Jahresbericht

über das

Gymnasium zu Bochum

für das Schuljahr 1875—76,

womit

zu der am 22. Merz stattfindenden

Feier des Geburtstages Sr. Majestät des Kaisers und Königs

im

Namen des Lehrer-Collegiums

einladet

der

Director Dr. Richard Seidel.

Inhalt: Die Kreisconchoide. Von Dr. Rechenbach. — 2. Schulnachrichten. Vom Director.

1876.

Gedruckt bei Wilh. Stumpf in Bochum.

Die Kreisconchoide.

Nicomedes, ein griechischer Mathematiker, construirte, um die Probleme: „zwischen zwei gegebenen Linien zwei stetige Proportionale zu finden“ und „einen geradlinigen Winkel in drei gleiche Theile zu theilen“, die Conchoide. Er zog von einem außerhalb einer geraden Linie, der Basis, gegebenen Punkte aus Strahlen nach derselben und trug nach beiden Seiten der Basis gleiche Stücke ab.

So wie die gerade Linie könnte man nun jede Linie als Basis nehmen und so die verschiedensten Conchoiden construiren. Wir wollen uns hier mit der Kreisconchoide beschäftigen, wir wollen also den Kreis zur Basis nehmen.

Es sei A (Fig. 1) der feste Punkt, der Pol der Curve, $AB = b$ seine kürzeste Entfernung vom Kreise, so erhält man die drei Conchoiden M und M_1, N und N_1, P und P_1, je nachdem die Gerade $a \gtreqless b$ ist, wenn die Linie a auf den von A aus nach dem Kreise gezogenen Strahlen abgetragen wird. Alle 3 Conchoiden bestehen natürlich aus 2 Theilen, einem oberen und einem unteren, je nachdem man auf den Strahlen die Gerade a ober- oder unterhalb der Kreisperipherie abträgt. Während nun die oberen Zweige M_1, N_1 und P_1 der Gestalt nach viel Aehnlichkeit zeigen, weichen die unteren M, N und P sehr von einander ab. Ist $a > b$, so bildet die untere Conchoide eine Schleife und hat im Pole einen Doppelpunkt, ist $a = b$, so geht sie in eine Spitze aus, ganz analog der Nicomedischen Conchoide, nur daß die einzelnen Zweige, da der Kreis eine geschlossene Figur ist, sich nicht in's Unendliche erstrecken. Die vom Pole A aus an den Kreis um C gezogenen Tangenten sind natürlich die äußersten Grenzen aller Curven und werden zugleich Tangenten für alle Zweige.

Die Gleichung unserer Curve bestimmt sich leicht durch Anwendung der Polarcoordinaten. Es sei A der Pol, AD der feste Schenkel des veränderlichen Winkels $QAD = \varphi$, der Leitstrahl $AQ = \varrho$ und r der Radius des Kreises um C, so ist $AQ = AE + EQ = AE + a$. Im Dreieck ACE ist aber $CE^2 = AC^2 + AE^2 - 2\,AC \,.\, AE \,.\, \cos\varphi$ oder $r^2 = (b + r)^2 + AE^2 - 2\,(b + r)\,AE \cos\varphi$ oder $AE = (b + r)\cos\varphi \pm \sqrt{(b + r)^2 \cos\varphi^2 - b^2 - 2\,br}$, folglich $\varrho = (b + r)\cos\varphi \pm \sqrt{(b + r)^2 \cos\varphi^2 - b^2 - 2\,br} + a$. Für den unteren Zweig ist $\varrho = AE - a$, folglich gilt für ihn die Gleichung $\varrho = (b + r)\cos\varphi \pm \sqrt{(b+r)^2 \cos\varphi^2 - b^2 - 2\,rb} - a$. Durch einige Umstellungen ergibt sich für beide Zweige die Gleichung

$$\varrho = (b + r)\cos\varphi \pm \sqrt{r^2 \cos\varphi^2 - (b^2 + 2\,br)\sin\varphi^2} \pm a.$$

Ist b = 0, d. h. liegt der Pol A auf dem Kreise, so wird $\varrho = r \cos \varphi + r \cos \varphi \pm a$, also $\varrho = 2\, r \cos \varphi \pm a$.

Diese Gleichung stellt eine neue Conchoide dar, die aber nicht mehr aus 2 Theilen besteht, sondern eine geschlossene krumme Linie ist.

Da die Gleichung 2 Constante a und 2 r (= d) enthält, so kommen, wenn keine Constante zu Null werden soll, 3 Fälle in Betracht, nämlich $a > 2\, r$, $a = 2\, r$ und $a < 2\, r$.

Sei A (Fig. 2) wiederum der Pol und von ihm aus Strahlen nach dem Kreise gezogen, so entspricht die stark gezeichnete Linie der Bedingung $a > 2\, r$, die weniger stark der Bedingung $a = 2\, r$ und endlich die punktirte der Bedingung $a < 2\, r$.

Die erste Curve führt den Namen Pascals Limaçon, die zweite ist die Cardioide.

Allen 3 Curven genügt sowohl die Gleichung $r = 2\, r \cos \varphi + a$ als die Gleichung $\varrho = 2\, r \cos \varphi - a$.

Denn betrachten wir zuerst die Curve AB ($a < 2\, r$) (Fig. 3), für welche AB der feste Schenkel ist, von dem aus der veränderliche Winkel φ beginnen soll, und setzen wir der Kürze wegen $2\, r = d$, so ist für $\varphi = 0$, $\varrho = d \cos 0 + a = d + a = AB$,

$\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varrho = d \cos \frac{\pi}{2} + a = 0 + a = AD$. Für $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$ erhält man also den Bogen BED.

Für einen Winkel, der größer als $\frac{\pi}{2}$ ist, z. B. für den $\sphericalangle$ BAF, wobei der Winkel FAD mit ω bezeichnet werde, ist $\varrho = d \cos (\frac{\pi}{2} + \omega) + a = - d \sin \omega + a = a - d \sin \omega$. Verbindet man nun den Schnittpunkt G des rückwärts verlängerten Leitstrahles FA auf dem Kreise mit L, so ist $\sphericalangle$ ALG $= \omega$, folglich $AG = d \sin \omega$, und demnach, wenn man $GH = a$ macht, $AH = a - d \sin \omega$, folglich H ein Punkt der Curve.

Mit dem Wachsen des Winkels ω nimmt der Werth von $\sin \omega$ zu, es muß also, da $a < d$ angenommen ist, einmal $d \sin \omega_1 = a$ und dann $d \sin \omega_2 > a$ werden. Ist aber $d \sin \omega_1 = a$, so ist $\varrho = 0$, die Curve geht also durch den Pol A. Um den Winkel φ zu finden, welchen der Leitstrahl in diesem Punkte mit dem festen Schenkel AB macht, lege man die Gerade $a = AI$ von A als Sehne in den Kreis, verlängere dieselbe über A hinaus, so ist $\sphericalangle$ BAK $= \varphi$. Denn bezeichnet man $\sphericalangle$ ALI mit η, so ist im Dreiecke AIL, da $\sphericalangle$ AIL $= \frac{\pi}{2}$ ist, $AI = a = d \sin \eta$. Ist nun $\varrho = d \cos KAB + a = d \cos (\frac{\pi}{2} + \sphericalangle KAD) + a = a - d \sin KAD$, so ist auch, da $\sphericalangle$ KAD $= \sphericalangle$ ALI ist, $\varrho = a - d \sin ALI$. Nach Construction ist aber $d \sin ALI = AI = a$, folglich $\varrho = a - a = 0$.

Man erhält also für Werthe von $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bis $\varphi = \frac{\pi}{2} + \eta$ den Bogen DHA.

Für Werthe von φ, welche zwischen den Grenzen $\varphi = \frac{\pi}{2} + \eta$ und $\varphi = \pi$ liegen, erhält man den Bogen AMP. Denn ist $\varphi = \frac{\pi}{2} + \sphericalangle$ NAD, wo $\sphericalangle$ NAD $> \eta$ ist, so hat man $\varrho = d \cos (\frac{\pi}{2} + NAD) + a = - d \sin ALO + a = -(d \sin ALO - a) = -(AO - a) = -AM$, wobei das $-$ Zeichen andeutet, daß der gefundene Werth der Richtung des Leitstrahles entgegengesetzt ist. Für $\varphi = \pi$ hat man $\varphi = - d + a = -(d - a) = - AP$. Jetzt ist also der Bogen BDHAMP vollendet.

Für Werthe von φ zwischen den Grenzen $\varphi = \pi$ und $\varphi = \frac{3}{2}\pi - \eta$ erhält man den Bogen PQA. Denn ist z. B. $\varphi = \pi \measuredangle SAR$, so ist $\varrho = d \cos(\pi + SAR) + a = - d \cos SAR + a = - (AT - a) = - AQ$. Ist $\varphi = \frac{3}{2}\pi - \eta$, so hat man $\varrho = - \sin\eta + a = - (AW - a) = 0$.

Für $\varphi = \frac{3}{2}\pi - \eta$ bis $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ bekommt man den Bogen AH_1D_1, indem beispielshalber für den $\measuredangle BAE_1 = \frac{3}{2}\pi - E_1AD_1$ der Leitstrahl $\varrho = - \sin E_1AD_1 + a = a - AF_1 = AH_1$ wird.

Für $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ ist $\varrho = + a = AD_1$ und da Cosinus im vierten Quadranten positiv ist, so hat man $\varrho = d \cos(\frac{3}{2}\pi + \tau) + a = AG_1 + a = AI_1$, wenn $\measuredangle I_1AD_1$ beispielshalber $= \tau$ ist. Für $\varphi = 2\pi$ ist $\varrho = d + a = AB$.

Fassen wir das Gesagte zusammen, so hat man also zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ den Bogen BED, zwischen $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi = \frac{\pi}{2} + \eta$, wo η der dem Durchmesser AL in L anliegende Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks ist, dessen gegenüberliegende Kathete a ist, den Bogen DHA, wischen $\varphi = \frac{\pi}{2} + \eta$ und $\varphi = \pi$ den Bogen AMP, zwischen $\varphi = \pi$ und $\varphi = \frac{3}{2}\pi - \eta$ den Bogen PQA, zwischen $\varphi = \frac{3}{2}\pi - \eta$ und $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ den AH_1D_1 und endlich für $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ bis $\varphi = 2\pi$ den Bogen D_1I_1B.

Durch ähnliche Betrachtung findet man, daß auch $\varrho = d \cos\varphi - a$ die ganze Curve repräsentirt; man findet zwischen den Grenzwerthen

$\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{\pi}{2} - \eta$ den Bogen PQA,
$\varphi = \frac{\pi}{2} - \eta$ bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$ den Bogen $A_1H_1D_1$,
$\varphi = \frac{\pi}{2}$ bis $\varphi = \pi$ den Bogen D_1I_1B,
$\varphi = \pi$ bis $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ den Bogen BED,
$\varphi = \frac{3}{2}\pi$ bis $\varphi = 2\pi - \eta$ den Bogen DHA und
$\varphi = 2\pi - \eta$ bis $\varphi = 2\pi$ den Bogen AMP.

Ist $a = d$, so erhält man die Gleichung $\varrho = d \cos\varphi \pm d$, und es genügt dann wieder ede Gleichung zur Bestimmung der Gestalt der Curve. Denn ist

a) $\varrho = d \cos\varphi + d$, so ist für $\varphi = 0$ Radiusvector $\varrho = d \cos 0 + d = 2d = AC$ (Fig. 2); für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist $\varrho = 0 + d = AD$, für $\varphi = \pi$ ist $\varrho = - d + d = 0$, also Punkt A, für $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ ist $\varrho = 0 + d = AE$, für $\varphi = 2\pi$ ist $\varrho = d + d = AC$.

Ist b) $\varrho = d \cos\varphi - d$, so ist für $\varphi = 0$ der Radius vector $\varrho = d - d = 0$, d. h. Pol A; für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist $\varrho = 0 - d = AE$, für $\varphi = \pi$ ist $\varrho = - d - d = - 2d = AC$, für $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ ist $\varrho = 0 - d = AD$, für $\varphi = 2\pi$ ist $\varrho = d - d = 0$, d. h. Pol A, wobei das — Zeichen wiederum andeutet, daß der gefundene Werth der Richtung des Leitstrahles entgegengesetzt ist.

Ist endlich $a > d$, so erhält man die Curve GHBF, und es genügt, wie man leicht findet, wieder jede der beiden Gleichungen, um die Gestalt zu bestimmen.

Verwandelt man durch Einsetzen der Werthe $x = \varrho \cos\varphi$, $y = \varrho \sin\varphi$ und $x^2 + y^2 = \varrho^2$ die Polarcoordinaten in Parallelcoordinaten, so erhält man die Gleichung vierten Grades $(x^2 + y^2 - x\,d)^2 = a^2 (x^2 + y^2)$ oder $x^4 + 2x^2y^2 - 2dx^3 + y^4 - 2dxy^2 + d^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = 0$, also $y = \pm\sqrt{\frac{2dx - 2x^2 + a^2}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{4dxa^2}}$.

Es entsprechen also im Allgemeinen jedem Werthe von x 4 Werthe von y, von denen je 2 entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Ist nun 1. $a < d$, so gibt die Gleichung folgende Relationen:

a) Für $x < -\frac{a^2}{4\,d}$ wird y imaginär, indem $\sqrt{4\,d\,x + a^2}$ imaginär wird;

b) für $x = -\frac{a^2}{4\,d} = AS$ (Fig. 2) wird $y = \pm \frac{a}{4\,d}\sqrt{4\,d^2 - a^2}$, man erhält also nur 2 Werthe für y.

c) Zwischen den Grenzen $x = -\frac{a^2}{4\,d}$ und $x = d - a = AI$ bleibt sowohl die Gleichung $y = \pm\sqrt{\frac{2\,d\,x - 2\,x^2 + a^2}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{4\,d\,x + a^2}}$ als auch $y = \pm\sqrt{\frac{2\,d\,x - 2\,x^2 + a^2}{2} - \frac{a}{2}\sqrt{4\,d\,x + a^2}}$ reell, es entsprechen also zwischen diesen Grenzen jedem x 4 Werthe von y, von denen je 2 sich nur durch die Vorzeichen unterscheiden.

d) Ist $x = d - a = AI$, so wird $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = +\sqrt{4\,a\,d - 2\,a^2}$, $y_4 = -\sqrt{4\,a\,d - 2a^2}$. Ist $x = 0$, so wird $y_{\frac{1}{2}} = \pm 0$, $y_3 = +a$, $y_4 = -a$.

e) Zwischen den Grenzen $x = d - a = AI$ und $x = d + a = AL$ überwiegt die Größe $\frac{a}{2}\sqrt{4\,d\,x + a^2}$ die Größe $\frac{2\,d\,x - 2\,x^2 + a^2}{2}$, es gibt also dann nur die Gleichung $y = \pm\sqrt{\frac{2\,d\,x - 2\,x^2 + a^2}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{4\,d\,x + a^2}}$ reelle Werthe; es entsprechen demnach zwischen diesen Grenzen jedem x nur 2 und zwar entgegengesetzte Werthe.

f) Für $x = d + a = AL$ wird $y = 0$; für Werthe von x, welche größer als $d + a$ sind, wird y imaginär.

2. Ist $a = d$, so wird $y = \pm\sqrt{\frac{2\,d\,x - 2\,x^2 + d^2}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{4\,d\,x + d^2}}$. Es wird dann y imaginär für $x < -\frac{d}{4}$ und $x < 2\,d$; für $x = -\frac{d}{4} = AR$ wird $y = \frac{d}{4}\sqrt{3}$. Für $x = 0$ wird $y_1 = +0$, $y_2 = -0$, $y_3 = +d$, $y_4 = -d$. Zwischen den Grenzwerthen $x = -\frac{d}{4}$ und $x = 0$ erhält man für y 4 Werthe, von denen sich je 2 jedoch immer nur durch die Vorzeichen unterscheiden, indem für diese Werthe $2\,d\,x - 2\,x^2 + d^2 > d\sqrt{4\,d\,x + d^2}$ ist, aber für $x = 0$ bis $x = 2\,d = AC$ erhält man 2 entgegengesetzte reelle und 2 imaginäre Werthe, es gilt also nur noch die Gleichung $y \pm\sqrt{\frac{2\,d\,x - 2\,x^2 + d^2 + d^2}{2} + \frac{d}{2}\sqrt{4\,d\,x + d^2}}$; für $x = 2\,d = AC$ endlich wird $y = 0$.

3. Ist $a > d$, so wird y imaginär für $x < -\frac{a^2}{4\,d}$ und für $x > a + d$. Zwischen den Grenzen $x = -\frac{a^2}{4\,d} = AQ$ und $x = d - a = AG$ hat man je 4 Werthe von y; zwischen den Grenzen $x = d - a$ und $x = d + a = AB$ wird $y = \pm\sqrt{\frac{2\,d\,x - 2\,x^2 + a^2}{2} - \frac{a}{2}\sqrt{4\,d\,x + a^2}}$ imaginär, es gilt also dann nur noch die Gleichung $y = \pm\sqrt{\frac{2\,d\,x - 2\,x^2 + a^2}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{4\,d\,x + a^2}}$.

Ist $y = 0$, so wird $x^4 - 2\,d\,x^3 + d^2\,x^2 - a^2\,x^2 = 0$, welcher Gleichung die Werthe $x_1 = +0$, $x_2 = -0$, $x_3 = d + a$, $x_4 = d - a$ genügen. Ist nun $a < d$, so liegen 2 Punkte der Curve im Anfangspunkte der Coordinaten und 2 Punkte auf der positiven Seite der Abscissenachse; ist $a = d$, so wird $x_4 = d - a$ zu Null, es fallen also 3 Punkte der Curve in den Anfangspunkt und einer in die Entfernung von $x = 2\,d$ rechts von ihm; ist endlich $a > d$, so wird $x_4 = d - a$ negativ und es liegen also ebenfalls 2 Punkte im Anfangspunkte der Coordinaten, aber der eine auf der positiven, der andere auf der negativen Seite der Abscissenachse.

Um nun den Anfangspunkt näher zu charakterisiren, betrachte man die Gleichung

$$\frac{d\,y}{d\,x} = -\frac{\frac{d\,F}{d\,x}}{\frac{d\,F}{d\,y}} = -\frac{2\,x^3 + 2\,x\,y^2 - 3\,d\,x^2 - d\,y^2 + d^2\,x - a^2\,x}{2\,y^3 + 2\,x^2\,y - 2\,d\,x\,y - a^2\,y}.$$

Es erscheint dann $\frac{d\,y}{d\,x}$ für $x = 0$, $y = 0$ unter der Form $\frac{0}{0}$. Differentiirt man also Zähler und Nenner noch einmal, so erhält man

$$\frac{d\,y}{d\,x} = -\frac{\frac{d^2\,F}{d\,x^2} + \frac{d^2\,F}{d\,x\,.\,d\,y}\cdot\frac{d\,y}{d\,x}}{\frac{d^2\,F}{d\,x\,.\,d\,y} + \frac{d^2\,F}{d\,y^2}\cdot\frac{d\,y}{d\,x}} \text{ oder } \frac{d^2\,F}{d\,y^2}\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2 + 2\,\frac{d^2\,F}{d\,x\,.\,d\,y}\,\frac{d\,y}{d\,x} + \frac{d^2\,F}{d\,x^2} = 0.$$

Es ist nun $\frac{d^2\,F}{d\,y^2} = 6\,y^2 + 2\,x^2 - 2\,d\,x - a^2$, $\frac{d^2\,F}{d\,x\,.\,d\,y} = 4\,x\,y - 2\,d\,y$, $\frac{d^2\,F}{d\,x^2} = 6\,x^2 + 2\,y^2 - 6\,d\,x + d^2 - a^2$, folglich

$$(6\,y^2 + 2\,x^2 - 2\,d\,x - a^2)\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2 + (4\,x\,y - 2\,d\,y)\,\frac{d\,y}{d\,x} + 6\,x^2 + 2\,y^2 - 6\,d\,x + d^2 - a^2 = 0$$

oder
$$\frac{d\,y}{d\,x} = -\frac{2\,x\,y - d\,y}{6y^2 + 2x^2 - 2dx - a^2} \pm \sqrt{\frac{6\,dx - 6\,x^2 - 2\,y^2 + a^2 - d^2}{6\,y^2 + 2\,x^2 - 2\,d\,x - a^2} + \left(\frac{2\,x\,y - d\,y}{6\,y^2 + 2\,x^2 - 2\,d\,x - a^2}\right)^2}$$
$$= -\frac{1}{6\,y^2 + 2\,x^2 - 2\,d\,x - a^2}\Big(2\,x\,y - d\,y$$
$$\mp \sqrt{(6\,d\,x - 6\,x^2 - 2\,y^2 + a^2 - d^2)\,(6\,y^2 + 2\,x^2 - 2\,d\,x - a^2) + (4\,x\,y - 4\,d\,y)^2}\Big).$$

Für $y = 0$, $x = 0$ wird jetzt $\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{0}{a^2} \pm \sqrt{\frac{a^2 - d^2}{-a}} = \pm\sqrt{\frac{d^2 - a^2}{a^2}}$.

Ist nun $a < d$, so hat $\frac{d\,y}{d\,x}$ zwei reelle Werthe, und es lassen sich also im Anfangspunkte der Coordinaten 2 Tangenten an die Curve ziehen, von denen die eine mit der Abscissenachse einen Winkel $\operatorname{tg}\alpha = +\sqrt{\frac{d^2 - a^2}{a^2}}$, die andere $\operatorname{tg}\alpha_1 = -\sqrt{\frac{d^2 - a^2}{a^2}}$ bildet. Der Punkt A ist also ein Doppelpunkt.

Zur Construction dieser Tangenten trage man a vom Pole A als Sehne in den gegebenen Kreis und verbinde die Endpunkte M und N mit A, so sind diese Verbindungslinien die fraglichen Tangenten. Denn in dem bei M rechtwinkligen Dreiecke AML ist $ML^2 = d^2 - a^2$, folglich $\operatorname{tg}^2 MAL = \frac{d^2 - a^2}{a^2}$.

Da nun $\sphericalangle$ GAP $=$ $\sphericalangle$ NAL $=$ $\sphericalangle$ MAL, also $\sphericalangle$ PAL $= \pi -$ MAL ist, so ist tg PAL $= -$ tg MAL $= -\sqrt{\frac{d^2 - a^2}{a^2}}$.

Ist $a = d$, Cardioide AECD, so wird $\frac{dy}{dx} = 0$. Aus Gleichung $x^4 - 2\,d\,x^3 + d^2 x^2 - a^2 x^2 = 0$ oder $x^4 - 2\,d\,x^3 = 0$ (Seite 7) folgt aber, daß der Pol A ein dreifacher Punkt ist, es ist demnach A ein Rückkehrpunkt oder Spitze, in welchem die Abscissenachse, da ja tg $\alpha = 0$ ist, die beiden Curvenzweige berührt.

Ist $a > d$, Curve GHBF, so wird $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{d^2 - a^2}{a^2}}$ imaginär, es läßt sich also im Anfangspunkte A der Coordinaten keine Tangente ziehen, wir haben also für diesen Fall, da ja dieser Anfangspunkt ein Punkt der Curve ist, einen conjugirten Punkt oder Einsiedler.

Setzt man in die Formel $\frac{d^2 F}{d x^2} \cdot \frac{d^2 F}{d y^2} \gtreqless \frac{d^2 F}{d x \cdot d y}$ die auf Seite 7 gefundenen Werthe, so wird, wenn $a = d$ ist, für den Anfangspunkt der Coordinaten $\frac{d^2 F}{d x^2} \cdot \frac{d^2 F}{d y^2} = \frac{d^2 F}{d x \cdot d y}$, und wenn $a > d$, $\frac{d^2 F}{d x^2} \cdot \frac{d^2 F}{d y^2} > \frac{d^2 F}{d x \cdot d y}$; es werden also die Bedingungen für den Rückkehrpunkt und den conjugirten Punkt erfüllt.

Tangente, Normale, Subtangente und Subnormale der Kreisconchoide.

Bezeichnet man mit μ den Winkel, welchen eine Tangente in irgend einem Punkte P der Curve (Fig. 4) mit dem Leitstrahl ϱ und mit φ den, welchen der Leitstrahl mit der Achse, von welcher aus der Winkel φ gerechnet wird, bildet, so ist cotg $\mu = \frac{d\varrho}{d\varphi} \cdot \frac{1}{\varrho} = -\frac{d \sin \varphi}{\varrho}$.

Verbindet man nun den Schnittpunkt D des Leitstrahles AP und der Basis mit B, so ist DB $= d \sin \varphi =$ AE, wenn AE // DB gezogen wird, folglich tg APE $= \frac{AE}{AP} = \frac{d \sin \varphi}{\varrho}$, demnach cotg $\mu = -\frac{d \sin \varphi}{\varrho} = -$ tg APE $=$ cotg $(\frac{\pi}{2} + \sphericalangle$ APE) d. h. $\mu = \frac{\pi}{2} + \sphericalangle$ APE oder PF $\perp$ EP.

Um also an irgend einen Punkt P der Curve eine Tangente zu ziehen, braucht man nur auf dem Leitstrahle AP im Pole A ein Loth AE zu errichten, den Schnittpunkt E dieses Lothes und des Grundkreises mit P zu verbinden und auf dieser Verbindungslinie in P ein Loth zu errichten.

Ist $\varphi = 0 = \pi = 2\,\pi$, so ist c tg $\mu = 0$, d. h. $\mu = \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\,\pi$ u. s. w., d. h. für alle Punkte der Curve, welche auf dem Hauptstrahle liegen, steht die Tangente auf demselben senkrecht.

Ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so ist $\varrho =$ AL $= a$, folglich cotg $\mu_1 = -\frac{d}{a}$. Macht man nun AK $= d$, so ist c tg LKA $= \frac{d}{a}$, mithin cotg $\mu_1 = -$ cotg LKA $= +$ cotg ($\pi - \sphericalangle$ (LKA), demnach

$\mu_1 = \pi - \sphericalangle$ LKA, folglich ML Tangente im Punkte L, wenn LM $\perp$ L_1K gezogen ist. Da nämlich die rechtwinkligen Dreiecke LOL_1 und AKL_1 den Winkel KL_1A gemeinsam haben, so ist $\sphericalangle OLL_1 = \sphericalangle L_1KA = \sphericalangle AKL$, demnach $\mu_1 = \pi - \sphericalangle AKL$.

Für den Punkt L_1 ($\varphi = \frac{3}{2}\pi$) erhält man die Tangente L_1M, wenn man von L_1 auf LK ein Loth fällt.

Ist a = d, so wird $\operatorname{cotg} \mu = -\frac{d \sin \varphi}{\varrho} = -\frac{d \sin \varphi}{d \cos \varphi + d} = -\frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi} = -\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\varphi\right)$, folglich $\mu = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\varphi$.

Um also an einen Punkt P (Fig. 5) der Curve eine Tangente zu ziehen, halbire man den Leitstrahl AP, errichte im Halbirungspunkte E das Loth ED, den Schnittpunkt D dieses Lothes mit dem Hauptstrahle AK verbinde man mit P, halbire den so entstandenen Winkel APD und errichte auf der Halbirungslinie FP in P ein Loth, so ist dieses Loth PK Tangente; oder man mache beliebig AH = AG und lege an HP in P den entstandenen Winkel GHP an.

Bezeichnet man (Fig. 6) mit ϑ den Winkel, welchen die Normale PE des Punktes P der Curve mit dem Hauptstrahle AB bildet und mit τ den Winkel, welchen der Leitstrahl AP mit der Normale einschließt, so ist $\vartheta = \tau + \varphi$, folglich $\vartheta - \varphi = \tau$ und $\operatorname{tg} \tau = \operatorname{tg}(\vartheta - \varphi) = -\frac{d\varrho}{d\varphi} \cdot \frac{1}{\varrho} = \frac{d \sin \varphi}{d \cos \varphi + a}$.

Es ist nun BD = d $\sin \varphi$ = AE, wenn AE // DB ist, und AD = d $\cos \varphi$, AP = d $\cos \varphi$ + a, folglich $\operatorname{tg} \tau = \frac{AE}{AP} = \frac{d \sin \varphi}{d \cos \varphi + a}$, wonach die Normale für jeden Punkt leicht construirt wird.

Ist a = d, so ist $\operatorname{tg} \tau = \frac{d \sin \varphi}{d \cos \varphi + d} = \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi$, d. h. der Winkel, welchen die Normale mit dem Radiusvector bildet, ist gleich der Hälfte des Winkels, welchen der Radiusvector mit dem Hauptstrahl bildet.

Für den Punkt P ist nun (Fig. 7) DB = d $\sin \varphi$ = AE, AP = d + d $\cos \varphi$, folglich $\operatorname{tg} APE = \frac{d \sin \varphi}{d \cos \varphi + d} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi$, demnach $\sphericalangle APE = \frac{1}{2} \sphericalangle PAB$. Es ist aber AD // EB, folglich $\sphericalangle PEB = APE = \frac{1}{2}\varphi$, demnach Centriwinkel FCB = φ, mithin CF // AP. Durch diese Betrachtung kommt man zu folgender Construction: Durch den Mittelpunkt C des Grundkreises ziehe man zum Leitstrahl AP eine Parallele, verbinde den Schnittpunkt F dieser Parallele auf dem Grundkreise mit P, so ist diese Verbindungslinie die Normale.

Da nun CF $\perp$ DB, so ist $\widehat{DF} = \widehat{FB}$, folglich $\sphericalangle FAD = \sphericalangle BEF = \frac{1}{2}\varphi = \sphericalangle APF$, demnach AF = FP, d. h. jeder Punkt des Grundkreises ist vom Anfangspunkt der Coordinaten und der Curve gleich weit entfernt.

Weiter ist $\sphericalangle AFC = \sphericalangle CFE = \frac{1}{2}\varphi$; zieht man also in F an den Grundkreis eine Tangente FG, so bilden die 4 Linien AF, CF, EF und GF ein harmonisches Büschel.

Zu demselben Resultate gelangt man durch folgende Betrachtung: Verbindet man E mit B (Fig. 6) und zieht PG // DB // AE, so sind die Vierecke ADBE, DBGP und AEGP Rechtecke, demnach DP = a = BG = BM = BN; ein mit a um B beschriebener Kreis wird also unsere Curve in M und N um die Linie PG berühren. Zieht man nun noch AG, so ist AH = HG; um also die

Normale für irgend einen Punkt P der Curve zu zeichnen, ziehe man von ihm aus eine Tangente an den mit a um B beschriebenen Kreis, verbinde den Berührungspunkt G mit dem Anfangspunkt der Coordinaten, halbire diese Verbindungslinie AG und verbinde den Halbirungspunkt H mit P, so ist diese Verbindungslinie die verlangte Normale.

Zieht man weiter den Durchmesser ED, so muß, da DC = CE und PH = HE ist, CH // PA und $\frac{DP}{2} = \frac{a}{2} =$ CH sein, folglich liegt H auf einem mit $\frac{1}{2}$ a um C beschriebenen Kreise. Hat man also diesen Kreis gezeichnet, so findet man für irgend einen Punkt X der Curve die betreffende Normale, wenn man durch C zu AX eine Parallele zieht und den Schnittpunkt Y dieser Parallele auf dem um C beschriebenen Kreise mit X verbindet.

Ist a = d, so fällt dieser Kreis mit dem Grundkreise zusammen, wir haben also schon oben erwähntes Resultat.

Verlängert man PA über A hinaus bis Q und HC über C hinaus bis H_1, so ist die Verbindungslinie QH_1 Normale für den Punkt Q. Da aber $CH_1 = \frac{1}{2}\, a = \frac{1}{2}$ QD, CH_1 // DQ und DC = CE ist, so muß QH_1 verlängert durch E gehen, d. h. die Normalen zweier zugehörigen Punkte der Curve schneiden sich auf dem Grundkreise.

Da, wie schon gesagt, Viereck APGE ein Rechteck ist, so ist AH = HP; folglich ∢ HAP = ∢ APH, und weil CH // AP ist, so ist ∢ HAP = ∢ AHC, ∢ APH = ∢ CHE, demnach ∢ AHC = CHE. Verbindet man A mit Y, so findet man auf gleiche Weise, daß ∢ AYC = ∢ CYR ist. Diese Betrachtung führt uns auf eine Construction unserer Curve. Man beschreibe um C mit $\frac{a}{2}$ einen Kreis, lege von A aus eine beliebige Sehne AY in den Kreis, mache ∢ CYR = ∢ AYC, verlängere RY über Y hinaus um AY = AX, so ist X ein Punkt der Curve.

Für irgend einen Punkt P der Curve ist $S_t = \varrho \sin\varphi \dfrac{\cos\varphi \dfrac{d\varrho}{d\varphi} - \varrho\sin\varphi}{\sin\varphi\dfrac{d\varrho}{d\varphi} + \varrho\cos\varphi}$,

$$S_n = \varrho \sin\varphi \frac{\sin\varphi \dfrac{d\varrho}{d\varphi} + \varrho\cos\varphi}{\cos\varphi\dfrac{d\varrho}{d\varphi} - \varrho\sin\varphi}, \text{ folglich}$$

$$S_t = -\frac{(d\cos\varphi + a)\sin\varphi\,(d\sin 2\varphi + a\sin\varphi)}{d\cos 2\varphi + a\cos\varphi\cos\varphi}$$

$$S_n = -\frac{(d\cos\varphi + a)\sin\varphi\,(d\cos 2\varphi + a\cos\varphi)}{d\sin 2\varphi + a\sin\varphi}.$$

Um die Tangenten der äußersten Punkte unserer Curve zu bestimmen, bedenke man, daß für diese die Tangenten entweder parallel oder senkrecht zur x-Achse stehen, die Normalen aber bezüglich senkrecht oder parallel sind. Für die äußersten Punkte ober- und unterhalb der Achse der x ist dann, da $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ wird, $\tau = \frac{\pi}{2} - \varphi$, also $\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \varphi) = -\dfrac{d\varrho}{\varrho\, d\varphi}$ oder $\operatorname{ctg}\varphi = \dfrac{d\sin\varphi}{d\cos\varphi + a}$, wodurch man leicht 1) $\cos\varphi = \dfrac{-a \pm \sqrt{8d^2 + a^2}}{4d}$ findet. Nun ist $\varrho = d\cos\varphi + a$, demnach

2) $\varrho = \dfrac{3a \pm \sqrt{8d^2 + a^2}}{4}$.

Für die äußersten Punkte links und rechts ist $\tau = 0 - \varphi$, also $\operatorname{tg} \tau = \operatorname{tg}(-\varphi) = -\frac{d\,\varrho}{\varrho\, d\,\varphi}$ oder $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\varrho\, d\,\varphi}{d\,\varrho}$, demnach $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{d \sin \varphi}{d \cos \varphi + a}$ oder 3) $\cos \varphi = -\frac{a}{2\,d}$, welchem Winkel 4) $\varrho = \frac{a}{2}$ entspricht.

Aus den Gleichungen 1) und 2) findet man die zu genannten Punkten betreffenden Parallelcoordinaten durch Einsetzen der Werthe in $y = \varrho \cos \varphi$ und $x = \varrho \sin \varphi$. Es ergeben sich dann aus 1) und 2) die Werthe $x = \frac{4\,d^2 - a^2 \pm a\sqrt{8\,d^2 + a^2}}{8\,d}$,

$$y = \pm \frac{1}{8\,d}\sqrt{16\,d^4 + 40\,a^2 d^2 - 2\,a^4 \pm (16\,a\,d^2 + 2\,a^3)\sqrt{8\,d^2 + a^2}}$$

und aus 3) und 4) die Werthe $x = -\frac{a^2}{4\,d}$, $y = -\frac{a}{4\,d}\sqrt{4\,d^2 - a^2}$.

Für einen Punkt $P\,(x_1\, y_1)$ der Curve ist die Gleichung der Tangentiallinie

$$y - y_1 = -\frac{2\,x_1^3 + 2\,x_1\,y_1^2 - 3\,d\,x_1^2 - d\,y_1^2 + d^2 x_1 - a^2 x_1}{2\,x_1^2\,y_1 + 2\,y_1^3 - 2\,d\,x_1\,y_1 - a^2\,y_1}(x - x_1) \text{ oder}$$

$$y = \frac{3\,d\,x_1^2 - 2\,x_1^3 - 2\,x_1 y_1^2 + d y_1^2 - d^2 x_1 + a_2\,x_1}{2\,x_1^2\,y_1 + 2\,y_1^3 - 2\,d\,x_1\,y_1 - a^2\,y_1}\,x + \frac{d\,x_1^3 + d\,x_1\,y_1^2 + a^2\,y_1^2 - d^2\,x_1^2 + a^2 x_1^2}{2\,x_1^2\,y_1 + 2\,y_1^3 - 2\,d\,x_1\,y_1 - a^2\,y_1}$$

und die der Normallinie $y - y_1 = \frac{2\,x_1^2\,y_1 + 2\,y_1^3 - 2\,d\,x_1\,y_1 - a^2\,y_1}{2\,x_1^3 + 2x_1\,y_1^2 - 3\,d\,x_1^2 - d\,y_1^2 + d^2\,x_1 - a^2\,x^1}(x - x_1)$.

Da die Subtangente und Subnormale bezüglich durch die Formeln $S_t = \frac{y_1}{\frac{d\;y_1}{d\;x_1}}$ und $S_n = y_1\,\frac{d\,y_1}{d\,x_1}$ gegeben sind, so wird

$$S_t = \frac{2\,x_1^2\,y_1^2 + 2\,y_1^4 - 2\,d\,x_1\,y_1^2 - a^2\,y_1^2}{3dx_1^2 - 2x_1^3 - 2x^1 y_1^2 + dy_1^2 - d^2x_1 + a^2x_1} = \frac{d\,x_1^3 + d\,x_1\,y_1^2 - d^2\,x_1^2 + a^2\,x_1^2 + a^2\,y_1^2}{3dx_1^2 - 2x_1^3 - 2x_1 y_1^2 + dy_1^2 - d^2x_1 + a^2x_1}$$

$S_n = \frac{3\,d\,x_1^2 - 2x_1^3 - 2\,x_1\,y_1^2 + d\,y_1^2 - d^2\,x_1 + a^2\,x_1}{2x_1^2 + 2\,y_1^2 - 2\,d\,x_1 - a^2}$, welche Werthe unschwer zu construiren sind.

Um die Tangenten kennen zu lernen, welche parallel der x-Achse sind, setze man $F^1(x) = 0$ oder $\frac{d\;y}{d\;x} = 2\,x^3 + 2\,x\,y^2 - 3\,d\,x^2 - d\;y^2 + d^2\,x - a^2\,x = 0$ oder

$y = \pm\sqrt{\frac{a^2 x + 3\,d\,x^2 - 2\,x^3 - d^2 x}{2\,x - d}}$. Aus dieser Gleichung und $F(x) = 0$ folgt $4\,d\,x^2 - 4\,d^2 x + d^3 + a^2 x - a^2 d = 0$, welcher Gleichung die Werthe $x_{\frac{1}{2}} = \frac{4\,d^2 - a^2}{8\,d} \pm \frac{a}{8\,d}\sqrt{8\,d^2 + a^2}$ Genüge leisten. Dem x_1 entspricht nun der Werth

$$y_{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{\frac{2\,a^3\,d^2 - 28\,a\,d^4 - a^5 - (6\,a^2\,d^2 + 4\,d^4 - a^4)\sqrt{8\,d^2 + a^2}}{16\,d^2\,(a - \sqrt{8\,d^2 + a^2})}}$$

$= \pm\frac{1}{8\;d}\sqrt{40\,a^2\,d^2 + 16\,d^4 - 2\,a^4 + (2\,a^3 + 16\,a\,d^2)\sqrt{8\,d^2 + a^2}}$, dem x_2 die Werthe

$$y_{\frac{3}{4}} = \pm\frac{1}{8\;d}\sqrt{40\,a^2\,d^2 + 16\,d^4 - 2\,a^4 + (2\,a^3 + 16\,a\,d^2)\sqrt{8\,d^2 + a^2}}.$$

Es entsprechen also im Allgemeinen jedem x zwei entgegengesetzte Werthe von y, d. h. es lassen sich 4 Tangenten an die Curve ziehen, welche der x-Achse parallel sind. Ist aber $a > d$, so wird für $x_2 = \frac{4\,d^2 - a^2}{8\,d} - \frac{a}{8\,d}\sqrt{8\,d^2 + a^2}$ $y_{\substack{3\\4}}$ imaginär, wir haben also für diese Curve nur zwei Tangenten parallel der x-Achse. Es sei d ein aliquoter Theil von a, etwa $d = \frac{2}{3}\,a$, dann wird $x_1 = \frac{7 + 3\sqrt{41}}{32}\,d$ $= 0{,}81904\ d$, $y_{\substack{1\\2}} = \pm\ \frac{d}{32}\sqrt{1534\ +\ 246\ \sqrt{41}} = \pm\ 1{,}74250\ d$, $x_2 = -\ 0{,}38154\ d$, $y_{\substack{3\\4}} = \pm\ \frac{d}{32}\sqrt{1474\ -\ 246\ \sqrt{41}} = \pm\ \frac{d}{32}\sqrt{1474\ -\ 1575{,}\ 16885}$, also imaginär.

Da diese parallelen Tangenten die äußersten Punkte der Curve ober- und unterhalb der x-Achse geben, so wollen wir dieselben vermittelst der Gleichung $x = \frac{4\,d^2 - a^2 + a\sqrt{8\,d^2 + a^2}}{8\,d}$ durch eine geometrische Zeichnung darstellen. Macht man (Fig. 8) $AB = 2\,d$, so ist $BC^2 = 4\,d^2 + a^2$ und $AD^2 = 8\,d^2 + a^2$, wenn $BD\ (\perp AB) = BC$ ist. Beschreibt man über AD einen Halbkreis, macht $AG = a$, so ist $AF^2 = a\sqrt{8\,d^2 + a^2}$. Legt man weiter von A aus a als Sehne in den über $AB = 2\,d$ beschriebenen Halbkreis, so ist $BH^2 = 4\,d^2 - a^2$, und ist $HI = AF$, so ist $BI^2 =$ $4\,d^2 - a^2 + a\sqrt{8\,d^2 + a^2}$, demnach $x = \frac{BI^2}{8\,d}$ oder $4\,x : BI = BI : 2\,d$; ist nun $BK = BI$, $LK \perp BK$, so ist $LB = 4\,x$, folglich sind die Punkte P und Q die äußersten, wenn $AM = \frac{1}{4}\,LB$ und $PQ \perp AB$ gezogen ist, und hiernach PR und QS die der x Achse parallelen Tangenten.

Ist $a = \frac{3}{2}\,d$, so ist $x = 0,\ 81904\ d = 0{,}82\ d$, welcher Werth an dem Maßstabe sofort abzulesen ist, wenn d in 50 gleiche Theile getheilt wird.

Ist $a = d$, so wird $x_1 = \frac{3}{4}\,d$, $x_2 = 0$, welchen Werthen bezüglich die Gleichungen $y_{\substack{1\\2}} = \pm\ \frac{3}{4}\,d\sqrt{3} = \pm\ 1{,}29904\ d$ und $y_{\substack{3\\4}} = \pm\ 0$ entsprechen. Die Curve hat also ebenfalls 2 Tangenten, welche parallel der x-Achse sind, und 2 Tangenten fallen mit der x-Achse zusammen. Die betreffenden Tangenten sind (Fig. 9) FG und HI, wenn $AD = \frac{3}{4}\,d$ gemacht ist.

Ist $a < d$, so hat man 4 Tangenten. Nimmt man beispielshalber $a = \frac{1}{2}\,d$, so wird $x_1 =$ $\frac{15 + \sqrt{33}}{32}\,d = 0{,}64828\ d$, $x_2 = \frac{15 - \sqrt{33}}{32}\,d = 0{,}28923\ d$; die bezüglichen Ordinaten sind dann $y_{\substack{1\\2}} = \pm\ \frac{d}{32}\sqrt{414 + 66\ \sqrt{33}} = \pm\ 0{,}88009\ d$, $y_{\substack{3\\4}} = \pm\frac{d}{32}\sqrt{414 - 66\ \sqrt{33}} =$ $\pm\ 0{,}18450$. Macht man also nach dem Maßstabe $AF = 0{,}65\ d$ und $AE = 0{,}29\ d$ (Fig. 10), so sind bezüglich GH und IK, LM und NO die betreffenden parallelen Tangenten.

Um die Tangenten zu bestimmen, welche senkrecht zur x-Achse stehen, setze man $F^1\,(x) = \infty$, d. h. $2\,y^3 + 2\,x^2\,y - 2\,d\,x\,y - a^2\,y = 0$, welcher Gleichung die Werthe 1) $y_1 = 0$ und 2) $y_{\substack{2\\3}} = \pm\sqrt{\frac{a^2 + 2\,d\,x - 2\,x^2}{2}}$ Genüge leisten. Aus Gleichung 1) und $F\,(x) = 0$ erhält man $x_1 = d + a$, $x_2 = d - a$, aus 2) und $F\,(x) = 0$ folgt $x_3 = -\ \frac{a^2}{4\,d}$ und demnach $y_3 = \pm\ \frac{a}{4\,d}\sqrt{4\,d^2 - a^2}$.

Für $a = \frac{3}{2}$ d (Fig. 8) hat man die Punkte T ($y_1 = 0$, $x_1 = \frac{5}{2}$ d), U ($y_2 = 0$, $x_2 = -\frac{d}{2}$) und V = ($y_3 = \pm\frac{3\,d}{16}\sqrt{7} = \pm 0{,}49608$ d, $x_3 = -\frac{9}{16}$ d $= 0{,}56250$ d) und die betreffenden Tangenten sind SW, ER und ON.

Ist aber $a = d$, so entspricht dem Werthe $y_1 = 0$ nur der Werth $x_1 = 2$ d und dem Werthe $y_{\frac{2}{3}} = \pm\sqrt{\frac{a^2 + 2\,d\,x - 2\,x^2}{2}}$ der Werth $x^2 = -\frac{d}{4}$ und demnach $y_{\frac{2}{3}} = \pm\frac{d}{4}\sqrt{3} = \pm 0{,}43301$ d. Die Cardioide hat also nur zwei solche Tangenten, nämlich IG und FH (Fig. 9).

Für $a = \frac{1}{2}$ d wird $x_1 = \frac{3}{2}$ d, $x_2 = \frac{1}{2}$ d und $x_3 = -\frac{d^2}{16}$, welchen Werthen bezüglich $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ und $y_3 = 0{,}24206$ entsprechen, und die betreffenden Tangenten sind HK, SR und GI (Fig. 10).

Krümmungskreis.

Bedeutet r_1 den Krümmungsradius irgend eines Punktes P der Curve, so erhält man aus der

Gleichung $r_1 = \dfrac{\varrho\left[1 + \left(\frac{1}{\varrho}\frac{d\,\varrho}{d\,\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{1 + 2\left(\frac{1}{\varrho}\frac{d\,\varrho}{d\,\varphi}\right)^2 - \frac{1}{\varrho}\frac{d^2\,\varrho}{d\,\varphi^2}}$ den Krümmungsradius

$$r_1 = \frac{(d\cos\varphi + a)\left[1 + \dfrac{d^2\sin\varphi^2}{(d\cos\varphi + a)^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{1 + \dfrac{2\,d^2\sin\varphi^2}{(d\cos\varphi + a)^2} + \dfrac{d\cos\varphi}{d\cos\varphi + a}} = \frac{(d^2 + 2\,a\,d\cos\varphi + a^2)^{\frac{3}{2}}}{2\,d^2 + 3\,a\,d\cos\varphi + a^2} = \frac{(d^2 + 2\,a\,d\cos\varphi + a^2)\sqrt{d^2 + 2\,a\,d\cos\varphi + a^2}}{2\,d^2 + 3\,a\,d\cos\varphi + a^2}.$$

Ist nun $a = \frac{3}{2}$ d, $a = d$ und $a = \frac{1}{2}$ d, so wird bezüglich

$$1)\ r_1 = \frac{(13 + 12\cos\varphi)\sqrt{13 + 12\cos\varphi}}{34 + 36\cos\varphi}\,d,$$

$$2)\ r_1 = \tfrac{4}{3}\,d\cos\tfrac{1}{2}\,\varphi,$$

$$3)\ r_1 = \frac{(5 + 4\cos\varphi)\sqrt{5 + 4\cos\varphi}}{18 + 12\cos\varphi}\,d.$$

Betrachtet man nun zuerst die Gleichung 1), so ersieht man leicht, daß für keinen Werth von φ der Krümmungsradius zu Null wird, da die Bedingung $13 + 12\cos\varphi = 0$ oder $\cos\varphi = -\frac{13}{12}$ nicht stattfinden kann.

Für alle Werthe von $\varphi = 0$ bis zu $\varphi = 160^0\ 48'\ 43''$ ist r_1 positiv, für Winkel von $\varphi = 160^0\ 48'\ 43''$ bis $\varphi = 199^0\ 11'\ 17''$ wird ϱ negativ, die Mittelpunkte der Krümmungsradien haben also eine den vorigen entgegengesetzte Richtung, von $\varphi = 199^0\ 11'\ 17''$ bis $\varphi = 2\,\pi$ haben wir wieder positive r_1. Ist $34 + 36\cos\varphi = 0$ oder $\cos\varphi = -0{,}944\ldots$, d. h. $\varphi =$

160° 48′ 43″ oder 199° 11′ 17″, so wird $r_1 = \infty$, es sind also die Punkte H und K Wendepunkte (Fig. 11). Dem Punkte D $(\varphi = 0)$ entspricht $r_1 = 1{,}7857$ d, demnach D_1 der Mittelpunkt des betreffenden Krümmungsradius DD_1. Im äußersten Punkte E ist $\cos\varphi = \frac{\sqrt{41} - 3}{18}$, also $\varphi = 64°$ 49′ 28,″2 und $r_1 = 1{,}5621$ d $= EE_1$. Für F $(\varphi = \frac{\pi}{2})$ ist $r_1 = 1{,}3786$ d $= FF_1$. für G $(\cos\varphi = -\frac{3}{4}$, $\varphi = 138°\,35'\,25'')$ ist $r_1 = 1{,}1429$ d $= GG_1$. Zwischen den Grenzen $\varphi = 138°\,35'\,25''$ und $\varphi = 160°\,49'\,43''$ wächst der Krümmungsradius, bis er für letzteren Winkel unendlich groß wird; zwischen den Grenzen $\varphi = 160°\,48'\,43''$ und $\varphi = \pi$ bekommt r_1 die Werthe $-\infty$ bis $-\frac{1}{2}$ d, und $II_1 = \frac{1}{2}$ d, also der Krümmungsradius für Punkt I. Bezeichnet man nun die zu den Punkten D, E, F, G, H, I zugehörigen Krümmungsmittelpunkte mit D^1, F^1 u. s. w., so ist der Zug $D^1E^1F^1G^1$ die Evolute für den Curvenzweig DEG, die Curve G^1H^1 die des Bogens GH und endlich I^1H^{11} die des Bogens HI. Da die Curve durch ID in 2 congruente Theile zerlegt wird, so findet man leicht den vollständigen Zug der Evolute. Weil man nach Seite 10 die Normallinie für alle Punkte leicht construiren kann, so macht es keine Schwierigkeit, die Evolute zu zeichnen. Bemerken wollen wir noch Folgendes: Es werden die Normallinien GG_1 und G_2G_3 Doppeltangenten in den Rückkehrpunkten G_1 und G_3, die Normallinien EE_1 und E_2E_3 Tangenten in den äußersten Punkten E_1 und E_3 und endlich die Normallinien H_1H_2 und K_1K_2 Asymptoten der unendlichen Curvenzweige.

Einfacher gestaltet sich die Evolute der Curve $a = \frac{1}{2}$ d, für welche $r_1 = \frac{(5 + 4\cos\varphi)\sqrt{5 + 4\cos}}{18 + 12\cos\varphi}$ d ist. So ist (Fig. 12) für den Punkt D $(\varphi = 0°)$, in welchem der Hauptstrahl Normallinie ist, $r_1 = 0{,}9$ d, für E $(\varphi = \frac{\sqrt{33} - 1}{8} = 53°\,37'\,30'')$, in welchem die Normallinie senkrecht zum Hauptstrahle ist, $r_1 = 0{,}79696$ d; für F $(\varphi = \frac{\pi}{2})$ ist $r_1 = \frac{5\sqrt{5}}{18}$ d $= 0{,}62113$ d; für G $(\varphi = -\frac{1}{4} = 104°\,28'\,39'')$, ist $r_1 = 0{,}53333$ d, für A $(\varphi = -\frac{1}{2} = 120°)$ ist $r_1 = \frac{1}{4}\sqrt{3}$ d $= 0{,}43301$ d, H $(\varphi = -\frac{1 + \sqrt{33}}{8} = 147°\,27'\,57'')$ ist $r_1 = 0{,}26343$ d, C $(\varphi = \pi)$ ist $r_1 = \frac{1}{6}$ d $= 0{,}16666$ d. Es ist also $D^1E^1F^1G^1H^1A^1C^1$ die Evolute der halben Curve DEFGHAC. Da nun wieder die Curve durch den Hauptstrahl in 2 congruente Theile zerlegt wird, so kann man leicht die ganze Evolute zeichnen, da diese natürlich auch durch AD in 2 Hälften getheilt wird. Durch Einsetzen der Werthe von φ für die den genannten Punkten D, E, F u. s. w. entsprechenden Punkte D, M, L u. s. w. erhält man oben genannte Werthe für r_1. So ist z. B. für den Punkt I, welcher dem Punkte H entspricht, $\varphi = -\frac{1 + \sqrt{33}}{8} = 212°\,32'\,3''$ und $r_1 = 0{,}26343$ d, für A $(\varphi = 240°)$ ist $r_1 = 0{,}43301$ u. s. w.

Für den Doppelpunkt A, in welchem $\varphi = 120°$ und $= 240°$ ist, ist $\varrho = \frac{1}{4}\sqrt{3}$ d. Zieht man aber von A an den um C mit $\frac{d}{4}$ beschriebenen Kreis die Tangenten AA_1 und AA_2, so ist $AA_1 = AA_2 = \sqrt{(\frac{1}{2}\,d)^2 - (\frac{1}{4}\,d)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{3}$ d, also gleich dem Krümmungsradius.

Weiter ist $\sin A_1AC_1 = A_2AC_1 = \frac{\frac{1}{4}\,d}{\frac{1}{2}\,d} = \frac{1}{2}$, folglich $\measuredangle A_1AC_1 = \measuredangle A_2AC_1 = 30°$, demnach $\measuredangle NAA_1 = \measuredangle PAA_2 = \frac{\pi}{2}$; es sind also die Tangenten AA_1 und AA_2 Normallinien des Doppelpunktes A, ihre Berührungspunkte A_1 und A_2 fallen mit den Mittelpunkten der Krümmungsradien zusammen, d. h. die Evolute berührt den um C mit $\frac{1}{4}$ d beschriebenen Kreis in A_1 und A_2.

Ist $a = d$, so erhält man als Evolute wieder eine Cardioide (Fig. 13), deren Durchmesser des Grundkreises der dritte Theil des Durchmessers des Grundkreises der Curve ist. Den Punkten D $(\varphi = 0^0)$, E $(\varphi = \frac{\pi}{3})$, F $(\varphi = \frac{\pi}{2})$, G $(\varphi = \frac{2}{3}\pi)$, A $(\varphi = \pi)$ entsprechen bezüglich die Werthe $r_1 = \frac{4}{3} d = 1{,}33333 d$, $r_2 = \frac{2}{3}\sqrt{3}\, d = 1{,}15470\, d$, $r_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, d = 0{,}94280\, d$, $r_4 = \frac{2}{3} d = 0{,}66667\, d$, $r_5 = 0$. Der Zug $D_1 E_1 F_1 G_1 A$ ist also die Evolute der halben Cardioide und demnach die Cardioide $D_1 G_1 A K_1 M_1$ die ganze Evolute. Dieselbe berührt in A, für welchen Punkt $\varrho = 0 = r_1$ ist, den Grundkreis.

Um den geometrischen Ort aller Krümmungsmittelpunkte zu finden, d. h. um die Gleichung der Evolute unserer Curve aufzustellen, bestimmen wir die Coordinaten eines Krümmungsmittelpunktes für irgend einen Punkt P (α, β) der Curve. Für diesen ist

$$\alpha = \varrho \cos\varphi - \frac{\left[\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2\right]\left[\varrho\cos\varphi + \sin\varphi\frac{d\varrho}{d\varphi}\right]}{\varrho^2 + 2\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 - \varrho\frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}},$$

$$\beta = \varrho \sin\varphi - \frac{\left[\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2\right]\left[\varrho\sin\varphi - \cos\varphi\frac{d\varrho}{d\varphi}\right]}{\varrho^2 + 2\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 - \varrho\frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}} \text{ oder}$$

$$\alpha = (a^2 d \cos\varphi^2 + a d^2 \cos\varphi + a d^2 \cos\varphi^3 + d^3 \cos\varphi^2 + a^2 d \sin\varphi^2 + d^3 \sin\varphi^2 + 2 a d^2 \cos\varphi \sin\varphi^2) : (a^2 + 2 d^2 + 3 a d \cos\varphi),$$

$$\beta = \frac{a d^2 \sin\varphi - a d^2 \sin\varphi \cos\varphi^2}{a^2 + 2 d^2 + 3 a d \cos\varphi}.$$

Substituirt man nun die aus der Gleichung $\varrho = d\cos\varphi + a$ zu bestimmenden Werthe von $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, $\cos\varphi^2$ u. s. w. in diese Gleichungen und eliminirt aus ihnen ϱ, so erhält man eine Gleichung zwischen den Veränderlichen α und β als Gleichung der Evolute. So wird beispielshalber für $a = d$ nach einigen Umformungen $\alpha = \frac{2}{3} d \cos\frac{1}{2}\varphi^2 \left(1 + 2\sin\frac{\varphi}{2}^2\right)$,
$\beta = \frac{4}{3} d \sin\frac{1}{2}\varphi^3 \cos\frac{1}{2}\varphi$. Aus $\varrho = d\cos\varphi + d = d(1 + \cos\varphi) = 2 d \cos\frac{\varphi}{2}^2$ folgt weiter $\cos\frac{1}{2}\varphi = \pm\sqrt{\frac{\varrho}{2d}}$, $\cos\frac{1}{2}\varphi^2 = \frac{\varrho}{2d}$, $\sin\frac{1}{2}\varphi = \pm\sqrt{\frac{2d - \varrho}{2d}}$, demnach ist 1) $\alpha = \frac{3\varrho d - \varrho^2}{3d}$,
2) $\beta = \frac{2d - \varrho}{d}\sqrt{2\varrho d - \varrho^2}$. Durch Substitution des aus 1) gefundenen Werthes $\varrho = \frac{3}{2} d \pm \sqrt{\frac{9}{4} d^2 - 3\alpha d}$ erhält man die Gleichung $\beta^4 - 2 d\alpha\beta^2 + 2\alpha^2\beta^2 + \frac{1}{3} d^2\beta^2 + \frac{4}{3} d^2\alpha^2 - 2 d\alpha^3 - \frac{8}{27} d^3\alpha + \alpha^4 = 0$ oder

$$\beta = \pm\sqrt{\frac{2 d\alpha - \frac{1}{3} d^2 - 2\alpha^2}{2} \pm \frac{d}{2}\sqrt{\frac{1}{9} d^2 - \frac{4}{27} d\alpha}}$$

als Gleichung der Evolute. Setzt man $\alpha = \gamma + \frac{2}{3} d$, d. h. verlegt man den Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinaten von A nach D_1 (Fig. 13), so erhält man $\beta = \pm\sqrt{\frac{-\frac{2}{3}\gamma d + \frac{1}{9} d^2 - 2\gamma^2}{2} \pm \frac{d}{2}\sqrt{\frac{1}{81} d^2 - \frac{4}{27} d\gamma}}$ und durch Drehung der Coordinaten um den Winkel $\varphi = \pi$ erhält man nach den bekannten Gleichungen

$\gamma = \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi$,

$\beta = \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi$ die Veränderliche $\gamma = - \xi$ und $\beta = - \eta$, folglich ist jetzt die Gleichung der Evolute $\eta^4 - \frac{1}{9} d^2 \eta^2 - \frac{2}{3} d \xi \eta^2 + 2 \eta^2 \xi^2 - \frac{2}{3} d \xi^3 + \xi^4 = 0$ oder $\eta = \pm \sqrt{\frac{\frac{1}{9} d^2 + \frac{2}{3} d \xi - 2 \xi^2}{2} \pm \frac{d}{2} \sqrt{\frac{1}{81} d^2 + \frac{4}{27} d \xi}}$.

Bringt man die Gleichung unter die Form $(\eta^2 + \xi^2)^2 - \frac{2}{3} d \xi (\eta^2 + \xi^2) - \frac{1}{9} d^2 \eta^2 = 0$, so findet man leicht durch Einsetzen der Werthe $\eta = r \sin \varphi_1$, $\xi = r \cos \varphi_1$, $\eta^2 + \xi^2 = r^2$ die Gleichung $(r - \frac{1}{3} d \cos \varphi^2)^2 = \frac{1}{9} d^2$ oder $r = \frac{1}{3} d \cos \varphi_1 + \frac{1}{3} d$ als Polargleichung der Evolute. Dieselbe ist die Gleichung einer Cardiode, deren Durchmesser des Grundkreises der dritte Theil des Durchmessers des Grundkreises der ursprünglichen Cardioide ist.

Die Quadratur der Conchoide.

Bezeichnet man wieder mit φ den Winkel zwischen Radiusvector ϱ und der festen Achse, mit A die dreiseitige Fläche, welche von einem Radiusvector, der mit der Achse den gegebenen Winkel φ_0 bildet, einem Radiusvector, der mit der Achse einen beliebigen Winkel φ einschließt, und der Curve begrenzt wird, so ist $A = \frac{1}{2} \int_{\varphi^0}^{\varphi} \varrho^2 \, d \varphi = \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} (a^2 + 2 a \cos \varphi + d^2 \cos \varphi^2) \, d \varphi =$
$\frac{1}{2} a^2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} d \varphi + a d \int_{\varphi_0}^{\varphi} \cos \varphi \, d \varphi + \frac{1}{2} d^2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \cos \varphi^2 \, d \varphi = \frac{1}{2} a^2 \varphi + a d \sin \varphi + \frac{1}{2} d^2 (\frac{1}{4} \sin 2 \varphi + \frac{1}{2} \varphi) = \frac{1}{2} a^2 \varphi + a d \sin \varphi + \frac{d^2}{8} \sin 2 \varphi + \frac{1}{4} d^2 \varphi + C$.

Zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ erhält man den Bogen BFG (Fig. 2), und es ist demnach Fläche GBFG $= \frac{1}{2} a^2 (\pi - 0) + a d (\sin \pi - \sin 0) + \frac{d^2}{8} (\sin 2 \pi - \sin 0) + \frac{1}{4} d^2 (\pi - 0) = \frac{1}{2} a^2 \pi + \frac{1}{4} d^2 \pi$, demnach die von der ganzen Curve begrenzte Fläche GHBFG $= (a^2 + \frac{1}{2} d^2) \pi$.

Für den speciellen Fall $a = \frac{3}{2} d = 3r$ wird nun im Allgemeinen $A = \frac{11}{2} r^2 \varphi + 6 r^2 \sin \varphi + \frac{r^2}{2} \sin 2 \varphi + C$.

Nimmt man nun das Integral zwischen den Grenzen $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi = 0$, so wird Fläche (Fig. 14) ADFA $= \frac{11}{4} r^2 \pi + 6 r^2$, die Fläche AFGI ($\varphi = \pi$ bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$) $= \frac{11}{4} r^2 \pi - 6 r^2$, demnach die Fläche IADFGI $= \frac{11}{2} r^2 \pi$ und der Inhalt der ganzen Curve $11 r^2 \pi$, also 11 mal so groß wie der Grundkreis. Die Fläche rechts von der Ordinatenachse wird nach Obigem $\frac{11}{2} r^2 \pi + 12 r^2$, die links von derselben $\frac{11}{2} r^2 \pi - 12 r^2$, folglich übertrifft erste die letztere um $24 r^2$.

Ist $a = d = 2 r$, so wird die Fläche der ganzen Cardioide $A = 6 r^2 \pi$, also sechsmal so groß als der Grundkreis. Fläche A (Fig. 15) $= \frac{3}{2} r^2 \pi + 4 r^2$, Fläche ADP $= \frac{3}{2} r^2 \pi - 4 r^2$, folglich übertrifft die erstere die letztere um das Achtfache des Quadrates des Radius des Grundkreises und demnach die Fläche rechts von der Ordinatenachse die links von derselben um das Sechszehnfache.

Ist $a = \frac{1}{2} d = r$, so wird im Allgemeinen $A = \frac{3}{2} r^2 \varphi + 2 r^2 \sin \varphi + \frac{1}{2} r^2 \sin 2 \varphi + C$, folglich (Fig. 16) Fläche $ADEF = \frac{3}{4} r^2 \pi + 2 r^2$. Für den Pol A ist $\cos \varphi = - \frac{1}{2}$, also $\varphi = \frac{2}{3} \pi$, demnach Fläche $FGA = \frac{1}{4} r^2 \pi + \frac{3}{4} r^2 \sqrt{3} - 2 r^2$; dem Bogen AHC entsprechen die Werthe $\varphi = \pi$ und $\varphi = \frac{2}{3} \pi$, wonach Fläche $AHC = \frac{1}{2} r^2 \pi - \frac{3}{4} r^2 \sqrt{3}$ wird. Durch Addition findet man den Flächeninhalt der halben Curve gleich $\frac{3}{2} r^2 \pi$, demnach der Inhalt der ganzen Curve gleich $3 r^2 \pi$. Leicht ergibt sich für die innere Schleife der Werth $r^2 \pi - \frac{3}{2} r^2 \sqrt{3}$, für die äußere $2 r^2 \pi + r^2 \sqrt{3}$, folglich übertrifft die äußere die innere um $r^2 \pi + 3 r^2 \sqrt{3}$, d. h. um den Inhalt des Grundkreises und den Inhalt des um den Grundkreis beschriebenen gleichseitigen Dreiecks. Die innere Schleife vom Grundkreise subtrahirt gibt $\frac{3}{2} r^2 \sqrt{3}$, d. h. der Flächeninhalt des sichelförmigen Ausschnittes ist gleich dem Inhalte des dem Grundkreise eingeschriebenen regulären Sechseck. Der Grundkreis von der äußeren Schleife subtrahirt, gibt $r^2 \pi + \frac{3}{2} r^2 \sqrt{3}$, also ist der große sichelförmige Ausschnitt um den Grundkreis größer als der kleine.

Die Bogenlänge der Curve.

Ist S der zu bestimmende Bogen, so ist

$$S = \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{d r}{d \varphi}\right)^2} = \int_{\varphi}^{\varphi} d\varphi \sqrt{a^2 + d^2 + 2 a d \cos \varphi} = \sqrt{a^2 + d^2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left(1 + \frac{2 a d}{a^2 + d^2}\right)^{\frac{1}{2}} d \varphi.$$

Entwickelt man nun $\left(1 + \frac{2 a d}{a^2 + d^2} \cos \varphi\right)^{\frac{1}{2}}$ in eine Reihe, so kann man leicht das Integral bestimmen. Aus

$$\left(1 + \frac{2 a d}{a^2 + d^2} \cos \varphi\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2 a d}{a^2 + d^2} \cos \varphi - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \left(\frac{2 a d}{a^2 + d^2}\right)^2 \cos \varphi^2 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{2 a d}{a^2 + d^2}\right)^3 \cos \varphi^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \left(\frac{2 a d}{a^2 + d^2}\right)^4 \cos \varphi^4 + - \dots$$

folgt z. B. für $a = r$,

$$S = r \sqrt{5} \int_{\varphi_0}^{\varphi} (1 + \tfrac{4}{5} \cos \varphi)^{\frac{1}{2}} d \varphi = r \sqrt{5} \left[\int_{\varphi_0}^{\varphi} d \varphi + \frac{1}{2} \cdot \frac{4^1}{5^1} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \cos \varphi \, d \varphi - \frac{1 \cdot 1 \cdot 4^2}{2 \cdot 4 \cdot 5^2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \cos \varphi^2 \, d \varphi + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 4^3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5^3} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \cos \varphi^3 \, d \varphi - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4^4}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 5^4} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \cos \varphi^4 \, d \varphi + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4^5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 5^5} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \cos \varphi^5 \, d \varphi - + \dots \right].$$

Durch Einsetzen der Werthe $\int d \varphi = \varphi$, $\int \cos \varphi \, d \varphi = \sin \varphi$, $\int \cos \varphi^2 \, d \varphi = \frac{1}{4} \sin 2 \varphi + \frac{1}{2} \varphi$, $\int \cos \varphi^3 \, d \varphi = \frac{1}{12} \sin 3 \varphi + \frac{3}{4} \sin \varphi$, $\int \cos \varphi^4 \, d \varphi = \frac{1}{32} \sin 4 \varphi + \frac{1}{4} \sin 2 \varphi + \frac{3}{8} \varphi$, $\int \cos \varphi^5 \, d \varphi = \frac{1}{80} \sin 5 \varphi + \frac{5}{48} \sin 5 \varphi + \frac{5}{8} \sin \varphi$ u. s. w. erhält man

$$S = r\sqrt{5}\Big[\varphi + \frac{1.4^1}{2.5^1}\sin\varphi - \frac{1.1.4^2.1}{2.4.5^2.4}\sin 2\varphi - \frac{1.1.4^2.1}{2.4.5^2.2} + \frac{1.1.3.4^3.1}{2.4.6.5^3.12}\sin 3\varphi$$
$$+ \frac{1.1.3.4^3.3}{2.4.6.5^3.4}\sin\varphi - \frac{1.1.3.5.4^4.1}{2.4.6.8.5^4.32}\sin 4\varphi - \frac{1.1.3.5.4^4.1}{2.4.6.8.5^4.4}\sin 2\varphi$$
$$- \frac{1.1.3.5.4^4.3}{2.4.6.8.5^4.8}\varphi + \frac{1.1.3.5.7.4^5.1}{2.4.6.8.10.5^5.80}\sin 5\varphi + \frac{1.1.3.5.7.4^5.5}{2.4.6.8.10.5^5.48}\sin 3\varphi$$
$$+ \frac{1.1.3.5.7.4^5.5}{2.4.6.8.10.5^5.8}\sin\varphi - \frac{1.1.3.5.7.9.4^6.1}{2.4.6.8.10.12.5^6.192}\sin 6\varphi - \frac{1.1.3.5.7.9.4^6.3}{2.4.6.8.10.12.5^6.64}\sin 4\varphi$$
$$- \frac{1.1.3.5.7.9.4^6.15}{2.4.6.8.10.12.5^6.64}\sin 2\varphi - \frac{1.1.3.5.7.9.4^6.5}{2.4.6.8.10.12.5^6.16}\varphi + - \ldots\Big].$$

Nimmt man nun die Integrale zwischen den Grenzen $\varphi = \pi$ und $\varphi = 0$, so werden $\sin\pi$ $\sin 2\pi$ u. s. w. zu Null, und es wird jetzt der halbe Bogen DFGAHC $= r\sqrt{5}\Big[\pi - \Big(\frac{1.1.4^2.1}{2.4.5^2.2}\pi + \frac{1.1.3.5.4^4.3}{2.4.6.8.5^4.8}\pi + \frac{1.1.3.5.7.9.4^6.5}{2.4.6.8.10.12.5^6.16}\pi + \frac{1.1.3.5.7.9.11.4^8.35}{2.4.6.8.10.12.14.5^8.128}\pi + \ldots\Big)\Big] = r\sqrt{5}\Big[\pi - \pi\Big(\frac{1}{5^2} + \frac{1}{4.5^3} + \frac{3.7}{4.5^5} + \frac{3.7.11}{4.5^7} + \ldots\Big)\Big] = r\sqrt{5}\Big[\pi - \pi\Big(0{,}04 + 0{,}06 + 0{,}00168 + 0{,}0001848\Big)\Big].$

Da die durch die Klammer eingeschlossene Reihe convergirend ist und den Werth 0,05 erreicht, so wird der Bogen DFGAHC $= 0{,}95\, r\sqrt{5}\,.\,\pi$ und der Bogen der ganzen Curve also gleich $1{,}9\, r\sqrt{5}\,\pi$.

Ist $a = d = 2r$, so wird der Bogen $S = \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi\sqrt{8r^2 + 8r^2\cos\varphi} = r\sqrt{8}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\sqrt{1 + \cos\varphi}\,.\,d\varphi = 4r\int_{\varphi_0}^{\varphi}\cos\tfrac{1}{2}\varphi\, d\varphi = 8r\sin\tfrac{1}{2}\varphi$.

Für den Bogen (Fig. 15) CD ($\varphi = \frac{\pi}{2}$ bis $\varphi = 0$) erhält man also die Gleichung CD $= 8r(\sin\frac{\pi}{4} - 0) = 4r\sqrt{2}$, für den Bogen DPA ($\varphi = \pi$ bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$) die Gleichung DPA $= 8r(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{4} = 8r(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}) = 8r - 4r\sqrt{2}$, demnach ist der Bogen CDPA $= 8r$, und der Umfang der ganzen Cardioide gleich $16r$.

Die Cubatur der Curve.

Betrachten wir zuerst die Curve $a = \frac{3}{2}d = 3r$ (Fig. 14), so wird, wenn man in der Entfernung IA $= r$ eine Parallele zur Ordinatenachse und die äußerste Tangente links von derselben zieht, die Fläche IGH von 2 Bogen begrenzt, deren Gleichungen bezüglich

$$y = \sqrt{\frac{4rx - 2x^2 + 9r^2}{2} + \frac{3r}{.2}\sqrt{8rx + 9r^2}} \text{ und}$$
$$y = \sqrt{\frac{4rx - 2x^2 + 9r^2}{2} - \frac{3r}{2}\sqrt{8rx + 9r^2}}$$

sind, der Inhalt des Körpers also, welcher durch Umdrehung dieser Fläche um die x-Achse entsteht, ist

$$V = \pi \int_{-\frac{9}{8} r}^{-r} \left[\frac{4 r x - 2 x^2 + 9 r^2}{2} + \frac{3 r}{2} \sqrt{8 r x + 9 r^2} - \left(\frac{4 r x - 2 x^2 + 9 r^2}{2} - \frac{3 r}{2}\sqrt{8 r x + 9 r^2}\right)\right] d x$$

oder $V = 3 r \pi \int_{-\frac{9}{8} r}^{-r} \sqrt{8 r x + 9 r^2}\, d x$. Setzt man nun $\sqrt{8 r x + 9 r^2} = z$, so wird $d x = \frac{z\, d z}{4 r}$, demnach $V = \frac{3}{4} \pi \int_{-\frac{9}{8} r}^{-r} z^2\, d z = \frac{\pi}{4} (8 r x + 9 r^2) \sqrt{8 r x + 9 r^2} = \frac{1}{4} r^3 \pi$.

Der Inhalt des Körpers, welcher durch Umdrehung des Bogens HFD entsteht, wird dargestellt durch

$$V_1 = \pi \int_{-r}^{5 r} \left(\frac{4 r x - 2 x^2 + 9 r^2}{2} + \frac{3 r}{2} \sqrt{8 r x + 9 r^2}\right) d x = 2 r \pi \int_{-r}^{5 r} x\, d x - \pi \int_{-r}^{5 r} x^2\, d x + \frac{9}{2} r^2 \pi \int_{-r}^{5 r} d x + \frac{3 r}{2} \pi \int \sqrt{8 r x + 9 r^2}\, d x = \pi r x^2 - \frac{\pi}{3} x^3 + \frac{9 r^2}{2} \pi x + \frac{\pi}{8} (8 r x + 9 r^2) \sqrt{8 r x + 9 r^2},$$

wobei die Integrale zwischen den Grenzen $x = 5 r$ und $x = - r$ zu nehmen sind. Hiernach wird $V_1 = 51\frac{3}{4} r^3 \pi$, der Inhalt des ganzen Rotationskörpers also gleich $52 r^3 \pi$. Der Inhalt des Körpers, welcher durch Rotation des Bogens HF entsteht, ist gleich $\frac{77}{12} r^3 \pi$ und der durch Umdrehung des Bogens FD entstandene Körper gleich $\frac{136}{3} r^3 \pi$.

Zieht man (Fig. 15) die Tangente PQ, so wird der Bogen APD der Cardioide $(a = 2 r)$ repräsentirt durch die Gleichungen $y = \sqrt{2 r x - x^2 + 2 r^2 + 2 r \sqrt{2 r x + r^2}}$ und $y = \sqrt{2 r x - x^2 + 2 r^2 - 2 r \sqrt{2 r x + r^2}}$, der Inhalt des durch die Umdrehung des Bogens APD um die x-Achse entstandenen Körpers wird also dargestellt durch die Gleichung

$$V = 4 r \pi \int \sqrt{2 r x + r^2}\, d x = \frac{4}{3} \pi (2 r x + r^2) \sqrt{2 r x + r^2} + C.$$

Nimmt man nun das Integral zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = \frac{r}{2}$, so wird $V\ (APD) = \frac{4}{3} r^3 \pi$.

Für den Rotationskörper, welcher durch Umdrehung des Bogens DEF um die x-Achse entsteht gilt die Gleichung

$$V = \pi \int (2 r x - x^2 + 2 r^2 + 2 r \sqrt{2 r x + r^2})\, d x$$

$$= 2 r \pi \int x\, d x - \pi \int x^2\, d x + 2 r^2 \pi \int d x + 2 r \pi \int \sqrt{2 r x + r^2}\, d x$$

$$= r \pi x^2 - \frac{\pi}{3} x^3 + 2 r^2 \pi x + \frac{2}{3} \pi (2 r x + r^2) \sqrt{2 r x + r^2} + C.$$

Für $x = 4\,r$ bis $x = 0$ wird $V\,(ADC) = 16\,r^3\,\pi - \frac{64}{3}\,r^3\,\pi + 8\,r^3\,\pi + 18\,r^3\,\pi - \frac{2}{3}\,r^3\,\pi = 20\,r^3\,\pi$, demnach ist der Inhalt des Rotationskörpers der Cardioide gleich $\frac{4}{3}\,r^3\,\pi + 20\,r^3\,\pi = \frac{64}{3}\,r^3\,\pi$, also 16 mal so groß, als die durch Rotation des Grundkreises entstandene Kugel.

Ist endlich $a = r$ (Fig. 16), so gilt für den durch den Bogen AGF entstandenen Rotationskörper die Gleichung $V = r\,\pi \int\limits_{x = -\frac{1}{8}\,r}^{x = 0} \sqrt{8\,r\,x + r^2} = \frac{r^3\,\pi}{12}$.

Der Bogen AIC wird dargestellt durch die Gleichung $y = \sqrt{\frac{4\,r\,x - 2\,x^2 + r^2}{2} - \frac{r}{2}\sqrt{8\,r\,x + r^2}}$, demnach das Volumen des durch die innere Schleife entstandenen Rotationskörpers

$$V = r\,\pi \int\limits_{x = 0}^{x = r} \left(\frac{4\,r\,x - 2\,x^2 + r^2}{2} - \frac{r}{2}\sqrt{8\,r\,x + r^2}\right) d\,x$$

$= 2\,r\,\pi \int\limits_{x = 0}^{x = r} x\,d\,x - \pi \int\limits_{x = 0}^{x = r} x^2\,d\,x + \frac{r^2\,\pi}{2} \int\limits_{x = 0}^{x = r} d\,x - \frac{r\,\pi}{2} \int\limits_{x = 0}^{x = r} \sqrt{8\,r\,x + r^2}\,d\,x = r^3\,\pi - \frac{1}{3}\,r^3\,\pi + \frac{1}{2}\,r^3\,\pi - \frac{27}{24}\,r^3\,\pi + \frac{1}{24}\,r^3\,\pi = \frac{1}{12}\,r^3\,\pi$.

Der durch die innere Schleife entstandene Rotationskörper hat also gleichen Kubikinhalt mit dem durch den Bogen links von der Ordinatenachse entstandenen.

Für den Rotationskörper des Bogens FED hat man

$V\,(FED) = \pi \int\limits_{x = 0}^{x = 3\,r} \left(\frac{4\,r\,x - 2\,x^2 + r^2}{2} + \frac{r}{2}\sqrt{8\,r\,x + r^2}\right) d\,x = \frac{20}{3}\,r^3\,\pi$, demnach ist dieser Körper fünfmal so groß, als die mit dem Radius r beschriebene Kugel. Der Inhalt des Rotationskörpers der großen Schleife wird $\frac{27}{4}\,r^3\,\pi$.

Bestimmt man das Volumen des Rotationskörpers der Conchoide durch Polarcoordinaten, so hat man $V = \frac{2}{3} \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \varrho^3 \sin\varphi\,d\,\varphi = \frac{2}{3}\,\pi \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} (a^3 + 3\,a^2\,d\cos\varphi + 3\,a\,d^2\cos\varphi^2 + d^3\sin\varphi^3)\sin\varphi\,d\,\varphi$

$= \frac{2}{3}\,a^3\,\pi \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \sin\varphi\,d\,\varphi + 2\,a^2\,d\,\pi \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \cos\varphi\,\sin\varphi\,d\,\varphi + 2\,a\,d^2\,\pi \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \cos\varphi^2\,\sin\varphi\,d\,\varphi$

$+ \frac{2}{3}\,d^3\,\pi \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \cos\varphi^3\,\sin\varphi\,d\,\varphi = -\frac{2}{3}\,a^3\,\pi\cos\varphi - \frac{a^2\,d}{2}\,\pi\cos 2\,\varphi - \frac{1}{6}\,a\,d^2\,\pi\cos 3\,\varphi - \frac{1}{2}\,a\,d^2\cos\varphi - \frac{1}{48}\,d^3\,\pi\cos 4\,\varphi - \frac{1}{12}\,d^3\,\pi\cos 2\,\varphi$, eine Gleichung, durch welche das Volumen leicht bestimmt wird. Ist beispielshalber $a = 2\,r = d$ und nimmt man das Integral zwischen den Grenzen $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi = 0$, so hat man (Fig. 15) $V\,(DC) = -\frac{28}{3}\,r^3\,\pi\,(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0) - \frac{14}{3}\,r^3\,\pi\,(\cos\pi - \cos 0) - \frac{4}{3}\,r^3\,\pi\,(\cos\frac{3}{2}\,\pi - \cos 0) - \frac{1}{6}\,r^3\,\pi\,(\cos 2\,\pi - \cos 0) = +\frac{28}{3}\,r^3\,\pi + \frac{14}{3}\,r^3\,\pi + \frac{14}{3}\,r^3\,\pi + \frac{4}{3}\,r^3\,\pi - \frac{1}{6}\,r^3\,\pi + \frac{1}{6}\,r^3\,\pi = 20\,r^3\,\pi$.

Der Schwerpunkt der Conchoide.

Um den Schwerpunkt der Fläche der Conchoide zu bestimmen, genügen die Gleichungen

$$A = \tfrac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (\varrho_1{}^2 - \varrho_0{}^2)\, d\,\varphi,\; A\,\xi = \tfrac{1}{3}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (\varrho_1{}^3 - \varrho_0{}^3) \cos\varphi\, d\,\varphi,\; A\,\eta = \tfrac{1}{3}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (\varrho_1{}^3 - \varrho_0{}^3) \sin\varphi\, d\,\varphi.$$

Sollen nun zuerst die Coordinaten des Schwerpunktes der Fläche bestimmt werden, welche von der x-Achse und einem Curvenbogen oder von der ganzen Curve gegrenzt werden, so wird ϱ_0 zu Null und es genügen dann die Gleichungen $A = \tfrac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \varrho^2\, d\,\varphi = \tfrac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (a^2 + 2\,a\,d + d^2\cos\varphi^2)\, d\,\varphi =$ $\tfrac{1}{2}\,a^2\,\varphi + a\,d\sin\varphi + \dfrac{d^2}{8}\sin 2\,\varphi + \tfrac{1}{4}\,d^2\,\varphi + C,$

$$A\,\xi = \tfrac{1}{3}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \varrho^3 \cos\varphi\, d\,\varphi = \tfrac{1}{3}\,a^3\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos\varphi\, d\,\varphi + a^2 d\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos\varphi^2\, d\,\varphi + a\,d^2\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos\varphi^3\, d\,\varphi + \frac{d^3}{3}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos\varphi^4\, d\,\varphi$$

$$= \tfrac{1}{3}a^3\sin\varphi + \tfrac{1}{4}a^2 d\sin 2\varphi + \tfrac{1}{2}a^2 d\varphi + \tfrac{1}{12}a\,d^2\sin 3\varphi + \tfrac{3}{4}a\,d^2\sin\varphi + \tfrac{1}{96}d^3\sin 4\varphi + \tfrac{1}{12}d^3\sin 2\varphi + \tfrac{1}{8}d^3\varphi + C,$$

$$A\,\eta = \tfrac{1}{3}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \varrho^3 \sin\varphi\, d\,\varphi = \tfrac{1}{3}\,a^3\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin\varphi\, d\,\varphi + a^2\,d\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos\varphi \sin\varphi\, d\,\varphi + a\,d^2\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos\varphi^2 \sin\varphi\, d\,\varphi$$

$$+ \frac{d^3}{3}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos\varphi^3 \sin\varphi\, d\,\varphi = -\tfrac{1}{3}\,a^3\cos\varphi - \tfrac{1}{4}\,a^2\,d\cos 2\,\varphi - \tfrac{1}{12}\,a\,d^2\cos 3\,\varphi - \tfrac{1}{4}\,a\,d^2\cos\varphi$$

$$- \tfrac{1}{96}\,d^3\cos 4\,\varphi - \tfrac{1}{24}\,d^3\cos 2\,\varphi + C.$$

Nimmt man das Integral zwischen den Grenzen $\varphi_1 = \pi$ und $\varphi_0 = 0$, so wird $S = \tfrac{1}{2}\,a^2\,\pi + \tfrac{1}{4}\,d^2\,\pi$, $A\,\xi = \tfrac{1}{2}\,a^2\,d\,\pi + \tfrac{1}{8}\,d^3\,\pi$, $A\eta = \tfrac{2}{3}\,a^3 + \tfrac{2}{3}\,a\,d^2$, demnach $\xi = \dfrac{4\,a^2\,d + d^3}{4\,a^2 + 2\,d^2}$, $\eta = \dfrac{8\,a^3 + 8\,a\,d^2}{6\,a^3\,\pi + 3\,d^2\,\pi}$.

Ist nun $a = 3\,r$ (Fig. 14), so wird $\xi = \tfrac{20}{11}\,r = 1{,}8181\ldots.r = AK$, $\eta = \dfrac{52\,r}{11\,\pi}$ $= 1{,}50474\,r = KS$, demnach S der Schwerpunkt der Fläche IDFG, S_1 der der Fläche IH_1F_1D.

Für $a = d = 2\,r$ (Fig. 15) wird $\xi = \tfrac{5}{3}\,r = 1{,}66\ldots..\,r = AK$, $\eta = \dfrac{32\,r}{9\,\pi} =$ $1{,}13177\,r = KS$, also S und S_1 bezüglich Schwerpunkte der Flächen ACDP und AQD_1C.

Ist $a = r$ (Fig. 16), so wird $\xi = \tfrac{4}{3}\,r = 1{,}33\ldots r = AK$, $\eta = \dfrac{20\,r}{9\,\pi} = 0{,}70736\,r = KS$.

Nimmt man das Integral zwischen den Grenzen $\varphi_1 = 2\,\pi$ und $\varphi_0 = 0$, so erhält man die ganze Fläche der Curve. Da nun die x-Achse dieselbe in 2 congruente Theile zerlegt, so liegt natürlich der Schwerpunkt auf dieser Achse und es wird $\eta = 0$. Man erhält dann $\xi = \dfrac{4\,a^2\,d + d^3}{4\,a^2 + 2\,d^2}$. Es hat also die Abscisse des Schwerpunktes der halben Curve denselben Abstand vom Pole wie die der ganzen Curve, und ist demnach K der Schwerpunkt der 3 Conchoiden $a = 3\,r$, $a = 2\,r$ und $a = r$.

Soll der Schwerpunkt der Fläche bestimmt werden, welcher von der x-Achse, dem Conchoidenbogen und dem Grundkreise begrenzt wird, so erhält man, da für letzteren der Radiusvector $\varrho_0 = d\cos\varphi$ ist,

$$A = \tfrac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (a^2 + 2\,a\,d)\,d\,\varphi = \tfrac{1}{2}\,a^2\,\varphi + a\,d\sin\varphi,\ A\,\xi = \tfrac{1}{3}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (a^3 + 3\,a^2 d\cos\varphi + 3\,a\,d^2\cos\varphi^2)\cos\varphi\,d\,\varphi$$

$$= \tfrac{1}{3}\,a^3\sin\varphi + \tfrac{1}{4}\,a^2\,d\sin 2\,\varphi + \tfrac{1}{2}\,a^2\,d\,\varphi + \tfrac{1}{12}\,a\,d^2\sin 3\,\varphi + \tfrac{3}{4}\,a\,d^2\sin\varphi + C,$$

$$A\,\eta = \tfrac{1}{3}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (a^3 + 3\,a^2\,d\cos\varphi + 3\,a\,d^2\cos\varphi^2)\sin\varphi\,d\,\varphi = -\tfrac{1}{3}\,a^3\cos\varphi - \tfrac{1}{4}\,a^2\,d\cos 2\,\varphi$$

$$- \tfrac{1}{12}\,a\,d^2\cos 3\,\varphi - \tfrac{1}{4}\,a\,d^2\cos\varphi + C.$$

Zwischen den Grenzen $\varphi_1 = \pi$ und $\varphi_0 = 0$ wird hiernach $A = \frac{1}{2}\,a^2\,\pi$, $A\,\xi = \frac{1}{2}\,a^2\,d\,\pi$, $A\,\eta = \frac{2}{3}\,(a^3 + a\,d^2)$, mithin $\xi = d$, $\eta = \dfrac{4\,a^2 + 4\,d^2}{3\,a\,\pi}$. Ist nun $a = 3\,r$ (Fig. 14), so wird $\xi = 2\,r = AB$, $\mu = \dfrac{52\,r}{9\,\pi} = 1{,}83912\,r = BS_2$ und hiernach S_2 der Schwerpunkt der Fläche BDFGIAMB.

Ist $a = d = 2\,r$ (Fig. 15), so ist $\xi = 2\,r = AB$, $\eta = \dfrac{16\,r}{3\,\pi} = 1{,}69765\,r = BS_2$, also S_2 der Schwerpunkt der Fläche BCDPAMB.

Bezeichnen wir mit S den von φ_0 bis φ_1 gerechneten Bogen der Conchoide, so ist

$$S = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{a^2 + d^2 + a\,d\cos\varphi}\;d\,\varphi,\ S\,\xi = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (a + d\cos\varphi)\sqrt{a^2 + d^2 + 2\,a\,d\cos\varphi}\,.\cos\varphi\,d\,\varphi,$$

$$S\,\eta = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (a + d\cos\varphi)\sqrt{a^2 + d^2 + 2\,a\,d\cos\varphi}\,.\sin\varphi\,d\,\varphi.$$

Da nun $\sqrt{a^2 + d^2 + a\,d\cos\varphi} = \sqrt{a^2 + d^2}\sqrt{1 + \dfrac{2\,a\,d}{a^2 + d^2}\cos\varphi}$ ist, so wird $S\,\xi = a\sqrt{a^2 + d^2}\displaystyle\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos\varphi\sqrt{1 + \frac{2\,a\,d}{a^2 + d^2}}\,.\,d\,\varphi$

$$+ d\sqrt{a^2 + d^2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{1 + \frac{2\,a\,d}{a^2 + d^2}\cos\varphi}\,.\cos\varphi^2\,d\,\varphi,\ S\,\eta = a\sqrt{a^2 + d^2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{1 + \frac{2\,a\,d}{a^2 + d^2}}\,.\sin\varphi\,d\,\varphi$$

$$+ d\sqrt{a^2 + d^2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{1 + \frac{2\,a\,d}{a^2 + d^2}\cos\varphi}\,.\sin\varphi\,d\,\varphi.$$

Entwickelt man nun $\sqrt{1 + \dfrac{2\,a\,d}{a^2 + d^2}}$ in eine unendliche Reihe (Seite 17), so macht es keine Schwierigkeit, die Coordinaten des Schwerpunktes zu bestimmen. So hat man z. B. für $a = r$, $S\,\xi = r^2\sqrt{5}\displaystyle\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\cos\varphi\,d\,\varphi + \frac{1\,.\,4^1}{2\,.\,5^1}\,r^2\sqrt{5}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\cos\varphi^2\,d\,\varphi$

$$- \frac{1\,.\,1\,.\,4^2}{2\,.\,4\,.\,5^2}\,r^2\sqrt{5}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\cos\varphi^3\,d\varphi + \frac{1\,.\,1\,.\,3\,.\,4^3}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,5^3}\,r^2\sqrt{5}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\cos\varphi^4\,d\,\varphi - + \ldots\ldots + 2\,r^2\sqrt{5}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\cos\varphi^2\,d\,\varphi$$

$$+ \frac{1\,.\,4^1}{2\,.\,5^1}\,2\,r^2\sqrt{5}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\cos\varphi^3\,d\,\varphi - \frac{1\,.\,1\,.\,4^2}{2\,.\,4\,.\,5^2}\,2\,r^2\sqrt{5}\int_{\varphi^0}^{\varphi_1}\cos\varphi^4\,d\,\varphi + \frac{1\,.\,1\,.\,3\,.\,4^3}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,5^3}\,2\,r^2\sqrt{5}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\cos\varphi^5\,d\,\varphi,$$

$$S\,\eta = r^2\sqrt{5}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sin\varphi\,d\,\varphi + \frac{1\,.\,4^1}{2\,.\,5^2}\,r^2\sqrt{5}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\cos\varphi\sin\varphi\,d\,\varphi - \frac{1\,.\,1\,.\,4^2}{2\,.\,4\,.\,5^2}\,r^2\sqrt{5}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\cos\varphi^2\sin\varphi\,d\,\varphi$$

$$+\frac{1.1.3.4^3}{2.4.6.5^3} r^2 \sqrt{5} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos\varphi^3 \sin\varphi\, d\varphi - + \ldots\ldots + 2 r^2 \sqrt{5} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi$$

$$+\frac{1.4^1}{2.5^1} 2 r^2 \sqrt{5} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos\varphi^2 \sin\varphi\, d\varphi - \frac{1.1.4^2}{2.4.5^2} 2 r^2 \sqrt{5} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos\varphi^3 \sin\varphi\, d\varphi$$

$+\frac{1.1.3.4^3}{2.4.6.5^3} 2 r^2 \sqrt{5} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos\varphi^4\, d\varphi - + \ldots$ oder $S\xi = \frac{79}{50} r^2 \sqrt{5} \sin\varphi + \frac{71}{125} r^2 \sqrt{5} \sin 2\varphi + \frac{1}{15} r^2 \sqrt{5} \sin 3\varphi - \frac{1}{250} r^2 \sqrt{5} \sin 4\varphi + \frac{1}{1250} \sin 5\varphi + \frac{144\, r^2 \sqrt{5}}{125}\varphi,$

$$S\eta = -\tfrac{297}{250} r^2\sqrt{5}\cos\varphi - \tfrac{73}{125} r^2\sqrt{5}\cos 2\varphi - \tfrac{8}{125} r^2\sqrt{5}\cos 3\varphi + \tfrac{1}{250} r^2\sqrt{5}\cos 4\varphi - \tfrac{1}{1250} r^2\sqrt{5}\cos 5\varphi.$$

Rechnet man nun den Bogen von $\varphi = \pi$ bis $\varphi = 0$, so wird $S\xi = \frac{144}{125} r^2\sqrt{5}\,.\,\pi$, $S\eta = \frac{1556}{625} r^2\sqrt{5}$, $S = 0{,}95\, r\,.\,\pi\sqrt{5}$, demnach $\xi = \frac{576}{475} r = 1{,}21263\, r$, $\eta = \frac{6224\, r}{2375\pi} = 0{,}83417\, r$, also S_2 und S_3 bezüglich die Schwerpunkte der Bogen $DEFGAHC$ und $CIG_1F_1E_1D$ und S_4 der der ganzen Kreisconchoide.

Ist $a = 2r$, so wird $\varrho = 2r(1+\cos\varphi) = 4r\cos\frac{1}{2}\varphi^2$, $\frac{d\varrho}{d\varphi} = -2r\sin\varphi$. $\sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2} = 4r\cos\frac{1}{2}\varphi$, demnach $S\xi = 16 r^2 \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos\frac{1}{2}\varphi^3 \cos\varphi\, d\varphi = 16 r^2 \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos\frac{1}{2}\varphi^5\, d\varphi$

$$- 16 r^2 \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos\tfrac{1}{2}\varphi^3 \sin\tfrac{1}{2}\varphi^2\, d\varphi = 32 r^2 \left(\tfrac{1}{40}\sin\tfrac{5}{2}\varphi + \tfrac{1}{2}\sin\tfrac{3}{2}\varphi + \tfrac{1}{2}\sin\tfrac{\varphi}{2}\right),$$

$$S\eta = 16 r^2 \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos\tfrac{1}{2}\varphi^3 \sin\varphi\, d\varphi = 32 r^2 \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos\tfrac{1}{2}\varphi^4 \sin\tfrac{1}{2}\varphi\, d\varphi = -64 r^2 \left(\tfrac{1}{80}\cos\tfrac{5}{2}\varphi + \tfrac{1}{16}\cos\tfrac{3}{2}\varphi + \tfrac{1}{8}\cos\tfrac{1}{2}\varphi\right).$$

Für $\varphi = \pi$, $\varphi_0 = 0$ ergibt sich hieraus $s\xi = \frac{64\, r^2}{5}$, $s\eta = \frac{64\, r^2}{5}$, folglich, da für diese Grenzen $s = 8\, r$ ist, $\xi = \eta = \frac{8}{5} r = AS_6$, und S_4 (Fig. 15) der Schwerpunkt des Bogens $APDC$ und S_5 der des Bogens AQD_1C, S_6 der der ganzen Cardioide.

Denkt man sich die Curve um die x-Achse gedreht, so liegt der Schwerpunkt des entstandenen Rotationskörpers natürlich auf dieser, und es genügen dann zur Bestimmung desselben die Gleichungen $V = \frac{2\pi}{3} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \varrho^3 \sin\varphi\, d\varphi$. $V\xi = \frac{\pi}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \varrho^4 \cos\varphi\,.\,\sin\varphi\, d\varphi = \frac{a^4}{2}\pi \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos\varphi\,.\,\sin\varphi\, d\varphi$

$$+ 2a^3 d\pi \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos\varphi^2 \sin\varphi\, d\varphi + 3a^2 d^2 \pi \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos\varphi^3 \sin\varphi\, d\varphi + 2a d^3 \pi \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos\varphi^4 \sin\varphi\, d\varphi$$

$$+ \frac{d^4}{2}\pi \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos\varphi^5 \sin\varphi\, d\varphi = -\tfrac{1}{4} a^4 \pi \cos\varphi^2 - \tfrac{2}{3} a^3 d\pi \cos\varphi^3 - \tfrac{3}{4} a^2 d^2 \pi \cos\varphi^4$$

$$- \tfrac{2}{5} a d^3 \pi \cos\varphi^5 - \tfrac{1}{12} d^4 \pi \cos\varphi^6 + C.$$

Für $a = 3\,r$ wird dann $V\,\xi = -\frac{81}{4}\,r^4\,\pi\cos\varphi^2 - 36\,r^4\,\pi\cos\varphi^3 - 27\,r^4\,\pi\cos\varphi^4 - \frac{48}{5}\,r^4\,\pi\cos\varphi^5 - \frac{4}{3}\,r^4\,\pi\cos\varphi^6 = \frac{456}{5}\,r^4\,\pi$, wenn $\varphi_1 = \pi$ und $\varphi_0 = 0$ genommen wird, und $V = 52\,r^3\,\pi$, demnach $\xi = \frac{114}{65}\,r = 1{,}75385\,r$, also S_4 der Schwerpunkt des durch die Umdrehung der Curve erzeugten Körpers (Fig. 14). Ist $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_0 = 0$, so wird $V = \frac{136}{3}\,r^3\,\pi$, $V\,\xi = \frac{5651}{60}\,r^4\,\pi$, demnach $\xi = 2{,}07757\,r$ und S_5 der Schwerpunkt des Rotationskörpers V (FD). Zwischen den Grenzen $\varphi_1 = \pi$ und $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ wird $V = \frac{20}{3}\,r^3\,\pi$, $V\,\xi = -\frac{179}{60}\,r^4\,\pi$, $\xi = -0{,}44750\,r$, also S_6 der Schwerpunkt des Rotationskörpers V (FGI).

Ist $a = d = 2\,r$ (Fig. 15), so wird $V\,\xi = -4\,r^4\,\pi\cos\varphi^2 - \frac{32}{3}\,r^4\,\pi\cos\varphi^3 - 12\,r^4\,\pi\cos\varphi^4 - \frac{32}{5}\,r^4\,\pi\cos\varphi^5 - \frac{4}{3}\,r^4\,\pi\cos\varphi^6 + C$. Man findet dann leicht, daß der Schwerpunkt der ganzen Rotations-Cardioide um $1{,}6\,r$, der des Rotationskörpers V (DEC) um $1{,}72\,r$ rechts, der des Körpers V (DPA) um $0{,}2\,r$ links vom Anfangspunkt der Coordinaten entfernt ist; die bezüglichen Schwerpunkte sind S_6, S_7 und S_8. Der Schwerpunkt des Bogens der Cardioide fällt mit dem der Rotationscardioide zusammen.

Ist endlich $a = r$, so wird $V\,\xi = -\frac{1}{4}\,r^4\,\pi\cos\varphi^2 - \frac{4}{3}\,r^4\,\pi\cos\varphi^3 - 3\,r^4\,\pi\cos\varphi^4 - \frac{16}{5}\,r^4\,\pi\cos\varphi^5 - \frac{4}{3}\,r^4\,\pi\cos\varphi^6 + C$. Für den Bogen AFED (Fig. 16) ist nun $\varphi_1 = \frac{2}{3}\,\pi$ und $\varphi_0 = 0$, demnach wird $V\,\xi = \frac{729}{80}\,r^4\,\pi$, $V = \frac{27}{4}\,r^3\,\pi$, also $\xi = 1{,}35\,r$. Dem Bogen AHC entsprechen die Winkel $\varphi_1 = \pi$ und $\varphi_0 = \frac{2}{3}\,\pi$, wonach $V\,\xi = \frac{11}{240}\,r^4\,\pi$, $V = \frac{1}{12}\,r^3\,\pi$, also $\xi = \frac{11}{20}\,r = 0{,}55\,r$ wird

Fig.5

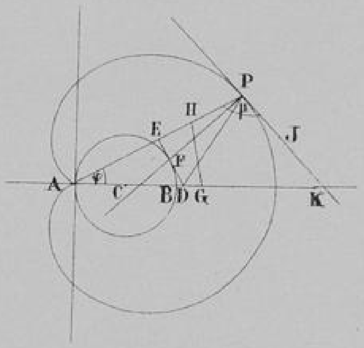


Fig.6

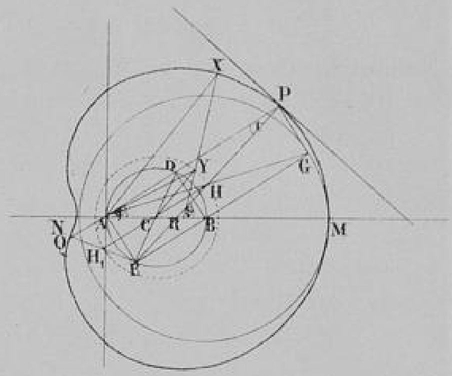


Fig.11

Fig.12

Fig.1

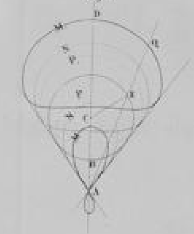


Fig.2

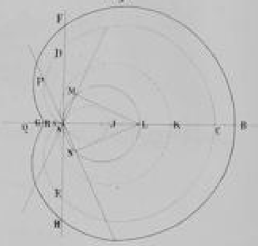


Fig.3

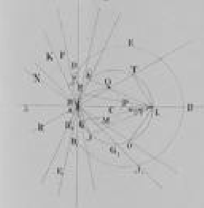


Fig.4

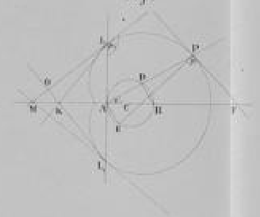


Fig.5

Fig.6

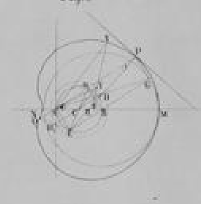


Fig.7

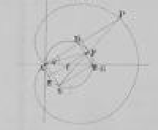


Fig.8

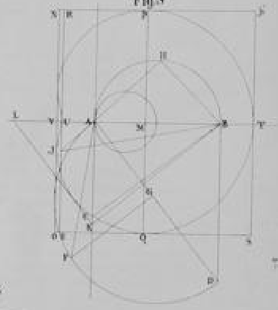


Fig.9

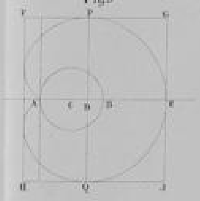


Fig.10

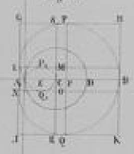


Fig.11

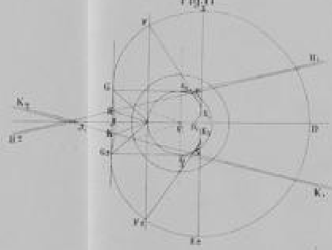


Fig.12

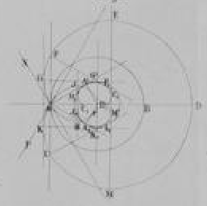


Fig.13

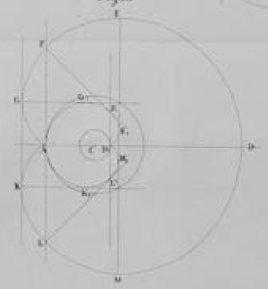


Fig.14

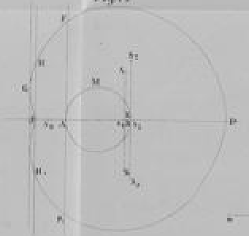
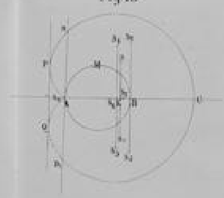


Fig.16

Fig.15



I. Uebersicht

der im

Schuljahr 1875/76 abgehandelten Lehrgegenstände.

Vorschule.

Klassenlehrer: Herr **Barthel.**

Religion. Für die ev. Schüler 2 St. wöch.: Geschichten des A. und N. Testaments; Gebete und Kirchenlieder. **Barthel.** Für die kath. Schüler 2 St. wöch.: Geschichten des A. und N. Testaments, der kleine Diöcesan-Katechismus. **Deschauer.** Deutsch. 4 St. wöch.: Dictat von Wörtern, Sätzen, kleinen Erzählungen; Einübung der orthographischen Regeln, der Declination. **Deschauer.** Lesen. 6 St. wöch.: I. und II. Abth.: Lesen, Declamiren und Erzählen. **Barthel.** Rechnen. 6 St. wöch. I. Abth.: Die vier Species in ganzen, unbenannten und benannten Zahlen. **Deschauer.** II. Abth.: Addiren, Subtrahiren, Multipliciren und Dividiren. **Barthel.** Schreiben. 6 St. wöch. **Barthel.**

Sexta.

Ordinarius: Herr Dr. **Barlen.**

Religion. Für die ev. Schüler 2 St. wöch.: Biblische Geschichte des A. T.; Gebote, Kirchenlieder, Sprüche. **Barlen.** Für die kath. Schüler 3 St. wöch.: Die Lehre vom Glauben nach dem Diöcesan-Katechismus. Biblische Geschichte des N. T. (zweite Hälfte) nach dem Handbuch von Schuster. **Balkenhol.** Deutsch. 3 St. wöch.: Lesen und Auswendiglernen von Gedichten; Nacherzählen kleinerer pros. Stücke; Declamiren; orthographische und grammatische Uebungen; der einfache Satz. Wöchentlich eine schriftliche Arbeit. **Barlen.** Latein. 9 St. wöch.: Regelmäßige Formenlehre; Uebungen im mündlichen Uebersetzen. Wöchentlich Exercitien oder Extemporalien. **Barlen.** Geographie. 3 St. wöch.: Das Wichtigste aus der mathematischen Geographie; Hydrographie, Erklärung der Globen und Karten und Einiges aus der politischen Geographie. **Faber.** Rechnen. 4 St. wöch.: Operationen in ganzen mehr-

4

fortigen Zahlen; die vier Species in Brüchen. Uebungen im Zerlegen der Zahlen von 1—100 in die einfachen Factoren. **Deschauer.** Naturgeschichte. 2 St. wöch.: Beschreibung von einheimischen Pflanzen mit besonderer Berücksichtigung der Blattform; Beschreibung von Säugethieren und Vögeln. **Deschauer.** Schreiben. 3 St. wöch. **Barthel.** Zeichnen. 2 St. wöch. **Fischer.** Gesang. 1 St. wöch. **Barthel.**

Quinta.

Ordinarius: Herr Dr. **Bartholome.**

Religion. Für die ev. Schüler 2 St. wöch.: Biblische Geschichte des N. T.; apostolisches Symbolum; Sprüche und Kirchenlieder. **Pottgießer.** Für die kath. Schüler 3 St. wöch.: Combinirt mit Sexta. Deutsch. 3 St. wöch.: Lectüre; Uebungen im Erzählen und in der Declamation; Satz- und Interpunctionslehre; schriftliche Arbeiten, zum Theil nach Dictaten. **Faber.** Latein. 9 St. wöch.: Repetition; die unregelmäßige Formlehre und die hauptsächlichsten Casusregeln; der Acc. c. Inf.; Abl. abs.; wöchentliche Extemporalien. **Bartholome.** Französisch. 3 St. wöch.: Formlehre bis zur Conjugation; Ploetz Lect. 1—60. Exercitien und Extemporalien. **Bartholome.** Geographie. 3 St. wöch.: Repetition; Europa, Kartenzeichnen. **Meuser.** Naturgeschichte. 2 St. wöch.: Beschreibung einheimischer Pflanzen, besonders von Repräsentanten der wichtigsten natürlichen Familien; Beschreibung der Repräsentanten der Säugethiere und Vögel. **Deschauer.** Rechnen. 3 St. wöch.: Die Bruchrechnung und Regel de tri in Brüchen. **Deschauer.** Schreiben. 3 St. wöch. **Barthel.** Zeichnen. 2 St. wöch. **Fischer.** Gesang. 1 St. wöch. **Deschauer.**

Quarta.

Ordinarius: Herr **Pottgießer.**

Religion. Für die ev. Schüler 2 Stunden wöch.: Lectüre des Ev. Marci und Apostelgeschichte; Geographie von Paläſtina; das Kirchenjahr und die Ordnung des ev. Gottesdienstes; das 3., 4. und 5. Hauptstück des Katechismus nebst Erklärung; Sprüche und Kirchenlieder. **Pottgießer.** Für die kath. Schüler 2 St. wöch.: Wiederholung der Lehre von den Sacramenten und dem Gebete; Einführung in die Bücher der hl. Schrift beider Testamente; Erklärung kirchlicher Hymnen und ausgewählter Psalmen. Ohne Handbuch. **Balkenhol.** Deutsch. 2 St. wöch.: Lehre vom zusammengesetzten Satze, Aufsätze erzählenden oder beschreibenden Inhalts; Declamiren und Lectüre. **Pottgießer.** Latein. 10 St. wöch.: Repetition; Syntaxis convenientiae und Casuslehre; die wichtigsten Regeln über Tempora und Modi; Cornelius Nepos ausgewählte Feldherrn; mündliche Uebersetzungen aus dem Deutschen ins Lateinische. Wöchentlich ein Extemporale. **Pottgießer.** Griechisch. 4 St. wöch.: Die Formenlehre bis zu den verbis mutis incl.; Uebungen im Uebersetzen. Wöchentlich ein Exercitium und ein Extemporale abwechselnd. **Meuser.** Französisch. 2 St. wöch.: Repetition des Pensums der Quinta. Conjugation, Comparation und Pronomina nach Plötz, El.-Gramm. Lese-Uebungen, Extemporalien und Exercitien. **Barlen.** Geographie.

1 St. wöch.: Die außereuropäischen Erdtheile. **Faber.** Geschichte. 2 St. wöch.: Das Wichtigste aus der orientalischen, griechischen und römischen Geschichte bis auf Augustus. **Faber.** Mathematik. 3 St. wöch.: Rechnen: Decimalbrüche; zusammengesetzte Regel de tri; Zins-, Rabatt-, Disconto- und Gesellschaftsrechnung; Planimetrie bis zu den Congruenzsätzen. **Rechenbach.** Naturgeschichte. 2 St. wöch.: S. S.: Botanik; i. W.: Einleitung in das Thierreich, Säugethiere und Vögel. **Rechenbach.** Zeichnen. 2 St. wöch. **Fischer.** Gesang. 2 St. wöch. combinirt. **Deschauer.**

Tertia B.

Ordinarius: Herr Dr. **Walther.**

Religion. Für die ev. Schüler 2. St. wöch.: Bibelkunde des N. T. (2. Th.), Leben und Wirken der Apostel; die Briefe der Apostel; Wiederholung des Katechismus und früher gelernter Sprüche; Kirchenlieder und 7 Psalmen. **Pottgießer.** Für die kath. Schüler 2 St. wöch., combinirt mit IV. **Balkenhol.** Deutsch. 2 St. wöch.: Lesen und Erklären ausgewählter Balladen und Romanzen; Declamation; Lectüre prosaischer Musterstücke; Wiederholung der gesammten Satzlehre und Periodenbau; kleinere freie Vorträge. Alle drei Wochen ein Aufsatz. **Menser.** Latein. 8 St. wöch.: Repetition der Casuslehre, Syntax der Tempora, des Indicativs und Conjunctivs (Seyff. § 129—280); mündliche Uebersetzungen aus Schultz, Aufgabensammlung. Gelesen wurde Caesar d. b. g. I—III. incl. Wöch. ein Exercitium oder Extemporale. **Walther.** Ovid, 2 St. wöch.: Metam. I., II., III. mit Auswahl. **Menser.** Griechisch. 6 St. wöch.: Repetition; Conjugation der Verba ω und $\mu\iota$. Lectüre aus Schmidt und Wensch und aus Xenophon's Anabasis lib. I.; Extemporalien und Exercitien. **Faber.** Französisch. 2 St. wöch.: Wiederholung des Pensums von IV.; unregelmäßige Verba, das Wichtigste über Wortstellung und Modi; Exercitien und Extemporalien; ausgewählte Stücke aus Télémaque par Fenelon. **Bartholome.** Geschichte und Geographie. 3 St. wöch.: Geschichte des Mittelalters bis 1492; Geographie Europas. **Krampe.** Mathematik. 3 St. wöch.: Algebra bis zur Lehre von den Potenzen, Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzeln aus Zahlen; Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten; Planimetrie bis zur Gleichheit der Figuren; Aufgaben. **Rechenbach.** Naturgeschichte. 2 St. wöch.: S. S.: Insecten; i. W.: Einleitung in das Thierreich; Amphibien und Fische, Anfangsgründe der Krystallographie. **Rechenbach.** Zeichnen. 2 St. wöch. **Fischer.** Gesang. 2 St. wöch. **Deschauer.**

Tertia A.

Ordinarius: Herr Dr. **Krampe.**

Religion und Deutsch combinirt mit III. B. Latein. 8 St. wöch.: Caesar de bello civili; Repetition der Casuslehre, Tempora und Modi. Wöch. ein Extemporale oder Exercitium; gramm. Uebungen nach Schultz' Aufgabensammlung. **Krampe.** Ovid, 2 St. wöch.: Metam. 4—8 mit Auswahl. Prosodie, Metrik und metrische Uebungen. **Barlen.** Griechisch. 6 St. wöch.: Xenophon, Anab., lib. I—III.; Hom. Od. I., 1—100; Repetition der regelmäßigen Formenlehre bis zum Verbum liquidum; Verba in $\overline{\mu\iota}$; Verba anomala. Wöch. 2 Extemporalien; alle 14 Tage ein Exercitium. **Krampe.** Französisch. 2 St. wöch. combinirt mit III. B. Mathematik. 3 St. wöch. comb. mit III. b. Naturgeschichte comb. mit III. B. Geschichte comb. mit III. b. Zeichnen und Gesang comb. mit III. B.

Secunda.

Ordinarius: Herr Oberlehrer **Meuser.**

Religion. Für die ev. Schüler 2 St. wöch.: Lectüre der Apostelgeschichte im Urtext; Kirchengeschichte II Theil von 1294—1648. **Pottgießer.** Für die kath. Schüler 2 St. wöch.: Erlösungs- und Gnadenlehre; wichtige Partien der Moral; Kirchengeschichte von Gregor VII. an beginnend. **Balkenhol.** Deutsch. 2 St. wöch.: Balladen und Romanzen von Bürger, Goethe, Schiller; Oden von Klopstock; Stücke aus Herder's Cid; prosaische Stücke aus Paulsiek II.; Schiller's Tell; Poetik; Declamations- und Disponir-Uebungen; freie Vorträge. Alle vier Wochen ein Aufsatz. **Barlen.** Latein. 7 St. wöch.: Repetition und Erweiterung des grammatischen Pensums von III. Wöch. Exercitien und Extemporalien. Alle drei Monate ein Aufsatz von den Schülern der II a. Gelesen wurde: Cic. de senect.; pro rege Dej. Liv. III.; privatim von den Schülern der II a: Liv. XXII. und Cic. p. Marc, der II b: Caes. d. b. c. **Walther.** Virgil. 3 St. wöch.; Aen. lib. VIII.—X., I.—III.; Georg. I.; metrische Uebungen. **Der Director.** Griechisch. II b: 4 St. wöch.: Arrian Anab. I. und II.; Herod. I. mit Auswahl; Congruenz der Satztheile, Casuslehre und die wichtigsten Regeln aus der übrigen Syntax. Wöch. eine schriftliche Arbeit. **Meuser.** Homer Od. 2 St. wöch.: lib. III., IV., VI., VII.; privatim: lib. V. **Barlen.** II a: 4 St. wöch.: Repetition der Casuslehre; die Lehre von den Modi (bis Braune § 112) und Einübung durch Uebersetzen aus Böhme. Wöch. ein Exercitium oder Extemporale. Gelesen wurde: Isocr. Panegyr; Lys. XIII., XIV., XV., XXXI., XXXII. **Walther.** Homer, 2 St. wöch., XII. bis XVII.; XVIII. und XIX. privatim. **Meuser.** Französisch. 2 St. wöch.; Wiederholung der unregelmäßigen Verba die wichtigsten syntactischen Regeln; Extemporalien; Rollin, histoire romaine. **Bartholome.** Geschichte. 3 St. wöch.: Geschichte der Römer bis zum Jahre 476 n. Chr.; historische Tabellen: die Geographie des Römischen Reiches; geographische Repetitionen. **Meuser.** Mathematik. 4 St. wöch.: Proportionen; Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten; quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten; Wurzeln und Logarithmen; Planimetrie bis zu Ende; Anfangsgründe der Trigonometrie; Aufgaben. **Rechenbach.** Physik. 1 St. wöch.: Einleitung in die Physik; Lehre von der Wärme. **Rechenbach.** Zeichnen. 2 St. wöch. **Fischer.** Gesang. 2 St. wöch. comb. **Deschauer.**

Prima.

Ordinarius: Herr Oberlehrer **Faber.**

Religion. Für die ev. Schüler 2 St. wöch.: Lectüre des Evang. Johannes im Urtext; Glaubens- und Sittenlehre. **Pottgießer.** Für die kath. Schüler 1 St. wöch.: Lectüre des Evangeliums nach Matthäus, Repetitionen aus der Dogmatik und Moral; Kirchengeschichte der neueren Zeit. **Balkenhol.**

Deutsch. 3 St. wöch.: Literaturgeschichte von den ersten Anfängen bis zum 16. Jahrhundert; Lectüre der Iphigenie von Goethe und des Wallenstein von Schiller; freie Vorträge; Psychologie. Alle vier Wochen ein Aufsatz. **Krampe.** Latein. 6 St. wöch.: Cic. de Off. lib. I. und Brutus; grammatische Wiederholungen; Extemporalien und wöch. ein Exercitium; Aufsätze. **Faber.** Horaz 2 St. wöch.: Od. lib. I. und II.; ausgewählte Satiren; 8 Oden memorirt. **Der Director.** Griechisch. 6 St. wöch.: Dem. or. Ol. und Ol.; Soph. Oed. Col.; Hom. Ilias XVII.—XXIV.; V.—VIII. privatim. Wöchentlich ein Extemporale oder Exercitium. **Der Director.** Französisch. 2 St. wöch.: Wiederholung der gesammten Syntax; Extemporalien; Molière: l'Avare, les Fourberies de Scapin. **Bartholome.** Geschichte. 3 St. wöch.: Geschichte des Mittelalters bis 1492; geschichtliche und geographische Repetitionen. **Walther.** Mathematik. 4 St. wöch.: Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten; reciproke Gleichungen; Combinationen; arithmetische und geometrische Reihen; Zinseszins- und Rentenrechnung; Repetition der Planimetrie verbunden mit Lösungen von Aufgaben; Trigonometrie und Stereometrie. **Rechenbach.** Physik. 2 St. wöch.: Magnetismus und Electricität; Optik. **Rechenbach.** Zeichnen. 2 St. wöch. **Fischer.** Gesang. 2 St. wöch. comb. **Deschauer.** Englisch. Sect. A.: 2 St. wöch.: Formenlehre und unregelmäßige Verba; „Tales of a Grandfather" by Sir Walter Scott. Seite 1—90. **Bartholome.** I. 2 St. wöch.: Repetition des Pensums von II a; Shakespeare's Julius Caesar und den I. Act von Hamlet. **Bartholome.**

Den **Turnunterricht** ertheilte während des Sommer-Semesters in vier wöch. Stunden Dr. **Barlen.**

II. Themata

zu den deutschen und lateinischen Aufsätzen

in Secunda und Prima.

Zu den deutschen Aufsätzen in II:

1. Blick in die Werkstatt eines Secundaners. 2. Das Privatleben der alten Deutschen. 3. Wisse, daß du ein Mensch bist und erinnere dich stets daran. 4. Eid unter Ferdinand dem Großen. 5. Mit welchen Gründen weist Cicero (de sen. 12—19) den Einwand zurück, das Alter müsse aller Vergnügungen entbehren? 6. a. Nutzen der Einsamkeit. b. Schaden der Einsamkeit. 7. Die Ankunft der Landenbergischen Reiter vor der Fischerhütte. Ein Gemälde nach Schiller's Tell I, 1. 8. (Klassenarbeit): a. Das Geld ist ein guter Diener, aber ein böser Herr. b. Die Elemente hassen das Gebild der Menschenhand. 9. Die Enthüllung des Kriegerdenkmals auf dem Wilhelmsplatze zu Bochum am Sedantage 1875. 10. Die Rückkehr des Frühlings. Ein poetischer Versuch.

Zu den lateinischen Aufsätzen in II:

1. Laudes Hannibalis. 2. Auswahl zwischen: Lacedaemoniorum in Thermopylis et Fabiorum ad Cremeram exitus inter se comparentur, und De C. Julii Caesaris rebus gestis brevis enarratio. 3. Auswahl zwischen: Indicetur, quid causae fuerit, cur Cicero in exilium mitteretur, und Ex historia Graecorum exempla aliquot vitae pro patria fortiter et libenter profusae afferantur. 4. Auswahl zwischen: De imperio decemvirorum quid memoriae traditum sit, duce Livio exponatur, und De criminibus in Agoratum a Lysia (or. XIII.) obiectis.

Zu den deutschen Aufsätzen in I:

1. Principiis obsta! Sero medicina paratur, Cum mala per longas convaluere moras. 2. Ein anderes Antlitz, eh' sie gescheh'n, ein and'res zeigt die vollbrachte That. 3. Zu allem Großen ist der erste Schritt der Muth. 4. In necessariis unitas! In dubiis libertas! In omnibus caritas! 5. Pylades in Göthe's Iphigenie in Tauris. 6. Verdienste Otto des Großen um das Deutsche Reich (Klassenarbeit). 7. Der Starke ist am mächtigsten allein. 8. Nichtswürdig ist die Nation, die nicht Ihr Alles setzt an ihre Ehre. 9. Das Minnelied des Mittelalters. 10. Der Ahnen Ruhm der Enkel Hort.

Zu den lateinischen Aufsätzen in I:

1. Quaeritur primo bello Punico qui viri rerum gestarum gloria celeberrimi facti optimeque de republica Romana meriti sint. 2. Lycurgi et Solonis instituta inter se comparentur. 3. Fortunam nonnunquam eos, quos plurimis beneficiis ornaverit, ad duriores casus

reservare historiarum exemplis ostenditur. 4. Scipio Africanus minor, quibus rebus gestis virtutibusque admirabilis extitit. 5. Reges Romanorum pro suo quisque ingenio de republica bene meriti sunt. 6. Bellum piraticum paucis enarratur. 7. Quibus rebus singulae Graecorum civitates communi quodam vinculo conjunctae fuerint. 8. Quid post cladem Cannensem rempublicam Romanam jam labantem sustinuerit. 9. De Cimonis in rempublicam Atticam meritis. 10. Enarratur tertium bellum Punicum.

III. Vertheilung der Lehrstunden während des Winter-Semesters 1875/76.

Zahl.	Lehrer.	Prima.	Secunda.	Tertia.	Quarta.	Quinta.	Sexta.	Vorschule.	Stunden.
1.	Dr. Seidel, Director.	6 Griech. 2 Latein.	3 Virgil.						11.
2.	Faber, Oberlehrer. Ordinarius von I.	6 Latein.		6 Griech. in III b.	3 GG.	3 Deutsch.	3 Geogr.		21.
3.	Meuser, Oberlehrer. Ordinarius von II.		2 Griech. in II a. 3 Gesch. 4 Griech. in II b.	2 Deutsch. 2 Latein in III b.	4 Griech.	3 Geogr.			20.
4.	Dr. Walther, Oberlehrer. Ordinarius von III b.	3 Gesch.	7 Latein. 4 Griech. in II a.	8 Latein in III b.					22.
5.	Pottgießer, ordentlicher Lehrer. Ordinarius von IV.	2 Relig.	2 Relig.	2 Relig.	10 Latein. 2 Deutsch. 2 Relig.	2 Relig.			22.
6.	Dr. Krampe, ordentlicher Lehrer. Ordinarius III a.	3 Deutsch.		3 Gesch. 8 Latein (a) 6 Griech. (a)					20.
7.	Dr Rechenbach. ordentlicher Lehrer.	4 Mathem. 2 Physik.	4 Mathem. 1 Physik.	3 Mathem. 2 Naturg.	3 Mathem. 2 Naturg.				21.
8.	Dr. Barlen, ordentlicher Lehrer. Ordinarius von IV.		2 Deutsch. 2 Homer. in II b.	2 Ovid. in III a.	2 Franz.		10 Latein. 2 Deutsch. 2 Relig.		22.
9.	Dr. Bartholome, Ordinarius von V.	2 Franz. (2 Engl.)	2 Franz. (2 Engl.)	2 Franz.		9 Latein. 3 Franz.			22.
10.	Deschauer, Gymn.-Elementar- lehrer.	2 Gesang.				3 Rechnen. 2 Naturg. 1 Gesang.	4 Rechnen. 2 Naturg.	2 kath. Rel. 6 Rechnen. 4 Deutsch.	26.
11.	Vicar Balkenhol, Kath. Religionslehrer.	1 Relig.	2 Relig.	2 Religion.		3 Religion.			8.
12.	Fischer, Zeichenlehrer.	2 Zeichnen.			2 Zeichnen.	2 Zeichnen.	2 Zeichnen.		8.
13.	Barthel, Lehrer der Vorschule und Turnlehrer.					3 Schreiben.	3 Schreiben. 1 Gesang.	2 ev. Relig. 6 Lesen. 6 Rechnen. 6 Schreiben.	27.

IV. Verzeichniß der eingeführten Lehrbücher.

1. Religion. a. Ev.	I—VI. I—II. I—III. III—IV. V—VI.	Bibel und Gesangbuch. Novum test. graece. Hollenberg, Hilfsbuch. Rheinischer Provinzial-Katechismus. Zahn, Biblische Geschichte.
b. Kath.	III—VI.	Katechismus.
2. Lateinisch.	I—VI. I—II. III—IV. V—VI.	Ellendt-Seyffert, Latein. Grammatik. Berger, Lat. Stilistik. Schultz, Aufgabensammlung. Schultz, Uebungsbuch. Daneben Textausgaben der gelesenen Schriftsteller.
3. Griechisch.	I—III. I—IV. I—III. III b—IV.	Braune, Griechische Syntax. C. Franke, Griechische Formenlehre. Fr. Franke, Aufgaben zum Uebersetzen ins Griechische. Schmidt-Wensch, Lesebuch. Daneben Textausgaben der gelesenen Schriftsteller.
4. Deutsch.	II—VI.	Hopf-Paulsiek, Lesebuch.
5. Französisch.	I—III. IV—V. III. II. I.	Plötz, Schulgrammatik. Plötz, Elementargrammatik. Télémaque. Rollin, histoire romaine. Molière, l'Avare; Fourberies de Scapin.
6. Mathematik. Rechnen.	I.—IV. I. I. u. II. IV—V.	Koppe, Planimetrie. Koppe, Stereometrie; Koppe, Trigonometrie. Vega-Bremiker, Logarithmentafeln. Schellen, Rechenbuch.
7. Physik.	I—II.	Koppe, Physik.
8. Geschichte. Geographie.	I—IV. II. I—IV. V—VI.	Pütz, Leitfaden für die oberen Klassen. Peter, Zeittafeln. Daniel, Lehrbuch. Voigt, Leitfaden.
9. Gesang.	I—IV. V—VI. I—IV.	Greef, Chorlieder. Schrage, Auf und singt. Kotzolt, Schul-Chöre.

V. Chronik der Anstalt.

Das Sommersemester begann am 4. April, Morgens 7 Uhr.

Mit diesem Tage trat als Gymnasial-Elementarlehrer ein:

August Deschauer, geb. 1850 zu Geisa. Er besuchte die lateinische Schule daselbst, absolvirte 1869 das Lehrerseminar zu Fulda, und fungirte dann als Lehrer in Elberfeld und Werden.

Die Sommerferien dauerten vom 3. Juli bis 2. August.

Am 2. September feierte die Anstalt das Andenken an die Schlacht bei Sedan; die Festrede hielt Herr Dr. Bartholome. Dann betheiligten sich Lehrer und Schüler an den von der Stadt veranstalteten Festlichkeiten.

Die Herbstferien dauerten vom 25. September bis zum 11. October; die Weihnachtsferien vom 22. December bis zum 7. Januar.

Das diesjährige schriftliche Abiturientenexamen dauerte vom 18. bis zum 24. Januar. Die mündliche Prüfung, von welcher der Abiturient Kaltheuner dispensirt wurde, fand am 26. Februar unter dem Vorsitz des Herrn Geh. Rath Dr. Schultz statt. Es verlassen jetzt die Anstalt folgende Primaner mit dem Zeugniß der Reife:

Heinrich Kaltheuner, Sohn des Herrn Uhrmachers Kaltheuner hierselbst, $19^3/_4$ Jahre alt, seit Ostern 1874 in Prima, studirt das Baufach;

Wolfgang Holtze, Sohn des Herrn Kreisgerichts-Directors Holtze hierselbst, $18^1/_2$ Jahre alt, seit Ostern 1874 in Prima, studirt Jura;

Carl Varenkamp, Sohn des Kaufmanns Herrn Varenkamp hierselbst, $18^1/_4$ Jahre alt, seit Ostern 1874 in Prima, studirt das Baufach;

Wilhelm Baare, Sohn des Herrn Commercienrath Baare hierselbst, $18^1/_2$ Jahre alt, seit Ostern 1874 in Prima, studirt Jura.

Die Prüfungsarbeiten waren:

Für den deutschen Aufsatz:
Der Ahnen Ruhm der Enkel Hort.

Für den lateinischen Aufsatz:
Enarretur tertium bellum Punicum.

Für den Religionsaufsatz:
Leben und Wirksamkeit des Apostels Petrus.

Für die Mathematik:

1. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem die Grundlinie, die Höhe und das Verhältniß der Seiten gegeben ist.
2. $x^2 + y^2 = 79 - 3xy$
   $x + y + 2xy = 38.$
3. Von einem Dreieck sind gegeben: Die Grundlinie $a = 75{,}924$ m der Unterschied der beiden Seiten $d = 37{,}962$ m und der Winkel an der Spitze $\gamma = 40^\circ$. Es sollen die beiden anderen Winkel, die Seiten und der Inhalt berechnet werden.
4. Das Volumen eines abgestumpften geraden Kegels ist $v = 434{,}8247$ Kubikmeter, die Höhe $L = 15$ m, der Radius der unteren Grundfläche doppelt so groß als der der oberen; wie groß ist der Mantel dieses Kegels?

Am 10. Merz fand die Gedächtnißfeier des hundertjährigen Geburtstages der hochseligen Königin Louise von Preußen in der Art statt, daß die Ordinarien den Schülern Vorträge über das Leben und Wirken der hohen Verstorbenen hielten.

Am 22. Merz feierte die Anstalt den Geburtstag Sr. Majestat des Kaisers und Königs in der üblichen Weise. Die Festrede hielt der Director. Dann folgte die Entlassung der Abiturienten durch den Director und die Abschiedsrede des Abiturienten Kaltheuner.

VI. Aus den Verordnungen der vorgesetzten Behörde.

1.	Kgl. Prov.-Schul-Collegium zu Münster,	6. April, betr. die zur Auswahl vorgelegten Themata für die Abiturienten.
2.	„ „ „ „	26. April, betr. die Programme.
3.	„ „ „ „	3. Mai, betr. die Sommer- und Herbstferien.
4.	„ „ „ „	8. Mai, betr. die Lehrbücher für die katholische Religion.
5.	„ „ „ „	13. Mai, betr. die Processionen.
6.	„ „ „ „	31. Mai, betr. den kath. Gottesdienst.
7.	„ „ „ „	27. Juni, betr. die sog. Beichtzettel.
8.	„ „ „ „	3. Juli, betr. die Pausen zwischen den Unterrichtsstunden.
9.	„ „ „ „	14. October, betr. die häusliche Beschäftigung der Schüler.
10.	„ „ „ „	10. Novbr., betr. die am 1. Dec. stattfindende Volkszählung.
11.	„ „ „ „	13. Nov., betr. studentische Verbindung auf den Gymnasien.
12.	„ „ „ „	8. December, betr. die Erhöhung des Schulgeldes.
13.	„ „ „ „	5. Januar, betr. die häusliche Arbeitszeit der Schüler.
14.	„ „ „ „	10. Februar, betr. den hundertjährigen Geburtstag der hochseligen Königin Louise.

VII. Vermehrung des Lehrapparats.

1. Lehrerbibliothek. (Bibl. Dr. Krampe.)

Aus dem Bibliothekfonds sind außer den Fortsetzungen des Centralblattes, Jahn's Jahrbüchern für Philologie, der Jenaischen Literaturzeitung, der Preußischen Jahrbücher, der Deutschen Monatshefte, Poggendorf's Annalen, Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik, der philologisch-archäologischen Bibl. von Calvary, Ranke's Werken, der Staatengeschichte von Heeren und Uckert, und der Geschichte der Wissenschaft, angeschafft worden:

Pindari carmina, ed. Boeckh; Plutarchi Moralia, ed. Wyttenbach; Lexicum Aeschyleum, ed. Dindorf; Sophoclis Philocteta, ed. Cavallin, Juvenalis Satirae, ed. Heinrich, und verschiedene lateinische und griechische Schriftsteller aus der Bibliothek Teubner,

2. Schülerbibliothek. (Bibl. Pottgießer.)

Becker: Kunst und Künstler des 16., 17. und 18. Jahrhunderts; Livingstone: Neue Missionsreisen in Südafrika; Roth: Kaiser, König und Papst; Jäger: Geschichte der neuesten Zeit; Heß: Der römische Freistaat.

VIII. Statistische Verhältnisse.

1. Curatorium.

1. Herr Bürgermeister Prüfer, Vorsitzender.
2. Der Gymnasial-Director.
3. Herr Pastor Natorp.
4. Herr Pastor Cramer.
5. Herr Commercienrath Baare.
6. Herr Bergrath Heintzmann.
7. Herr Justizrath Schultz.
8. Dr. med. Schmidt.

2. Lehrer-Collegium.

Director Dr. Seidel.

1. Oberlehrer Faber.
2. „ Meuser.
3. „ Dr. Walther.
4. Ordentlicher Lehrer Pottgießer.
5. „ „ Dr. Krampe.
6. „ „ Dr. Rechenbach.
7. Ordentlicher Lehrer Dr. Barlen.
8. „ „ Dr. Bartholome.
9. Elementarlehrer Deschauer.
10. Vicar Balkenhol.
11. Zeichenlehrer Fischer.
12. Lehrer der Vorschule Barthel.

3. Frequenz der Anstalt.

Im Sommersemester besuchten 214 Schüler die Anstalt, und zwar in VII 31, in VI 46, in V 41, in IV 34, in III a und b 30, in II 24, in I 8. 132 Schüler gehörten der evangelischen, 74 der katholischen Confession, 8 der jüdischen Religion an; von den 215 Schülern im Wintersemester gehörten der evangelischen Confession 122 Schüler, der katholischen 84 und der jüdischen Religion 9 an.

Ministerial-Rescript. (Berlin, 14. October 1875.):

„Die Schule ist darauf bedacht, durch die den Schülern aufgegebene häusliche Beschäftigung den Erfolg des Unterrichts zu sichern und die Schüler zur selbstständigen Thätigkeit anzuleiten, aber nicht einen der körperlichen und geistigen Entwickelung nachtheiligen Anspruch an die Zeitdauer der häuslichen Arbeit der Schüler zu machen. In beiden Hinsichten hat die Schule auf die Unterstützung des elterlichen Hauses zu rechnen. Es ist die Pflicht der Eltern und deren Stellvertreter, auf den regelmäßigen häuslichen Fleiß und die verständige Zeiteintheilung ihrer Kinder zu halten aber es ist ebenso sehr ihre Pflicht, wenn die Forderungen der Schule das zuträgliche Maß der häuslichen Arbeitszeit ihnen zu überschreiten scheinen, davon Kenntniß zu geben. Die Eltern oder deren Stellvertreter werden ausdrücklich ersucht, in solchen Fällen dem Director oder dem Klassenordinarius persönlich oder schriftlich Mittheilung zu machen und wollen überzeugt sein, daß eine solche Mittheilung dem betreffenden Schüler in keiner Weise zum Nachtheile gereicht, sondern nur zu eingehender und unbefangener Untersuchung der Sache führt. Anonyme Zuschriften, die in solchen Fällen gelegentlich vorkommen, erschweren die genaue Prüfung des Sachverhalts und machen, wie sie der Ausdruck mangelnden Vertrauens sind, die für die Schule unerläßliche Verständigung mit dem elterlichen Hause unmöglich."

Das Schuljahr wird mit dem 12. April mit der Vertheilung der Censuren geschlossen; das neue beginnt Donnerstag den 27. April, Morgens 7 Uhr.

Anmeldungen neuer Schüler, auch für die Vorschule, welche zur Erlernung der für den Eintritt in die Sexta erforderlichen Elementarkenntnisse Gelegenheit giebt, nimmt der Director am 24., 25. und 26. April in den Vormittagsstunden von 8—11 Uhr entgegen.

Dr. Seidel.

vertreter werden ausdr… …rector oder dem Klassenordina-
rius persönlich oder schriftlich … sein, daß eine solche Mitthei-
lung dem betreffenden Schüler … …dern nur zu eingehender und
unbefangener Untersuchung der … solchen Fällen gelegentlich vor-
kommen, erschweren die genaue … sie der Ausdruck mangelnden
Vertrauens sind, die für die Sc… …erlichen Hause unmöglich."

…e.

Das Schuljahr wird … …der Censuren geschlossen; das
neue beginnt Donnerstag den 27…

Anmeldungen neuer S… …r Erlernung der für den Ein-
tritt in die Sexta erforderlichen … …t der Director am 24., 25.
und 26. April in den Vormitta…

Dr. Seidel.