Quadratur und Rectifikation der Curven

sowie

Berechnung des körperlichen Inhalts und der Oberfläche der Revolutionskörper ohne Integralrechnung.

I. Quadratur der Curven.

§. 1. Darstellung der Zahl Π durch unendliche Reihen.

Figur 1. AB sei ein beliebiger Theil eines Kreisbogens mit dem Radius I, dessen Sinus BD gegeben ist. Denken wir uns jetzt diesen Sinus in eine unendliche Anzahl (n) gleicher Theile zerlegt, so wird jeder dieser Theile selber (ξ) unendlich klein sein, mit der unendlichen Zahl n multiplicirt aber eine bestimmte endliche Größe, nämlich BD, bedeuten. Im folgenden sind überhaupt ξ und η unendlich kleine Theile der Coordinaten, n eine unendlich große Zahl, $n\xi$ die Abscisse x und $n\eta$ die Ordinate y. Versuchen wir es jetzt, indem wir BD als Abscissenachse und D als den Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinaten annehmen, die zu den Abscissen $\underset{1}{x} = \xi$, $\underset{2}{x} = 2\xi$, ... zugehörigen Ordinaten zu bestimmen.

Abscissen:	Ordinaten:
ξ	$\sqrt{(1-\xi^2)} - DC$
2ξ	$\sqrt{(1-4\xi^2)} - DC$
3ξ	$\sqrt{(1-9\xi^2)} - DC$ u. s. w. bis
$n\xi$	$\sqrt{(1-n^2\xi^2)}$

Wenn wir jetzt die Werthe unter dem Wurzelzeichen nach dem binomischen Lehrsatze für die Potenz $\frac{1}{2}$ entwickeln, so erhalten wir für die einzelnen Ordinaten folgende Werthe:

$$\underset{1}{y} = - DC + 1 - \underset{1}{P}\xi^2 + \underset{2}{P}\xi^4 - \underset{3}{P}\xi^6 \; .....$$

$$\underset{2}{y} = - DC + 1 - \underset{1}{P}2^2\xi^2 + \underset{2}{P}2^2\xi^4 - \underset{3}{P}2^6\xi^6 \; .....$$

$$\underset{3}{y} = - DC + 1 - \underset{1}{P}3^2\xi^2 + \underset{2}{P}3^4\xi^4 - \underset{3}{P}3^6\xi^6 \; ...... \text{u. s. w.}$$

und als letzte Ordinate

$$\underset{n}{y} = - DC + 1 - \underset{1}{P}n^2\xi^2 + \underset{2}{P}n^4\xi^4 - \underset{3}{P}n^6\xi^6 \; ....$$

Es bezeichnen hier $\underset{1}{P}$, $\underset{2}{P}$ u. s. w. die Binomialcoefficienten zur Potenz $\frac{1}{2}$, wobei zu berücksichtigen, daß die geraden Biomialcoefficienten $\underset{2}{P}$, $\underset{4}{P}$, $\underset{6}{P}$ u. s. w. negativ sind.

Um nun das arithmetische Mittel dieser sämmtlichen Ordinaten zu erhalten, wollen wir die untereinanderstehenden Ausdrücke addiren und die jedesmal erhaltene Summe durch n dividiren, wobei in dem Resultat alle Ausdrücke, in denen ξ in einer höhern Potenz als n vorkömmt, als verschwindend betrachtet werden können, weil $n^p \, \xi^{p+q} = (\sin AB^p) \, \xi^q$ also eine endliche Größe mit einer unendlich kleinen multiplicirt ist (q natürlich immer ganz und positiv gedacht.)

Die erste Reihe ergibt $\frac{n(-DC)}{n} = -DC$

Die zweite Reihe: $\frac{n \, . \, 1}{n} = 1$

Für die Summirung der übrigen Verticalreihen ist die folgende bekannte Formel in Anwendung zu bringen: Bezeichnet man das erste Glied einer höhern arithmetischen Reihe mit a, die Anfangsglieder der Differenzzeichen mit α, β, γ 2c., das summatorische Glied mit ς und die Anzahl der Glieder mit n, so ist:

$$\varsigma = na + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,\alpha + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,\beta + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,\gamma \text{ 2c.}$$

Bei der Summirung der in ξ^2 multiplicirten Ausdrücke ist zu berücksichtigen, daß die beiden ersten Theile der Formel wegfallen, weil n in einer niedern Potenz vorkömmt, als ξ, wenn man nämlich bedenkt, daß die ganze Summe noch durch n getheilt werden soll, um das arithmetische Mittel zu geben; alle Glieder nach dem 3ten fallen ebenfalls weg, weil bei diesem γ, δ u. s. w. $= 0$ sind. Ebenso ist bei der Summirung der Coefficienten von ξ^4 nur das 5te Glied 2c. zu berücksichtigen. Das arithmetische Mittel sämmtlicher Ordinaten gestalten sich daher jetzt folgendermaßen:

$$\text{Arithm. Mitt. d. Ordin.} = -DC + 1 - \frac{n.(n-1(n-2)}{n\,.\,1\,.\,2\,.\,3}\,\beta\underset{1}{P}\xi^2 + \frac{n.(n-1)\,(n-2(n-3)(n-4)}{n\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\,\underset{2}{P}\delta\xi^4$$
$$- \frac{n.(n-1)(n-2)\,(n-3)\,(n-4)(n-5)(n-6)}{n\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7}\,\zeta\underset{3}{P}\xi^6 \;\ldots\ldots$$ u. s. w., wo β die letzte Differenz der Quadrate, δ die der Biquadrate, ζ die der sechsten Potenzen der natürlichen Zahlenreihe bedeuten.

Aber $\frac{n\,.\,(n-1)\,(n-2)}{n\,.\,1\,.\,2\,.\,3}\,\beta\underset{1}{P}\xi^2 = \frac{n^2 - 3n + 2}{1\,.\,2\,.\,3}\,\beta\underset{1}{P}\xi^2$. — Auch hier ist $\frac{3n+2}{1\,.\,2\,.\,3}\,\beta\underset{1}{P}\xi^2$ aus dem oben angeführten Grund gleich Null zu setzen, und wenn man jetzt dieselbe Veränderung mit den übrigen Gliedern der Reihe vornimmt, so ist:

$$\text{Arithm. Mitt. der Ordinaten} = 1 - DC - \frac{n^2\beta\underset{1}{P}\xi^2}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{n^4\delta\underset{2}{P}\xi^4}{1.2.3.4.5} - \frac{n^6\zeta\underset{3}{P}\xi^6}{1.2.3.4.5.6.7} \text{ u. s. w.}$$

Da aber $\beta = 1\,.\,2$, $\delta = 1\,.\,2\,.\,3\,.\,4$, $\zeta = 1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6$, überhaupt allgemein die letzte Differenz der mten Potenz der natürlichen Zahlenreihe $1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,.\,m$ ist, so erhält man als arithmetisches Mittel der Ordinaten:

$$1 - DC - \tfrac{1}{3}\,\underset{1}{P}n^2\xi^2 + \tfrac{1}{5}\,\underset{2}{P}n^4\xi^4 - \tfrac{1}{7}\,\underset{2}{P}n^6\xi^6 \;\ldots.$$

Aber $n\xi = \sin AB$ und $DC = \cos AB$

$$\text{A. M. d. O.} = 1 - \cos AB - \tfrac{1}{3}\,\underset{3}{P}\,(\sin AB)^2 + \tfrac{1}{5}\,\underset{2}{P}\,(\sin AB)^4 - \tfrac{1}{7} \text{ 2c.} \ldots$$

Um nun den Theil der Kreisfläche DAB zu finden, braucht man diese mittleren Ordinate nur mit $DB = \sin AB$ zu multipliciren, und man erhält:

$$DAB = \sin AB - \cos AB \sin AB - \tfrac{1}{3}\,\underset{1}{P}\,(\sin AB)^3 + \tfrac{1}{5}\,\underset{2}{P}\,(\sin AB)^5 - \tfrac{1}{7} \text{ 2c.} \ldots$$

$$\triangle\, DCB = \tfrac{1}{2}\,\sin AB\,.\,\cos AB.$$

$$\text{sect } ABC = \sin AB - \tfrac{1}{2}\,\cos AB.\,\sin AB - \tfrac{1}{3}\,\underset{1}{P}\,(\sin AB)^3 + \tfrac{1}{5}\,\underset{2}{P}\,(\sin AB)^5 - \tfrac{1}{7} \ldots$$

Dividiren wir diesen Ausdruck durch $\frac{1}{2}$, so haben wir offenbar, weil 1 der Radius ist, den Bogen AB

$$\text{arc } AB = 2 \sin AB - \cos AB \sin AB - \frac{2}{3} \underset{1}{P} (\sin AB)^3 + \frac{2}{5} \underset{2}{P} (\sin AB)^5 - \frac{2}{7} \text{ ꝛc.}$$

Setzt man in die obige Reihe $\sin AB = 1$, also $AB = \frac{\pi}{2}$, so erhält man:

$$\frac{\pi}{2} = 2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{8} - \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{16} - \frac{2}{9} \cdot \frac{5}{128} \cdots\cdots$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{9} \cdot \frac{5}{128} \cdots\cdots$$

Für die wirkliche Berechnung von π ist diese Reihe jedoch viel zu unbequem. Dagegen erhält man, wenn man $\sin AB = \frac{1}{2}$, also $AB = \frac{\pi}{6}$ setzt, folgende Reihe:

$$\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{4} \sqrt{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^3} - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2^5} - \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2^7} - \frac{2}{9} \cdot \frac{5}{128} \cdot \frac{1}{2^9} \cdots$$

Nur soweit berechnet, wie wir die Reihe aufgeschrieben, gibt dieselbe das Resultat $\frac{\pi}{6} = 0{,}523599$ was von dem wahren Werthe $\frac{\pi}{6} = 0{,}523598 \ldots$ nur um 0,000001 abweicht. Natürlich kann die Reihe durch Annahme eines kleineren Werthes für arc . AB und dadurch auch für sin AB bedeutend convergenter gemacht werden.

Setzt man in die obige allgemeine Formel für sin AB cos AB und ebenso sin AB für cos AB ein, so muß, wie die Anschauung der Figur unmittelbar ergibt, arc AB in den Bogen verändert werden, der AB zu einem Viertelkreise ergänzt und wir erhalten die Reihe:

$$\frac{\pi}{2} - \text{arc } AB = 2 \cos AB - \cos AB \cdot \sin AB - \frac{2}{3} \underset{1}{P} (\cos AB)^3 + \frac{2}{5} \underset{2}{P} (\cos AB)^5 - \frac{1}{7} \text{ ꝛc.}$$

oder verglichen mit der obigen Reihe für $\frac{\pi}{2}$

$$\text{arc } AB = 2 - 2 \cos AB + \cos AB \sin AB - \frac{2}{3} \underset{1}{P} [1 - (\cos AB)^3] + \frac{2}{5} \underset{2}{P} [1 - (\cos AB)^5] \text{ ꝛc.}$$

§. 2. Berechnung des Flächeninhalts einer Curve, deren Gleichung $y = a + b \sqrt[r]{(c - dx^m)}$.

Figur 2. Um die in §. 1 für die Kreisfläche aufgestellte Reihe zu verallgemeinern, wollen wir den Inhalt einer Fläche berechnen, die von einer Curve, deren Gleichung oben gegeben sein mag, zwei Ordinaten und einer Abscisse eingeschlossen ist. Nehmen wir C als den Anfangspunkt der Coordinaten, CD als die Abscissenachse, und theilen dieselben wieder in eine unendliche Anzahl gleicher Theile, ($CD = n\xi$) deren jeder unendlich klein sein wird, so erhalten wir zu den auf einander folgenden Abscissen folgende Ordinaten:

$$\underset{1}{y} = a + b \sqrt[r]{(c - d\xi^m)}$$

$$\underset{2}{y} = a + b \sqrt[r]{(c - d \cdot 2^m \xi^m)}$$

$$\underset{3}{y} = a + b \sqrt[r]{(c - d \cdot 3^m \xi^m)} \text{ u. s. w. und endlich}$$

$$\underset{n}{y} = a + b \sqrt[r]{(c - d\, n^m \xi^m)}$$

Zunächst sind wieder die unter den Wurzelzeichen befindlichen Ausdrücke nach dem binomischen Lehrsatze zu entwickeln.

$$\sqrt[r]{(c - d\xi^m)} = \sqrt[r]{c} - \frac{d\xi^m}{\sqrt[r]{(c^{r-1})}} \underset{1}{P} + \frac{d^2\xi^{2m}}{\sqrt[r]{(c^{2r-1})}} \underset{2}{P} - \frac{d^3\xi^{3m}}{\sqrt[r]{(c^{3r-1})}} \underset{3}{P} \dots$$

$$\sqrt[r]{(c - d2^m\xi^m)} = \sqrt[r]{c} - \frac{d \,.\, 2^m \,.\, \xi^m}{\sqrt[r]{(c^{r-1})}} + \frac{d^2 2^{2m}\xi^{2m}}{\sqrt[r]{(c^{2r-1})}} \underset{2}{P} - \frac{d^3 2^{3m}\xi^{3m}}{\sqrt[r]{(c^{3r-1})}} \underset{3}{P} \dots$$

$$\sqrt[r]{(c - dn^m\xi^m)} = \sqrt[r]{c} - \frac{dn^m\xi^m}{\sqrt[r]{(c^{r-1})}} + \frac{d^2n^{2m}\xi^{2m}}{\sqrt[r]{(c^{2r-1})}} \underset{2}{P}, + \frac{d^3n^{3m}\xi^{3m}}{\sqrt[3]{(c^{3r-1})}} \underset{3}{P}, \dots$$

Es bedeuten hier $\underset{1}{P}$, $\underset{2}{P}$, $\underset{3}{P}$ ꝛc. die Binomialcoefficienten zur Potenz $\frac{1}{r}$, und unter diesen sind $\underset{2}{P}$, $\underset{4}{P}$ u. s. w. negativ. Addirt man in derselben Weise wie im vorigen Paragraphen die unter einander stehenden Ausdrücke und dividirt jede Größe durch n, so erhält man:

$$\varsigma = \sqrt[r]{c} - \frac{dn^m\xi^m}{(m+1)\sqrt[r]{(c^{r-1})}} \underset{1}{P} + \frac{d^2n^{2m}\xi^{2m}}{(2m+1)\sqrt[r]{(c^{2r-1})}} \underset{2}{P} - \frac{d^3n^{3m}\xi^{3m}}{(3m+1)\sqrt[r]{(c^{3r-1})}} \underset{3}{P} \text{ u. s. w.}$$

oder da $n\xi = DC = x$.

$$\varsigma = \sqrt[r]{c} - \frac{dx^m}{(m+1)\sqrt[r]{(c^{r-1})}} \underset{1}{P} + \frac{d^2x^{2m}}{(2m+1)\sqrt[r]{(c^{2r-1})}} \underset{2}{P} - \frac{d^3x^{3m}}{(3m+1)\sqrt[r]{(c^{3r-1})}} \underset{3}{P} \dots$$

Die mittlere Ordinate aber ist $a + b\varsigma$

$$= a + b \left[\sqrt[r]{c} - \frac{dx^m}{(m+1)\sqrt[r]{(c^{r-1})}} \underset{1}{P} + \frac{d^2x^{2m}}{(2m+1)\sqrt[r]{(c^{2r-1})}} \underset{2}{P} - \frac{d^3x^{3m}}{(3m+1)\sqrt[r]{(c^{3r-1})}} \underset{3}{P} \dots\right]$$

und der Flächeninhalt von ABDC =

$$ax + b\left[x\sqrt[r]{c} - \frac{dx^{m+1}}{(m+1)\sqrt[r]{(c^{r-1})}} \underset{1}{P} + \frac{d^2x^{2m+1}}{(2m+1)\sqrt[r]{(c^{2r-1})}} \underset{2}{P} + \frac{d^3x^{3m+1}}{(3m+1)\sqrt[r]{(c^{3r-1})}} \underset{3}{P} \dots\right]$$

§. 3. Quadratur der Ellipse.

Figur 3. Aus jener allgemeinen Form läßt sich die Berechnung des Flächeninhalts der Ellipse leicht herleiten. Die Gleichung derselben ist, wenn man den Mittelpunkt als Anfangspunkt der Coordinaten annimmt, $y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$

In jener allgemeinen Formel ist daher $a = 0$, $b = \frac{b}{a}$ $r = 2$, $c = a^2$, $d = 1$, $m = 2$, $CD = x$ zu setzen. $F = \frac{b}{a}\left[ax - \frac{x^3}{3a}\underset{1}{P} + \frac{x^5}{5a^3}\underset{2}{P} - \frac{x^7}{7a^5}\underset{3}{P} \dots\right]$

Für den Quadranten wird $x = a$, und daher ist

$$ABC = ab - \frac{ab\underset{1}{P}}{3} + \frac{ab\underset{2}{P}}{5} - \frac{ab\underset{3}{P}}{7} \dots$$

oder da $1 - \frac{1}{3}\underset{1}{P} + \frac{1}{5}\underset{2}{P} - \frac{1}{7}\underset{3}{P} \dots = \frac{\pi}{4}$ ist.

$$ABC = \frac{ab\pi}{4}$$ und für die ganze Elipse $ab\pi$.

§. 4. Flächeninhalt der Parabel.

Figur 4. Die Gleichung der Parabel, wenn der Scheitel Anfangspunkt der Abscissen und die Achse die Abscissenlinie ist, ist für rechtwinklige Coordinaten: $y^2 = px$ oder $x = \frac{y^2}{p}$. Denken wir uns jetzt y in n unendlich kleine Theile getheilt ($n\eta = CB$), so erhalten wir zu den Ordinaten $y_1 = \eta$, $y_2 = 2\eta \; . \; . \; . \; . \; y_n = n\eta$ die Abscissen

$$x_1 = \frac{\eta^2}{p} \quad x_2 = \frac{(2\eta)^2}{p} \quad x_3 = \frac{(3\eta)^2}{p} \; . \; . \; . \; . \qquad x_n = \frac{(n\eta)^2}{p}$$

Errichten wir zwischen AC und BC ein Rechteck und ziehen durch die Spitzen der Ordinaten, Parallelen mit AC, bis sie AD treffen, so wird durch diese Parallelen das außerhalb der Parabel gelegene Flächenstück ADB in Figuren eingetheilt, die wir als Rechtecke ansehen können, weil η verschwindend klein gedacht wird.

Es ist jetzt
$$R_1 = x_1 \, . \, \eta = \frac{\eta^3}{p}$$
$$R_2 = x_2 \, \eta = \frac{4\eta^3}{p}$$
$$R_3 = x_3 \, \eta = \frac{9\eta^3}{p}$$
$$R_n = x_n \, \eta = \frac{n^2\eta^3}{p.}$$

Summiren wir jetzt sämmtliche Rechtecke nach der §. 1 angegebenen Formel, unter Berücksichtigung, daß $n\eta^2$ und $n^2\eta^3$ unendlich klein ist, also wegfallen kann, so erhalten wir:

$$ADB = \frac{n^3\eta^3}{3p} = \frac{1}{3} \; \frac{n^2\eta^2}{p} \; n\eta = \frac{1}{3} \; \frac{\eta^2}{p} \; y = \frac{1}{3} \; xy.$$

Da aber $ABCD = xy$, so bleibt für ABC, für die von den Coordinaten und der Parabel eingeschlossene Fläche, $\frac{2}{3}$ xy nach.

§. 5. Berechnung von $\sqrt{1} + \sqrt{2} \; . \; . \; . \; . + \sqrt{n}$, wenn n sehr groß ist.

Denken wir uns jetzt in einer Parabel mit dem Parameter 1 die Abscissenlinie in unendlich viele gleiche Theile getheilt, so erhalten wir zu den Abscissen $x_1 = \xi \; x_2 = 2\xi \; . \; . \; x_n = n\xi$ die Ordinaten $\sqrt{\xi}, \sqrt{2\xi} \; . \; . \; . \; \sqrt{n\xi}$. Die einzelnen durch die Ordinaten und die Differenzen der Abscissen gebildeten Figuren sind jetzt als Trapeze betrachtet an Inhalt.

$$F_1 = \frac{\xi\sqrt{\xi}}{2} \; F_2 = \frac{\sqrt{\xi} + \sqrt{2\xi}}{2} \, \xi \; . \; . \; . \; F_n = \frac{\sqrt{(n-1)\,\xi} + \sqrt{n\xi}}{2} \; \xi.$$

$$\text{Parabelfläche} = \xi\sqrt{\xi} \; \frac{(2\sqrt{1} + 2\sqrt{2} \; . \; . \; . \; . \; 2\sqrt{(n-1)} + \sqrt{n})}{2}$$

Aber $\text{Parabelfläche} = \frac{2}{3} \; AB \, . \, BC = \frac{2}{3} \, n\xi\sqrt{n\xi}$

$$\frac{2}{3} \, n\xi\sqrt{n\xi} = \frac{2\sqrt{1} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \; . \; . \; . \; . \; 2\sqrt{(n-1)} + \sqrt{n}}{2} \, \xi\sqrt{\xi}$$

$$\frac{2}{3} \, n\sqrt{n} + \frac{\sqrt{n}}{2} = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} \; . \; . \; . \; \sqrt{n}$$

Durch Subtractionen $\sqrt{i} + \sqrt{2} + \sqrt{3} \ldots \sqrt{n} = \frac{2}{3} n\sqrt{n} + \frac{\sqrt{n}}{2}$.

von $\sqrt{1} + \sqrt{2} \ldots + \sqrt{n} + \sqrt{(n+1)} \ldots + \sqrt{m} = \frac{2}{3} m\sqrt{m} + \frac{\sqrt{m}}{2}$

erhält man die neue Formel:

$$+ \sqrt{(n+1)} + \sqrt{(n+2)} \ldots + \sqrt{m} = \frac{2}{3}(m\sqrt{m} - n\sqrt{n}) + \frac{1}{2}(\sqrt{m} - \sqrt{n})$$

die sehr genau ist, wenn sowohl m als n große Zahlen sind.

§. 6. Berechnung der Fläche der parabolischen Linie, deren Gleichung $y^r = px$ ist.

In der obigen Gleichung gehören zu den Ordinaten $y_1 = \eta, y_2 = 2\eta \ldots y_n = n\eta$ die Abscissen

$$x_1 = \frac{\eta^r}{p}\ x_2 = \frac{(2\eta)^r}{p}\ x_3 = \frac{(3\eta)^3}{p}$$

Berechnen wir wieder die einzelnen außerhalb der Fläche von der Verlängerung der Ordinaten, von AD (Figur zu §. 4) und der parabolischen Linie gebildeten Figuren, so erhalten wir:

$$F_1 = \frac{\eta^r \cdot \eta}{p.}, F_2 = \frac{(2\eta)^r\,\eta}{p} \ldots F_n = \frac{(n\eta)^r\,\eta}{p.}$$

Die Summe derselben F, gibt nach unserer in §. 1 aufgestellten Summationsformel

$$F = \frac{(\eta n)^{r+1}}{(r+1)\,p} = \frac{n^r\,\eta^r}{(r+1)\,p} \cdot n\eta = \frac{xy}{r+1}$$

Zählen wir das erhaltene Resultat von ABCD = xy ab, so erhalten wir ABD $= \frac{r}{r+1} xy$. Wird $r = 2$ gesetzt, so verwandelt sich die Formel in die §. 4 für die gewöhnliche Parabel aufgestellte.

§. 7. Berechnung von $\sqrt[r]{1} + \sqrt[r]{2} \ldots + \sqrt[r]{n}$.

Durch die so eben entwickelte Formel läßt sich der in §. 5 für die Quadratwurzeln aus den natürlichen Zahlen gegebene Ausdruck auf die übrigen Wurzeln ausdehnen. Setzen wir in der Gleichung $y^r = px$ den Parameter $= 1$, lassen jetzt wieder $n\xi = x$ sein und berechnen die zu den einzelnen Abscissen gehörigen Ordinaten, so haben wir:

$y_1 = \sqrt[r]{\xi}, y_2 = \sqrt[r]{2\xi}, y_3 = \sqrt[r]{3\xi} \ldots y_n = \sqrt[r]{n\xi}$. Die einzelnen durch die Ordinaten und die Differenzen der Abscissen gebildeten Abschnitte lassen sich jetzt als Paralleltrapeze ansehen und wir erhalten daher als Summe derselben $\varsigma = \xi \sqrt[r]{\xi}\ \frac{2\sqrt[r]{1} + 2\sqrt[r]{2} + 2\sqrt[r]{3} \ldots 2\sqrt[r]{(n+1)} + \sqrt[r]{n}}{2}$

Aber F war nach §. 6 $= \frac{r}{r+1} n\xi \sqrt[r]{n\xi}$. Es ist daher

$$\frac{r}{r+1} n\xi \sqrt[r]{n\xi} = \xi \sqrt[r]{\xi} \cdot \frac{2\sqrt[r]{1} + 2\sqrt[r]{2} \ldots 2\sqrt[r]{(n+1)} + \sqrt[r]{n}}{2.}$$

$$\frac{r}{r+1} n\sqrt[r]{n} + \frac{\sqrt[r]{n}}{2} = \sqrt[r]{1} + \sqrt[r]{2} \ldots \sqrt[r]{n}$$

Durch Subtraction erhält man die für hohe Werthe von m und n sehr genaue Formel:

$$\frac{r}{r+1}\left(n\sqrt[r]{n} - m\sqrt[r]{m}\right) + \frac{1}{2}\left(\sqrt[r]{n} - \sqrt[r]{m}\right) = \sqrt[r]{m} + \sqrt[r]{(m+1)} \;.\;.\;.\;.\; + \sqrt[r]{n}$$

Anmerkung: Die in §. 5 und 7 aufgestellten Formeln geben den Werth jener Wurzelreihen etwas zu klein an, weil wir die innerhalb der Curve liegenden Flächen berechneten. Durch Berechnung der von den Tangenten statt von den Sehnen gebildeten Flächenstückchen erhält man den Werth etwas zu hoch und mithin zu gleicher Zeit die Möglichkeit, die Größe des Fehlers zu übersehen.

§. 8. Quadratur der Hyperbel aus der Gleichung $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$.

Figur 5. Es ist $\frac{y^2a^2}{b^2} = 2ax + x^2$

$$x = -a \pm \sqrt{\left(a^2 + \frac{y^2a^2}{b^2}\right)}$$

Zu den Ordinaten $y_1 = \eta$, $y_2 = 2\eta$ u. s. w. gehören die Abscissen:

$$x_1 = -a \pm \sqrt{\left(a^2 + \frac{a^2\eta^2}{b^2}\right)} \quad x_2 = -a \pm \sqrt{\left(a^2 + \frac{4\eta^2a^2}{b^2}\right)}$$

$x_n = -a \pm \sqrt{\left(a^2 + \frac{n^2\eta^2a^2}{b^2}\right)}$. Zieht man durch die Spitzen von y_1, y_2, y_3 u. s. w. Parallelen mit DC, so findet man die außerhalb der Hyperbel von der Verlängerung dieser Parallelen, der Linie AC und dem Hyperbelbogen gebildeten Rechtecke, indem man die Differenzen der Ordinaten mit der entsprechenden Abscisse multiplicirt:

$$R_1 = -a\eta + \eta\sqrt{\left(a^2 + \frac{a^2\eta^2}{b^2}\right)} \quad R_2 = -a\eta \pm \eta\sqrt{\left(a^2 + \frac{4a^2\eta^2}{b^2}\right)}$$

$$R_3 = -a\eta \pm \eta\sqrt{\left(a^2 + \frac{9a^2\eta^2}{b^2}\right)} \;.\;.\;.\;.\; R_n = -a\eta + \eta\sqrt{\left(a^2 + \frac{n^2a^2\eta^2}{b^2}\right)}$$

Wenn wir das doppelte Vorzeichen der Wurzelgröße unberücksichtigt lassen, weil ja unser Stück der Hyperbelfläche auf derselben Seite der Abscissenachse liegt, so ist nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt:

$$R_1 = -a\eta + a\eta + \frac{a\eta^3}{b^2}P_1 + \frac{a\eta^5}{b^4}P_2 + \frac{a\eta^7}{b^6}P_3 \ldots$$

$$R_2 = -a\eta + a\eta + \frac{4a\eta^3}{b^2}P_1 + \frac{16a\eta^5}{b^4}P_2 + \frac{64a\eta^7}{b^6}P_3 \ldots$$

$$R_{n} = -a\eta + a\eta + \frac{n^2a\eta^3}{b^2}P_1 + \frac{n^4a\eta^5}{b^4}P_2 + \frac{n^6a\eta^7}{b^6}P_3.$$

Addirt geben diese Verticalreihen:

$$ABC = \frac{n^3\eta^3a}{3b^2}P_1 + \frac{n^5 \,.\, \eta^5a}{5b^4}P_2 + \frac{n^7\eta^7a}{7b^6}P_3 \;.\;.\;.\;.\;.$$

$$ABC = \frac{ay^3}{3b^2}P_1 + \frac{ay^5}{5b^4}P_2 + \frac{ay^7}{7b^6}P_3 \;.\;.\;.\;.\;.$$

Aber $ABCD = xy$

$$BCD = xy - \frac{ay^3}{3b^2}P_1 - \frac{ay^5}{5b^4}P_2 - \frac{ay^7}{7b^6}P_3 \text{ u. s. w.}$$

Natürlich ist sowohl P_2 wie P_4, P_6 u. s. w. eine negative Größe.

§. 9. Quadratur der Hyperbel mittelst der Asymptoten-Gleichung $y = \frac{a^2}{x}$.

Figur 6. Wächst x wieder von 0 an in arithmetischer Progression um die unendlich kleine Größe ξ, so gehören zu den Abscissen

$$\underset{1}{x} = \xi,\ \underset{2}{x} = 2\xi,\ \underset{3}{x} = 3\xi \text{ u. s. w. die Ordinaten}$$

$$\underset{1}{y} = \frac{a^2}{\xi},\ \underset{2}{y} = \frac{a^2}{2\xi},\ \underset{3}{y} = \frac{a^2}{3\xi} \cdots \underset{n}{y} = \frac{a^2}{n\xi}$$

Multipliciren wir diese Ordinaten mit dem Sinus des Asymptotenwinkels, so erhalten wir die Höhe der einzelnen durch die Ordinaten, die Differenzen der Abscissen und den Hyperbelbogen gebildeten Figuren, deren Grundlinie überall ξ beträgt, und wir erhalten daher als Summe aller:

$$F = a^2 \sin\varphi \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

Da aber $l\,(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots$ oder, wenn man $x = 1$ setzt,

$l\,1 - 1 = l\,0 = -\infty = -\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ u. s. w., so ist $F. = a^2 \sin\varphi \,.\, \infty$,

d. h. selbst dann unendlich, wenn $n\xi$ oder x eine bestimmte endliche Größe ist.

Versuchen wir jetzt die zwischen 2 Ordinaten BD und CE, dem Theil der Abscissenlinie BC und dem Hyperpelbogen DE liegende Fläche zu berechnen. Es sei $AB = x = n\xi$, $AC = X = m\xi$, wo n und m unendlich groß sind, so erhalten wir in ähnlicher Weise wie vorher:

$$F = a^2 \sin\varphi \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \cdots + \frac{1}{m}\right)$$

Es ist $l\,(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$ u. s. w.

und daher $l\left[(1-x)^{-1}\right] = l\,\frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \cdots$

Setzen wir nun $x = 1 - \frac{1}{n}$, so erhalten wir

$$l\,\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)} = l\,n = 1 - \frac{1}{n} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}{2} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^3}{3} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^4}{4} \cdots$$

$$l\,n = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{2} + \frac{1 - \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{3} + \frac{1 - \frac{4}{n} + \frac{6}{n^2} - \frac{4}{n^4} + \frac{1}{n^4}}{4}$$

Die Summe der ersten von n unabhängigen Glieder beträgt $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots + \frac{1}{n}$.

Die Summe der zweiten:

$$-\frac{1}{n} - \frac{\frac{2}{n}}{2} - \frac{\frac{3}{n}}{3} - \frac{\frac{4}{n}}{4} \cdots - \frac{\frac{n}{n}}{n} = -\frac{1}{n} - \frac{1}{n} \cdots \text{ n mal} = -1.$$

Die in $\frac{1}{n^2}$ multiplicirten Glieder bilden folgende Reihe:

$$\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3}\,\frac{3}{n^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{6}{n^2} + \frac{1}{5}\,\frac{10}{n^2} \ldots . + \frac{1}{n}\;\frac{n\,.\,(n-1)}{1\,.\,2}\cdot\frac{1}{n^2}$$

$$= \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{3}{2n^2} + \frac{2}{n^2} \ldots . \;\frac{n-1}{1\,.\,2}\cdot\frac{1}{n^2}$$

Diese Glieder bilden offenbar eine arithmetische Progression mit der Differenz $\frac{1}{2n^2}$ und wir erhalten als Summe: $\varsigma_3 = \frac{n-1+1}{2n^2}\cdot\frac{n}{2} = \frac{1}{4}$

Die in $\frac{1}{n^3}$ multiplicirten Glieder sind

$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^3} - \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{n^3} - \frac{1}{5}\,\frac{10}{n^3} \ldots . - \frac{1}{n}\cdot\frac{n\,.\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.}\;\frac{1}{n^3}$$

$$= -\frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{3} + 1 + 2 + 3\tfrac{1}{3} \ldots . + \frac{(n-1)\,.\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\right)$$

$$= -\frac{1}{3n^3}\left(1 + 3 + 6 + 10 \ldots . \;\frac{(n-1)\,(n-2)}{2}\right)$$

Die in der Klammer befindliche Reihe ist offenbar eine Reihe zweiter Ordnung und wir erhalten nach der Summationsformel

$\varsigma_3 = na + \frac{n\,(n-1)\,\alpha}{1\,.\,2} + \frac{n\,.\,(n-1)\,(n-2)\,\beta}{1\,.\,2\,.\,3}$ wo $a = 1$, $\alpha = 2$ u. $\beta = 1$ ist,

wenn man bedenkt, daß die ganze Summe in $-\frac{1}{3n^3}$ multiplicirt ist $\varsigma_4 = -\frac{1}{3n^3}\left(\frac{n^3}{6}\right) = -\frac{1}{18}$

Ebenso finden wir $\varsigma_5 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.} = \frac{1}{96}$ | $\varsigma_6 = -\frac{1}{5}\;\frac{1}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.} = -\frac{1}{600}$

und allgemein $\varsigma_n = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2\,.\,3\,.\,4 \ldots n}$.

Es ist jetzt

$$l\,n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{n} + \left(-1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{96} - \frac{1}{600} \ldots . \pm \frac{1}{n\,.\,1\,.\,2\,.\,3 \ldots n}\right)$$

Ebenso

$$l\,m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{m} + \left(-1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{96} - \frac{1}{600} \ldots . \pm \frac{1}{m\,.\,1\,.\,2\,.\,3 \ldots m}\right)$$

$$l\,\frac{m}{n} = l\,m - l\,n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \ldots . + \frac{1}{m} - \left(\pm \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,(n+1)} - \ldots . \pm \frac{1}{m.1.2.3 \ldots m}\right)$$

Da aber die Ausdrücke der zweiten Reihe offenbar unendlich kleine Größen einer sehr hohen Ordnung sind, während die der ersten Reihe der ersten Ordnung angehören, so können die letzten ganz vernachlässigt werden und wir erhalten

$$l\,m - l\,n = l\,\frac{m}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \ldots . + \frac{1}{m}$$

Da aber $F = a^2 \sin\varphi\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \ldots . + \frac{1}{m}\right)$ ist, so ist

$$F = a^2 \sin\varphi\; l\,\frac{m}{n} = a^2 \sin\varphi\; l\,\frac{m\xi}{n\xi} = a^2 \sin\varphi\; l\,\frac{X}{x}$$

§. 10. Die parabolische Linie zu quadriren, deren Gleichung $y = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$ oder $y = (x - 1)(x - 3)(x - 5)$.

(cf. Lübsens Integral-Rechnung 42.)

Figur 7. Zu den Abscissen $x_1 = \xi,\ x_2 = 2\xi \ldots x_n = n\xi$

gehören die Ordinaten:

$$y_1 = \xi^3 - 9\xi^2 + 23\xi - 15$$
$$y_2 = 2^3\xi^3 - 9.(2\xi)^2 + 23.2\xi - 15$$
$$y_3 = 3^3\xi^3 - 9.3^2\xi^2 + 23.3.\xi - 15$$
$$y_n = n^3\xi^3 - 9n^2\xi^2 + 23n.\xi - 15$$

Die einzelnen durch die Ordinaten mit den Differenzen der Abscissen gebildeten Rechtecke betragen:

$$R_1 = \xi^4 - 9\xi^3 + 23\xi^2 - 15\xi$$
$$R_2 = 2^3\xi^4 - 9.2^2\xi^3 + 23.2\xi^2 - 15\xi$$
$$R_3 = 3^3\xi^4 - 9.3^2\xi^3 + 23.3\xi^2 - 15\xi$$
$$R_n = n^3\xi^4 - 9.n^2\xi^3 + 23.n\xi^2 - 15\xi$$

Die Summe aller Rechtecke beträgt mit Vernachlässigung der unendlich kleinen Größen nach der Summationsformel für arithmetische Reihen höherer Ordnung:

$$F = \frac{x^4}{4} - \frac{9x^3}{3} + \frac{23x^2}{2} - 15x = \frac{x^4}{4} - 3x^3 + 11\tfrac{1}{2}x^2 - 15x.$$

Für $x = 1$ erhalten wir die Größe der Fläche vom Anfangspunkt der Coordinaten, bis die Curve die Abscissenachse zum ersten Male schneidet:

$$ABC = -6\tfrac{1}{4}\,\square$$

Ist $x = 3$, so schneidet die Linie die Abscissenachse zum zweiten Male und wir erhalten:

$$\begin{array}{rl} ACB + BED = & -2\tfrac{1}{4}\,\square \\ ABC \quad\quad = & -6\tfrac{1}{4}\,\square \\ \hline BED = & 4\,\square \end{array}$$

Für $x = 5$ schneidet die Linie die Abscissenachse zum dritten Male. Es ist dann:

$$\begin{array}{rl} ACB + BED + DFH = & -6\tfrac{1}{4}\,\square \\ ACB + BED \quad\quad = & -2\tfrac{1}{4}\,\square \\ \hline DFH = & -4\,\square \end{array}$$

§. 11. Die Linie zu quadriren, deren Gleichung: $y = \frac{4}{\sqrt{x}}$.

(cf. Lübsens Integral-Rechnung. 37.)

Figur 8. Es ist $x = \frac{16}{y^2}$. Ist y unendlich klein, so ist x unendlich groß, und zwar eine unendlich große Größe zweiter Ordnung. Es folgt daraus, daß der Flächeninhalt für $y = 0$ unendlich ist.

Es sei $Y = BE = m\eta$ und $y = FD = n\eta$.

Lassen wir nun die Ordinaten von $n\eta$ bis $m\eta$ gleichmäßig jedesmal um die unendlich kleine Größe η wachsen und ziehen durch sämmtliche Punkte der Curve Parallelen mit CD, wodurch ABCD in $(m-n)$ Rechtecke zerlegt wird, so ist:

$$\underset{n}{x} = \frac{16}{n^2\eta^2} \quad \underset{n+1}{x} = \frac{16}{(n+1)^2\,\eta^2} \quad \underset{n+2}{x} = \frac{16}{(n+2)^2\eta^2} \quad \underset{m}{x} = \frac{16}{m^2\eta^2}$$

$$\underset{n}{R} = \frac{16\eta}{n^2\eta^2} = \frac{16\eta}{\eta^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$\underset{n+1}{R} = \frac{16\eta}{(n+1)^2\eta^2} = \frac{16\eta}{\eta^2} \cdot \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\underset{m}{R} = \frac{16}{m^2\eta^2} = \frac{16\eta}{\eta^2}\ \frac{1}{m^2}$$

Es ist aber, wenn man die Division ausführt:

$$\underset{n}{R} = \frac{16\eta}{\eta^2}\left[\frac{1}{n^2}\right]$$

$$\underset{n+1}{R} = \frac{16\eta}{\eta^2}\left[\frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^3} + \frac{3}{n^4} - \frac{4}{n^5} \ldots\right]$$

$$\underset{n+2}{R} = \frac{16\eta}{\eta^2}\left[\frac{1}{n^2} - \frac{2.2}{n^3} + \frac{3.2^2}{n^4} - \frac{4.2^3}{n^5} \ldots\right]$$

$$\underset{m}{R} = \frac{16\eta}{\eta^2}\left[\frac{1}{n^2} - \frac{2\,(m-n)}{n^3} + \frac{3\,(m-n)^2}{n^4} - \frac{4\,(m-n)^3}{n^5} \ldots\right]$$

$$ABCD = \frac{16\eta}{\eta^2}\left[\frac{m-n}{n^2} - \frac{(m-n)^2}{n^3} + \frac{(m-n)^3}{n^4} - \frac{(m-n)^4}{n^5} \ldots\right]$$

Die in der Klammer befindliche Größe ist offenbar eine geometrische Progression mit dem Exponenten $-\frac{m-n}{n}$. Es ist daher:

$$ABCD = \frac{16\eta}{\eta^2}\left(\frac{\frac{m-n}{n^2}}{1+\frac{m-n}{n}}\right) = \frac{16\eta}{\eta^2}\left(\frac{m-n}{mn}\right)$$

aber $m\eta = Y \quad n\eta = y$.

$$ABCD = \frac{16\,(Y-y)}{Yy.}$$

Nehmen wir Y unendlich, so erhalten wir für die von CD, der Ordinatenachse und dem unendlichen Bogen eingeschlossene Fläche

$$F = \frac{16}{y}$$

$$\text{aber } CDFG = xy = \frac{16}{y^2}\,y = \frac{16}{y}$$

Wir kommen so auf den merkwürdigen Satz, daß das Rechteck aus einer beliebigen Ordinate und der zugehörigen Abscisse immer gleich der ganzen Fläche oberhalb des Rechtecks nach der Seite der Ordinaten zu ist. Für die ganze, von der Ordinate DF, der Abscisse GF, der Ordinatenachse und dem sich ihr nähernden Arm der Curve eingeschlossene Fläche finden wir durch Summirung jener Flächen:

$$F = \frac{32}{y} = 8\sqrt{x}.$$

§. 12. Annähernde Berechnung von $\sqrt{1} + \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}} \ldots + \sqrt{\frac{1}{n}}$.

In der Figur 8 möge $FG = x$ in n gleiche Theile, deren jede ξ ist, getheilt sein. Es gehören dann zu den Abscissen ξ, 2ξ ꝛc. die Ordinaten $\frac{4}{\sqrt{\xi}}, \frac{4}{\sqrt{2\xi}}, \ldots \frac{4}{\sqrt{n\xi}}$. Theilen wir jetzt die Fläche durch Parallelen mit der Ordinatenachse durch die Endpunkte von x_1, x_2 u. s. w. in Rechtecke, so ist

$$R_1 = \frac{4\xi}{\sqrt{\xi}} = 4\sqrt{\xi}\,\sqrt{1}$$
$$R_2 = \frac{4\xi}{\sqrt{2\xi}} = 4\sqrt{\xi}\,\sqrt{\frac{1}{2}}$$
$$R_3 = \frac{4\xi}{\sqrt{3\xi}} = 4\sqrt{\xi}\,\sqrt{\frac{1}{3}}$$
$$R_n = \frac{4\xi}{\sqrt{n\xi}} = 4\sqrt{\xi}\,\sqrt{\frac{1}{n}}$$

Es ist daher $F = 4\sqrt{\xi}\left[\sqrt{1} + \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}} \ldots \sqrt{\frac{1}{n}}\right]$

Da aber $n\xi = x$ und $F = 8\sqrt{x}$ ist, so ist

$$8\sqrt{n\xi} = 4\sqrt{\xi}\left[\sqrt{1} + \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}} \ldots \sqrt{\frac{1}{n}}\right]$$
$$2\sqrt{n} = \sqrt{1} + \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}} \ldots \sqrt{\frac{1}{n}}.$$

Ist n nicht sehr groß, so ist die Formel verhältnißmäßig ungenau. Die Ursache ist eine doppelte: Erstens haben wir die einzelnen Abschnitte der Fläche als Rechtecke angesehen; dieser Fehler, der bei der Berechnung der Fläche unendlich klein war, wird durch Division mit der unendlich kleinen Größe ξ eine endliche Größe. Eine zweite Ursache ist darin zu suchen, daß für $x = 0$ y unendlich wird. Den letzten Umstand vermeidet man, wenn durch Subtraction der Reihen

$\sqrt{1} + \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}} \ldots \sqrt{\frac{1}{n}}$ von $\sqrt{1} + \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}} \ldots + \sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{1}{n+1}} \ldots + \sqrt{\frac{1}{m}}$

man die neue Reihe entstehen läßt:

$$\sqrt{\frac{1}{n+1}} + \sqrt{\frac{1}{n+2}} \ldots \sqrt{\frac{1}{m}} = 2\,(\sqrt{m} - \sqrt{n})$$

Sieht man die einzelnen Abschnitte der Curve als Paralleltrapeze an, so findet man die für hohe Werthe von n und m sehr genaue Formel:

$$\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{1}{n+1}} + \sqrt{\frac{1}{n+2}} \ldots \sqrt{\frac{1}{m}} = 2\sqrt{m} - 2\sqrt{n} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{m}}$$

§. 13. Berechnung des arithmetischen Mittels der Sinus und Cosinus, sowie der Potenzen derselben, wenn der Winkel innerhalb bestimmter Grenzen jedesmal um dieselbe unendlich kleine Größe zunimmt.

Das arithmetische Mittel der Sinus von $0-90^0$ wollen wir med sin (0 bis 90^0), das der Quadrate derselben durch med [$\sin^2$ (0 bis 90^0)], dahingegen das Quadrat des arithmetischen Mittels der einfachen Sinus: $(\text{med}\sin)^2$ (0 bis 90^0) bezeichnen.

Figur 9. In dieser Figur möge JFG $= \omega$ und CFG $= \alpha$ sein. Die Bögen AB,BC sollen unendlich klein gedacht werden, so daß sie als mit der Tangente zusammenfallend betrachtet werden können. Es ist alsdann $\triangle$ BCE $\sim$ CFH, $\triangle$ ABD $\sim$ BFH u. s. w. Daraus folgt, wenn wir BC $=$ AB $= \xi$ setzen:

$$\begin{aligned} CE &= BC \sin\alpha &&= \xi \sin\alpha \\ BD &= AB \sin BFH &&= \xi \sin BFH \text{ u. s. w.} \\ KL &= JK \sin JFH &&= \xi \sin JFH \end{aligned}$$

Nennen wir die jedesmalige Zunahme des Winkels Θ und addiren die oben erhaltenen Resultate, so ergibt sich:

$$GH = \xi\,(\sin\alpha + \sin(\alpha+\Theta) + \sin(\alpha+2\Theta)\ \ldots\ldots + \sin\omega)$$

$$GH = n\xi\left(\frac{\sin\alpha + \sin(\alpha+\Theta) + \sin(\alpha+2\Theta)\ \ldots\ldots + \sin\omega}{n}\right)$$

$$GH = (\omega-\alpha)\sin \text{med}\,(\alpha - \omega)$$

$$\cos\alpha - \cos\omega = \text{med}\,\sin\,(\alpha \text{ bis } \omega) \times (\omega - \alpha)$$

$$\text{med}\,\sin\,(\alpha-\omega) = \frac{\cos\alpha - \cos\omega}{\omega-\alpha}$$

Für $\omega = \frac{\pi}{2}$ erhalten wir, wenn $\alpha = 0$ ist:

$$\text{med}\,\sin\,(0 \text{ bis } 90^0) = \frac{1}{\frac{1}{2}\pi} = \frac{2}{\pi}.$$ Ebenso ist

$$\text{med}\,\sin\,(0 \text{ bis } 180^0) = \frac{2}{\pi}$$

$$\text{med}\,\sin\,(0 \text{ bis } 270^0) = \frac{1-0}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{2}{3\pi}$$

$$\text{med}\,\sin\,(0 \text{ bis } 360^0) = \frac{1-1}{2\pi} = 0$$

In unserer Figur ist BE $= \xi\cos\alpha$, AD $= \xi\cos(\alpha+\Theta)$ JL $= \xi\cos\omega$. Die Summe derselben ergibt:

$$JM = \xi\,(\cos\alpha + \cos(\alpha+\Theta) + \cos(\alpha+2\Theta)\ \ldots\ldots + \cos\omega)$$

$$\sin\omega - \sin\alpha = n\,\xi\,\frac{\cos\alpha + \cos(\alpha+\Theta) + \cos(\alpha+2\Theta)\ \ldots\ldots \cos\omega}{n}$$

$$\sin\omega - \sin\alpha = (\omega-\alpha)\cos \text{med}\,(\alpha \text{ bis } \omega)$$

$$\text{med}\,\cos\,(\alpha \text{ bis } \omega) = \frac{\sin\omega - \sin\alpha}{\omega-\alpha}$$

Für $\alpha = 0$ und $\omega = \frac{\pi}{2}$ erhalten wir

$$\text{med}\,\cos\,(0 \text{ bis } 90^0) = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

$$\text{med}\,\cos\,(0 \text{ bis } 180^0) = \frac{0-0}{\pi} = 0$$

$$\text{med}\,\cos\,(0 \text{ bis } 270^0) = -\frac{1}{\frac{3}{2}\pi} = -\frac{2}{3\pi}$$

$$\text{med}\,\cos\,(0 \text{ bis } 360^0) = \frac{0}{2\pi} = 0.$$

Das arithmetische Mittel der Potenzen der Sinus und Cosinus bestimmen wir einfach durch folgende bekannte trigonometrische Formel $\quad 1 + \cos\alpha = 2\,(\cos\tfrac{1}{2}\alpha)^2$.

Wir wollen zunächst med $\{\cos^2(\alpha \text{ bis } \omega)\}$ bestimmen.

Es ist $1 + \cos 2\alpha = 2 (\cos \alpha)^2$

$$1 + \cos(2\alpha + 2\Theta) = 2 \cos(\alpha + \Theta)^2$$
$$1 + \cos(2\alpha + 4\Theta) = 2 \cos(\alpha + 2\Theta)^2$$

und schließlich $1 + \cos(2\alpha + 2n\Theta) = 2 \cos(\alpha + n\Theta)^2$ oder $1 + \cos(2\omega) = 2 (\cos \omega)^2$.

Addiren wir sämmtliche untereinanderstehende Reihen und dividiren sie sämmtlich durch n, so erhalten wir

$$1 + \text{med} \cos(2\alpha \text{ bis } 2\omega) = 2 \text{ med } (\cos^2(\alpha \text{ bis } \omega))$$

Aber da $\text{med} \cos(2\alpha \text{ bis } 2\omega) = \frac{\sin 2\omega - \sin 2\alpha}{2\omega - 2\alpha}$ so ist

$$1 + \frac{\sin 2\omega - \sin 2\alpha}{2\omega - 2\alpha} = 2 \text{ med } [\cos^2(\alpha \text{ bis } \omega)]$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\sin 2\omega - \sin 2\alpha}{4\omega - 4\alpha} = \text{med } [\cos^2(\alpha \text{ bis } \omega)]$$

Für $\alpha = 0$ und $\omega = \frac{\pi}{2}$ finden wir

$$\text{med } [\cos^2(0 \text{ bis } 90^0)] = \frac{1}{2}$$

$$\text{med } [\cos^2(0 \text{ bis } 180^0)] = \frac{1}{2} \text{ u. s. w.}$$

Ebenso finden wir aus der bekannten trigonometrischen Formel $1 - \cos \alpha = 2 (\sin \frac{1}{2} a)^2$

$$\text{med } [\sin^2(\alpha \text{ bis } \omega)] = \frac{1}{2} - \frac{\sin 2\omega - \sin 2\alpha}{4\omega - 4\alpha}$$

Der arithmetische Durchschnitt der höhern Potenzen läßt sich aus den trigonometrischen Formeln:

$\cos(n + 1) b = 2 \cos b \cos nb - \cos(n - 1) b$

$\sin(n + 1) b = 2 \sin nb \cos b - \sin(n - 1) b$ berechnen, z. B.

n sei 2. b unendlich klein. $(\cos 2b = 2 (\cos b)^2 - 1)$

$$\cos(3b) = 4 (\cos b)^3 - 3 \cos b$$
$$\cos(3 . 2b) = 4 (\cos 2b)^3 - 3 \cos 2b$$
$$\cos(3 . 3b) = 4 (\cos 3b)^3 - 3 \cos 3b$$
$$\cos(3 . 90^0) = 4 (\cos 90^0)^3 - 3 \cos 90^0$$
$$\text{med} \cos(0 \text{ bis } 270^0) = 4 \text{ med } [\cos^3(0 \text{ bis } 90^0)] - 3 \text{ med} \cos(0 \text{ bis } 90^0)$$
$$-\frac{2}{3\pi} = 4 \text{ med } [\cos^3(0 \text{ bis } 90^0)] - \frac{6}{\pi}$$
$$\frac{16}{3\pi} = 4 \text{ med } [\cos^3(0 - 90^0)]$$
$$\frac{4}{3\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \text{ med } [\cos^2(0 - 90^0)] = \text{med } [\cos^3(0 - 90^0)]$$

$$\cos 4b = 8 (\cos b)^4 - 8 (\cos b)^2 + 1$$
$$\cos 4 . 2b = 8 (\cos 2b)^4 - 8 (\cos 2b)^2 + 1$$
$$\cos 4 . 90^0 = 8 (\cos 90^0)^4 - 8 (\cos 90^0)^2 + 1$$
$$\cos \text{med } (0^0 \text{ bis } 360^0) = 8 \text{ med } [\cos^4(0^0 \text{ bis } 90^0)] - 8 \text{ med } [\cos^2(0 \text{ bis } 90)] + 1.$$
$$\text{med} \cos^4[(0^0 \text{ bis } 90^0)] = \frac{3}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \text{ med } [\cos^2(0 - 90^0)]$$

Es ist daher:

$$\text{med}\cos\,(0 \text{ bis } 90^0) = \frac{2}{\pi} \qquad \text{med}\,[\cos^2(0 \text{ bis } 90^0)] = \frac{1}{2}$$

$$\text{med}\,[\cos^3(0 \text{ bis } 90^0)] = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{\pi} \qquad \text{med}\,[\cos^4(0 \text{ bis } 90^0)] = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}$$

$$\text{med}\,[\cos^5(0 \text{ bis } 90^0)] = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{\pi} \qquad \text{med}\,[\cos^6(0 \text{ bis } 90^0)] = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}$$

u. s. w. u. s. w.

Es braucht kaum erwähnt zu werden, daß sich aus der obigen Formel in gleicher Weise der mittlere Durchschnitt der Potenzen der Sinus und Cosinus berechnen läßt, wenn die Grenzen andere als 0 und 90^0 sind.

§. 14. Quadratur der Cycloide.

Figur 10. Wenn man in einer Cycloide den Halbmesser des rollenden Kreises mit r, den Winkel, den die ursprüngliche Richtung eines Radius mit der späteren Richtung macht, mit ω bezeichnet und zum Anfangspunkt der Coordinaten den Durchschnittspunkt der geraden Linie, auf welcher der Kreis sich fortbewegt, mit der Cycloide annimmt, so sind die Gleichungen dieser Curve

$$x = r\,(\omega - \sin\omega) \quad y = r\,(1 - \cos\omega)$$

Der Winkel ω möge von Null an jedesmal um den unendlich kleinen Theil α wachsen. Errichtet man nun auf der geraden Linie, auf der sich der Kreis fortbewegt, in den Durchschnittspunkten mit der Cycloide Lothe, zieht mit jener graden Linie durch den Scheitel der Cycloide eine Parallele und fällt von den verschiedenen Punkten der Cycloide Senkrechte auf CA, die die außerhalb der Curve gelegene Fläche in Streifen theilt, die wir als Rechtecke ansehen können, so erhalten wir

$$R_1 = (y_1 - y_0)\,x_1 = r^2\,(\alpha - \sin\alpha)\,(\cos 0 - \cos\alpha)$$
$$R_2 = (y_2 - y_1)\,x_2 = r^2\,(2\alpha - \sin 2\alpha)\,(\cos\alpha - \cos 2\alpha)$$
$$R_n = (y_n - y_{n-1})\,x_n = r^2\,(\omega - \sin\omega)\,(\cos(\omega - \alpha) - \cos\omega)$$
$$R_1 = r^2\,(\alpha\cos 0 - \alpha\cos\alpha - \sin\alpha\cos 0 + \sin\alpha\cos\alpha)$$
$$R_2 = r^2\,(2\alpha\cos\alpha - 2\alpha\cos 2\alpha - \sin 2\alpha\,.\,\cos\alpha + \sin 2\alpha\,.\,\cos 2\alpha)$$
$$R_3 = r^2\,(3\alpha\cos 2\alpha - 3\alpha\cos 3\alpha - \sin 3\alpha\,.\,\cos 2\alpha + \sin 3\alpha\,.\,\cos 3\alpha)$$
$$R_n = r^2\,(n\alpha\cos(n-1)\,\alpha - n\alpha\cos n\alpha - \sin n\alpha\,.\,\cos(n-1)\,\alpha + \sin n\alpha\,.\,\cos n\alpha)$$

Die beiden ersten Reihen geben wie leicht ersichtlich bei gehöriger Vereinigung das Resultat

$$\varsigma_1 + \varsigma_2 = r^2\alpha\,(\cos 0 + \cos\alpha + \cos 2\alpha \ldots + \cos\omega) - nr^2\alpha\cos\omega$$
$$= nr^2\alpha\,(\cos\text{med}\,(0 \text{ bis } \omega) - \cos\omega)$$
$$= r^2\omega\,(\cos\text{med}\,(0 \text{ bis } \omega) - \cos\omega)$$

oder da $\cos\text{med}\,(0 \text{ bis } \omega) = \dfrac{\sin\omega}{\omega}$

$$\varsigma_1 + \varsigma_2 = r^2\sin\omega - r^2\omega\cos\omega$$

Die beiden letzten verticalen Reihen geben

$$- r^2\sin\alpha\,(\cos 0 - \cos\alpha)$$
$$- r^2\sin 2\alpha\,(\cos\alpha - \cos 2\alpha) \text{ u. s. w. und zuletzt}$$
$$- r^2\sin\omega\,(\cos(n-1)\,\alpha - \cos\omega)$$

Zu der Addition dieser Ausdrücke möge folgende Speculation dienen.

Figur 11. Lassen wir in dem Halbkreise mit dem Radius 1 den Centriwinkel von 0 bis ω jedesmal um die unendlich kleine Größe α wachsen, so sind die einzelnen Abscissen $\cos 0$, $\cos \alpha$, $\cos 2\alpha$ u. s. w., die Ordinaten $\sin \alpha$, $\sin 2\alpha$ .... bis $\sin \omega$. Berechnen wir jetzt die durch die Differenzen der auf einander folgenden Abscissen mit den Ordinaten und den zugehörigen Kreisbogen gebildeten Flächen, die wir ebenfalls als Rechtecke ansehen können, so erhalten wir:

$$R_1 = y_1 (x_0 - x_1) = \sin \alpha (\cos 0 - \cos \alpha)$$
$$R_2 = y_2 (x_1 - x_2) = \sin 2\alpha (\cos \alpha - \cos 2\alpha)$$
$$R_3 = y_3 (x_2 - x_3) = \sin 3\alpha (\cos 2\alpha - \cos 3\alpha)$$
$$R_n = y_n (x_n - x_{n-1}) = \sin n\alpha ((\cos n - 1)\,\alpha - \cos \alpha)$$

Da aber die Summe aller dieser Rechtecke gleich $\frac{\omega}{2} - \frac{\sin \omega \,.\, \cos \omega}{2}$ sein muß, so erhalten wir als Summe jener beiden letzten Reihen offenbar $- \frac{r^2\omega}{2} + \frac{r^2 \sin \omega \,.\, \cos \omega}{2}$.

Die außerhalb der Curve belegene Fläche EFA ist mithin

$$= r^2 \sin \omega - r^2\omega \cos \omega - \frac{r^2\omega}{2} + \frac{r^2 \sin \omega \cos \omega}{2}$$

Es ist aber $AEFG = xy = r^2 (\omega - \sin \omega - \omega \cos \omega + \sin \omega \cos \omega)$

$$\frac{AEF = r^2 \left(-\frac{\omega}{2} + \sin \omega - \omega \cos \omega + \frac{\sin \omega \cos \omega}{2}\right)}{AFG = r^2 \left(\frac{3\omega}{2} - 2 \sin \omega + \frac{\sin \omega \,.\, \cos \omega}{2}\right)}.$$

Für $\omega = 2\pi$ erhalten wir als Inhalt der ganzen Cycloide $C = 3r^2\pi$, gleich dem dreifachen Inhalt des erzeugenden Kreises.

§. 15. Quadratur der Curve, deren Gleichung $y = \sin^r x$.

Der mittlere Durchschnitt der sin von 0 bis 90° oder von 0 bis 180° ist $\frac{2}{\pi}$, das arithmetische Mittel der Quadrate derselben $\frac{1}{2}$, das der Cuben $\frac{2}{3}\,\frac{2}{\pi}$, das der Biquadrate $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$ u. s. w. Wir erhalten daher als mittleres arithmetisches Mittel der Ordinaten von $x = 0$ bis $x = \pi$, wenn r gerade ist, med. ordin. $= \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,...\, (r-1)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,...\, r}$ oder wenn r ungerade ist, $\frac{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8 \,...\, (r-1)}{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,...\, r}\,\frac{2}{\pi}$ und mithin als Inhalt der ganzen Curve von $x = 0$ bis $x = \pi$.

r ist gerade, $F = \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,...\, (r-1)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,...\, r}\pi$.

r ist ungerade, $F = \frac{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8 \,...\, (r-1)}{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,...\, r}2$.

Ist $r = 1$ so ist $F = 2$ Für $r = 3$ ist $F = \frac{4}{3}$

Ist $r = 2$ so ist $F = \frac{\pi}{2}$ Für $r = 4$ ist $F = \frac{3\pi}{8}$ u. s. w.

wenn x von 0° bis 180° wächst.

Wäre die Gleichung $y = a \sin^r x$, so wäre natürlich die ganze Fläche noch mit a zu multipliciren. Uebrigens kann man mit Hülfe von §. 13 jeden beliebigen Theil der Curvenfläche quadriren.

§. 16. Quadratur der Exponentiallinie, deren Gleichung: $y = a^x$.

(cf. Lübsen's Integral-Rechnung. 38.)

Es sei zunächst $a = e$, der Grundzahl der natürlichen Logarithmen. Zu $x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots x_n$ gehören die Ordinaten $e^\xi, e^{2\xi}, e^{3\xi}, e^{4\xi} \ldots e^{n\xi}$. Die Ordinaten bilden mit den Differenzen der Abscissen Rechtecke.

$$R_1 = \xi e^\xi,\ R_2 = \xi e^{2\xi},\ R_3 = \xi e^{3\xi},\ \ldots,\ R_n = \xi e^{n\xi}$$

$$F = \xi e^\xi + \xi e^{2\xi} + \xi e^{3\xi} \ldots + \xi e^{n\xi}.$$

Diese geometrische Reihe gibt summirt

$$F = \frac{\xi e^{(n+1)\xi} - \xi e^\xi}{e^\xi - 1}$$

Da aber $e^\xi = 1 + \frac{\xi}{1} + \frac{\xi^2}{1\,.\,2} \ldots + \frac{\xi^n}{1.2.3\ldots n}$ ist, so ist:

$$F = \frac{\xi + \frac{n\xi^2 + \xi^2}{1} + \frac{\xi(n\xi + \xi)^2}{1\,.\,2} \ldots - \xi - \frac{\xi^2}{1} - \frac{\xi^3}{1.2} \ldots - \frac{\xi^{n+1}}{1.2.3\ldots n}}{\frac{\xi}{1} + \frac{\xi^2}{1\,.\,2} + \frac{\xi^3}{1\,.\,2\,.\,3} \ldots + \frac{\xi^n}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots n}}$$

$$F = \frac{n\xi^2 + \frac{n^2\xi^3 + 2n\xi^3}{1\,.\,2} + \frac{n^3\xi^4 + 3n^2\xi^4 + 3n\xi^4}{1\,.\,2\,.\,3} \ldots}{\xi + \frac{\xi^2}{1\,.\,2} + \frac{\xi^3}{1.2.3} \ldots + \frac{\xi^n}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots n.}}$$

Führen wir die Division wirklich aus und lassen die unendlich kleinen Glieder weg, so erhalten wir

$$F = n\xi + \frac{n^2\xi^2}{1\,.\,2} + \frac{n^3\xi^3}{1\,.\,2\,.\,3} \ldots$$

$$F + 1 = 1 + n\xi + \frac{n^2\xi^2}{1\,.\,2} + \frac{n^3\xi^3}{1.\,2\,.\,3} \ldots$$

Aber $e^{n\xi} = 1 + n\xi + \frac{n^2\xi^2}{1\,.\,2} + \frac{n^3\xi^3}{1\,.\,2\,.\,3} \ldots$

$$F = e^{n\xi} - 1 = e^x - 1$$

Ist die Gleichung $y = a^x$ gegeben, so setzen wir $e^z = a$ und die Gleichung heißt dann $y = e^{zx}$. Zu den einzelnen Abscissen $\xi, 2\xi, 3\xi$ u. s. w. werden jetzt die Ordinaten $e^{z\xi}, e^{2z\xi}, e^{3z\xi} \ldots e^{nz\xi}$ gehören. Der Werth der einzelnen Rechtecke ist jetzt:

$$R_1 = \xi e^{z\xi},\ R_2 = \xi e^{2z\xi},\ R_3 = \xi e^{3z\xi},\ R_n = \xi e^{nz\xi}$$

$$F = \xi e^{z\xi} + \xi e^{2z\xi} + \xi e^{3z\xi} \ldots + \xi e^{nz\xi}$$

$$F = \frac{\xi e^{(n+1)z\xi} - \xi e^{z\xi}}{e^{z\xi} - 1}$$

Entwickeln wir wieder die Ausdrücke in Reihen, so erhalten wir:

$$F = \frac{\xi + \frac{(n+1)z\xi^2}{1} + \frac{(n+1)^2z^2\xi^3}{1\,.\,2} \ldots - \xi - \frac{z\xi^2}{1} - \frac{z^2\xi^3}{1\,.\,2} \ldots}{z\xi + \frac{z^2\xi^2}{1\,.\,2} + \frac{z^3\xi^3}{1\,.\,2\,.\,3} \ldots \frac{z^n\,\xi^n}{1.2.3\ldots n.}}$$

$$F = \frac{\frac{nz\xi^2}{1} + \frac{n^2z^2\xi^3 + 2nz^2\xi^3}{1\,.\,2} + \frac{n^3\xi^4z^3 + 3n^2z^3\,\xi^4 + 3nz^3\xi^4}{1\,.\,2\,.\,3} \ldots}{z\xi + \frac{z^2\xi^2}{1\,.\,2} + \frac{z^3\xi^3}{1\,.\,2\,.\,3} \ldots \frac{z^n\,\xi^n}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots n}}$$

Führen wir die Division aus und lassen wieder die unendlich kleinen Glieder weg, so erhalten wir:

$$F = n\xi + \frac{n^2z\xi^2}{1\,.\,2} + \frac{n^3z^2\xi^3}{1\,.\,2\,.\,3} \cdots\cdots$$

$$Fz = nz\xi + \frac{n^2z^2\xi^2}{1\,.\,2} + \frac{n^3z^3\xi^3}{1\,.\,2\,.\,3} \cdots\cdots$$

$$Fz + 1 = 1 + \frac{zn\xi}{1} + \frac{z^2n^2\xi^2}{1\,.\,2.} + \frac{z^3n^3\xi^3}{1\,.\,2\,.\,3} \cdots\cdots$$

Aber $1 + \frac{zn\xi}{1} + \frac{z^2n^2\xi^2}{1\,.\,2.} + \frac{z^3n^3\xi^3}{1\cdot 2.\,3} \cdots\cdots = e^{zn\xi}$

$$Fz + 1 = e^{zn\xi}$$

$$F = \frac{e^{zn\xi} - 1}{z}$$ oder da $n\xi = x$ und $z = la$ ist

$$F = \frac{e^{x\,la} - 1}{la.}$$

Setzen wir in die beiden für F gefundenen Formeln x negativ, d. h. lassen wir die Abscisse nach der Seite hin liegen, wo die Curve sich der Asymptote nähert, so erhalten wir die Formeln:

$$F = e^{-x} - 1 = \frac{1}{e^x} - 1$$ und

$$F = \frac{e^{-x\,la} - 1}{la} = \frac{1}{la\,.\,e^{x\,la}} - \frac{1}{la.}$$

Wird jetzt x unendlich negativ, so verschwinden in beiden Formeln die ersten Ausdrücke und wir finden als Inhalt der ganzen Fläche, welche zwischen der Curve und der Asymptote nach der convergenten Seite liegt, wenn $y = e^x$ $F = -1\,\Box$ und wenn $y = a^x$

$$F = -\frac{1\,\Box}{la}.$$

§. 17. Quadratur der Kettenlinie, deren Gleichung: $y = a\dfrac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}$.

Es sei wieder $n\xi = x$, so gehören zu den Abscissen $x_1 = \xi$, $x_2 = 2\xi$, $x_3 = 3\xi$ und so weiter die Ordinaten:

$$y_1 = a\frac{e^{\frac{\xi}{a}} + e^{-\frac{\xi}{a}}}{2} \qquad y_2 = a\frac{e^{\frac{2\xi}{a}} + e^{-\frac{2\xi}{a}}}{2}$$

$$y_3 = a\frac{e^{\frac{3\xi}{a}} + e^{-\frac{3\xi}{a}}}{2} \qquad y_n = a\frac{e^{\frac{n\xi}{a}} + e^{-\frac{n\xi}{a}}}{2}$$

Es betragen demnach die einzelnen durch die Differenzen der auf einander folgenden Abscissen und den zugehörigen Ordinaten gebildeten Rechtecke:

$$R_1 = a\xi\frac{e^{\frac{\xi}{a}} + e^{-\frac{\xi}{a}}}{2} \qquad R_2 = a\xi\frac{e^{\frac{2\xi}{a}} + e^{-\frac{2\xi}{a}}}{2}$$

$$R_3 = a\xi\frac{e^{\frac{3\xi}{a}} + e^{-\frac{3\xi}{a}}}{2} \qquad R_n = a\xi\frac{e^{\frac{n\xi}{a}} + e^{-\frac{n\xi}{a}}}{2}$$

Es ist die Summe aller, d. h. die gesuchte Fläche:

$$F = \frac{a\xi\left(e^{\frac{\xi}{\alpha}} + e^{\frac{2\xi}{\alpha}} \ldots\ldots + e^{\frac{n\xi}{a}}\right) + a\xi\left(e^{-\frac{\xi}{a}} + e^{-\frac{2\xi}{a}} \ldots\ldots + e^{-\frac{n\xi}{a}}\right)}{2}$$

Der erste Theil unsers gesuchten Flächeninhaltes bildet eine geometrische Proportion mit dem Exponenten $e^{\frac{\xi}{a}}$. Es ist

$$\varsigma_1 = a\xi \frac{e^{\frac{n+1}{a}\xi} - e^{\frac{\xi}{a}}}{2\left(e^{\frac{\xi}{a}} - 1\right)}$$ Da aber

$$e^{\frac{n+1}{\alpha}\xi} = 1 + \frac{\frac{n+1}{\alpha}\xi}{1} + \frac{\left(\frac{n+1}{\alpha}\xi\right)^2}{1\,.\,2} + \frac{\left(\frac{n+1}{\alpha}\xi\right)^3}{1\,.\,2\,.\,3} \ldots\ldots$$ ist, so ist

$$\varsigma_1 = \left[\frac{\frac{n\xi}{a} + \frac{\frac{n^2\xi^2}{a^2} + \frac{2n^2\xi^2}{a^2}}{1\,.\,2} + \frac{\frac{n^3\xi^3}{a^3} + \frac{3n^2\xi^3}{a^3} + \frac{3n\xi^3}{a^3}}{1\,.\,2\,.\,3} \ldots\ldots}{\frac{2\xi}{a} + \frac{\frac{2\xi^2}{a^2}}{1\,.\,2} + \frac{\frac{2\xi^3}{a^3}}{1\,.\,2\,.\,3} \ldots\ldots}\right] a\xi$$

Führen wir die Division der unter der Klammer befindlichen Reihe wirklich aus, wobei wir jedoch im Quotienten die endlichen Größen vernachläsigen, weil sie in die unendlich kleine Größe ξa multiplicirt sind, so erhalten wir:

$$\varsigma_1 = \left[n + \frac{n^2\xi}{2a}\,\frac{\frac{n^3\xi^2}{\alpha^2}}{1.2.3} + \frac{\frac{n^4\xi^3}{\alpha^3}}{1.2.3.4} \ldots\right]\frac{a\xi}{2}$$

$$1 + \frac{2\varsigma_1}{a^2} = 1 + \frac{n\xi}{a} + \frac{\frac{n^2\xi^2}{a}}{1.2} + \frac{\frac{n^3\xi^3}{a^3}}{1.2.3} \ldots$$

$$1 + \frac{2\,\varsigma_1}{a^2} = e^{\frac{n\xi}{a}} = e^{\frac{x}{a}}$$

$$\varsigma_1 = \frac{a^2 e^{\frac{x}{a}}}{2} - \frac{a^2}{2}$$

Setzen wir jetzt für x, um die zweite Reihe (ς_2) zu kriegen, in die so eben gewonnene Formel $-x$ ein, so ist:

$$\varsigma_2 = \frac{a^2 e^{-\frac{x}{a}}}{2} - \frac{a^2}{2}$$

$$F = a\left[a\,\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2} - a\right] = a\,(y - a) = ay - a^2$$

§. 18. Quadratur der logarithmischen Linie, deren Gleichung: $y = a\,l\,x$.

Die einzelnen Abscissen mögen wieder sein $x_1 = \xi$, $x_2 = 2\xi$, $x_3 = 3\xi \ldots x_n = n\xi$. Die Ordinaten sind jetzt: $y_1 = a\,l\,\xi$, $y_2 = a\,l\,2\xi$, $y_3 = a\,l\,3\xi \ldots y_n = a\,l\,n\xi$

Die Rechtecke betragen:

$$R_1 = a\xi\,l\,\xi$$

$$R_2 = a\xi\,l\,2\xi \text{ u. s. w., oder da } n\xi = x\,.$$

$$R_1 = a\xi\,l\,[x - (n-1)\,\xi] = a\xi\,l\left[x\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\right]$$

$$R_2 = a\xi\,l\,[x - (n-2)\,\xi] = a\xi\,l\left[x\left(1 - \frac{n-2}{n}\right)\right]$$

$$R_n = a\xi\,l\,[x - (n-n)\,\xi] = a\xi\,l\left[x\left(1 - \frac{n-n}{n}\right)\right] \text{ oder:}$$

$$R_1 = a\xi\left[\,l\,x + l\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\right]$$

$$R_2 = a\xi\left[\,l\,x + l\left(1 - \frac{n-2}{n}\right)\right]$$

$$R_n = a\xi\left[\,l\,x + l\left(1 - \frac{n-n}{n}\right)\right]$$

Die Summe aller Rechtecke ist daher

$$F = an\xi\,l\,x + a\xi\left[l\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) + l\left(1 - \frac{n-2}{n}\right) \ldots + l\left(1 - \frac{n-n}{n}\right)\right]$$

$$a\xi\,l\left(1 - \frac{1}{n}\right) = a\xi\left[-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} \ldots - \frac{1}{n\,.\,n^n}\right]$$

$$a\xi\,l\left(1 - \frac{2}{n}\right) = a\xi\left[-\frac{2}{n} - \frac{2^2}{2n^2} - \frac{2^3}{3n^3} - \frac{2^4}{4n^4} \ldots - \frac{2^n}{n\,.\,n^n}\right]$$

$$a\xi\,l\left(1 - \frac{n}{n}\right) = a\xi\left[-\frac{n}{n} - \frac{n^2}{2n^2} - \frac{n^3}{3n^3} - \frac{n^4}{4n^4} \ldots - \frac{n^n}{n\,.\,n^n}\right]$$

Berücksichtigen wir, daß $n\xi = x$ und $\frac{1}{n}$ eine unendlich kleine Größe ist, so erhalten wir durch Summirung der unter einander stehenden Größen, welche unendliche Reihen der 1sten, 2ten, 3ten u. s. w. Ordnung sind, wenn wir in der Summe die unendlich kleinen Größen weglassen:

$$F = ax\,l\,x - ax\left[\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} \ldots\right]$$

Es seien $\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}$ und $\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n+2}$ zwei beliebige auf einander folgende Glieder in der Klammer, so ist ihre Summe offenbar $\frac{2\,n+2}{n\,.\,(n+1)\,(n+2)} = \frac{2}{n\,.\,(n+2)}$ Die Summe der beiden nächstfolgenden $\frac{1}{n+2}\cdot\frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+3}\cdot\frac{1}{n+4}$ wird in gleicher Weise $\frac{2}{(n+2)\,(n+4)}$ sein. Als Summe aller 4 erhalten wir $\frac{4}{n\,.\,(n+4)}$ Ebenso ist die Summe von 8 auf einander folgenden Gliedern $\frac{8}{n\,.\,(n+8)}$

Das erste Glied ist $= \frac{1}{2}$

Die Summe des 2 ten und 3 ten ist $\frac{2}{4\ .\ 2} = \frac{1}{4}$

Die Summe des 4 ten bis 7 ten ist $\frac{4}{8\ .\ 4} = \frac{1}{8}$

Die Summe des 8 ten bis 15ten ist $\frac{8}{16\ .\ 8} = \frac{1}{16}$

Die Summe des r ten bis (2r — 1) sten ist $\frac{r}{2r\ .\ r} = \frac{1}{2r}$

Obige in der Klammer stehende Reihe verwandelt sich demnach in folgende:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \ldots\ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \ldots\ldots$$

Da aber die Summe der so veränderten Reihe wie leicht ersichtlich $= 1$ ist, so ist

$$F = ax\ l\ x - ax.$$

§. 19. Quadratur der Archimedischen Spirale. Gleichung $r_1 = \frac{a}{2\pi}\ \omega$.

(cf. Lübsen's Integral-Rechnung 45[a].)

Jede Spirale kann man als eine unendliche Reihe an einander gelegter Kreissectoren mit einem gleichen unendlich kleinen Centriwinkel ansehen, deren Radius jedoch nach dem Gesetz der Gleichung der Linie wächst. Da nun aber alle jene Kreissectoren ähnlich sind, so findet man offenbar die Summe aller, wenn man das arithmetische Mittel der Quadrate sämmtlicher Radien mit $\frac{\omega}{2}$ multiplicirt.

$$F = \frac{\frac{a^2\alpha^2}{4\pi^2} + \frac{a^2 4\alpha^2}{4\pi^2} + \frac{a^2 9\alpha^2}{4\pi^2} \ldots. + \frac{a^2 n^2 \alpha^2}{4\pi^2}}{n}\ \frac{\omega}{2}$$

wo $n\alpha = \omega$ gesetzt ist.

$$F = \frac{a^2\omega}{8\pi^2}\left[\frac{\alpha^2 + 4\alpha^2 + 9\alpha^2 + 16\alpha^2\ ..\ + n^2\alpha^2}{n}\right]$$

Addirt man die in der Klammer befindliche Reihe mit Weglassung der unendlich kleinen Größen, so erhält man:

$$F = \frac{a^2\omega}{8\pi} \cdot \frac{\alpha^2 n^2}{3} = \frac{a^2\omega^3}{24\pi^2} \text{ oder weil } r^3 = \frac{a^3\omega^3}{8\pi^3} \text{ ist}$$

$$F = \frac{\pi r^3}{3a}$$

Für $\omega = 2\pi$ erhalten wir als Resultat der ersten Umdrehung $\frac{a^2}{3}\ \pi$. Für $\omega = 4\pi$ ist $F = 2\frac{2}{3}\ a^2\pi$. Da indessen die durch die erste Windung beschriebene Fläche noch einmal bei der 2ten Drehung beschrieben wird, so ist die erste davon abzuzählen, und wir erhalten $F_2 = 2\frac{1}{3}a^2\pi$.

Ebenso wird beschrieben durch die mte Windung

$$F_m = \frac{a^2\ (2m\pi)^3}{24\pi^2} - \frac{a^2\ (2m - 2)^3\pi^3}{24\pi^2} = a^2\pi\ (m^2 - m + \tfrac{1}{3})$$

Soll endlich der Theil der Fläche gefunden werden, der zwischen der m ten und $(m+1)$ sten Windung liegt, so erhält man:

$$F_{m+1} - F_m = 2ma^2\pi.$$

§. 20. Quadratur der Linie, deren Gleichung $r = a \sin 2\omega$.

(cf. Lübsen's Integral-Rechnung. 45^b 1.)

Bei einer ganzen Umdrehung durchläuft ω 8 rechte Winkel; es wird also in derselben r viermal Null werden. Da ferner die Sinus im ersten und zweiten, dritten und vierten Quadranten sich gleich sind, so ist leicht ersichtlich mit gehöriger Berücksichtigung der Vorzeichen von r, daß die Linie 4 gleichmäßig um den Pol liegende einander congruente auf beiden Seiten gleiche Schleifen beschreiben wird. Eine jede solche Schleife besteht ebenfalls aus unendlich vielen Sectoren, deren Radien von a sin 0 bis a sin 90^0 steigen und dann in derselben Weise von a sin 90^0 bis a sin 180^0 fallen.

$$F = \frac{\omega}{2} \; \frac{a^2 (\sin 2\alpha)^2 + a^2 (\sin 4\alpha)^2 + a^2 (\sin 8\alpha)^2 \ldots . + a^2 (\sin 2\omega)^2}{n}$$

$$F = \frac{\omega a^2}{2} \text{ med } [\sin^2 (0 \text{ bis } 2\omega)]$$

aber da med $[\sin^2 (0 \text{ bis } 2\omega)] = \frac{1}{2} - \frac{\sin 2\omega}{4\omega}$ ist,

$$F = \frac{\omega a^2}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sin 2\omega}{4\omega} . \right)$$

Für $\omega = \frac{\pi}{2}$ erhalten wir als Flächeninhalt einer Schleife $F = \frac{a^2\pi}{8}$. Alle vier Schleifen betragen $\frac{a^2\pi}{2}$.

§. 21. Die Fläche der Cardioide zu finden, deren Gleichung:

$$r = 2a\,(1 + \cos \omega) = 4a\,(\cos \tfrac{1}{2}\,\omega)^2.$$

(cf. Lübsen's Integral-Rechnung 45^b.)]

Sehen wir die zu berechnende Fläche wieder als eine Reihe von Sectoren an, so erhalten wir:

$$F = \frac{\omega}{2} \; \frac{16a^2 (\cos \alpha)^4 + 16a^2 (\cos 2\alpha)^4 + 16a^2 (\cos 3\alpha)^4 \ldots . + 16a^2 \left(\cos \frac{\omega}{2}\right)^4}{n}.$$

$F = 8\omega a^2$ med $[\cos^4 (0 \text{ bis } \frac{1}{2}\,\omega)]$, welcher Ausdruck sich nach §. 13 leicht berechnen läßt. Für $\omega = 2\pi$ erhalten wir als Inhalt der ganzen Fläche:

$$F = 18\pi a^2 \text{ med } [\cos^4 (0 \text{ bis } 180^0)] = 16\,a^2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = 6a^2\,\pi.$$

§. 22. Quadratur der Exponentialspirale, deren Gleichung: $r = e^\omega$.

Es ist wie früher:

$$F = \frac{\omega}{2}\left(\frac{e^{2\alpha} + e^{4\alpha} + e^{6\alpha} \ldots . e^{2\omega}}{n}\right)$$

Die in der Klammer befindlichen Ausdrücke stehen in geometrischer Progression

$$F = \frac{\omega}{2}\left[\frac{e^{(2n+2)\alpha} - e^{2\alpha}}{n\,(e^{2\alpha}-1)}\right]$$ Da aber:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,.\,.\,.\,.\,,$$ so ist

$$F = \frac{\omega}{2}\,\frac{1 + \frac{2n\alpha + 2\alpha}{1} + \frac{(2n\alpha + 2\alpha)^2}{1\,.\,2}\,.\,.\,.\,.\,. - \left(1 + \frac{2\alpha}{1} + \frac{(2\alpha)^2}{1\,.\,2} + \frac{(2\alpha)^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,.\,.\right)}{\frac{2n\alpha}{1} + \frac{n\,.\,(2\alpha)^2}{1\,.\,2} + \frac{n\,(2\alpha)^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,.\,.\,.\,.}$$

$$F = \frac{\omega}{2}\,\frac{\frac{2n\alpha}{1\,.} + \frac{4n^2\alpha^2 + 8n\alpha^2}{1\,.\,2} + \frac{8n^3\alpha^3 + 24n^2\alpha^3 + 24n\alpha^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,.\,.\,.\,.}{\frac{2n\alpha}{1\,.} + \frac{4n\alpha^2}{1\,.\,2\,.} + \frac{8n\alpha^3}{1\,.\,2\,.\,3}}$$

Führen wir die Division wirklich aus und vernachlässigen dabei die unendlich kleinen Größen, so erhalten wir:

$$F = \frac{\omega}{2}\left(1 + \frac{2n\alpha}{1\,.\,2} + \frac{4n^2\alpha^2}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\right)$$

da aber $n\alpha = \omega$

$$F = \frac{\omega}{2}\left(1 + \frac{2\omega}{1\,.\,2} + \frac{4\omega^2}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{8\omega^3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,.\,.\,.\right)$$

$$F = \frac{\omega}{2} + \frac{\omega^2}{1\,.\,2} + \frac{2\omega^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{4\omega^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$$

$$4F + 1 = 1 + \frac{2\omega}{1} + \frac{(2\omega)^2}{1\,.\,2} + \frac{(2\omega)^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{(2\omega)^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,.\,.\,.\,.$$

Aber $e^{2\omega} = 1 + \frac{2\omega}{1} + \frac{(2\omega)^2}{1\,.\,2} + \frac{(2\omega)^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,.\,.\,.$

$$4F + 1 = e^{2\omega}$$

$$F = \frac{e^{2\omega}}{4} - \frac{1}{4}$$

Für $\omega = 2\pi$ erhalten wir für die erste Umdrehung:

$$F_1 = \frac{1}{4}e^{4\pi} - \frac{1}{4}.$$ Ferner für die zweite:

$$F_2 = \frac{1}{4}\,e^{8\pi} - \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\,e^{4\pi} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\,e^{4\pi}\,(e^{4\pi} - 1)$$

Ebenso für die nte Umdrehung $F_n = \frac{1}{4}\,e^{(4n-4)\pi}\,(e^{4\pi} - 1)$

Die Fläche, welche zwischen 2 Windungen liegt, ist:

$$F_n - F_{n-1} = \frac{1}{4}\,e^{(4n-4)\pi}(e^{4\pi} - 1) - \frac{1}{4}\,e^{(4n-8)\pi}\,(e^{4\pi} - 1)$$

$$F_n - F_{n-1} = \left(\frac{1}{4}\,e^{(4n-4)\pi} - \frac{1}{4}\,e^{(4n-8)\pi}\right)\left(e^{4\pi} - 1\right)$$

$$F_n - F_{n-1} = \left(\frac{1}{4}\,e^{(4n-8)\pi}\right)\left(e^{4\pi} - 1\right)^2$$

Setzen wir in die obige Formel $F = \frac{1}{4} e^{2\omega} - \frac{1}{4}$ $\omega = - \infty$, so erhalten wir als Summe der unzählich vielen rückwärtsliegenden Umdrehungen:

$$F = \frac{1}{4} e^{-\infty} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4e^{\infty}} - \frac{1}{4} = - \frac{1}{4}$$

Für $\omega = - 2\pi$ erhalten wir die erste rückwärtsliegende Umdrehung, d. h. die ganze rückwärtsliegende Fläche:

$$F = \frac{1}{e^{4\pi}} - \frac{1}{4}.$$

Wegen Mangel an Raum hat der Schluß der Abhandlung bis zum nächsten Programm verschoben werden müssen.

Dr. Rosendahl.

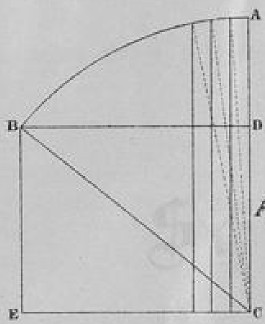


Fig. 1

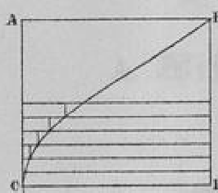
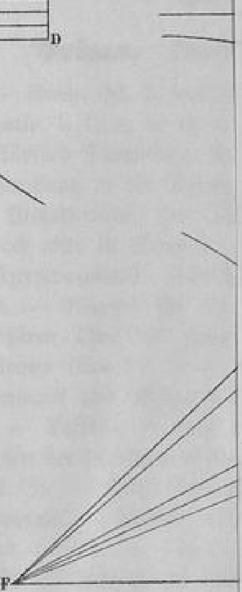
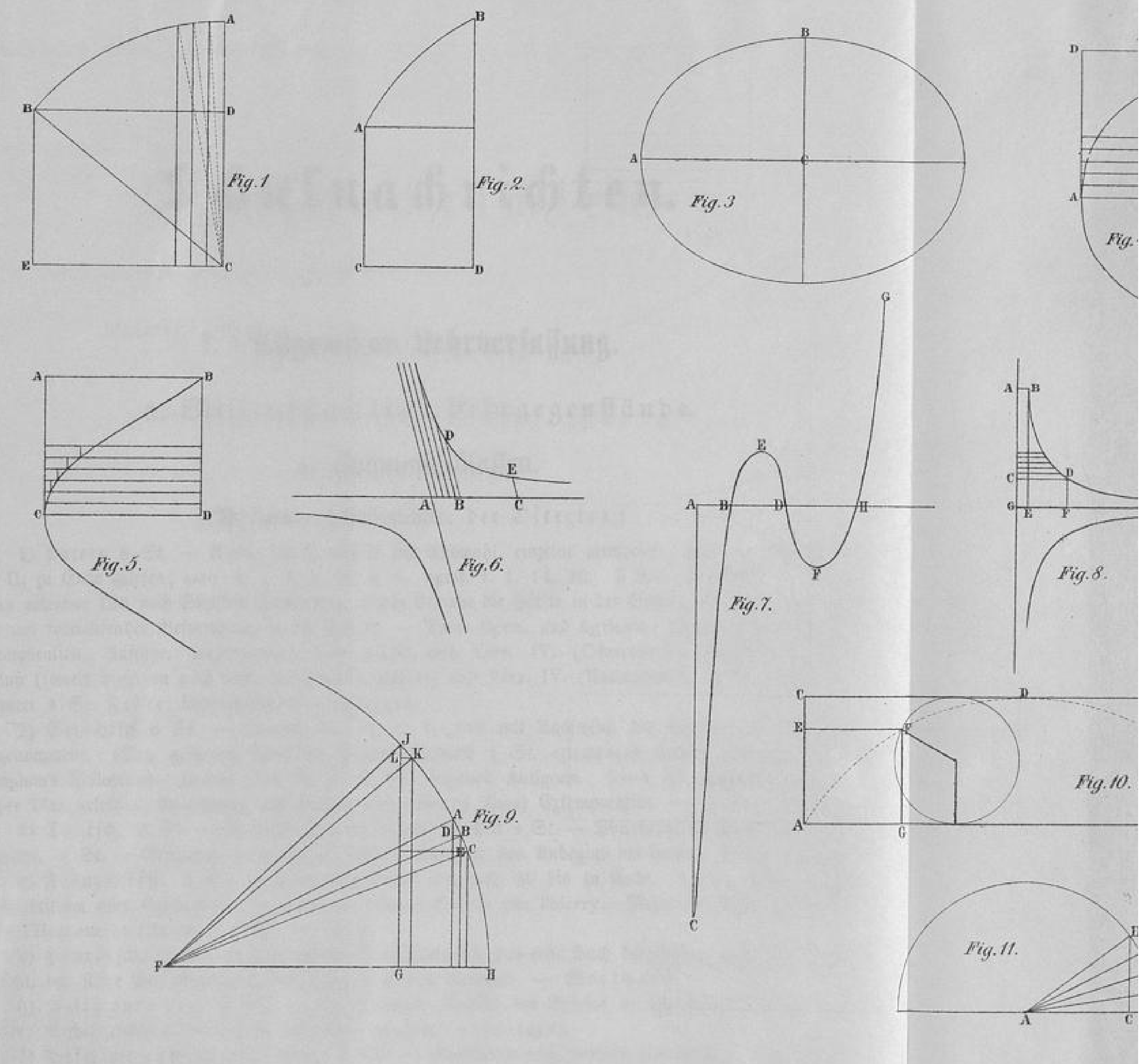


Fig. 5.



1869.



1869.