$

Es ist aber $\cos\left(45^0 + \frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \sin x}{2}}$

$$\sqrt{2}\,.\,\cos\left(45^0 + \frac{x}{2}\right) = \sqrt{(1 - \sin x)}$$

Mithin $c_n = \alpha r\sqrt{2}\sqrt{2}\,.\,\cos\left(45^0 + \frac{\pi}{4} - \frac{n\alpha}{2}\right)$

$$c_n = 2\alpha r \sin \frac{n\alpha}{2}$$

Ebenso ist

$$c_1 = 2\alpha r \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$c_2 = 2\alpha r \sin \frac{2\alpha}{2}$$

$$c_3 = 2\alpha r \sin \frac{3\alpha}{2}$$

$$c_n = 2\alpha r \sin \frac{n\alpha}{2}$$

$$C = 2\alpha r \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{2\alpha}{2} + \sin \frac{3\alpha}{2} \ldots\ldots \sin \frac{\omega}{2}\right)$$

$$C = 2n\alpha r \frac{\left(\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{2\alpha}{2} + \sin \frac{3\alpha}{2} \ldots\ldots \sin \frac{\omega}{2}\right)}{n}$$

$$C = 2r\omega \sin \text{med} \left(0 \text{ bis } \frac{\omega}{2}\right)$$

$$\sin \text{med} \left(0 \text{ bis } \frac{\omega}{2}\right) = \frac{2 - 2 \cos \frac{\omega}{2}}{\omega}$$

$$C = 2r\omega\left(\frac{2 - 2\cos\frac{\omega}{2}}{\omega}\right)$$

$$C = 4r\left(1 - \cos\frac{\omega}{2}\right)$$

Für $\omega = 2\pi$ erhält man als Länge der ganzen Cycloide

$$C = 4r\,(1 - \cos\pi) = 8r.$$

§. 5. Die Exponentiallinie zu rectificiren, deren Gleichung $y = e^x$.

Bezeichnet c_r ein zwischen den Ordinaten y_r und y_{r+1} gelegenes unendlich kleines Bogenstück und x_r und x_{r+1} die zugehörigen Abscissen, so ist allgemein:

$$c_r = \sqrt{\left(\left(y_{r+1} - y_r\right)^2 + \left(x_{r+1} - x_r\right)^2\right)}$$

$$y_{r+1} = e^{(r+1)\xi} = 1 + \frac{r+1}{1}\xi + \frac{(r+1)^2}{1\,.\,2}\xi^2 + \frac{(r+1)^3}{1\,.\,2\,.\,3}\xi^3 \;\ldots\ldots$$

$$y_r = e^{r\xi} = 1 + \frac{r\xi}{1} + \frac{r^2\xi^2}{1\,.\,2} + \frac{r^3\xi^3}{1\,.\,2\,.\,3}$$

$$y_{r+1} - y_r = \frac{\xi}{1} + \frac{(2r+1)\xi^2}{1\,.\,2} + \frac{(3r^2+3r+1)\xi^3}{1\,.\,2\,.\,3} \;\ldots\ldots$$

Es entsteht hier die Frage, ob wir in den Coefficientenausdrücken für ξ^2, ξ^3 u. s. w. alle Glieder bis auf das in die höchste Potenz von r multiplicirte weglassen dürfen. Klar ist, daß wenn r eine endliche Größe bleibt, von einem Werthe der Reihe nicht die Rede sein kann. Denken wir uns r bis zur Unendlichkeit fortschreitend, dann ist allerdings auch $\frac{2r\xi^2}{1\,.\,2}$ keine endliche Größe, kann es aber durch Summirung mit den für die übrigen Bogenstücke in gleicher Weise entwickelten Ausdrücken werden, $\frac{\xi^2}{1\,.\,2}$, $\frac{(3r+1)\xi^3}{1\,.\,2\,.\,3}$ u. s. w. kann aber selbst durch jene Summirung, wenn auch r unendlich wird, nie eine endlich große Größe werden, weil die Coefficienten von ξ^2, ξ^3 u. s. w. wenigstens eine höhere arithmetische Reihe zweiter Ordnung sein müßten. Es ist also:

$$y_{r+1} - y_r = \xi + \frac{r\xi^2}{1} + \frac{r^2\xi^3}{1\,.\,2} + \frac{r^3\xi^4}{1.2.3} \;\ldots\ldots$$

$$y_{r+1} - y_r = \xi\left(1 + \frac{r\xi}{1} + \frac{r^2\xi^2}{1\,.\,2} + \frac{r^3\xi^3}{1.2.3} \;\ldots\ldots\right)$$

$$y_{r+1} - y_r = \xi e^{r\xi}$$

Es ist daher: $c_r = (\xi^2 + \xi^2 e^{2r\xi})$

Wir können den obigen Ausdruck in doppelter Weise nach dem binomischen Lehrsatze entwickeln, nämlich für positive und für negative x. Im ersten Falle werden wir $\xi^2 e^{2r\xi}$, im zweiten Falle ξ^2 zum ersten Gliede des Ausdrucks machen, um nämlich in beiden Fällen convergente Reihen zu erzielen. Im ersten Falle ist:

$$c_n = \xi e^{n\xi} + \frac{\xi P_1}{e^{n\xi}} + \frac{\xi P_2}{e^{3n\xi}} + \frac{\xi P_3}{e^{5n\xi}} \;\ldots\ldots$$

$$\underset{n+1}{c} = \xi e^{(n+1)\xi} + \frac{\xi \underset{1}{P}}{e^{(n+1)\xi}} + \frac{\xi \underset{2}{P}}{e^{(3n+3)\xi}} + \frac{\xi \underset{3}{P}}{e^{(5n+5)\xi}} \ldots .$$

$$\underset{m}{c} = \xi e^{m\xi} + \frac{\xi \underset{1}{P}}{e^{m\xi}} + \frac{\xi \underset{2}{P}}{e^{3m\xi}} + \frac{\xi \underset{3}{P}}{e^{5m\xi}} \ldots .$$

Addiren wir wieder die verticalen Reihen, so ist:

$$\underset{1}{\varsigma} = \frac{\xi e^{(m+1)\xi} - \xi e^{n\xi}}{e^{\xi} - 1} = e^{X} - e^{x} = Y - y.$$

(cf. I. §. 16 des vorjährigen Programms.)

Die übrigen verticalen Reihen bilden fallende geometrische Progressionen, deren jede wir als Differenz zweier fallenden unendlichen Progressionen ansehen können, deren eine mit dem obersten, die zweite mit dem untersten Glied der verticalen Reihe als erstem Gliede anfängt und die wir nach der bekannten Formel für unendliche convergirende Reihen summiren:

$$\underset{2}{\varsigma} = \frac{\frac{\xi \underset{1}{P}}{e^{n\xi}}}{1 - \frac{1}{e^{\xi}}} - \frac{\frac{\xi \underset{1}{P}}{e^{m\xi}}}{1 - \frac{1}{e^{\xi}}} = \frac{\xi \underset{1}{P}}{e^{n\xi} - e^{(n-1)\xi}} - \frac{\xi \underset{1}{P}}{e^{m\xi} - e^{(m-1)\xi}}$$

$$\frac{\xi \underset{1}{P}}{e^{n\xi} - e^{(n-1)\xi}} = \frac{\xi \underset{1}{P}}{\xi + \frac{n\xi^2}{1.} + \frac{n^2\xi^3}{1\,.\,2} + \frac{n^3\xi^4}{1\,.\,2\,.\,3} \ldots .}$$

$$= \frac{\underset{1}{P}}{1 + \frac{n\xi}{1} + \frac{n^2\xi^2}{1\,.\,2} + \frac{n^3\xi^3}{1\,.\,2\,.\,3} \ldots .} = \frac{\underset{1}{P}}{e^{x}}$$

Ebenso ist $$\frac{\xi \underset{1}{P}}{e^{m\xi} - e^{(m-1)\xi}} = \frac{\underset{1}{P}}{e^{m\xi}} = \frac{\underset{1}{P}}{e^{X}}$$

Mithin $$\underset{2}{\varsigma} = \frac{\underset{1}{P}}{e^{x}} - \frac{\underset{1}{P}}{e^{X}}$$

Ebenso ist $$\underset{3}{\varsigma} = \frac{\frac{\xi \underset{2}{P}}{e^{3n\xi}}}{1 - e^{3\xi}} - \frac{\frac{\xi \underset{2}{P}}{e^{3n\xi}}}{1 - e^{3\xi}}$$

$$\underset{3}{\varsigma} = \frac{\xi \underset{2}{P}}{e^{3n\xi} - e^{(3n-3)\xi}} - \frac{\xi \underset{2}{P}}{e^{3m\xi} - e^{(3m-3)\xi}}$$

$$\frac{\xi \underset{2}{P}}{e^{3n\xi} - e^{(3n-3)\xi}} = \frac{\xi \underset{2}{P}}{3\xi + \frac{9n\xi^2}{1} + \frac{27n^2\xi^3}{1\,.\,2} + \frac{81n^3\xi^4}{1\,.\,2\,.\,3} \ldots}$$

$$\frac{\xi \underset{2}{P}}{e^{3n\xi} - e^{(3n-3)\xi}} = \frac{\underset{2}{P}}{3\left(1 + 3n\xi + \frac{9n^2\xi^2}{1\,.\,2} + \frac{27n^3\xi^3}{1\,.\,2\,.\,3} \ldots\right)} = \frac{\underset{2}{P}}{3e^{3x}}$$

Ebenso ist $$\frac{\xi \underset{2}{P}}{e^{3m\xi} - e^{(3m-3)\xi}} = \frac{\underset{2}{P}}{3e^{3X}}, \text{ also } \underset{3}{\varsigma} = \frac{\underset{2}{P}}{3e^{3x}} - \frac{\underset{2}{P}}{3e^{3X}}$$

Ebenso ist $\underset{4}{\varsigma} = \frac{\underset{3}{P}}{5e^{5x}} - \frac{\underset{3}{P}}{5e^{5X}}$ u. s. w.

Es ist daher

$$C = Y - y + \frac{\underset{1}{P}(e^X - e^x)}{e^X\,e^x} + \frac{\underset{2}{P}(e^{3X} - e^{3x})}{3e^{3X}e^{3x}} + \frac{\underset{3}{P}(e^{5X} - e^{5x})}{5e^{5X}e^{5x}} \ldots.$$

$$C = Y - y + \frac{\underset{1}{P}\,(Y - y)}{Yy} + \frac{\underset{2}{P}\,(Y^3 - y^3)}{3Y^3y^3} + \frac{\underset{3}{P}\,(Y^5 - y^5)}{5Y^5y^5} \ldots.$$

Für $x = 0$, also $y = 1$ ist

$$C = Y - 1 + \frac{\underset{1}{P}\,(Y - 1)}{Y} + \frac{\underset{2}{P}\,(Y^3 - 1)}{3Y^3} + \frac{\underset{3}{P}\,(Y^5 - 1)}{5Y^5} \ldots.$$

Wir wollen jetzt die Länge der Curve, wenn x negativ ist, berechnen: Es war allgemein $\underset{r}{c} = \sqrt{(\xi^2e^{2r\xi} + \xi^2)}$. Daher ist, wenn wir ξ^2 zum ersten Gliede machen:

$$\underset{n}{c} = \xi[1 + \underset{1}{P}e^{2n\xi} + \underset{2}{P}e^{4n\xi} + \underset{3}{P}e^{6n\xi} \ldots.]$$

$$\underset{n+1}{c} = \xi[1 + \underset{1}{P}e^{(2n+2)\xi} + \underset{2}{P}e^{(4n+4)\xi} + \underset{3}{P}e^{(6n+6)\xi} \ldots.]$$

$$\underset{m}{c} = \xi[1 + \underset{1}{P}e^{2m\xi} + \underset{2}{P}e^{4m\xi} + \underset{3}{P}e^{6m\xi} \ldots.]$$

$$\underset{1}{\varsigma} \text{ ist } m\xi - n\xi = X - x.$$

$$\underset{2}{\varsigma} = \frac{\underset{1}{P}\xi e^{2n\xi}}{1 - e^{2\xi}} - \frac{\underset{1}{P}\xi e^{2m\xi}}{1 - e^{2\xi}}$$

$$\frac{\underset{1}{P}\xi e^{2n\xi}}{1 - e^{2\xi}} = \frac{\underset{1}{P}\xi\left(1 + 2n\xi + \frac{(2n\xi)^2}{1\,.\,2} + \frac{(2n\xi)^3}{1\,.\,2\,.\,3}\ldots.\right)}{-\;2\xi - \frac{4\xi^2}{1\,.\,2} - \frac{8\xi^3}{1\,.\,2\,.\,3}\ldots.}$$

$$= \underset{1}{P}\left(-\frac{1}{2} - n\xi - \frac{2n^2\xi^2}{1\,.\,2} - \frac{4n^3\xi^3}{1\,.\,2\,.\,3}\ldots.\right) = -\underset{1}{P}\,\frac{1}{2}\,e^{2n\xi}$$

Ebenso ist $\frac{\underset{1}{P}\xi e^{2m\xi}}{1 - e^{2\xi}} = -\underset{1}{P}\,\frac{1}{2}\,e^{2m\xi}$

$$\underset{2}{\varsigma} = \underset{1}{P}\,(\tfrac{1}{2}\,e^{2m\xi} - \tfrac{1}{2}\,e^{2n\xi}) = \tfrac{1}{2}\,\underset{1}{P}\,(e^{2X} - e^{2x})$$

Ebenso ist $\underset{3}{\varsigma} = \frac{1}{4}\,\underset{2}{P}\,(e^{4X} - e^{4x}) \ldots.$

Es ist daher

$$C = X - x + \frac{\underset{1}{P}\,(e^{2X} - {}^{2x})}{2} + \frac{\underset{2}{P}\,(e^{4X} - e^{4x})}{4} + \frac{\underset{3}{P}\,(e^{6X} - e^{6x})}{6} \ldots.$$

$$C = X - x + \frac{\underset{1}{P}\,(Y^2 - y^2)}{2} + \frac{\underset{2}{P}\,(Y^4 - y^4)}{4} + \frac{\underset{3}{P}\,(Y^6 - y^6)}{6} \ldots.$$

Es ist hier natürlich X und x negativ sowie $1 > y > Y$. Daß auch $\underset{2}{P}$, $\underset{4}{P}$ u. s. w. negativ, braucht nicht bemerkt zu werden.

§. 6. Die Kettenlinie zu rectificiren, deren Gleichung:

$$y = a\,\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}$$

Es seien $\underset{m-1}{x} = (m-1)\,\xi$ und $\underset{m}{x} = m\xi$ zwei aufeinanderfolgende Abscissen und $\underset{m-1}{y}$ und $\underset{m}{y}$ die zugehörigen Ordinaten, so ist der zwischen jenen Ordinaten liegende Theil der Kettenlinie, den wir wegen der unendlichen Nähe der Ordinaten als grade Linie betrachten können, nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$\underset{m}{c} = \sqrt{\left(\underset{m}{y} - \underset{m-1}{y}\right)^2 + \xi^2}$$

$$\underset{m}{y} = \frac{ae^{\frac{m\xi}{a}}}{2} + \frac{ae^{-\frac{m\xi}{a}}}{2}$$

$$\underset{m}{y} = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{m\xi}{a} + \frac{\left(\frac{m\xi}{a}\right)^2}{1\,.\,2} + \frac{\left(\frac{m\xi}{a}\right)^3}{1\,.\,2\,.\,3} \ldots + 1 - \frac{m\xi}{a} + \frac{\left(\frac{m\xi}{a}\right)^2}{1\,.\,2} - \frac{\left(\frac{m\xi}{a}\right)^3}{1\,.\,2\,.\,3} \ldots\right)$$

$$\underset{m-1}{y} = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{(m-1)}{a}\,\xi + \frac{\left(\frac{m-1}{a}\,\xi\right)^2}{1\,.\,2} + \frac{\left(\frac{m-1}{a}\,\xi\right)^3}{1\,.\,2\,.\,3} \ldots\right.$$

$$\left. + 1 - \frac{(m-1)}{a}\,\xi + \frac{\left(\frac{m-1}{a}\,\xi\right)^2}{1\,.\,2} - \frac{\left(\frac{m-1}{a}\,\xi\right)^3}{1\,.\,2\,.\,3} \ldots\right)$$

$$\underset{m}{y} - \underset{m-1}{y} = \frac{a}{2}\left[\frac{\xi}{a} + \frac{\frac{2m\xi^2 - \xi^2}{a^2}}{1\,.\,2} + \frac{\frac{3m^2\xi^3 - 3m\xi^3 + \xi^3}{a^3}}{1\,.\,2\,.\,3} \ldots\right.$$

$$\left. - \frac{\xi}{a} + \frac{\frac{2m\xi^2 - \xi^2}{a^2}}{1\,.\,2} - \frac{\frac{3m^2\xi^3 - 3m\xi^3 + \xi^3}{a^3}}{1\,.\,2\,.\,3} \ldots\right]$$

Wir können hier, weil die Größe, um die es sich handelt, eine unendlich kleine Größe ist, die unendlich kleinen Größen zweiter Ordnung vernachlässigen

$$\underset{m}{y} - \underset{m-1}{y} = \frac{a}{2}\left(\frac{\xi}{a} + \frac{\frac{m\xi^2}{a^2}}{1} + \frac{\frac{m^2\xi^3}{a^3}}{1\,.\,2} \ldots - \frac{\xi}{a} + \frac{\frac{m\xi^2}{a^2}}{1} - \frac{\frac{m^2\xi^3}{a^3}}{1\,.\,2} \ldots\right)$$

$$\underset{m}{y} - \underset{m-1}{y} = \frac{\xi}{2}\left(1 + \frac{m\xi}{a} + \frac{\frac{m^2\xi^2}{a^2}}{1\,.\,2} + \frac{\frac{m^3\xi^3}{a^3}}{1.2.3} \ldots - 1 + \frac{\frac{m\xi}{a}}{1} + \frac{\frac{m^2\xi^2}{a^2}}{1\,.\,2} + \ldots\right)$$

$$\underset{m}{y} - \underset{m-1}{y} = \frac{\xi}{2}\left(e^{\frac{m\xi}{a}} - e^{-\frac{m\xi}{a}}\right)$$

$$\left(\underset{m}{y} - \underset{m-1}{y}\right)^2 = \frac{\xi^2}{4}\left[e^{\frac{2m\xi}{a}} - 2 + e^{-\frac{2m\xi}{a}}\right]$$

$$\left(\underset{m}{y} - \underset{m-1}{y}\right)^2 + \xi^2 = \frac{\xi^2}{4}\left(e^{\frac{2m\xi}{a}} + 2 + e^{-\frac{2m\xi}{a}}\right)$$

$$\sqrt{\left(\underset{m}{y} - \underset{m-1}{y}\right)^2 + \xi^2} = \underset{m}{c} = \frac{\xi}{2}\left(e^{\frac{m\xi}{a}} + e^{-\frac{m\xi}{a}}\right)$$

Ebenso ist $c_1 = \frac{\xi}{2}\left(e^{\frac{\xi}{a}} + e^{-\frac{\xi}{a}}\right) = \frac{\xi}{2} e^{\frac{\xi}{a}} + \frac{\xi}{2} e^{-\frac{\xi}{a}}$

$$c_2 = \frac{\xi}{2}\left(e^{\frac{2\xi}{a}} + e^{-\frac{2\xi}{a}}\right) = \frac{\xi}{2} e^{\frac{2\xi}{a}} + \frac{\xi}{2} e^{-\frac{2\xi}{a}}$$

$$c_3 = \frac{\xi}{2}\left(e^{\frac{3\xi}{a}} + e^{-\frac{3\xi}{a}}\right) = \frac{\xi}{2} e^{\frac{3\xi}{a}} + \frac{\xi}{2} e^{-\frac{3\xi}{a}}$$

$$c_n = \frac{\xi}{2}\left(e^{\frac{n\xi}{a}} + e^{-\frac{n\xi}{a}}\right) = \frac{\xi}{2} e^{\frac{n\xi}{a}} + \frac{\xi}{2} e^{-\frac{n\xi}{a}}$$

Nennen wir nun die Summe der ersten verticalen Reihe ς_1, die der zweiten ς_2, so ist:

$$\frac{\xi}{2}\, e^{\frac{\xi}{a}} = \frac{1}{2}\left(\xi + \frac{\frac{\xi^2}{a}}{1} + \frac{\frac{\xi^3}{a^2}}{1\,.\,2} + \frac{\frac{\xi^4}{a^3}}{1.2.3} \dots\dots\right)$$

$$\frac{\xi}{2}\, e^{\frac{2\xi}{a}} = \frac{1}{2}\left(\xi + \frac{2\xi^2}{a} + \frac{\frac{4\xi^3}{a^2}}{1.2} + \frac{\frac{8\xi^4}{a^3}}{1.2.3} \dots\dots\right)$$

$$\frac{\xi}{2}\, e^{\frac{n\xi}{a}} = \frac{1}{2}\left(\xi + \frac{\frac{n\xi^2}{a}}{1} + \frac{\frac{n^2\xi^3}{a^2}}{1\,.\,2} + \frac{\frac{n^3\xi^4}{a^3}}{1.2.3} \dots\dots\right)$$

Addiren wir die unter einander stehenden Ausdrücke und lassen in der Summationsformel wieder die unendlich kleinen Größen weg, so erhalten wir:

$$\varsigma_1 = \frac{1}{2}\left[n\xi + \frac{\frac{n^2\xi^2}{a}}{1\,.\,2} + \frac{\frac{n^3\xi^3}{a^2}}{1.2.3} + \frac{\frac{n^4\xi^4}{a^3}}{1.2.3.4} \dots\dots\right]$$

$$\varsigma_1 = \frac{a}{2}\left[\frac{x}{a} + \frac{\frac{x^2}{a^2}}{1\,.\,2} + \frac{\frac{x^3}{a^3}}{1.2.3} + \frac{\frac{x^4}{a^4}}{1.2.3.4} \dots\dots\right]$$

$$\varsigma_1 + \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\left[1 + \frac{x}{a} + \frac{\frac{x^2}{a^2}}{1\,.\,2} + \frac{\frac{x^3}{a^3}}{1.2.3} + \frac{\frac{x^4}{a^4}}{1.2.3.4} \dots\dots\right]$$

$$\varsigma_1 + \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\, e^{\frac{x}{a}}$$

$$\varsigma_1 = \frac{a}{2}\, e^{\frac{x}{a}} - \frac{a}{2}$$

Suchen wir jetzt ς_2 zu finden

$$\frac{\xi}{2}\, e^{-\frac{\xi}{a}} = \frac{1}{2}\left(\xi - \frac{\frac{\xi^2}{a}}{1} + \frac{\frac{\xi^3}{a^2}}{1.2} - \frac{\frac{\xi^4}{a^3}}{1\,.\,2\,.\,3} \dots\dots\right)$$

$$\frac{\xi}{2}\, e^{-\frac{2\xi}{a}} = \frac{1}{2}\left(\xi - \frac{\frac{2\xi^2}{a}}{1} + \frac{\frac{4\xi^3}{a^2}}{1.2} - \frac{\frac{8\xi^4}{a^3}}{1\,.\,2\,.\,3}\right)$$

$$\frac{\xi}{2}\, e^{-\frac{n\xi}{a}} = \frac{1}{2}\left(\xi - \frac{\frac{n\xi^2}{a}}{1} + \frac{\frac{n^2\xi^3}{a^2}}{1.2} - \frac{\frac{n^3\xi^4}{a^3}}{1\,.\,2\,.\,3} \dots\dots\right)$$

$$\varsigma_2 = \frac{1}{2}\left(n\xi - \frac{\frac{n^2\xi^2}{a}}{1.2} + \frac{\frac{n^3\xi^3}{a^2}}{1.2.3} - \frac{\frac{n^4\xi^4}{a^3}}{1.2.3.4} \ldots\right)$$

$$\varsigma_2 = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\frac{x^2}{a}}{1.2} + \frac{\frac{x^3}{a^2}}{1.2.3} - \frac{\frac{x^4}{a^3}}{1.2.3.4} \ldots\right)$$

$$\varsigma_2 = \frac{a}{2}\left(\frac{x}{a} - \frac{\frac{x^2}{a^2}}{1.2} + \frac{\frac{x^3}{a^3}}{1.2.3} - \frac{\frac{x^4}{a^4}}{1.2.3.4} \ldots\right)$$

$$\varsigma_2 - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\left(-1 + \frac{x}{a} - \frac{\frac{x^2}{a^2}}{1.2} + \frac{\frac{x^3}{a^3}}{1.2.3} - \frac{\frac{x^4}{a^4}}{1.2.3.4} \ldots\right)$$

$$\varsigma_2 - \frac{a}{2} = -\frac{a}{2} e^{-\frac{x}{a}}$$

$$\varsigma_2 = \frac{a}{2} - \frac{a}{2} e^{-\frac{x}{a}}$$

Aber:

$$\varsigma_1 = -\frac{a}{2} + \frac{a}{2} e^{\frac{x}{a}}$$

$$C = a\,\frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{2}$$

Führen wir die obige Formel auf y statt auf x zurück, so vereinfacht sich dieselbe bedeutend:

$$C = a\,\frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{2} = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} - 2 + e^{-\frac{2x}{a}}\right)\right)}$$

$$C = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}}\right) - a^2\right)}$$

$$C = \sqrt{(y^2 - a^2)}$$

§. 7. Die logarithmische Linie zu rectificiren, deren Gleichung: $y = a \log x$.

Es ist ersichtlich, daß für $x = 0$ die logarithmische Linie unendlich ist; wir wollen daher die Länge derselben von $x = n\xi$ bis $X = m\xi$ berechnen. Es seien $x_r = r\xi$ und $x_{r+1} = (r+1)\xi$ zwei auf einander folgende Abscissen; die zugehörigen Ordinaten sind:

$$y_r = a\,l\,r\xi \text{ und } y_{r+1} = a\,l\,(r+1)\xi$$

Das zwischen den Ordinaten liegende unendlich kleine Stück der Curve ist allgemein:

$$c_r = \sqrt{\left((y_{r+1} - y_r)^2 + (x_{r+1} - x_r)^2\right)}$$

$$c = \sqrt{\left((a\,l\,(r+1)\xi - a\,l\,r\xi)^2 + \xi^2\right)}$$

Wir haben im vorigjährigen Programm §. 9 bewiesen, daß, wenn r, wie hier, unendlich

$$l\,m - l\,n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \ldots + \frac{1}{m} \text{ ist.}$$

Es ist daher $l\,(r + 1) - l\,r = \frac{1}{r+1}$

$$c_r = \sqrt{\left(\frac{a^2}{(r + 1)^2} + \xi^2\right)} \text{ Es ist daher:}$$

$$c_n = \frac{a}{n+1} + \frac{(n + 1)\xi^2}{a} P_1 + \frac{(n + 1)^3\xi^4}{a^3} P_2 + \frac{(n+1)^5\xi^6}{a^5} P_3 \dots$$

$$c_{n+1} = \frac{a}{n+2} + \frac{(n + 2)\xi^2}{a} P_1 + \frac{(n + 2)^3\xi^4}{a^3} P_2 + \frac{(n + 2)^5\xi^6}{a^5} P_3 \dots$$

$$c_m = \frac{a}{m+1} + \frac{(m + 1)\xi^2}{a} P_1 + \frac{(m + 1)^3\xi^4}{a^3} P_2 + \frac{(m + 1)^5\xi^6}{a^5} P_3 \dots$$

$$C = a\,l\,\frac{m}{n} + \frac{1}{2}\cdot\frac{X^2-x^2}{a} P_1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{X^4-x^4}{a^3} P_2 + \frac{1}{6}\,\frac{X^6-x^6}{a^5} P_3 \dots$$

Es kann die obige Formel zu convergiren aufhören, wenn $a < X$ ist. Für diesen Fall muß eine neue Formel aus $c_r = \sqrt{\left(\frac{a^2}{(m + 1)^2} + \xi^2\right)}$ berechnet werden, indem man ξ^2 zum ersten Gliede bei der Entwickelung nach dem Binomialtheorem macht. Ist a einigermaßen größer als X, so scheint mir die Formel zur Rechnung bequemer zu sein, als die der Integralrechnung (Lübsen's Infinit.-Rechn. II §. 55).

$$C = \sqrt{(a^2 + X^2)} - a\,l\left(\frac{a + \sqrt{(a^2 + X^2)}}{X}\right) - \sqrt{(a^2 + x^2)} + a\,l\left(\frac{a + \sqrt{(a^2 + x^2)}}{x}\right)$$

§. 8. Die Archimedische Spirale zu rectificiren, deren Gleichung $r = \frac{a}{2\pi}\,\omega$.

Figur 4. Es seien r_n und r_{n+1} zwei auf einander folgende Radien, die den unendlich kleinen Winkel α einschließen. Es ist:

$$BD = AB \sin\alpha = r_n \sin\alpha$$

$$DC = r_{n+1} - r_n \cos\alpha.$$

Weil jedoch α unendlich klein ist, so ist $DC = r_{n+1} - r_n$, $BD = r_n\alpha$ und das Stück der Curve:

$$BC = \sqrt{(r_{n+1} - r_n)^2 + (r_n\alpha)^2}$$

Aber $r_n = \frac{a}{2\pi}\, n\alpha$ und $r_{n+1} = \frac{a}{2\pi}\,(n + 1)\,\alpha$

$$BC = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4\pi^2}\,\alpha^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}\,n^2\alpha^4\right)}$$

$$BC = c_n = \frac{a}{2\pi}\,\alpha\,\sqrt{(1 + n^2\alpha^2)}$$

In derselben Weise ist:

$$c_1 = \frac{a}{2\pi}\,\alpha\,\sqrt{(1 + \alpha^2)}$$

$$c_2 = \frac{a}{2\pi}\,\alpha\,\sqrt{(1 + (2\alpha)^2)}$$

$$c_n = \frac{a}{2\pi}\,\alpha\,\sqrt{(1 + n^2\alpha^2)} \quad \text{Nach dem binomischen Lehrsatze ist:}$$

$$c_1 = \frac{a}{2\pi}\,\alpha\,[1 + P_1\,\alpha^2 + P_2\,\alpha^4 + P_3\,\alpha^6 \dots]$$

$$\underset{2}{c} = \frac{a}{2\pi}\,\alpha\,[1 + 2^2 \underset{1}{P}\,\alpha^2 + 2^4 \underset{2}{P}\,\alpha^4 + 2^6 \underset{3}{P}\,\alpha^6 \ldots]$$

$$\underset{n}{c} = \frac{a}{2\pi}\,\alpha\,[1 + n^2 \underset{1}{P}\,\alpha^2 + n^4 \underset{2}{P}\,\alpha^4 + n^6 \underset{3}{P}\,\alpha^6 \ldots]$$

Bringen wir den Factor α mit unter die Klammer und summiren die verticalen Reihen mit Vernachlässigung der unendlich kleinen Ausdrücke im Resultat, so erhalten wir:

$$C = \frac{a}{2\pi}\left[n\alpha + \frac{n^3\alpha^3\underset{1}{P}}{3} + \frac{n^5\alpha^5\underset{2}{P}}{5} + \frac{n^7\alpha^7\underset{3}{P}}{7} \ldots\right]$$

oder da $n\alpha = \omega$

$$C = \frac{a}{2\pi}\left[\omega + \frac{\omega^3\underset{1}{P}}{3} + \frac{\omega^5\underset{2}{P}}{5} + \frac{\omega^7\underset{3}{P}}{7} \ldots\right]$$

Ist $\omega > 1$, so hört die Convergenz auf; wie indessen auch für diesen Fall eine convergente Reihe herstellig zu machen, ist schon früher angegeben.

§. 9. Die Exponentialspirale zu rectificiren, deren Gleichung $r = e^\omega$.

Figur 5. Es seien $\underset{n}{r} = e^{n\alpha}$ und $\underset{n+1}{r} = e^{(n+1)\alpha}$ zwei unmittelbar auf einanderfolgende Radien, die den unendlich kleinen Winkel α einschließen. Diese bilden mit dem zwischen ihnen liegenden Stück der Spirale, das wir als gerade Linie ansehen können ein Dreieck ($\triangle$). Ein zweites Dreieck (δ) möge von $\underset{m}{r} = e^{m\alpha}$ und $\underset{m+1}{r} = e^{(m+1)\alpha}$ nebst dem zugehörigen Stück der Spirale gebildet werden. Offenbar ist $\triangle \sim \delta$, weil 2 Seiten proportionirt und der eingeschlossene Winkel bei beiden (α) gleich ist. Es haben mithin alle Radien dieselbe Neigung gegen die Spirale. Versuchen wir es, diesen Neigungswinkel zu bestimmen.

Der Winkel $ACB = \alpha$ sei unendlich klein, $AC = e^0 = 1$,
$BC = e^\alpha$. $\angle CAB = y$. $\angle ABC = x$; dann verhält sich

$$AC : CB = \sin x : \sin y.$$
$$1 : e^\alpha = \sin x : \sin y.$$

Da aber $y = 180^0 - x - \alpha$ ist und $\sin(180^0 - x - \alpha) = \sin(x + \alpha)$, so ist:

$$1 : e^\alpha = \sin x : \sin(x + \alpha).$$
$$\sin(x + \alpha) = e^\alpha \sin x.$$
$$\sin x \,.\, \cos\alpha + \cos x \,.\, \sin\alpha = e^\alpha \sin x.$$
$$\sin\alpha \sqrt{(1 - (\sin x)^2)} = e^\alpha \sin x - \sin x \,.\, \cos\alpha.$$
$$(\sin\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2 \,.\, (\sin x)^2 = e^{2\alpha}(\sin x)^2 + (\sin x)^2(\cos\alpha)^2 - 2e^\alpha(\sin x)^2 \,.\, \cos\alpha.$$
$$(\sin x)^2 = \frac{(\sin\alpha)^2}{e^{2\alpha} + (\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 - 2e^\alpha\cos\alpha}$$
$$(\sin x)^2 = \frac{(\sin\alpha)^2}{e^{2\alpha} + 1 - 2e^\alpha\cos\alpha.}$$
$$\sin\alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{1.2.3} + \frac{\alpha^5}{1.2.3.4.5.} \ldots$$
$$(\sin\alpha)^2 = \alpha^2 + \frac{2\alpha^4}{1.2.3} \ldots$$

Da aber α unendlich klein ist, so verschwinden alle Glieder gegen das erste Glied, weil sie, wenn jenes auch selbst unendlich klein ist, unendlich kleine Größen höherer Ordnung sind, und es ist daher, wie schon im Voraus zu erwarten stand:

$$(\sin \alpha)^2 = \alpha^2$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{1 \,.\, 2} + \frac{\alpha^4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} \,.\,.\,.\,.\,.$$

$$2e^\alpha = 2 + 2\alpha + \frac{2\alpha^2}{1 \,.\, 2} + \frac{2\alpha^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \,.\,.\,.$$

$$-2e^\alpha \cos \alpha = -2 - 2\alpha - \tfrac{1}{3}\alpha^3 \,.\,.\,.\,.\,.$$

$$1 = 1$$

$$e^{2\alpha} = 1 + 2\alpha + \frac{4\alpha^2}{1 \,.\, 2} + \frac{8\alpha^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.}$$

$e^{2\alpha} + 1 - 2e^\alpha \cos \alpha = 2\alpha^2 + \alpha^3 \,.\,.\,.\,.$ oder da α^3 gegen α^2 verschwindet

$$e^{2\alpha} + 1 - 2\, e^\alpha \cos \alpha = 2\alpha^2$$

Es war $(\sin x)^2 = \dfrac{(\sin \alpha)^2}{e^{2\alpha} + 1 - 2e^\alpha \cos \alpha} = \dfrac{\alpha^2}{2\alpha^2} = \dfrac{1}{2}$

$$\sin x = \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

$x = 45^0$. Die Radien bilden mit der Spirale stets einen Winkel von 45^0.

Weil bei dem unendlich kleinen $\angle\, \alpha$ der Bogen mit dem sinus zusammenfällt, ist

$$AD = AC \sin \alpha = r_n \sin \alpha = r_n \alpha$$

$$AD = AB \sin x = c_n \sin x.$$

$c_n = \dfrac{r_n \alpha}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = r_n \alpha \sqrt{2}$ d. h. das unendlich kleine Stück AB der Spirale ist $\sqrt{2}$ mal größer als ein entsprechendes Stück eines mit AC gezogenen Kreises.

$$r_0 = e^0 = 1$$

$$r_1 = e^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^2}{1 \,.\, 2} \,.\,.\,.\,.\,.$$

$$r_2 = e^{2\alpha} = 1 + 2\alpha + \frac{4\alpha^2}{1 \,.\, 2} \,.\,.\,.\,.$$

$$r_n = e^{n\alpha} = 1 + n\alpha + \frac{n^2\alpha^2}{1 \,.\, 2} \,.\,.\,.\,.$$

Es ist daher:

$$c_1 = [1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{1 \,.\, 2} \,.\,.\,.\,.\,.\,]\ \alpha\sqrt{2}$$

$$c_2 = [1 + 2\alpha + \frac{4\alpha^2}{1 \,.\, 2} \,.\,.\,.\,]\ \alpha\sqrt{2}$$

$$c_n = [1 + n\alpha + \frac{n^2\alpha^2}{1 \,.\, 2} \,.\,.\,.\,]\ \alpha\sqrt{2}$$

Summiren wir die verticalen Reihen, indem wir wieder die unendlich kleinen Größen vernachlässigen, so erhalten wir für C von $r = e^0$ bis $r = e^\omega$

$$C = [n\alpha + \frac{n^2\alpha^2}{1 \,.\, 2} + \frac{n^3\alpha^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \,.\,.\,.\,]\ \sqrt{2}$$

$$C + \sqrt{2} = [1 + n\alpha + \frac{n^2\alpha^2}{1 \,.\, 2} + \frac{n^3\alpha^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \,.\,.\,.\,]\ \sqrt{2}.$$

$C + \sqrt{2} = e^{n\alpha} \sqrt{2}$, oder da $n\alpha = \omega$

$$C = \sqrt{2}\,(e^\omega - 1)$$

Wird $\omega = -\infty$ gesetzt, so erhalten wir als Summe aller rückwärts liegenden Windungen von $\omega = 0$ bis $\omega = -\infty$ den Ausdruck $-\sqrt{2}$. Das negative Vorzeichen rührt daher, daß wir die Curve vorwärts berechneten und zeigt nur den Gegensatz der Richtung an. Es war:

$$C = (e^{\omega} - 1)\sqrt{2}.$$

Addiren wir dazu die von $\omega = 0$ bis $\omega = -\infty$ liegenden Windungen $= \sqrt{2}$, so erhalten wir als Länge der Curve von $r = -\infty$ bis $r = e^{\omega}$

$$C = e^{\omega}\sqrt{2} = r\sqrt{2}.$$

§. 10. Die Linie zu rectificiren, deren Gleichungen

$$y = ax^2 + b$$
$$z = cx^2 + dx + e$$

Allgemein ist das unendlich kleine Stück einer Curve von doppelter Krümmung, wenn x_n und x_{n+1}, y_n und y_{n+1}, z_n und z_{n+1} die entsprechenden unendlich nahe auf einander folgenden Ordinaten sind:

$$c_n = \sqrt{[(x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2 + (z_{n+1} - z_n)^2]}$$

$$y_{n+1} = a(n+1)^2\xi^2 + b \qquad y_n = an^2\xi^2 + b$$

$$y_{n+1} - y_n = a(2n+1)\xi^2$$

$$z_{n+1} = c(n+1)^2\xi^2 + d(n+1)\xi + e. \quad z_n = cn^2\xi^2 + dn\xi + e$$

$$z_{n+1} - z_n = c(2n+1)\xi^2 + d\xi$$

$$x_{n+1} - x_n = (n+1)\xi - n\xi = \xi. \text{ Es ist daher}$$

$$c_n = \sqrt{[a^2(4n^2 + 4n + 1)\xi^4 + c^2(4n^2 + 4n + 1)\xi^4 + d^2\xi^2 + 2\,cd\,(2n+1)\xi^3 + \xi^2]}$$

$$c_n = \sqrt{[(a^2 + c^2)(4n^2 + 4n + 1).\xi^4 + 2cd(2n+1)\xi^3 + (d^2+1)\xi^2]}$$

Oder mit Vernachlässigung der unendlich kleinen Größen 3ter und 4ter Ordnung gegen die der 2ten:

$$c_n = \sqrt{[(d^2+1)\xi^2 + 4cdn\,\xi^3 + 4(a^2 + c^2)n^2\xi^4]}$$

Mit Entwickelung nach dem binomischen Lehrsatze ist:

$$c_1 = \sqrt{(d^2+1)}\,\xi + \frac{4cd\xi^2 + 4(a^2 + c^2)\xi^3}{\sqrt{(d^2+1)}}P_1 + \frac{16c^2d^2\xi^3 + 32cd(a^2 + c^2)\xi^4 + 16(a^2 + c^2)^2\xi^5}{\sqrt{(d^2+1)^3}}P_2$$

$$c_2 = \sqrt{(d^2+1)}\,\xi + \frac{4cd.2\xi^2 + 4(a^2 + c^2).2^2\xi^3}{\sqrt{(d^2+1)}}P_1 + \frac{16c^2d^2 2^2\xi^3 + 32cd(a^2 + c^2)2^3\xi^4 + 16(a^2 + c^2)^2 2^4\xi^5}{\sqrt{(d^2+1)^3}}P_2$$

$$C = x\sqrt{(d^2+1)} + \frac{2cdx^2 + \frac{4}{3}(a^2 + c^2)x^3}{\sqrt{(d^2+1)}}P_1$$
$$+ \frac{\frac{16}{3}c^2d^2x^3 + 8cd(a^2 + c^2)x^4 + \frac{16}{5}(a^2 + c^2)^2x^5}{\sqrt{(d^2+1)^3}}P_2 \ldots\ldots$$

Das Gesetz, wonach die Reihe fortschreitet, ist aus der Entwickelung zu ersehen. Ist $d = 0$, so vereinfacht sich die Reihe

$$C = x + \frac{4}{3}(a^2 + c^2)P_1 x^3 + \frac{16}{5}(a^2 + c^2)^2 P_2 x^5 + \frac{64}{7}(a^2 + c^2)^3 P_3 x^7 \ldots\ldots$$

§. 11. Die Linie zu rectificiren, deren Gleichung:

$$y = \sin x$$
$$z = \cos x.$$

Es ist allgemein

$$c_n = \sqrt{[(\sin n\xi - \sin (n-1)\xi)^2 + (\cos n\xi - \cos (n-1)\xi)^2 + \xi^2]}$$

$$\sin n\xi = n\xi - \frac{n^3\xi^3}{1.2.3} + \frac{n^5\xi^5}{1.2.3.4.5} - \ldots.$$

$$\sin (n-1)\xi = (n-1)\xi - \frac{(n-1)^3\xi^3}{1.2.3} + \frac{(n-1)^5\xi^5}{1.2.3.4.5} - \ldots.$$

$$\sin n\xi - \sin (n-1)\xi = \xi - \frac{n^2\xi^3}{1.2} + \frac{n^4\xi^5}{1.2.3.4} \ldots.,$$

wo die unendlichen kleinen Größen von der 2ten Ordnung an vernachlässigt sind. Es ist aber

$$\xi - \frac{n^2\xi^3}{1.2} + \frac{n^4\xi^5}{1.2.3.4} \ldots = \xi\left(1 - \frac{n^2\xi^2}{1.2} + \frac{n^4\xi^4}{1.2.3.4} \ldots\right) = \xi \cos n\xi$$

Es ist daher $\sin n\xi - \sin (n-1)\xi = \xi \cos n\xi$.

Ebenso ist $\cos n\xi = 1 - \frac{n^2\xi^2}{1.2} + \frac{n^4\xi^4}{1.2.3.4} - \frac{n^6\xi^6}{1.2.3.4.5.6}$

$$\cos (n-1)\xi = 1 - \frac{(n-1)^2\xi^2}{1.2} + \frac{(n-1)^4\xi^4}{1.2.3.4} - \frac{(n-1)^6\xi^6}{1.2.3.4.5.6}$$

$$\cos n\xi - \cos (n-1)\xi = -\frac{n\xi^2}{1} - \frac{n^3\xi^4}{1.2.3} - \frac{n^5\xi^6}{1.2.3.4.5} \ldots.$$

$$\cos n\xi - \cos (n-1)\xi = -\xi\left(n\xi - \frac{n^3\xi^3}{1.2.3} + \frac{n^5\xi^5}{1.2.3.4.5} - \text{ꝛc.}\right)$$

$$\cos n\xi - \cos (n-1)\xi = -\xi \sin n\xi.$$

Es ist daher $c_n = \sqrt{[\xi^2 (\cos n\xi)^2 + \xi^2 (\sin n\xi)^2 + \xi^2]}$

$$c_n = \sqrt{2\xi^2} = \xi\sqrt{2}.$$

Wir sehen also, die Länge des Curventheilchens ist von n unabhängig, d. h. die Linie nimmt im geraden Verhältniß mit x zu, und wir erhalten, da $n\xi = x$.

$$C = x\sqrt{2}.$$

III. Cubatur der Revolutionskörper.

§. 1. Volumen des Kegels.

Denken wir uns die Höhe eines Kegels in unendlich viele unendlich kleine Theile getheilt ($n\xi = h$), so können wir, wenn wir uns durch die Theilungspunkte parallele Schnitte mit der Grundfläche gelegt denken, die einzelnen entstandenen Körperchen wegen der unendlichen Nähe der einzelnen Schnittflächen als Cylinder ansehen.

Nun ist der Radius des obersten Körperchens, wenn r der Radius der Grundfläche ist $= \frac{r}{n}$, der des zweiten $\frac{2r}{n}$ u. s. w.

Nennen wir den Inhalt der einzelnen Cylinder v_1, v_2 u. s. w., so ist

$$v_1 = \frac{r^2\pi}{n^2}\xi,\quad v_2 = \frac{2^2 r^2\pi}{n^2}\xi,\quad v_3 = \frac{3^2 r^2 \pi}{n^2}\xi \text{ u. s. w.}$$

$$V = \frac{r^2\pi}{3} n\xi = \frac{r^2\pi h}{3},$$ die bekannte Formel der Stereometrie.

§. 2. Volumen der Kugel.

Die Höhe eines Kugelsegments (h) sei wie im vorigen §. eingetheilt. Die Radien der entsprechenden Durchschnittsflächen werden sein:

$$r_1 = \sqrt{(r^2 - (r - n\xi)^2)} = \sqrt{(2rn\xi - n^2\xi^2)}$$

$$r_2 = \sqrt{[r^2 - (r - (n-1)\xi)^2]} = \sqrt{[2r(n-1)\xi - (n-1)^2\xi^2]}$$

$$r_3 = \sqrt{[r^2 - (r - (n-2)\xi)^2]} = \sqrt{[2r(n-2)\xi - (n-2)^2\xi^2]}$$

$$r_n = \sqrt{[r^2 - (r - (n-n)\xi)^2]} = \sqrt{[2r(n-n)\xi - (n-n)^2\xi^2]} = 0.$$

Ebenso ist:

$$v_1 = 2r(n-1)\xi^2\pi - (n-1)^2\xi^3\pi$$

$$v_2 = 2r(n-2)\xi^2\pi - (n-2)^2\xi^3\pi$$

$$v_3 = 2r(n-3)\xi^2\pi - (n-3)^2\xi^3\pi$$

$$v_n = 2r(n-n)\xi^2\pi - (n-n)^2\xi^3\pi$$

$$V = rn^2\xi^2\pi - \frac{n^3\xi\pi^3}{3}$$

$$V = rh^2\pi - \frac{h^3\pi}{3} = \left(r - \frac{h}{3}\right)\pi h^2.$$

§. 3. Berechnung des Volumens eines Körpers, der durch Rotation eines Kreisbogens um seine Tangente entsteht.

Theilen wir die Höhe (h) des Körpers wieder wie oben in unendlich viele unendlich kleine Theile und legen durch die einzelnen Theilungspunkte parallele Flächen mit der Grundfläche, so sind die Radien der einzelnen Durchschnittsflächen:

$$r_1 = r - \sqrt{(r^2 - \xi^2)}$$
$$r_2 = r - \sqrt{(r^2 - 4\xi^2)}$$
$$r_3 = r - \sqrt{(r^2 - 9\xi^2)}$$
$$r_n = r - \sqrt{(r^2 - n^2\xi^2)}$$

Die einzelnen Cylinder betragen:

$$v_1 = (2r^2 - \xi^2 - 2r\sqrt{(r^2 - \xi^2)})\,\pi\xi$$
$$v_2 = (2r^2 - 4\xi^2 - 2r\sqrt{(r^2 - 4\xi^2)})\,\pi\xi$$
$$v_n = (2r^2 - n^2\xi^2 - 2r\sqrt{(r^2 - n^2\xi^2)})\,\pi\xi$$

Die Summe der ersten Verticalreihe beträgt

$$\varsigma_1 = 2r^2 n\xi\pi = 2r^2 h\pi$$
$$\varsigma_2 = -\tfrac{1}{3} n^3\xi^3\pi = -\tfrac{1}{3} h^3\pi.$$

Wenn man ferner bedenkt, daß $\sqrt{(r^2 - \xi^2)}$, $\sqrt{(r^2 - 4\xi^2)}$ u. s. w. bis $\sqrt{(r^2 - n^2\xi^2)}$ die Kreis-Ordinaten bei gleichmäßig wachsenden Abscissen von $x = 0$ bis $x = h$ sind, so erhält man

$$\frac{\sqrt{(r^2 - \xi^2)} + \sqrt{(r^2 - 4\xi^2)} + \sqrt{(r^2 - 9\xi^2)} \ldots\ldots + \sqrt{(r^2 - n^2\xi^2)}}{n}\, h = \tfrac{1}{2} r \text{ arc. sin } h + \tfrac{1}{2} h \sqrt{(r^2 - h^2)}$$

(Beide Seiten der Gleichung drücken den von h, zwei auf den Endpunkten von h errichteten Lothen und dem entsprechenden Kreisbogen eingeschlossenen Flächenraum aus.)

$$\sqrt{(r^2 - \xi^2)} + \sqrt{(r^2 - 4\xi^2)} \ldots\ldots + \sqrt{(r^2 - n^2\xi^2)} = \frac{\tfrac{1}{2} nr \text{ arc sin } h}{h} + \frac{n}{2}\sqrt{(r^2 - h^2)}$$

$$\varsigma_3 = -\frac{n\pi\xi r^2 \text{ arc sin } h}{h} - n\pi\xi r\sqrt{(r^2 - h^2)} \quad \text{oder da } n\xi = h$$

$$\varsigma_3 = -r^2\pi \text{ arc sin } h - rh\pi\sqrt{(r^2 - h^2)}$$
$$V = 2r^2h\pi - \tfrac{1}{3} h^3\pi - r^2\pi \text{ arc sin } h - r\pi h\sqrt{(r^2 - h^2)}$$

Ist $h = r$, so erhalten wir als den Inhalt des Körpers, der durch Drehung eines Kreisquadranten um seine Tangente entsteht

$$V = 2r^3\pi - \frac{1}{3} r^3\pi - \frac{r^3\pi^2}{2}$$
$$V = \frac{5}{3} r^3\pi - \frac{r^3\pi^2}{2} = r^3\pi\left(\frac{5}{3} - \frac{\pi}{2}\right)$$

§. 4. Volumen des Ellipsoids.

Denken wir uns die halbe große Achse, um die die Ellipse rotiren möge, in unendlich viele gleiche Theilchen eingetheilt, so werden, wenn wir uns durch alle Theilpunkte senkrecht schneidende Kreisflächen hindurchgelegt denken, die Radien derselben sein:

$$\underset{1}{r} = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - \xi^2)} \qquad \underset{2}{r} = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - 4\xi^2)} \text{ u. s. w.}$$

Es werden mithin die einzelnen Cylinderchen, aus denen wir uns das Ellipsoid bestehend denken, betragen:

$$\underset{1}{v} = \left(b^2 - \frac{b^2\xi^2}{a^2}\right)\pi\xi \qquad \underset{2}{v} = \left(b^2 - \frac{4b^2\xi^2}{a^2}\right)\pi\xi$$

$$\underset{3}{v} = \left(b^2 - \frac{9b^2\xi^2}{a^2}\right)\pi\xi \text{ u. s. w.}$$

Durch Addition finden wir:

$$V = \left(b^2 n\xi - \frac{n^3\xi^3 b^2}{3a^2}\right)\pi = \frac{2ab^2\pi}{3},$$

oder den Inhalt des ganzen Ellipsoids $V = \frac{4ab^2\pi}{3}$.

Wollen wir nur den Theil des Ellipsoids finden, der sich senkrecht über einer vom Mittelpunkt an gerechneten Abscisse x befindet, so folgt aus obiger Formel:

$$V = \left(b^2 x - \frac{x^3 b^2}{3a^2}\right)\pi.$$

§. 5. Volumen des Paraboloids.

Wir theilen die vom Scheitel aus gerechnete Abscisse x in unendlich viele Theile, und sehen den senkrecht um jedes Theilchen von x gelagerten Theil des Paraboloids als Cylinder an; dann ist, weil $y = \sqrt{px}$

$$\underset{1}{r} = \sqrt{p\xi} \qquad \underset{2}{r} = \sqrt{2p\xi} \qquad \underset{3}{r} = \sqrt{3p\xi} \text{ u. s. w.}$$

$$\underset{1}{v} = p\xi^2\pi \qquad \underset{2}{v} = 2p\xi^2\pi \qquad \underset{3}{v} = 3p\xi^2\pi$$

$$V = \frac{n^2}{2}p\xi^2\pi = \frac{x^2 p\pi}{2} \text{ oder da } y^2 = px$$

$$V = \frac{xy^2\pi}{2}$$

§. 6. Volumen des Hyperboloids.

Nachdem die Theilung wie vorher vorgenommen, betragen die einzelnen Radien der Grundflächen der Cylinder, wenn $n\xi = a$ und $m\xi = x$ ist

$$\underset{1}{r} = \frac{b}{a}\sqrt{(n^2\xi^2 - a^2)} \qquad \underset{2}{r} = \frac{b}{a}\sqrt{((n+1)^2\xi^2 - a^2)}$$

$$\underset{3}{r} = \frac{b}{a}\sqrt{((n+2)\xi^2 - a^2)} \;\ldots\; \underset{m-n}{r} = \frac{b}{a}\sqrt{(m^2\xi^2 - a^2)}.$$

Die Cylinder sind

$$\underset{1}{v} = \frac{n^2 b^2\xi^3\pi}{a^2} - \xi b^2\pi \qquad \underset{2}{v} = \frac{(n+1)^2 b^2\xi^3\pi}{a^2} - \xi b^2\pi$$

$$\underset{3}{v} = \frac{(n+2)^2 b^2\xi^3\pi}{a^2} - \xi b^2\pi \qquad \underset{m-n}{v} = \frac{m^2 b^2\xi^3\pi}{a^2} - \xi b^2\pi$$

$$V = \left(\frac{m^3}{3} - \frac{n^3}{3}\right)\frac{\xi^3 b^2\pi}{a^2} - (m-n)\,\xi b^2\pi$$

$$V = \frac{(x^3 - a^3)\,b^2\pi}{3a^2} - (x - a)\,b^2\pi$$

§. 7. Das Volumen des Körpers zu berechnen, der durch Umdrehung einer Cycloide um ihre Achse entsteht.

$$x_n = rn\alpha - r \sin n\alpha \text{ und } x_{n+1} = r(n+1)\alpha - r \sin (n+1)\alpha$$

seien zwei unendlich wenig verschiedene Abscissen, so können wir den Theil des durch Rotation der Cycloide um ihre Achse entstandenen Körpers, der über der Differenz dieser Abscissen senkrecht sich befindet, als einen Cylinder ansehen, der zum Radius der Grundfläche eine oder die andere der beiden zugehörigen Ordinaten und zur Höhe die Differenz jener Abscissen hat. Es ist daher

$$v_n = r(\alpha + \sin n\alpha - \sin (n+1)\alpha)\, r^2\pi\, (1 - 2\cos n\alpha + (\cos n\alpha)^2)$$

$$v_n = r^3\pi\, (\alpha + \sin n\alpha - \sin (n+1)\alpha)\ (1 - 2\cos n\alpha + (\cos n\alpha)^2)$$

$$\text{Aber } \sin n\alpha = n\alpha - \frac{n^3\alpha^3}{1.2.3} + \frac{n^5\alpha^5}{1.2.3.4.5} \dots$$

$$\sin (n+1)\alpha = (n+1)\alpha - \frac{(n+1)^3\alpha^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{(n+1)^5\alpha^5}{1.2.3.4.5}$$

$$\sin n\alpha - \sin (n+1)\alpha = -\alpha + \frac{n^2\alpha^3}{1\,.\,2} - \frac{n^4\alpha^5}{1.2.3.4} \dots$$

$$\sin n\alpha - \sin (n+1)\alpha = -\alpha\left(1 - \frac{n^2\alpha^2}{1\,.\,2} + \frac{n^4\alpha^4}{1.2.3.4} \dots\right)$$

$$\sin n\alpha - \sin (n+1)\alpha = -\alpha \cos n\alpha.$$

Es ist jetzt $v_n = (\alpha - \alpha \cos n\alpha)\ (1 - 2\cos n\alpha + (\cos n\alpha)^2) r^3\pi.$

$$v_n = (\alpha - 3\alpha \cos n\alpha + 3\alpha (\cos n\alpha)^2 - \alpha (\cos n\alpha)^3)\ r^3\pi.$$

Ebenso ist:

$$v_1 = (\alpha - 3\alpha \cos \alpha + 3\alpha (\cos \alpha)^2 - \alpha (\cos \alpha)^3)\ r^3\pi$$

$$v_2 = (\alpha - 3\alpha \cos 2\alpha + 3\alpha (\cos 2\alpha)^2 - \alpha (\cos 2\alpha)^3)\ r^3\pi$$

$$v_3 = (\alpha - 3\alpha \cos 3\alpha + 3\alpha (\cos 3\alpha)^2 - \alpha (\cos 3\alpha)^3)\ r^3\pi$$

$$v_m = (\alpha - 3\alpha \cos m\alpha + 3\alpha (\cos m\alpha)^2 - \alpha (\cos m\alpha)^3)\ r^3\pi.$$

Es sei $m\alpha = \omega$, so ist:

$$V = \Big[m\alpha - 3m\alpha \text{ med } \cos (\alpha \text{ bis } m\alpha) + 3m\alpha \text{ med } [\cos^2 (\alpha \text{ bis } m\alpha)] - m\alpha \text{ med } [\cos^3 (\alpha \text{ bis } m\alpha)]\Big]\ r^3\pi$$

$$V = \Big[\omega - 3\omega \text{ med } \cos (0 \text{ bis } \omega) + 3\omega \text{ med } (\cos^2 (0 \text{ bis } \omega)) - \omega \text{ med } (\cos^3 (0 \text{ bis } \omega))\Big]\ r^3\pi$$

conf. I. §. 13.

Für $\omega = 2\pi$ finden wir als Inhalt des ganzen Körpers, da das zweite und vierte Glied ganz wegfallen, weil die Cosinus in den verschiedenen Quadranten bei entgegengesetzten Vorzeichen sich heben

$$V = 5r^3\pi^2.$$

§. 8. Das Volumen des Körpers zu berechnen, der durch Umdrehung der parabolischen Linie um ihre Achse entsteht, deren Gleichung:

$$y = x^3 - 9x^2 + 23x - 15.$$

Es sei die Abscissenachse durch Ebenen, die in der Richtung der Umdrehung senkrecht auf derselben stehen, in unendlich kleine Theile getheilt, so wird zu gleicher Zeit der Revolutionskörper in eine

Reihe von Körpern durch dieselben zerlegt werden, die wir als Cylinder ansehen können. Es ist nun allgemein:

$$v_n = y_n^2\pi\,(x_n - x_{n-1}) = (n^3\xi^3 - 9n^2\xi^2 + 23n\xi - 15)^2\pi\xi$$

$$v_n = (n^6\xi^7 - 18n^5\xi^6 + 127n^4\xi^5 - 444n^3\xi^4 + 799n^2\xi^3 - 690n\xi^2 + 225\xi)\,\pi$$

Ebenso ist:

$$v_1 = (\xi^7 - 18\xi^6 + 127\xi^5 - 444\xi^4 + 799\xi^3 - 690\xi^2 + 225\xi)\,\pi$$

$$v_2 = (2^6\xi^7 - 18\,.\,2^5\xi^6 + 127\,.\,2^4\xi^5 - 444\,.\,2^3\xi^4 + 799\,.\,2^2\xi^3 - 690\,.\,2\,.\,\xi^2 + 225\xi)\,\pi$$

$$v_3 = (3^6\xi^7 - 18\,.\,3^5\xi^6 + 127\,.\,3^4\xi^5 - 444\,.\,3^3\xi^4 + 799\,.\,3^2\xi^3 - 690\,.\,3\xi^2 + 225\xi)\,\pi$$

$$V = \left(\frac{1}{7}\,n^7\xi^7 - 3n^6\xi^6 + \frac{127}{5}\,n^5\xi^5 - 111\,n^4\xi^4 + \frac{799}{3}\,n^3\xi^3 - 345\,n^2\xi^2 + 225n\xi\right)\pi$$

$$V = \left(\frac{1}{7}\,x^7 - 3x^6 + \frac{127}{5}\,x^5 - 111x^4 + \frac{799}{3}\,x^3 - 345x^2 + 225x\right)\pi$$

Für $x = 1$, wo die Curve die Abscissenachse zum ersten Male schneidet, finden wir

$$V_1 = 57\,\frac{92}{105}\,\pi.$$

Für $x = 3$, wo die Abscissenachse zum zweiten Male geschnitten wird, ist

$$V_2 = 67\,\frac{22}{35}\,\pi \text{ und } V_2 - V_1 = 9\,\frac{79}{105}\,\pi.$$

Für $x = 5$ schneidet die Curve die Abscissenachse zum dritten Male:

$$\text{Es ist } V_3 = 77\,\frac{8}{21}\,\pi \text{ und } V_3 - V_2 = 9\,\frac{79}{105}\,\pi.$$

Es sind also die durch Umdrehung der Curventheile BED und DFH gebildeten Körper (siehe Figur zu I. §. 10 im vorjährigen Programm) ganz gleich.

§. 9. Den Körper zu berechnen, der durch Umdrehung der Linie entsteht, deren Gleichung:

$$y = \frac{4}{\sqrt{x}}.$$

Es sei $n\xi = x$ und $m\xi = X$, wo n und m unendlich groß, ξ unendlich klein ist; dann ist

$$v_n = \frac{16\xi}{n\xi}\,\pi = \frac{16\pi}{n} \qquad v_{n+1} = \frac{16\pi}{n+1} \qquad v_m = \frac{16\pi}{m}$$

$$V = 16\pi\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\,.\,.\,.\,.\, + \frac{1}{m}\right]$$

Aber I. §. 10 im vorjährigen Programm haben wir gefunden:

$$\log\frac{m}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\,.\,.\,.\,. + \frac{1}{m}$$

$$v = 16\pi\,\log\frac{m}{n} = 16\pi\log\frac{m\xi}{n\xi} = 16\pi\log\frac{X}{x}.$$

§. 10. Den Körper zu berechnen, der durch Umdrehung der Curve um ihre Achse entsteht, deren Gleichung: $y = a\,(\sin x)^r$.

Wird der Körper wie vorhin eingetheilt, so ist

$$v_1 = a^2\,(\sin \xi)^{2r}\,\pi\xi \qquad v_2 = a^2\,(\sin 2\xi)^{2r}\,\pi\xi$$

$$v_3 = a^2\,(\sin 3\xi)^{2r}\,\pi\xi \qquad v_n = a^2\,(\sin n\xi)^{2r}\,\pi\xi$$

$$V = a^2 n\xi \text{ med } [\sin^{2r}(0 \text{ bis } n\xi)]\,\pi = a^2 x\pi \,.\, \text{med } [\sin^{2r}(0 \text{ bis } x)]$$

Für $x = a\pi$ erhalten wir, wenn wir r als ganz, also $2r$ als gerade ansehen

$$v = \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,.\,.\,(2r-1)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,.\,.\,2r}\,a^3\pi^2.$$

cf. I. §. 13 im vorjährigen Programm.

§. 11. Das Volumen des Körpers zu berechnen, der durch Umdrehung der Exponentiallinie um ihre Achse entsteht.

Gleichung: $y = e^x$.

Die einzelnen Cylinderchen werden betragen:

$$v_1 = \xi e^{2\xi}\pi, \qquad v_2 = \xi e^{2.2\xi}\pi, \qquad v_3 = \xi e^{2.3\xi}\pi, \qquad v_n = \xi e^{2n\xi}\pi.$$

$$V = \frac{\xi e^{(2n+2)\xi} - \xi e^{2\xi}}{e^{2\xi} - 1}\,\pi.$$

$$\xi e^{(2n+2)\xi} = \xi + \frac{2n+2}{1}\,\xi^2 + \frac{(2n+2)^2\,\xi^3}{1\,.\,2} + \frac{(2n+2)^3\,\xi^4}{1\,.\,2\,.\,3}\,\ldots\,.$$

$$\xi e^{2\xi} = \xi + \frac{2\xi^2}{1} + \frac{4\xi^3}{1\,.\,2} + \frac{8\xi^4}{1\,.\,2\,.\,3}$$

Mithin mit Vernachlässigung der unendlich kleinen Größen zweiter Ordnung

$$\xi e^{(2n+2)\xi} - \xi e^{2\xi} = 2n\xi^2 + \frac{4n^2\xi^3}{1\,.\,2} + \frac{8n^3\xi^4}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{16n^4\xi^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,\ldots\,.$$

Es ist $e^{2\xi} - 1 = \frac{2\xi}{1} + \frac{(2\xi)^2}{1\,.\,2} + \frac{(2\xi)^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,\ldots\,.$

$$V = \frac{2n\xi^2 + \frac{4n^2\xi^3}{1\,.\,2} + \frac{8n^3\xi^4}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{16n^4\xi^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,\ldots\,.}{\frac{2\xi}{1} + \frac{(2\xi)^2}{1\,.\,2} + \frac{(2\xi^3)}{1\,.\,2\,.\,3}\,\ldots\,.}\,\pi.$$

Oder wenn man die Division wirklich ausführt, wobei im Nenner nur das erste Glied zu berücksichtigen ist:

$$v = \left[n\xi + \frac{2n^2\xi^2}{1\,.\,2} + \frac{4n^3\xi^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{8n^4\xi^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,\ldots\,.\right]\pi$$

$$2V + \pi = \left[1 + 2n\xi + \frac{4n^2\xi^2}{1\,.\,2} + \frac{8n^3\xi^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{16n^4\xi^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,\ldots\,.\right]\pi.$$

$$2V = (e^{2n\xi} - 1)\,\pi$$

$$V = \frac{\pi}{2}\,(e^{2n\xi} - 1) = \frac{\pi}{2}\,(e^{2x} - 1)$$

Für $x = -\infty$ erhalten wir als körperlichen Inhalt des durch Umdrehung des unendlichen rückwärts liegenden Armes der Curve gebildeten Körpers:

$$v = -\frac{\pi}{2}$$

Die entsprechende Umdrehungsfläche haben wir I. §. 16 (vorjähr. Programm) als — 1 gefunden.

§. 12. Das Volumen des Körpers zu finden, der durch Umdrehung der Kettenlinie um ihre Achse entsteht.

Gleichung: $y = a\,\dfrac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}$

Die einzelnen Cylinderchen sind:

$$v_1 = \frac{a^2\pi\xi}{4}\left(e^{\frac{2\xi}{a}} + 2 + e^{-\frac{2\xi}{a}}\right) \text{ oder}$$

$$v_1 = \frac{a^2\pi\xi e^{\frac{2\xi}{a}}}{4} + \frac{a^2\pi\xi}{2} + \frac{a^2\pi\xi e^{-\frac{2\xi}{a}}}{4}$$

$$v_2 = \frac{a^2\pi\xi e^{\frac{4\xi}{a}}}{4} + \frac{a^2\pi\xi}{2} + \frac{a^2\pi\xi e^{-\frac{4\xi}{a}}}{4}$$

$$v_n = \frac{a^2\pi\xi e^{\frac{2n\xi}{a}}}{4} + \frac{a^2\pi\xi}{2} + \frac{a^2\pi\xi e^{-\frac{2n\xi}{a}}}{4}$$

Nennen wir die drei verticalen Reihen ς_1, ς_2 und ς_3, so ist:

$$\varsigma_1 = \frac{\frac{a^2\pi}{4}\left(\xi e^{\frac{2n+2}{a}\xi} - \xi e^{\frac{2\xi}{a}}\right)}{e^{\frac{2\xi}{a}} - 1.}$$

$$\xi e^{\frac{2n+2}{a}} = \xi + \frac{2n+2}{a}\xi^2 + \frac{\left(\frac{2n+2}{a}\right)^2}{1\,.\,2}\xi^3 + \frac{\left(\frac{2n+2}{a}\right)^3}{1\,.\,2\,.\,3}\xi^4 \ldots.$$

$$\xi e^{\frac{2\xi}{a}} = \xi + \frac{2\xi^2}{a} + \frac{\frac{4\xi^3}{a^2}}{1.2} + \frac{\frac{8\xi^4}{a^3}}{1\,.\,2\,.\,3}$$

$$\xi e^{\frac{2n+2}{a}\xi} - \xi e^{\frac{2\xi}{a}} = \frac{2n\xi^2}{a} + \frac{\frac{4n^2}{a^2}\xi^3}{1.2} + \frac{\frac{8n^3\xi^4}{a^3}}{1\,.\,2\,.\,3} \ldots.$$

$$e^{\frac{2\xi}{a}} - 1 = \frac{2\xi}{a} + \frac{\frac{4\xi^2}{a^2}}{1\,.\,2} + \frac{\frac{8\xi^3}{a^3}}{1\,.\,2\,.\,3} \ldots.$$

$$\varsigma_1 = \frac{a^2\pi}{4}\left(n\xi + \frac{\frac{2n^2\xi^2}{a}}{1\,.\,2} + \frac{\frac{4n^3\xi^3}{a^2}}{1\,.\,2\,.\,3}\,\ldots\ldots\right)$$

$$\frac{2\varsigma_1}{a} + \frac{a^2\pi}{4} = \frac{a^2\pi}{4}\left(1 + \frac{2n\xi}{a} + \frac{\frac{4n^2\xi^2}{a^2}}{1\,.\,2} + \frac{\frac{8n^3\xi^3}{a^3}}{1\,.\,2\,.\,3}\,\ldots\ldots\right)$$

$$\frac{2\varsigma_1}{a} + \frac{a^2\pi}{4} = \frac{a^2\pi}{4}\, e^{\frac{2n\xi}{a}}$$

$$\varsigma_1 = \frac{a^3\pi}{8}\left(e^{\frac{2n\xi}{a}} - 1\right) = \frac{a^3\pi}{8}\left(e^{\frac{2x}{a}} - 1\right)$$

$$\varsigma_2 = \frac{a^2\pi x}{2}$$

Setzen wir in ς_1 für x, um ς_3 zu finden — x ein, so haben wir:

$$\varsigma_3 = \frac{a^3\pi}{8}\left(e^{-\frac{2x}{a}} - 1\right)$$

$$v = \frac{a^3\pi}{8}\left(e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}}\right) = \frac{ay^2\pi}{2}$$

IV. Berechnung der Oberfläche der Revolutionskörper.

§. 1. Oberfläche der Kugel.

Denken wir uns vom Pole einer Halbkugel aus einen Quadranten gezogen, der senkrecht auf der die Halbkugel begränzenden Ebene eines größten Kreises stehen wird, diesen Quadranten in unendlich viele gleiche Theile getheilt und durch die Theilungspunkte Flächen parallel mit der Begränzungsebene der Halbkugel gelegt, so wird die Oberfläche in Zonen eingetheilt, die wir der geringen Breite wegen ohne Fehler als Cylinderoberflächen ansehen können. Multipliciren wir nun die mittlere Länge der parallelen Durchschnittskreise mit dem Quadranten eines größten Kreises, so erhalten wir die Oberfläche der Halbkugel.

Wenn wir von dem begränzenden größten Kreise aus rechnen, so ist:

1 ster Kreis $= 2r\pi \sin 90^0$
2 ter Kreis $= 2r\pi \sin (n - 1)\xi$
n ter Kreis $= 2r\pi \sin (0\xi)$

Mittlerer Kreis $= 2\pi r \sin \text{med } (0 \text{ bis } 90^0) = 4r.$

Mithin die Oberfläche der Halbkugel $4r\,.\,\frac{r\pi}{2} = 2r^2\pi$

und der ganzen Kugel $4r^2\pi$.

In derselben Weise finden wir den Flächeninhalt einer Zone, deren begränzende Kreise ω^0 und ω_1^0 vom Aequator entfernt sind:

$O = (\omega_1 - \omega)$ med cos (ω bis ω_1) $2r^2\pi$, oder da med cos (ω bis ω_1) $= \frac{\sin \omega_1 - \sin \omega}{\omega_1 - \omega}$ ist

$O = 2r^2\pi (\sin \omega_1 - \sin \omega)$ und da $r (\sin \omega_1 - \sin \omega)$ die Höhe der Zone ist, so ist $O = 2r\pi h$.

§. 2. Oberfläche eines Körpers, der durch Umdrehung eines Bogens um seine Tangente gebildet wird.

Figur 6. Denken wir uns den Bogen wieder wie vorher in unendlich viele gleiche Theile getheilt, und legen senkrecht auf die Umdrehungsachse parallele Flächen durch die Theilungspunkte, so müssen wir das arithmetische Mittel sämmtlicher so gefundenen Kreise mit dem Bogen multipliciren, um die Oberfläche zu finden. Nun ist vom Tangirungspunkte aus gerechnet

$$\begin{aligned}\text{Kreis } 1 &= 2r\pi\,(1 - \cos 0\xi)\\ \text{Kreis } 2 &= 2r\pi\,(1 - \cos \xi)\\ \underline{\text{Kreis } n} &\underline{= 2r\pi\,(1 - \cos n\xi)}\end{aligned}$$

mittlerer Kreis $= 2r\pi$ (1 — med cos (0 bis ω)) und daher $O = 2r\pi\omega$ (1 — med cos (0 bis ω)).

Ist $\omega = \frac{\pi}{2}$, so finden wir als Oberfläche des durch die Umdrehung eines Quadranten um seine Tangente gebildeten Körpers, wo natürlich von der auf der einen Seite begränzenden Kreisebene abgesehen ist

$$O = r^2\pi^2 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) = r^2\pi^2 - 2r^2\pi$$

Ebenso würden wir als Inhalt einer Zone, deren Entfernung vom Tangirungspunkte ω und ω_1 beträgt, finden: $O = (\omega_1 - \omega)\, 2r\pi$ [1 — cos med (ω bis ω_1)]

oder da für $r = 1$ cos med (ω bis ω_1) $= \frac{\sin \omega_1 - \sin \omega}{\omega_1 - \omega}$.

$$O = 2r\pi\,(\omega_1 - \omega) - 2r^2\pi\,(\sin \omega_1 - \sin \omega) = 2r\pi\,(\omega_1 - \omega) - 2r\pi h.$$

§. 3. Oberfläche des Paraboloids.

Bezeichnet c_n allgemein ein unendlich kleines Stück einer Curve und ist y_n die dazu gehörige rechtwinklige Ordinate, so ist offenbar die Oberfläche des Körpers, die durch das Theilchen c_n gebildet wird, wenn die Curve sich um ihre Abscissenachse dreht $o_n = 2y_n\pi c_n$.

Nun fanden wir für die Parabel bei gleichmäßig wachsenden Ordinaten

$$c_n = \sqrt{\left(\eta^2 + \frac{(2n - 1)^2\eta^4}{p^2}\right)}$$

Da aber $y_n = n\eta$, so ist $o_n = 2n\eta\pi \sqrt{\left(\eta^2 + \frac{(2n - 1)^2\eta^4}{p^2}\right)}$

Nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt ist daher:

$$\underset{1}{o} = 2\pi \left[\eta^2 + \frac{\underset{1}{P}\ \eta^4}{p^2} + \frac{\underset{2}{P}\ \eta^6}{p^4} \cdots\cdots \right]$$

$$\underset{2}{o} = 2\pi \left[2\eta^2 + \frac{\underset{1}{P}\ .\ 2\ .\ 3^2\eta^4}{p^2} + \frac{\underset{2}{P}\ 2.\ 3^4\eta^6}{p^4} \cdots\cdot \right]$$

$$\underset{3}{o} = 2\eta \left[3\eta^2 + \frac{\underset{1}{P}\ 3\ .\ 5^2\eta^4}{p^2} + \frac{\underset{2}{P}\ .\ 3\ 5^4\eta^6}{p^4} \cdots \right]$$

Nach der allgemeinen Summationsformel für arithmetische Reihen höherer Ordnung erhalten wir:

$$O = 2\pi \left[\frac{n^2\eta^2}{2} + \frac{\underset{1}{P}\ 2^2n^4\eta^4}{4p^2} + \frac{\underset{2}{P}\ 2^4n^6\eta^6}{6p^4} + \frac{\underset{3}{P}\ 2^6n^8\eta^8}{8p^6} \cdots \right]$$

$$O = 2\pi \left[\frac{y}{2} + \frac{\underset{1}{P}\ 2^2\ .\ y^4}{4p^2} + \frac{\underset{2}{P}\ 2^4y^6}{6p^4} + \frac{\underset{3}{P}\ 2^6y^8}{8p^6} \cdots\cdot \right]$$

Die so eben aufgestellte Formel unterliegt natürlich in Bezug auf Convergenz denselben Gesetzen wie die Kapitel II. §. 2 aufgestellte.

§. 4 Oberfläche des Ellipsoids.

Für das Bogentheilchen $\underset{n}{c}$ haben wir Kapitel II. §. 1 gefunden $\underset{n}{c} = \xi \sqrt{(1 - e\ (\cos n\alpha)^2)}$ wo e das Verhältniß der großen Achse zur Entfernung der beiden Brennpunkte bedeutete.

$e = \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)}$. Nun ist $\underset{n}{y} = b \sin n\alpha = b \sqrt{(1 - (\cos n\alpha)^2)}$

Mithin $\underset{n}{o} = 2\pi b\xi \sqrt{(1 - (\cos n\alpha)^2)} \sqrt{(1 - e^2\ (\cos n\alpha)^2)}$

$$\underset{n}{o} = 2\pi b\xi \sqrt{(1 - (1 + e^2)\ (\cos n\alpha)^2 + e^2 \cos^4 n\alpha)}$$

Nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt ist:

$$\underset{1}{o} = 2\pi b\left[\xi + \underset{1}{P}\xi[-(1+e^2)(\cos\alpha)^2 + e^2\ (\cos\alpha)^4] + \underset{2}{P}\xi\ [(1+e^2)(\cos\alpha)^4 - 2e^2\ (1+e^2)(\cos\alpha)^6 + e^4(\cos\alpha)^8]\right]$$

$$\underset{2}{o} = 2\pi b\left[\xi + \underset{1}{P}\xi[-(1+e^2)(\cos 2\alpha)^2 + e^2(\cos 2\alpha)^4] + \underset{2}{P}\xi[(1+e^2)(\cos 2\alpha)^4 - 2e^2(1+e^2)(\cos 2\alpha)^6 + e^4(\cos 2\alpha)^8]\right]$$

$$\underset{n}{o} = 2\pi b\left[\xi + \underset{1}{P}\xi[-(1+e^2)(\cos n\alpha)^2 + e^2(\cos n\,\alpha)^4] + \underset{2}{P}\xi[(1+e)^2(\cos n\alpha)^4 - 2e^2(1+e)^2(\cos n\alpha)^6 + e^4(\cos n\alpha)^8]\right]$$

$$O = 2\pi bn\xi\left[\ 1 + \underset{1}{P}\ [-(1+e)^2 \text{ med } (\cos^2 (0 \text{ bis } n\alpha)) + e^2 \text{ med } (\cos^4 (0 \text{ bis } n\alpha))]\right.$$

$$+ \underset{2}{P}\ [(1+e)^2 \text{ med } (\cos^4 (0 \text{ bis } n\alpha)) - 2e^2\ (1+e^2) \text{ med } (\cos^6 (0 \text{ bis } n\alpha)) + e^8 \text{ med } (\cos^8 (0 \text{ bis } n\alpha))]$$

$$\left. + \underset{3}{P}\ [\ \cdots\ ]\right]$$

Für $n\xi$ = arc 180^0 erhalten wir als Oberfläche des ganzen Ellipsoids, da die graden Potenzen der cos im ersten und zweiten Quadranten gleich sind:

$$O = 2\pi^2a^2b\left[1 + \underset{1}{P}\ [-(1+e^2) \text{ med } (\cos^2 (0 \text{ bis } 90^0)) + e^2 \text{ med } (\cos^4 (0 \text{ bis } 90^0))]\right.$$

$$\left. + \underset{2}{P}\ [(1+e^2)^2 \text{med } (\cos^4(0 \text{ bis } 90^0)) - 2e^2(1+e^2) \text{ med } (\cos^6 (0 \text{ bis } 90)) + e^8 \text{ med } (\cos^8 (0 \text{ bis } 90^0))] \ldots\right]$$

$$§. 5.\quad \Pi = \frac{2}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2 \ldots\ldots}$$

Setzen wir in die vorige Formel $b = r$, $e = 0$, so erhalten wir als Oberfläche der Kugel:

$$O = 2r^2\pi^2\left[1 - P_1 \cdot \frac{1}{2} + P_2\, \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} - P_3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot\cdot\cdot\cdot\right] \quad \text{oder da } O = 4r^2\pi.$$

$$2 = \pi\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{1\,.\,2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{1\,.\,2\,.\,3} \cdot\cdot\cdot\right)$$

$$2 = \pi\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.}{2\,.\,4\,.\,6\,.}\right)^2 \cdot\cdot\cdot\right] \quad \text{und daher}$$

$$\Pi = \frac{2}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.}{2\,.\,4\,.\,6\,.}\right)^2 \cdot\cdot\cdot\cdot}$$

§. 6. Oberfläche des Körpers, der durch Umdrehung einer Cycloide um ihre Achse entsteht.

Allgemein ist $\quad o_n = 2y_n\pi c_n.$

Wir haben II. §. 4 gefunden $\quad c_n = 2\alpha r \sin\frac{n\alpha}{2}$

$$2y_n\pi = 2\pi\,(r - r\cos n\alpha) = 2\pi r\left(\sin\frac{1}{2}\,n\alpha\right)^2$$

$$o_n = 4\alpha\pi r^2\left(\sin\frac{n\alpha}{2}\right)^3$$

Ebenso ist

$$o_1 = 4a\pi r^2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^3 \qquad \cdot\ o_2 = 4\alpha\pi r^2\left(\sin\alpha\right)^3$$

$$o_3 = 4\alpha\pi r^2\left(\sin\frac{3\alpha}{2}\right)^3 \qquad o_n = 4\alpha\pi r^2\left(\sin\frac{n\alpha}{2}\right)^3$$

$$O = 4n\alpha\pi r^2 \text{ med}\left(\sin^3\left(0 \text{ bis } \frac{n\alpha}{2}\right)\right)$$

$$O = 4\omega\pi r^2 \text{ med}\left(\sin^3\left(0 \text{ bis } \frac{\omega}{2}\right)\right)$$

Für $\omega = 2\pi$ erhalten wir als Oberfläche des ganzen Körpers, der durch Umdrehung der Cycloide um ihre Achse entsteht:

$$O = 8\pi^2 r^2 \times \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{3}\, r^2\pi.$$

§. 7. Die Oberfläche des Körpers zu berechnen, der durch Umdrehung der Exponentiallinie um ihre Achse entsteht.

II. §. 5 fanden wir: $\quad c_n = \sqrt{(\xi^2 + \xi^2 e^{2n\xi})}$

$$2y_n\pi = 2\pi e^{n\xi} \qquad \text{Daher:} \qquad o_n = 2\pi\xi e^{n\xi}\sqrt{(1 + e^{2n\xi})}$$

Wir wollen diesen Ausdruck wiederum doppelt, für positive und für negative Abscissen, entwickeln, um auf alle Fälle convergirende Reihen zu gewinnen. Im ersten Falle werden wir bei der Entwickelung $e^{2n\xi}$ zum ersten Gliede des Binoms machen.

$$o_n = 2\pi\xi e^{n\xi} \sqrt{(1 + e^{2n\xi})} = 2\pi \left[\xi e^{2n\xi} + \xi P_1 + \frac{\xi P_2}{e^{2n\xi}} + \frac{\xi P_3}{e^{4n\xi}} \cdots\right]$$

$$o_{n+1} = 2\pi\xi e^{(n+1)\xi} \sqrt{(1 + e^{(2n+2)\xi})} = 2\pi \left[\xi e^{(2n+2)\xi} + \xi P_1 + \frac{\xi P_2}{e^{(2n+2)\xi}} + \frac{\xi P_3}{e^{(4n+4)\xi}} \cdots\right]$$

$$o_m = 2\pi\xi e^{m\xi} \sqrt{(1 + e^{2m\xi})} = 2\pi \left[\xi e^{2m\xi} + \xi P_1 + \frac{\xi P_2}{e^{2m\xi}} + \frac{\xi P_3}{e^{4m\xi}} + \cdots\right]$$

Die Addition der verticalen Reihen ergibt:

$$\varsigma_1 = 2\pi\xi \; \frac{e^{(2m+2)\xi} - e^{2n\xi}}{e^{2\xi} - 1.}$$

$$\xi e^{(2m+2)\xi} = \xi + \frac{(2m+2)\xi^2}{1} + \frac{(2m+2)^2\xi^3}{1\,.\,2} + \frac{(2m+2)^3\xi^4}{1\,.\,2\,.\,3} \cdots\cdots$$

$$e^{2\xi} - 1 = 2\xi + \frac{4\xi^2}{1} + \frac{8\xi^3}{1\,.\,2} + \frac{16\xi^4}{1\,.\,2\,.\,3.}$$

$$\xi\,\frac{e^{(2m+2)\xi}}{e^{2\xi} - 1} = \frac{1}{2} + \frac{2m+2}{2}\,\xi + \frac{(2m+2)^2}{2\,.\,1\,.\,2}\,\xi^2 + \frac{(2m+2)^3}{2\,.\,1\,.\,2\,.\,3}\,\xi^3 \cdots\cdots = \frac{1}{2}\,e^{(2m+2)\xi}$$

Ebenso ist: $\quad \dfrac{\xi e^{2n\xi}}{e^{2\xi} - 1} = \dfrac{1}{2}\,e^{2n\xi}$

Es ist daher: $\varsigma_1 = 2\pi\,\dfrac{e^{(2m+2)\xi} - e^{2n\xi}}{2}$ wofür wir, da $(2m + 2)\xi$ unendlich wenig von $2m\xi$ verschieden ist und $m\xi = X$, $n\xi = x$ ist, setzen können

$$\varsigma_1 = \pi\,(e^{2X} - e^{2x}) = \pi\,(Y^2 - y^2)$$

$$\varsigma_2 = 2\pi\,(m - n)\,\xi P_1 = 2\pi\,(X - x)\,P_1$$

Die übrigen verticalen Reihen bilden fallende geometrische Progressionen, die wir, wie §. 5 geschehen, summiren wollen:

$$\varsigma_3 = \frac{2\pi\left(\dfrac{\xi P_2}{e^{2n\xi}} - \dfrac{\xi P_2}{e^{2m\xi}}\right)}{1 - \dfrac{1}{e^{2\xi}}} = \frac{2\pi\xi P_2}{e^{2n\xi} - e^{(2n-2)\xi}} - \frac{2\pi\xi P_2}{e^{2m\xi} - e^{(2m-2)\xi}}$$

$$\frac{2\pi\xi P_2}{e^{2n\xi} - e^{(2n-2)\xi}} = \frac{2\pi\xi P_2}{2\xi + \dfrac{4n\xi}{1} + \dfrac{8n^2\xi^2}{1\,.\,2\,.} \cdots} = \frac{\pi P_2}{e^{2n\xi}} = \frac{\pi P_2}{e^{2x}}$$

Ebenso ist $-\dfrac{2\pi\xi P_2}{e^{2m\xi} - e^{(2m-2)\xi}} = -\dfrac{\pi P_2}{e^{2X}}$

Mithin $\quad \varsigma_3 = \pi P_2 \left(\dfrac{1}{e^{2x}} - \dfrac{1}{e^{2X}}\right) = \pi P_2\,\dfrac{e^{2X} - e^{2x}}{e^{2(X+x)}} = \pi P_2\,\dfrac{Y^2 - y^2}{Y^2 y^2}$

$$\underset{4}{\varsigma} \text{ ist} = \frac{\dfrac{2\pi\xi P_3}{e^{4n\xi}} - \dfrac{2\pi\xi P_3}{e^{4m\xi}}}{1 - e^{4\xi}} = \frac{2\pi\xi P_3}{e^{4n\xi} - e^{(4n-4)\xi}} - \frac{2\pi\xi P_3}{e^{4m\xi} - e^{(4m-4)\xi}}$$

$$\frac{2\pi\xi P_3}{e^{4n\xi} - e^{(4n-4)\xi}} = \frac{2\pi\xi P_3}{4\xi + \dfrac{16n\xi^2}{1} + \dfrac{64n^2\xi^3}{1\,.\,2}\,\ldots} = \frac{P_3\pi}{2e^{4x}}$$

Ebenso ist $\dfrac{2\pi\xi P_3}{e^{4m\xi} - e^{(4m-4)\xi}} = \dfrac{P_3\pi}{2e^{4X}}.$

$$\underset{4}{\varsigma} = P_3\pi\left(\frac{1}{2e^{4x}} - \frac{1}{2e^{4X}}\right) = \frac{1}{2}P_3\pi\,\frac{e^{4X} - e^{4x}}{e^{4(X+x)}} = \frac{1}{2}P_3\pi\,\frac{Y^4 - y^4}{Y^4y^4}$$

Ebenso ist $\underset{5}{\varsigma} = \dfrac{1}{3}P_4\pi\,\dfrac{Y^6 - y^6}{Y^6y^6}$ u. s. w.

$$O = 2\pi\left(Y^2 - y^2 + (X - x)P_1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{Y^2 - y^2}{Y^2y^2}P_3 + \frac{1}{4}\cdot\frac{Y^4 - y^4}{Y^4y^4}P_3 + \frac{1}{6}\cdot\frac{Y^6 - y^6}{Y^6y^6}P_4\,\ldots\right)$$

Für negative Abscissen werden wir den allgemeinen Ausdruck:

$\underset{n}{o} = 2\pi\xi e^{n\xi}\,(1 + e^{2n\xi})$ so entwickeln, daß wir 1 als das erste Glied des Binoms betrachten. Dann ist:

$$\underset{n}{o} = 2\pi\,(\xi e^{n\xi} + \xi e^{3n\xi}P_1 + \xi e^{5n\xi}P_2 + \xi e^{7n\xi}P_3\,\ldots)$$

$$\underset{n+1}{O} = 2\pi\,(\xi e^{(n+1)\xi} + \xi e^{3(n+1)\xi}P_1 + \xi e^{5(n+1)\xi}P_2 + \xi e^{7(n+1)\xi}P_3\,\ldots)$$

$$\underset{m}{O} = 2\pi\,(\xi e^{m\xi} + \xi e^{3m\xi}P_1 + \xi e^{5m\xi}P_2 + \xi e^{7m\xi}P_3\,\ldots)$$

$$\underset{1}{\varsigma} = \frac{2\pi\xi e^{n\xi}}{1 - e^{\xi}} - \frac{2\pi\xi e^{m\xi}}{1 - e^{\xi}}$$

$$\frac{2\pi\xi e^{n\xi}}{1 - e^{\xi}} = \frac{2\pi\left(\xi + \dfrac{n\xi^2}{1} + \dfrac{n^2\xi^3}{1\,.\,2} + \dfrac{n^3\xi^4}{1\,.\,2\,.\,3}\,\ldots\right)}{-\xi - \dfrac{\xi^2}{1\,.\,2} - \dfrac{\xi^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,\ldots}$$

$$= 2\pi\left(-1 - n\xi - \frac{n^2\xi^2}{1\,.\,2} - \frac{n^3\xi^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,\ldots\right) = -2\pi e^{x}$$

Ebenso ist $-\dfrac{2\pi\xi e^{m\xi}}{1 - e^{\xi}} = 2\pi e^{X}$

$$\underset{1}{\varsigma} = 2\pi e^{X} - 2\pi e^{x} = 2\pi\,(Y - y)$$

Ebenso ist $\underset{2}{\varsigma} = \dfrac{2\pi P_1}{3}\,(e^{3X} - e^{3x}) = \dfrac{2\pi P_1}{3}\,(Y^3 - y^3)$

$$\underset{3}{\varsigma} = \frac{2}{5}\pi P_2\,(e^{5X} - e^{5x}) = \frac{2\pi}{5}P_2\,(Y^5 - y^5)$$

$$O = 2\pi\left[Y - y + \frac{P_1}{3}(Y^3 - y^3) + \frac{P_2}{5}(Y^5 - y^5)\,\ldots\ldots\right]$$

Für $X = -\infty$ wird $Y = o$ und wir erhalten:

$$O = 2\pi\left(-y - \frac{P_1}{3}y^3 - \frac{P_2}{5}y^5 - \frac{P_3}{7}y^7\,\ldots\right)$$

§. 8. Die Oberfläche eines Körpers zu berechnen, der durch Umdrehung der Kettenlinie um ihre Abscissenachse entsteht.

Wir fanden II. §. 6. $c_n = \frac{\xi}{2}\left(e^{\frac{n\xi}{a}} + e^{-\frac{n\xi}{a}}\right)$

$$2y_n\pi = a\pi\left(e^{\frac{n\xi}{a}} + e^{-\frac{n\xi}{a}}\right)$$

$$o_n = \frac{a\pi\xi}{2}\left(e^{\frac{2n\xi}{a}} + 2 + e^{-\frac{2n\xi}{a}}\right)$$

Ebenso ist $o_1 = \frac{a\pi\xi}{2}\left(e^{\frac{2\xi}{a}} + 2 + e^{-\frac{2\xi}{a}}\right)$

$$o_2 = \frac{a\pi\xi}{2}\left(e^{\frac{4\xi}{a}} + 2 + e^{-\frac{4\xi}{a}}\right) \text{ u. s. w.}$$

$$\varsigma_1 = \frac{a\pi\xi}{2}\left(\frac{e^{\frac{2n+2}{a}\xi} - e^{\frac{2\xi}{a}}}{e^{\frac{2\xi}{a}} - 1}\right)$$

$$\varsigma_1 = \frac{a\pi}{2}\left[\frac{\xi + \frac{2n+2}{a}\xi^2 + \frac{\left(\frac{2n+2}{a}\right)^2}{1\,.\,2}\xi^3 + \frac{\left(\frac{2n+2}{a}\right)^3}{1\,.\,2\,.\,3}\xi^4 \ldots - \xi - \frac{2\xi^2}{a} - \frac{4\xi^3}{1\,.\,2\,a^2} \cdots}{\frac{2\xi}{a} + \frac{\frac{4\xi^2}{a^2}}{1\,.\,2} + \frac{\frac{8\xi^3}{a^3}}{1\,.\,2\,.\,3} \cdots\cdot}\right]$$

$$\varsigma_1 = \frac{a\pi}{2}\left(n\xi + \frac{\frac{2n^2\xi^2}{a}}{1\,.\,2} + \frac{\frac{4n^3\xi^3}{a}}{1\,.\,2\,.\,3} \cdots\cdot\right)$$

$$\frac{a^2\pi}{4} + \varsigma_1 = \frac{a^2\pi}{4}\left(1 + \frac{2n\xi}{a} + \frac{\frac{4n^2\xi^2}{a^2}}{1\,.\,2} + \frac{\frac{8n^3\xi^3}{a^3}}{1\,.\,2\,.\,3} \cdots\right)$$

$$\varsigma_1 = \frac{a^2\pi}{4}\left(e^{\frac{2n\xi}{\alpha}} - 1\right) = \frac{a^2\pi}{4}e^{2x} - \frac{a^2\pi}{4}$$

$$\varsigma_2 = a\pi\xi n = a\pi x$$

$$\varsigma_3 = -\frac{a^2\pi}{4}e^{-2x} + \frac{a^2\pi}{4}$$

$$O = \frac{a\pi}{4}\left(ae^{2x} + 4x - ae^{-2x}\right).$$

Schlußwort über das unendlich Kleine.

So gewaltig und Staunen erregend die Infinitesimalrechnung nicht nur als Wissenschaft, sondern nicht weniger in ihrer praktischen Anwendung geworden ist, eben so viele Anstrengung haben die Mathematiker der philosophischen Begründung des unendlich Kleinen zugewandt. Die Schwierigkeit liegt bekanntlich darin, daß eine unendlich kleine Größe, die dem Endlichen gegenüber gleich Null ist, mit einer unendlichen Größe multiplicirt wieder endlich wird, während sie einer andern unendlich kleinen Größe gegenüber verschieden groß, ja selbst unendlich mal größer als dieselbe sein kann, wenn jene eine unendlich kleine Größe einer höhern Ordnung ist. Newton betrachtet die unendlich kleinen Größen als wirklich existirende Dinge, nicht etwa als Abstractionen, und führt zur Erklärung an, daß man sich das unendlich Kleine nicht vor dem Verschwinden, auch nicht nachdem sie verschwunden sind, sondern im Augenblick des Verschwindens denken muß. Aehnlich Leibnitz. Aber abgesehen davon, daß Newton hier offenbar nur das characteristische Dreieck im Auge hatte, scheinen mir durch diese Anschauung die Widersprüche nicht gehoben. Ein Programm aus Hannover vom Jahre 1859 sagt ganz recht, wenn das Unendliche durch einen Zahlenausdruck gefaßt werden könnte, so fiele dasselbe unter die Kategorie des Endlichen. Wenn jedoch später in demselben das unendlich Kleine als „Existenz im Nullpunkt" bezeichnet wird, so glaube ich, daß damit der erste Standpunkt wieder verlassen ist.

Ich meinestheils halte das unendlich Kleine, trotzdem daß es der Schwerpunkt der höhern Mathematik geworden ist, als mathematische Größe für Nichts als eine Fiction, ähnlich wie es auch die imaginären Größen sind, ungeachtet aller Bestrebungen, sie räumlich zu deuten.

Einzig und allein die formelle Logik der mathematischen Sprache, gestützt auf den Umstand, daß, um ein endliches Resultat zu erhalten, der Schritt, durch den wir zum Unendlichen gelangten, durch die entgegengesetzte Operation entweder auf einmal, oder in Theilen, aber vollständig, zurückgemacht wird, das allein ist es, dem wir es zu verdanken haben, wenn die Rechnung mit etwas, das keine Größe ist, nicht in Widersprüche führt. Der Beweis dürfte sehr leicht zu führen sein, hier fehlt der Raum.

Dr. Rosendahl.

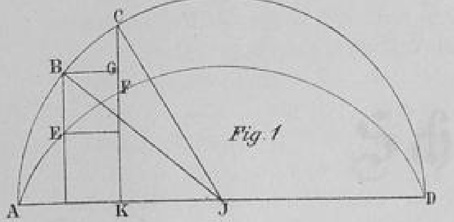

Fig. 1

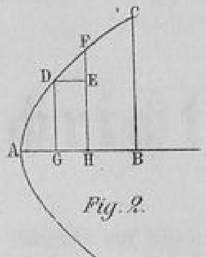

Fig. 2.

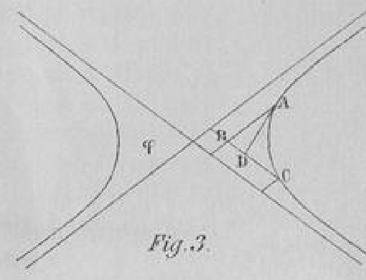

Fig. 3.

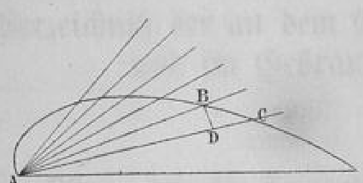

Fig. 4.

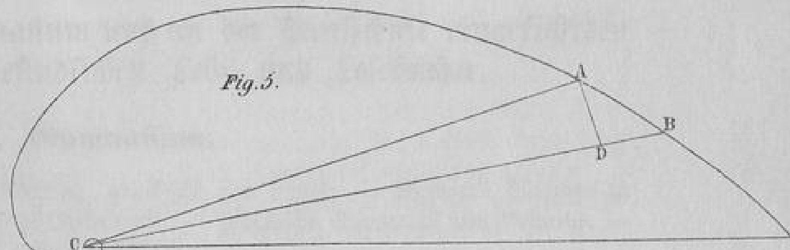

Fig. 5.

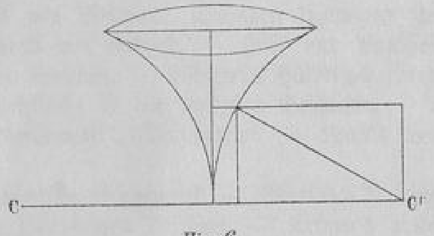

Fig. 6.

1870.