Wenn sich gleich, schon in den Schriften des Archimedes und Aristoteles, Spuren von dem statischen Princip der virtuellen Geschwindigkeiten vorfinden, so darf doch Johann Bernoully als der Erfinder dieses Grundsatzes angesehen werden, indem er der Erste war, welcher denselben vollständig ausdrückte; wie sich dieses aus der Mechanik des Varignon entnehmen lässt. Indess machten Bernoully und seine Nachfolger von diesem Grundsatze bei weitem die Anwendungen nicht, deren er fähig ist.

Erst einem de la Grange ward es aufbehalten, das statische Princip der virtuellen Geschwindigkeiten als den obersten Grundsatz der ganzen Statik aufzustellen, wie er dieses in seiner analytischen Mechanik mit so glücklichem Erfolge ausgeführt hat. Nur schade, dass in diesem merkwürdigen Werke, so sehr, als in den ältern Schriften der Mechanik, der allgemeine Beweis dieses Lehrsatzes durchaus vermisst wird.

Seit dieser, für die mathematischen Wissenschaften so bedeutenden Erscheinung, entstand die allgemeine Ueberzeugung für die Wichtigkeit des statischen Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten, so wie zugleich der Wunsch nach einem vollständigen Beweise dieses Lehrsatzes.

Fossombroni in seinem Werke *sul principio delle velocità virtuali* und Laplace in seinem *Traité de mécanique céleste*, waren die Ersten, welche diesem allgemeinen Verlangen entsprachen. Kürzlich hat auch Fourier, im Journale des Pariser polytechnischen Instituts, einen sehr vollständigen Beweis über diesen Grundsatz geliefert.

Der gegenwärtige Aufsatz enthält nicht blos eine neue Beweisart des eben erwähnten statischen Prinzips, sondern es wird hier das Gesetz der virtuellen Geschwindigkeiten allgemein für jeden dynamischen Zustand zusammenhängender Punkte und Massen analytisch bestimmt, woraus dann das statische Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, als eine blosse Anwendung des erwähnten allgemeinen Gesetzes auf einen einzelnen Fall, von selbst folgt.

Diese Methode, das Gesetz der virtuellen Geschwindigkeiten in einer so allgemeinen Beziehung zu betrachten, gewährt den Vortheil, dass sich die Sätze der Mechanik unmittelbar aus einem einzigen Grundsatze ableiten lassen, und dass jene der Statik nicht eigends für sich abgehandelt werden müssen, sondern dass sie, aus jenen der Mechanik, durch blosse Substitutionen erhalten werden können.

Ein solcher Vortrag der Mechanik und Statik ist allerdings der Funktion des Denkens angemessener, als jener, wo man die Statik der Mechanik vorangehen lässt, und nach den erwiesenen Lehren der Statik, folglich eines Theiles der Mechanik, letztere auf die in ersterer aufgestellte Sätze begründet.

Ueberdiess glaube ich aber auch behaupten zu dürfen, dass nicht leicht, nach irgend einer Lehrmethode, die Dynamik überhaupt mit jener Kürze dargestellt werden könne, als nach der hier vorgetragenen analytischen Bestimmung des Gesetzes der virtuellen Geschwindigkeiten.

Nebst der Deutlichkeit, Kürze und Evidenz, in allen Behauptungen und Folgerungen, deren ich mich in dieser Schrift beflissen habe, darf ich selbiger auch noch das Verdienst zugestehen, dass darin auf keinen bekannten Grundsatz der Statik oder Mechanik gebaut wird, sondern dass die darin vorgetragene Lehre, unabhängig von allen fremden dynamischen Grundsätzen, unmittelbar aus sich selbst, erwiesen ist.

Die hier enthaltene analytische Bestimmung des Gesetzes der virtuellen Geschwindigkeiten in mechanischer und statischer Hinsicht ist in 39 Paragraphen abgefasst, worin aber nur die 16 ersten, und der Paragraph 34 wesentlich sind. Der Vortrag geschieht in folgender Ordnung.

Die Paragraphe 1 bis 16 enthalten die eigentliche Bestimmung des Gesetzes der virtuellen Geschwindigkeiten für jeden dynamischen Zustand eines von Kräften wie immer ergriffenen festen Körpers, und zugleich, als unmittelbare Folge, das statische Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten bei jedem festen Körper.

In den Paragraphen 17 bis 31 wird das in den vorhergehenden Paragraphen erwiesene Gesetz, auf die Bewegung einer von Kräften wie immer ergriffenen frei schwebenden Masse, auf die Rotationsbewegung einer festen Masse um jede Axe, auf den Druck, welchen jede solche Axe erleidet, angewendet. Der Lehre der Centrifugalkräfte, der freien Axen, und der drei Hauptaxen jedes Körpers wird nur ganz kurz erwähnt.

Die Paragraphe 31 bis 34 handeln von dem Gesetze der virtuellen Geschwindigkeiten, nicht nur bei festen Körpern, sondern überhaupt bei jedem Systeme von Punkten und Massen, welche dergestalt zusammenhängen, dass die Bewegungen, welchen sie zu gleicher Zeit unterliegen können, nicht willkührlich, sondern an bestimmte Gesetze gebunden sind; nebst dem geschieht in diesen Paragraphen eine Anwendung dieser Betrachtung auf die Theorie des Krummzapfens, wobei zugleich gezeigt wird, dass man dasselbe Resultat erhalte, wenn man diese Aufgabe nach der Theorie des Hebels und den bekannten Fundamentalformeln der ungleichförmigen Bewegung behandelt.

Der Paragraph 34 enthält in Worten und algebraisch ausgedrückt, den dynamischen Lehrsatz der virtuellen Geschwindigkeiten, welcher allgemein von jedem Systeme von Punkten wahr ist, die ebenerwähntermassen mit einander verbunden sind. Dieser Lehrsatz, selbst seine auszeichnende Anwendbarkeit bei Seite gesetzt, ist für den forschenden Geist von einem hohen Interesse.

In den folgenden Paragraphen sind noch einige Bemerkungen und Anwendungen des dynamischen Lehrsatzes der virtuellen Geschwindigkeiten angeführt. Unter andern enthält der §. 36. eine Betrachtung über die bekannte Fundamentalformel der ungleichförmigen Bewegung, $dv = 2g.\frac{P}{Q}dt$, welche, meines Wissens, neu ist. Eine interessante Anwendung des dynamischen Lehrsatzes liefert endlich der §. 39., worin untersucht wird, wie tief ein Pfahl, welcher in den Boden eingerammt wird, durch jeden Schlag des Rammklotzes, unter der Voraussetzung der vollkommenen Elasticität beider sich binnen dem Stosse berührender Theile der Ramme und des Pfahls, eindringe.

§. 1.

Bewegt sich ein Punkt, von einem Standpunkt a auslaufend, nach irgend einer geraden Richtung ab um den Raum a, so hat er sich einer durch die Gerade ab senkrecht gelegten Ebene um den Abstand a genähert. Gedenkt man nun 3 sich im Punkte a senkrecht schneidende Axen, ab', ab'', ab''', und auf selbigen 3 senkrechte Ebenen B', B'', B''', so hat sich der erwähntermassen bewegte Punkt den Ebenen B', B'', B''', zu gleicher Zeit um die Räume a', a'', a''', genähert, deren Werthe man erhält, wenn man durch den Endpunkt des Raumes a drei Ebenen legt, welche die Axen ab', ab'', ab''' senkrecht schneiden. Hieraus ergiebt sich, dass man die nach den Axen ab', ab'', ab''' von einem Punkte, welcher vom Punkte a ausgelaufen ist, und den Raum a nach der Richtung ab beschrieben hat, durchlaufenen Räume folgendermassen finden könne: Man fälle aus dem Endpunkte des Bewegungsraumes a . . . . einen Perpendikel auf die Axe ab', eben so verfahre man mit jener ab'', und mit jener ab''', so sind die solchermassen erhaltenen Katheten, welche von den Axen ab', ab'', ab''' abgeschnitten werden, die gesuchten nach diesen Axen durchlaufenen Räume.

Das hier Gesagte gilt sowohl von der wirklichen Bewegung eines Punkts, als auch von dessen blosser Bestimmung zur Bewegung, daher von jedem dynamischen Bestreben eines Punktes. Denn ein solches dynamisches Bestreben kann sich nur auf eine bewegende Kraft oder auf eine Quantität der Bewegung beziehen. Im ersten Falle besteht die der bewegenden Kraft proportionale Bestimmung, nach der Richtung ab in einer gegebenen Zeit den Raum a zu beschreiben, wodurch die Bestimmungen zu den Räumen a', a'', a''', nach den Axen ab', ab'', ab''' Statt finden, welchen Räumen abermals bewegende Kräfte nach diesen Richtungen entsprechen müssen, die diesen Räumen proportional sind. Im zweiten Falle lässt sich das dynamische Bestreben der Masse m nach der

Richtung ab durch die Länge ma ausdrük-ken, also nach jener ab' durch die Länge ma' u. s. w. Nun ist aber $ma : ma' = a : a'$ u. s. w.

§. 2.

Betrachtet man die Bewegung eines Systems von Punkten, welche gegen einander in unverschiebbarem Zusammenhange stehen, so dass also die Bewegung dieser Punkte nur mehr im Raume, d. h. auf fixe Punkte bezogen, welche ausserhalb dieses Systems von Punkten liegen, vor sich gehen kann, so lässt sich jede solche Bewegung binnen jeder Zeit t, während welcher an den Ursachen der Bewegung nichts geändert wird, auf sechserlei abgesonderte Bewegungen reduziren, nämlich: auf 3 rotatorische Bewegungen um 3 Axen, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$, welche einander in einem gemeinschaftlichen Punkte C schneiden, und welche Bewegungen sich dadurch angeben lassen, dass man die Bogen bestimmt, welche die Endpunkte L, L_+, L^+, der auf besagte Axen gefällten Perpendikel von angenommener Länge, wofür man z. B. die Einheit wählt, beschreiben; ferner auf 3 fortschreitende Bewegungen des Punktes *C* noch drei auf einander senkrechten Axen *A*, *B*, *D*. Was hier von der wirklichen Bewegung eines Systems von Punkten gesagt wurde, lässt sich auf dieselbe Art von jenem dynamischen Bestreben eines Systems von Punkten behaupten, das aus den individuellen dynamischen Bestrebungen der einzelnen Punkte des Systems entsteht, und das wir demnach das kombinirte dynamische Bestreben dieses Systems nennen wollen.

§. 3.

Denkt man sich mehrere Punkte a', a'', a''', die unter einander nicht zusammenhängen, und deren jeder ein dynamisches Bestreben d', d'', d''' . . . . . besitzt: so folgt jeder dieser Punkte ungehindert seinem dynamischen Bestreben. Sind hingegen diese dynamisch affizirten Punkte unter einander im unverschiebbaren Zusammenhange, so muss hieraus ein kombinirtes dynamisches Bestreben für das ganze System von Punkten entstehen; und zugleich finden sich die einzelnen Punkte genöthigt, ihre individuellen dynamischen Bestrebungen nur mehr zum Theile zu befolgen, so dass, wenn das System diesem kombinirten Bestreben binnen einer Zeit t (während welcher an den individuellen Bestrebungsursachen Nichts als verändert angenommen wird) in irgend einer der 6 Rücksichten (§. 2.) folgt, jeder Punkt seinem individuellen Bestreben nur zum Theile nachgiebt.

§. 4.

Bezeichnen wir nun durch D das kombinirte dynamische Bestreben des festen Systems, blos in einer der 6erlei Rücksichten (§. 2.), z. B. in Rücksicht des Bestrebens für den Punkt C nach der Axe A; nennen wir ferner R den binnen der Zeit t vom Punkte C (vermöge des Bestrebens D) nach der Axe A durchlaufenen Raum, und endlich r', r'', r''' . . . . ., die hiedurch (binnen derselben Zeit t) von den Punkten a', a'', a''', ..., nach den Richtungen der dynamischen Bestrebungen d, d', d'', ... beschriebenen Räume, welche jene partialen Befolgungen der individuellen Bestrebungen sind, die der gleichzeitigen Befolgung des kombinirten dynamischen Bestrebens nach der angenommenen Rücksicht entsprechen, so sieht man aus §. 3. ein, dass D eine Funktion von d, d', d'', ..., von r, r', r'', ..., und von t seyn müsse.

$$D = F(d, d', d'', \ldots\ldots, r, r', r'', \ldots\ldots t).$$

§. 5.

Schneidet man vom Punkte C aus, nach der Axe A, eine beliebige Linie S ab, und schneidet von den Punkten a, a', a'', ..., aus, nach den Richtungen der individuellen dynamischen Bestrebungen d, d', d'', ... jene Stücke s, s', s'', ... ab, worum die Angriffspunkte a, a', a'', ... der dynamischen Bestrebungen nach besagten Richtungen laufen möchten, wenn sie parallel zur Axe A die Räume S, S, S, ... beschrieben; so ist

$R:r = S:s$, $R:r' = S:s'$, ..., also

$r = \frac{Rs}{S}$, $r' = \frac{Rs'}{S}$, ..., also ist

$$D = F\left(d, d', d'', \ldots\ldots, \frac{Rs}{S}, \frac{Rs'}{S}, \frac{Rs''}{S}, \ldots . t\right),$$

in welcher Gleichung die Gruppen R und t so verwebt seyn müssen, dass (in einem bestimmten Falle) für jeden Werth von t, und den diesem Werthe entsprechenden von R, obige Funktion unverändert dieselbe Grösse ausdrücken muss.

Bezeichnen wir für einen solchen bestimmten Fall, die Zeit t, als eine Funktion von R, durch $f(R)$, so erhalten wir die Gleichung

$$D = F\left(d, d', d'', \ldots . \frac{Rs}{S}, \frac{Rs'}{S}, \ldots f(R)\right),$$

oder jene

$$D = f\left(d, d', d'', \ldots\ldots, \frac{Rs}{S}, \frac{Rs'}{S}, \ldots\ldots R\right),$$

worin R gar nicht vorkommen kann, da D von R nicht abhängen darf. Wir haben also die Gleichung

$$D = W\,(d, d', d'', \ldots, s, s', s'', \ldots\ldots S),$$

woselbst S und s, s', s'', ..., blos geometrische Linien sind, die vom dynamischen Zustande des betrachteten Systems nicht abhängen, wo ferner S beliebig und die Verhältnisse $\frac{S}{s}$, $\frac{S}{s'}$, $\frac{S}{s''}$, ..., durch die Richtungen (bezogen auf die Axe A) der individuellen dynamischen Bestrebungen d, d', d'', ..., bestimmt sind.

§. 6.

Wir wollen nunmehr die Form der hier angesetzten Funktion durch analytische Schlüsse genau bestimmen.

Wenn die Grössen d, d', d'', ... zu gleicher Zeit verschwinden, so muss auch das kombinirte dynamische Bestreben D zu Null werden, und eben so, wenn die Grössen s, s', s'', ..., zu gleicher Zeit verschwinden, so muss auch der Werth von D in denselben Fall kommen. Es muss demnach in obiger Funktion jedes Glied entweder d, oder

d', oder d'' . . . . ., und zugleich entweder s, oder s', oder s'' . . . ., zum Faktor haben.

Hieraus folgt eine Gleichung von dieser Form:

$$D = \lambda(d, d', d'', \ldots\ldots, s, s', s'', \ldots\ldots S)\, d'', s''' + \\ + \gamma(d, d', d'', \ldots\ldots s, s', s'', \ldots\ldots S)\, d', s''' + \ldots\ldots$$

§. 7.

Da für jenen Fall, wo d verschwindet, der Werth von s auf jenen von D keinen Einfluss mehr haben darf, da sich ganz dasselbe von den Werthen von d', d'', . . ., rücksichtlich jener von s', s'', ..., und da auch umgekehrt sich dasselbe von den Werthen von s, s', ... rücksichtlich der Werthe von d, d', ... behaupten lässt: so kann s nur in jenen Gliedern vorkommen, wo d ein Faktor ist; eben so kann s' nur in jenen Gliedern vorkommen, wo d' ein Faktor ist, und umgekehrt. Also ist die Form unserer Funktion folgende:

$$D = \varphi(d, s, S)\, d \,.\, s + \varphi'(d', s', S)\,.\, d' \,.\, s' + \varphi''(d'', s'', S)\,.\, d'' s'' + \ldots\ldots$$

§. 8.

Da ferner d und s, dann d' und s', dann d'' und s'' alle auf einerlei Art in obiger Funktion verwebt seyn müssen, so folgt für die Form dieser Funktion die Gleichung

$$D = \varphi\,(d, s, S)\,.\,d\,.\,s + \varphi\,(d', s', S)\,.\,d'\,.\,s' + \\ + \varphi\,(d'', s'', S)\,.\,d', s'' + \ldots\ldots$$

§. 9.

Nimmt man nun ein für allemal für S eine bestimmte Länge an, so lässt sich D folgendergestalt ausdrücken:

$$D = \psi\,(d, s)\,.\,d\,.\,s + \psi\,(d', s')\,.\,d'\,.\,s' + \\ + \psi\,(d'', s'')\,.\,d''\,.\,s'' + \ldots\ldots$$

§. 10.

Setzt man für jenen Fall, wo z. B. 3 individuelle dynamische Bestrebungen d, d', d'', ein kombinirtes dynamisches Bestreben blos in Bezug des Punktes C nach der Axe A, bewirken, $D = \psi\,(d, s)\,.\,d\,.\,s + \psi\,(d', s')\,.\,d'\,.\,s' + (d'', s'')\,.\,d'', s''$, so wird $D = \psi\,(d, s)\,.\,d\,.\,s$, wenn man setzt, es verschwinden d' und d''. Wird nun in diesem Falle blos d geändert, z. B. es wird $d = md$, so wird $D = \psi\,(md, s)\,md\,.\,s$;

es ist aber dann dieser letzte Werth von D nothwendig m^{mal} so gross als der vorletzte, also ist

$\psi(md, s) md . s : \psi(d, s) d . s = m : 1$, woraus folgt $\psi(md, s) md . s = \psi(d, s) md . s$, also ist die Grösse d in dem Ausdrucke $\psi(d, s)$ als d^0 enthalten. Daher lässt sich D so ausdrücken:

$$D = W(s) d . s + W(s') . d' s' + W(s'') d'' s'' + \ldots$$

§ 11.

Besteht wieder nur ein individuelles dynamisches Bestreben d, so ist das kombinirte dynamische Bestreben $D = W(s) d . s$ nach der Axe A. Nehmen wir die Axe A einmal in einer beliebigen Richtung an, und setzen dann $D = W(s) d . s$, einmal in der Richtung des Bestrebens d selbst, und setzen dann $\delta = \varphi(\sigma) d . \sigma$; so folgt (§. 1.) $D : \delta = Cos\,\mu : 1$, also $D = \delta . Cos\,\mu$. Ferner ist $s = S\, Cos\,\mu$, und $\sigma = S$, also ist

$W(S\, Cos\,\mu) . d . S\, Cos\,\mu = \varphi(S) d . S . Cos\,\mu$, daher $W = (S\, Cos\,\mu) = \varphi(S)$; also $W(S)$ eine beständige Grösse. Daher lässt sich D so ausdrücken:

$$D = H \,.\, d \,.\, s + B \,.\, d' \,.\, s' + C \,.\, d'' \,.\, s'' + \ldots\ldots$$

§. 12.

Hier ist das kombinirte dynamische Bestreben D des Punktes C nach der Axe A durch die Summe der individuellen dynamischen Bestrebungen, welche nach der Axe A bestehen, ausgedrückt.

Das individuelle Bestreben d giebt nach $A = H.d.s$, jenes d' nach $A = B.d'.s'$ jenes d'' nach $A = C.d''.s''$ u. s. w. woraus leicht einzusehen ist, dass $H = B = C = \ldots\ldots$ seyn müssen. Es ist also

$$D = H\,(d.s + d'.s' + d''.s'' + \ldots\ldots)$$

§. 13.

Daher ist das kombinirte Bestreben in Bezug des Punktes C nach der Axe A o, d. h. es ist in dieser Rücksicht Gleichgewicht, wenn $d\,s + d'\,s + d''\,s'' \ldots\ldots = 0$ ist, und umgekehrt.

§. 14.

Es wurde hier bewiesen, dass für den Fall des Gleichgewichtes des Punkts C nach der Axe A allemal die Gleichung $ds + d's' + d''s'' + + \ldots\ldots = o$ Statt finden müsse, und umgekehrt, dass wenn $ds + ds' + \ldots\ldots = o$ ist, eben erwähntes Gleichgewicht bestehen müsse.

Was hier vom Gleichgewichte des Punktes C nach der Axe A bewiesen wurde, lässt sich eben so vom Gleichgewichte dieses Punktes nach den Axen B und D darthun. Es lässt sich demnach das totale Gleichgewicht der fortschreitenden Bewegung durch folgende 3 Gleichungen ausdrücken:

I. $ds + d's' + d''s'' + \ldots\ldots\ldots\ldots = o$

II. $ds_+ + d's'_+ + d''s''_+ + \ldots\ldots\ldots = o$

III. $ds^+ + d's'^+ + d''s''^+ + \ldots\ldots\ldots = o$

§. 15.

Betrachtet man das kombinirte dynamische Bestreben des Systems in Bezug auf Rotation, nämlich jenes $\mathfrak{D}$ rücksichtlich des dynamischen Bestrebens des Punktes $\mathfrak{C}$ um die

Axe 𝔄; eben so jenes $\mathfrak{D}_{+}$ rücksichtlich des Bestrebens des Punktes $\mathfrak{C}_{+}$ um die Axe 𝔅; endlich jenes $\mathfrak{D}^{+}$ rücksichtlich des Bestrebens des Punktes $\mathfrak{C}^{+}$ um die Axe 𝔇, nach denselben Grundsätzen, als eben das dreifache Bestreben des Punktes C betrachtet wurde; so überzeugt man sich sehr leicht, dass das kombinirte dynamische Bestreben in Bezug der Rotation um die Axe 𝔄 durch folgende Gleichung sich ausdrücken lasse:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{H}\,(d\,\mathfrak{f} + d'\,\mathfrak{f}' + d''\,\mathfrak{f}'' + \ldots\ldots)$$

worin $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}', \mathfrak{f}'', \ldots.$ die von den Angriffspunkten $a, a', a'', \ldots\ldots$ nach den Richtungen ihrer individuellen dynamischen Bestrebungen zu gleicher Zeit beschriebenen Räume darstellen, welche jenen durch diese Angriffspunkte zu gleicher Zeit um die Axe 𝔄 beschriebenen Bögen entsprechen, welche Bögen von diesen Punkten dann beschrieben würden, wenn der Punkt ℭ um die Axe 𝔄 den Bogen 𝔖 beschreiben möchte.

Hier hängen also die Verhältnisse $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{f}}, \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{f}'}, \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{f}''}, \ldots\ldots$ von den Richtungen der dynamischen Bestrebungen d, d', d'', und von den Lagen der Angriffspunkte dieser dynamischen Bestrebungen ab.

Um die Wahrheit dieser Behauptung einzusehen, darf man blos die Paragraphe 4 bis 14 mit Beziehung auf Rotation durchgehen. Nur das in §. 11. Gesagte will ich für die Beziehung auf Rotation folgendermassen modificiren:

Bestehe nur ein individuelles dynamisches Bestreben d, so ist das kombinirte dynamische Bestreben in Bezug der Rotation um die Axe $\mathfrak{A}$, nämlich $\mathfrak{D} = w\,(\mathfrak{f}).d.\mathfrak{f}$. Ist nun c der Abstand des Angriffspunktes des dynamischen Bestrebens d von der Axe $\mathfrak{A}$: so lässt sich allemal $\mathfrak{f}$ durch $c.\mathfrak{S}.Cos\,\lambda$ ausdrükken. Erwäget man aber, dass mit diesem Falle jener als gleichgeltend angenommen werden darf, wo statt des dynamischen Bestrebens d an demselben Angriffspunkte die drei dynamischen Bestrebungen $d.Cos\,\alpha$, $d\,Cos\,\beta$, $d\,Cos\,\lambda$, bestünden (§. 1.), deren erstere zwo in der Ebene, und letzteres senkrecht auf der Ebene wirken möchten, welche Ebene man sich durch die Axe $\mathfrak{A}$ und den Angriffspunkt gelegt vorstellen kann; erwäget man ferner, dass in diesem Falle blos letzteres dynamisches Bestreben auf die Rotation um die Axe $\mathfrak{A}$ wirken könne, und dass in diesem Falle die Grösse ſ den Werth $c.\mathfrak{S}$ habe, so ergiebt sich die Gleichung

$\mathfrak{D}=w\,(c.\mathfrak{S}).d\,Cos\,\lambda\,.\,c\mathfrak{S}$, also ist

$w(c.\mathfrak{S}.Cos\,\lambda)\,d.c\,\mathfrak{S}\,Cos\,\lambda=w\,(c.\mathfrak{S})\,d.Cos.\lambda.c\mathfrak{S}$,

daher $w\,(c.\mathfrak{S}\,Cos\,\lambda)=w\,(c.\mathfrak{S})$, und folglich ist in dem Ausdrucke w (ſ) die Grösse ſ dergestalt verwebet, dass sie darauf keinen Einfluss hat, also ist w (ſ) constant, u. s. w.

Diesem gemäss lässt sich das totale Gleichgewicht der rotatorischen Bewegung durch folgende 3 Gleichungen ausdrücken:

$$\text{IV. } d\text{ſ}+d'\text{ſ}'+d''\text{ſ}''+\ldots\ldots\ldots=0$$
$$\text{V. } d\text{ſ}_{+}+d'\text{ſ}'_{+}+d''\text{ſ}''_{+}+\ldots\ldots\ldots=0$$
$$\text{VI. } d\text{ſ}^{+}+d'\text{ſ}'^{+}d''\text{ſ}''^{+}+\ldots\ldots\ldots=0$$

§. 16.

Wer den Geist des hier Gesagten wohl

gefasst hat, und den Sinn der Gleichungen I, II, III, IV, V, VI, wodurch das vollkommene Gleichgewicht eines von Kräften wie immer ergriffenen Systems von fest zusammenhängenden Punkten ausgedrückt wird, wohl versteht, ist im Stande folgendes statische Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, dessen sich Herr de la Grange in seiner *mechanique analytique* mit so glücklichem Erfolge bedient hat, zu fassen, und auf vorkommende Fälle anzuwenden.

„Wenn mehrere unverschiebbare zusammenhängende Punkte oder Körper $a, a', a'', \ldots$, welche was immer für individuelle dynamische Bestrebungen $d, d', d'', \ldots$ haben, so auf einander wirken, dass ein Gleichgewicht erfolgt, so ergiebt sich folgendes Gesetz: Man gedenke sich irgend eine Ursache, welche dieses Gleichgewicht aufhebe, so muss jeder Punkt oder Körper einen Raum durchlaufen, den wir seine virtuelle Geschwindigkeit (*vitesse virtuelle*) nennen wollen; hierdurch beschreiben die Punkte $a, a', a'', \ldots$

bestimmte Räume s, s', s'', ... nach den Richtungen ihrer individuellen dynamischen Bestrebungen, welche sich nach (§. 1.) finden lassen. Man multiplizire diese Räume s, s', s'',.... durch die individuellen dynamischen Bestrebungen d, d', d'', ..., indem man diese Räume s, s', s'', ... bejaht oder verneint, nimmt, nachdem solche mit den individuellen dynamischen Bestrebungen der Punkte a, a', a'', ... in einerlei oder entgegengesetzten Richtungen ausfallen. Die Summe aller so entstehenden Produkte muss $= 0$ seyn."

Man bemerke, dass in diesem Lehrsatze in Worten nur der Sinn einer der sechs Gleichungen I, II, III, IV, V, VI, ausgedrückt ist.

Aus der Bedeutung, in der hier der Ausdruck dynamisches Bestreben genommen wird, sieht man leicht ein, dass der eben angeführte Lehrsatz ganz dasselbe sagt, als folgender in der *mechanique analytique* des Herrn de la Grange enthaltene statische Grundsatz:

Si un système quelconque de tant de corps ou points que l'on veut, tirés chacun par des puissances quelconques, est en équilibre, et qu'on donne à ce système un petit mouvement quelconque, en vertu duquel chaque point parcoure un espace infiniment petit, qui exprimera sa vitesse virtuelle; la somme des puissances, multipliées chacune par l'espace, que le point où elle est appliquée parcourt suivant la direction de cette même puissance, sera toujours égale à zéro, en regardant comme positifs les petits espaces parcourus dans le sens des puissances, et comme négatifs les espaces parcourus dans un sens opposé.

§. 17.

Nachdem ich in den vorhergehenden Paragraphen das Gesetz der virtuellen Geschwindigkeiten allgemein für jenen Fall bestimmt habe, wo an einer und derselben festen Masse an beliebigen Angriffspunkten nach willkührlichen Richtungen was immer für individuelle dynamische Bestrebungen angebracht sind: so will ich durch einige Beispiele zeigen, wie schnell und leicht die hier vorgetragene analytische Bestimmung des Gesetzes der virtuellen Geschwindigkeiten zu den wichtigsten Sätzen der Mechanik zu führen vermag. Ich mache zugleich den Anfang damit, den dynamischen Zustand einer frei schwebenden, von Kräften wie immer ergriffenen Masse zu bestimmen, da hiedurch sowohl einer der höchsten Sätze der physischen Astronomie, als auch einer der fruchtbarsten zur Auflösung anderer dynamischen Aufgaben begründet ist.

§. 18.

Denken wir uns eine feste Masse, wobei alle gleich grossen Massentheilchen einerlei individuelles dynamisches Bestreben erleiden, und wobei alle diese individuellen dynamischen Bestrebungen nach einerlei Richtung laufen; so kann bei dieser Masse keine Rotation um irgend eine Axe vorgehen, indem alle einzelnen Theile derselben die Bestimmung haben, nach einerlei Richtung in gleichen Zeiten gleiche Räume eben so zu durchlaufen, als wären alle diese Theile ganz von einander getrennte frei schwebende Körperchen. Nun ist leicht zu begreifen, dass es eine mit den individuellen dynamischen Bestrebungen parallel laufende Axe geben müsse, welche in irgend einem Punkte festgehalten, einen vollkommenen Stillstand aller Theilchen der Masse bewirken muss, woraus folgt, dass eine nach dieser Axe wirkende Kraft nie eine Rotation der Masse um irgend eine Axe hervorzubringen im Stande sey. Es lässt sich demnach durch jede Masse nach jeder beliebigen Richtung eine Axe ziehen, in und nach welcher irgend eine wie immer stark wirkende Kraft nie eine Rotation hervorbringen kann. Den Durchschnittspunkt aller dieser Axen, nennt man den Schwerpunkt dieser Masse. Es ist also hier folgender Lehrsatz bewiesen: Eine im Schwerpunkt einer Masse angebrachte Kraft kann nie auf die Rotation der Masse einen Einfluss haben. (*).

§. 19.

Erleidet eine frei schwebende feste Masse in beliebigen Punkten was immer für individuelle dynamische Bestrebungen, so lässt sich nach Vorhergehendem folgendes behaupten: Das kombinirte dynamische Bestreben $\mathfrak{D}$. rücksichtlich der Rotation um die Axe $\mathfrak{A}$, ist gleich

$$\mathfrak{H}\,(d\,\mathfrak{s} + d'\,\mathfrak{s}' + d''\,\mathfrak{s}'' + \ldots\ldots\ldots).$$

Denken wir uns nun durch den Schwerpunkt der Masse eine zur Axe $\mathfrak{A}$ parallel gezogene Axe α, legen wir ferner durch den Schwerpunkt der Masse eine Ebene, welche durch die Axe $\mathfrak{A}$ und α senkrecht gezogen ist; ziehen wir überdies von einem Durch-

(*) Anmerkung. Hierbei ist jedoch zu bemerken, dass dieser Satz nur in so ferne wahr bleibt, als durch das im Schwerpunkte der Masse angebrachte dynamische Bestreben an den übrigen individuellen dynamischen Bestrebungen nichts geändert wird. Dieses wird in §. 24. deutlicher werden.

schnittspunkte zwischen Axe und Ebene zum andern, eine gerade Linie γ, und nehme an, es wirke nunmehr, nebst allen vorhin benannten individuellen dynamischen Bestrebungen d, d', d'', ... im Schwerpunkte der Masse in der erwähnten Ebene senkrecht auf der Linie γ das individuelle dynamische Bestreben δ, wodurch (§. 18.) die Lage der Rotationsaxe $\mathfrak{A}$ nicht geändert wird: so ist das in dem letzt erwähnten Falle bestehende kombinirte dynamische Bestreben rücksichtlich der Rotation um die Axe $\mathfrak{A}$ gleich

$$\mathfrak{H}\,(d\text{ſ} + d'\text{ſ}' + d''\text{ſ}'' + \ldots . + \delta . \gamma . \mathfrak{S});$$

da aber (§. 18.) durch das dynamische Bestreben δ obige Funktion denselben Werth haben muss als jene $\mathfrak{H}\,(d\text{ſ} + d'\text{ſ}' + d''\text{ſ}'' + \ldots\ldots)$: so folgt $\gamma = 0$. Die Rotationsaxe $\mathfrak{A}$ der frei schwebenden Masse läuft also durch den Schwerpunkt der Masse. Ganz dasselbe lässt sich auch von den Rotationsaxen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ der frei schwebenden Masse beweisen.

§. 20.

Hieraus ergiebt sich ein sehr merkwürdiger Lehrsatz der Mechanik: Wenn bei einer frei schwebenden festen Masse, beliebige Punkte was immer für individuelle dynamische Bestrebungeu erleiden, so bezieht sich das kombinirte dynamische Bestreben, rücksichtlich der Rotation dieser Masse, allemal auf 3 Axen, 𝔄, 𝔅, 𝔇, welche einander im Schwerpunkte dieser Masse senkrecht durchschneiden, und jedes solche kombinirte dynamische Bestreben um eine Axe 𝔄, ist in allen Fällen der Summe der Produkte aus den individuellen dynamischen Bestrebungen in jene Räume proportional, welche die Angriffspunkte der individuellen dynamischen Bestrebungen nach den Richtungen ihrer individuellen dynamischen Bestrebungen dann durchlaufen möchten, wenn der Endpunkt ℭ des Halbmessers = 1 und die Axe 𝔄 in allen Fällen den unendlich kleinen Bogen 𝔖 durchliefe. Ferner bezieht sich bei der hier betrachteten Masse, das kombinirte dynamische Bestreben, rücksichtlich ihrer fortschreitenden Bewegung, allemal auf den Schwerpunkt der Masse C, für welchen das kombinirte dynamische Bestreben, nach welch immer einer Axe 𝔄, in allen Fällen der Summe der Produkte aus den individuellen dynamischen Bestrebungen in jene Räume proportional ist, welche die Angriffspunkte der individuellen dynamischen Bestrebungen nach den Richtungen dieser Bestrebungen dann beschreiben möchten, wenn der Schwerpunkt C nach der Axe 𝔄 in allen Fällen den Raum S durchliefe: es ist demnach die fortschreitende Bewegung des Schwerpunkts der freischwebenden Masse in dem betrachteten Falle ganz dieselbe, als ob alle individuellen dynamischen Bestrebungen ganz parallel zu sich selbst im Schwerpunkte C angebracht wären.

§. 21.

Aus dem vorhergehenden Paragraphe lässt sich nun leicht bestimmen, welchen Bedingnissen eine frei schwebende Masse unterliegen müsse, damit selbige sich im vollkommenen Ruhestande erhalte.

§. 22.

Die Methode, die fortschreitende Bewegung des Schwerpunkts der frei schwebenden Masse im jedesmaligen Falle nach jeder Axe zu bestimmen, ist zu leicht, als dass ich es für nothwendig erachtete, davon zu sprechen, denn wem sind die Fundamentalformeln der ungleichförmigen Bewegung $dv = \frac{2gP}{M} dt$ und $ds = v dt$ wohl noch unbekannt?

§. 23.

Nicht so leicht ist es, das Gesetz der Winkelgeschwindigkeit um jede durch den Schwerpunkt der frei schwebenden Masse laufende Axe $\mathfrak{A}$ zu bestimmen, welches in diesem Paragraphe geschehen soll.

Seyen die Entfernungen der unendlich kleinen Massen $m, m', m'', \ldots\ldots,$ von der Rotationsaxe $\mathfrak{A} = e, e', e'', \ldots\ldots;$ deren Winkelgeschwindigkeiten um die Axe $\mathfrak{A}$ am Ende der Zeit $t = w$, so ist das kombinirte dynamische Bestreben des Punktes $\mathfrak{C}$ um die

Axe $\mathfrak{A}$ (als *quantitas motus* betrachtet) $= \alpha(m.ew.e\mathfrak{S}+m'.e'.w.e'\mathfrak{S}+\ldots\ldots) =$ $= N(m.e^2.w+m'.e'^2w+m''e''^2.w+\ldots\ldots)$; folglich ist der Zuwachs $N(me^2+m'e'^2+$ $+m''e''^2+\ldots\ldots)dw$ dieses dynamischen Bestrebens binnen dem Zeitelemente dt, welcher ganz dem kombinirten dynamischen Bestreben des Punktes $\mathfrak{C}$ um die Axe $\mathfrak{A}$ (als Druck betrachtet) $\mathfrak{D}=\mathfrak{H}(d\mathfrak{f}+d'\mathfrak{f}'+d''\mathfrak{f}''+\ldots.)$ zugeschrieben werden muss, ein Ausdruck, welchem die Grösse $\mathfrak{D}$ proportional ist, so wie zugleich der Ausdruck $\mathfrak{D}$ dem Zeitelemente dt verkehrt proportional seyn muss. Wir haben demnach die Gleichung

$$\frac{\beta dw}{dt} = \frac{d\mathfrak{f}+d'\mathfrak{f}'+d''\mathfrak{f}''+\ldots\ldots}{m.e^2+m'.e'^2+m''.e''^2+\ldots\ldots}$$

Bezeichnen wir durch r, r', r'', ... die Abstände der Angriffspunkte der Kräfte d, d', d'', ... von der Axe $\mathfrak{A}$: so lässt sich $d\mathfrak{f}=d.r\mathfrak{S}\,Cos\,\mu$, $d'\mathfrak{f}'=d'.r'\mathfrak{S}\,Cos\,\mu'$ ...... setzen, woraus sich ergiebt

$$\frac{\beta}{\mathfrak{S}}.\frac{dw}{dt} = \frac{r.d\,Cos\,\mu+r'd'\,Cos\,\mu'+\ldots\ldots}{m.e^2+m'.e'^2+m''.e''^2+\ldots\ldots}$$

oder wenn wir $d\, Cos\, \mu = p$, $d'\, Cos\, \mu' = p'$, $d''\, Cos\, \mu'' = p''$, ... nennen, wo p, p', p'', ... die ganz auf Rotation um die Axe 𝔄 verwendeten Kräfte sind: so folgt

$$\frac{\beta}{\mathfrak{S}} \frac{dw}{dt} = \frac{rp + r'p' + r''p'' + \ldots\ldots}{m.e^2 + m'.e'^2 + m''.e''^2 + \ldots\ldots}$$

Verschwinden p', p'', p''', ..., und m', m'', m''', ..., und ist $e = r$, so wird

$$\frac{\beta}{\mathfrak{S}} \cdot \frac{r\,dw}{dt} = \frac{p}{m}, \text{ oder } r\,d\,w = \frac{\mathfrak{S}}{\beta} \cdot \frac{p}{m} dt,$$

dann ist aber $r\,dw$ das Inkrementum der Endesgeschwindigkeit der Masse m, welche durch die bewegende Kraft p bewirkt wird, also ist $r\,dw = 2g \cdot \frac{p}{m} dt$; woraus $\frac{\beta}{\mathfrak{S}} = \frac{1}{2g}$ folgt, also ist

$$\frac{dw}{2g.dt} = \frac{rp + r'p' + r''p'' + \ldots\ldots}{e^2 m + e'^2 m' + e''^2 m'' + \ldots\ldots}$$

worin $rp + r'p' + r''p'' + \ldots\ldots$ die Summe der statischen Momente der Kräfte, und $e^2 m + e'^2 m' + \ldots\ldots$ die Summe der Trägheitsmomente der Masse um die Axe 𝔄 ausdrücken.

§. 24.

Es ist zwar (§. 18.) bewiesen worden, dass eine im Schwerpunkt einer Masse angebrachte Kraft auf die Rotation dieser Masse keinen Einfluss haben könne, insoferne durch diese Kraft an den individuellen dynamischen Bestrebungen der übrigen Punkte der Masse nichts geändert wird, welches bei einer freischwebenden Masse allemal der Fall ist. Denkt man sich hingegen eine nicht frei schwebende Masse, sondern eine solche, welche nur um eine bestimmte fixe Axe gedreht werden kann, so vermag eine im Schwerpunkte der Masse angebrachte Kraft gar wohl, eine Veränderung des Druckes an der fixen Axe zu bewirken, folglich die Rotation der Masse anders zu bestimmen.

In einem solchen Falle lässt sich, nach einem ähnlichen Raisonnement als §. 23., erweisen, dass, rücksichtlich der fixen Axe, der Ausdruck $\frac{dw}{2g\,dt}$ der Summe der statischen Momente der Kräfte getheilt durch die Summe der Trägheitsmomente der Masse gleich seyn müsse.

Es ist übrigens bekannt, dass sich die Summe dieser statischen Momente und jener der Trägheitsmomente folgendermassen ausdrücken lassen: $\int(P+Q+R+\ldots\ldots)$ und $s^2A+s'^2B+s''^2C+\ldots\ldots+(A+B+C+\ldots)\times\sigma^2$, worin P, Q, R, die ganz auf Rotation verwendeten Kräfte, $\int$ den Abstand des Schwerpunkts dieser an einerlei Hebelarme reduzirten (folglich mit einander parallel wirkenden) Kräfte $P, Q, R, \ldots\ldots$ von der fixen Axe, A, B, C, alle um diese fixe Axe sich bewegenden Massen, s, s', s'', $\ldots\ldots$ die Abstände dieser Massen von der fixen Axe, und σ den Abstand der fixen Axe vom Schwerpunkte der Masse bedeuten.

§. 25.

Es lässt sich aber auch der Ausdruck $\frac{dw}{2g\,dt}$ rücksichtlich der fixen Axe dadurch bestimmen, dass man den Körper als freischwebend betrachtet, und die fortschreitende Bewegung des Schwerpunkts der Masse, sammt der hiedurch um den Schwerpunkt der Masse entstehenden Rotationsbewegung (binnen einerlei Zeitelement dt) in Rechnung nimmt, wie in folgendem Paragraphe gezeigt werden soll.

§. 26.

Es sey eine, von den Kräften $d, d', d'' \ldots$, wie immer ergriffene Masse, nicht anders beweglich, als um eine fixe Axe 𝔄, so kann sich der Schwerpunkt nur in einerlei auf der Axe 𝔄 senkrechten Ebene bewegen, und zugleich können alle Theilchen der Masse sich um eine durch den Schwerpunkt der Masse parallel zur Axe 𝔄 gezogene Axe nicht anders bewegen, als in Kreisen, deren jeder in einer auf letzt erwähnter Axe senkrechten Ebene liegt.

Man sieht demnach ein, dass sich die hier ganz und allein auf Fortschreitung des Schwerpunkts, und auf Rotation der Masse um den Schwerpunkt verwendeten Kräfte folgendermassen ausdrücken lassen:

$$d \operatorname{Cos} \mu,\ d' \operatorname{Cos} \mu',\ d'' \operatorname{Cos} \mu'' \ldots\ldots$$

ferner

$$d \operatorname{Cos} \lambda,\ d' \operatorname{Cos} \lambda',\ d'' \operatorname{Cos} \lambda'', \ldots\ldots;$$

Nehmen wir nun (alles auf einerlei Zeitelement dt bezogen) folgende Bezeichnungen an:

$M\mathfrak{A}$ Abstand des Schwerpunkts der Masse von der Axe $\mathfrak{A}$; ferner

$r, r', r'', \ldots$, dann $e, e', e'' \ldots$ Abstände der Angriffspunkte der Kräfte $d, d', d'', \ldots$, dann der Massen $m, m', m'', \ldots$ von der durch den Schwerpunkt mit der Axe $\mathfrak{A}$ parallel gezogenen Axe; ferner x und y jene an der Axe $\mathfrak{A}$ senkrecht wirkenden Drucke, welche auf das Fortschreiten des Schwerpunkts und auf die Rotation der Masse um den Schwerpunkt ganz verwendet werden, welche demnach sowohl auf der Axe $\mathfrak{A}$, als auch auf der von einer Axe zur andern gezogenen $M\mathfrak{A}$ senkrecht wirken müssen; ferner v und w die Endesgeschwindigkeit des Schwerpunkts der Masse, und die Winkelgeschwindigkeit der Masse sowohl um die Axe $\mathfrak{A}$, als um die durch den Schwerpunkt zu selbiger parallel gezogene Axe M zu Ende der Zeit t: so sieht man folgendes leicht ein:

Es ist

$$dv = \frac{2g\,(d\,Cos\,\mu + d'\,Cos\,\mu' + d''\,Cos\,\mu'' + \ldots\ldots - \alpha)\,dt}{m + m' + m'' + \ldots\ldots}$$

(nach §. 22.); ferner $\frac{d\,w}{2g\,d\,t} =$

$$= \frac{r.\,dCos\,\lambda + r'.\,d'\,Cos\,\lambda' + r''.\,d''\,Cos\,\lambda'' + \ldots\ldots + \mathfrak{A}M.\,y}{e^2\,m + e'^2\,m' + e''^2\,m'' + \ldots\ldots}$$

(nach § 23.) wobei zu bemerken kömmt, dass in der ersten Gleichung die Kräfte $d\ Cos\ \mu$, $d'\ Cos\ \mu'$, $d''\ Cos\ \mu''$ . . . . . positiv oder negativ zu nehmen sind, je nachdem sie den Zuwachs der Geschwindigkeit dv befördern oder hindern; ferner dass in der 2ten Gleichung die statischen Momente $r\ d\ Cos\ \lambda$, $r'\ d'\ Cos\ \lambda'$, ..., positiv oder negativ zu nehmen sind, je nachdem sie jene Rotation der Masse um die Schwerpunktsaxe befördern oder hindern; welche Rotation dadurch entsteht, dass der Schwerpunkt um die fixe Axe $\mathfrak{A}$ sich nach jener Richtung bewegt, nach welcher das Inkrementum an Geschwindigkeit $d\,v$ als positiv betrachtet wird.

Diese Bemerkung ist von äusserster Wichtigkeit, und darf daher nie ausser Acht ge-lassen werden. Man sieht leicht ein, dass in manchen Fällen eine Kraft, deren statisches Moment auf die fixe Axe $\mathfrak{A}$ bezogen wird, die um diese Axe $\mathfrak{A}$ bestehende Rotation hindert, zu gleicher Zeit aber, wenn ihr statisches Moment auf die Schwerpunktsaxe bezogen wird, die Rotation um selbige befördert.

Aus obigen Gleichungen ergiebt sich, wenn man $dv = \mathfrak{A}M . dw$ substituirt,

$$x = -\frac{\mathfrak{A}M . dw}{2g\,dt}(m + m' + m'' + \ldots\ldots) +$$

$$+ (d \operatorname{Cos} \mu + d' \operatorname{Cos} \mu' + d'' \operatorname{Cos} \mu'' + \ldots)$$

und

$$y = \frac{dw}{2g\,dt}\,\frac{(e^2 m + e'^2 m' + e''^2 m'' + \ldots\ldots)}{M\mathfrak{A}} -$$

$$- \frac{(r\,d \operatorname{Cos} \lambda + r'\,d' \operatorname{Cos} \lambda' + \ldots\ldots)}{M\mathfrak{A}}$$

Hieraus fliesst aber, da $y = x$ seyn muss, folgende Gleichung:

$$\frac{d\omega}{2g\,dt}=\frac{\frac{r\,d\,Cos\,\lambda+r'\,d'\,Cos\,\lambda'+r''\,d''\,Cos\,\lambda''+\ldots\ldots}{M\mathfrak{A}}+d\,Cos\,\mu+d'\,Cos\,\mu'+\ldots}{\mathfrak{A}\,M(m+m'+m''+\ldots\ldots)+\frac{(e^2m+e'^2m'+e''^2m''+\ldots\ldots)}{M\mathfrak{A}}}.$$

Diese Gleichung lässt sich kürzer folgendermassen ansetzen:

$$\frac{d\omega}{2g\,dt}=\frac{\frac{\mathfrak{S}}{M\mathfrak{A}}+\mathfrak{S}'}{M.M\mathfrak{A}+\frac{T'}{M\mathfrak{A}}},$$ worin die Buchstaben folgende Bedeutungen haben:

𝔖 die Summe der statischen Momente um die Schwerpunktsaxe M, welche ganz und allein auf jene Rotation der Masse um die Schwerpunktsaxe M verwendet werden, welche darum Statt findet, weil der Schwerpunkt der Masse eine fortschreitende Bewegung um die fixe Axe 𝔄 nach jener Richtung besitzt, nach welcher das Inkrementum dv positiv genommen wird; ferner

𝔖′ die Summe aller an der Masse senkrecht auf jene Ebene 𝔈 wirkenden Kräfte, in welcher Ebene die beiden Axen 𝔄 und M liegen.

M das Gewicht der ganzen betrachteten Masse, in einem bestimmten Standpunkte an der Oberfläche der Erde gewogen, in so ferne g die Beschleunigung der Schwere in demselben Standpunkte an der Erdoberfläche bedeutet; endlich

T die Summe der Trägheitsmomente aller unendlich kleinen Theilchen der ganzen Masse auf die Schwerpunktsaxe M bezogen.

§. 27.

Aus den Paragraphen 24 und 26 haben wir für die auf die fixe Axe $\mathfrak{A}$ bezogene Funktion $\frac{dw}{2g\,dt}$ dreierlei richtige Ausdrücke. Was (§. 24) durch $s^2 A + s'^2 B + \ldots\ldots$, durch $A + B + C + \ldots\ldots$, und durch σ bezeichnet wurde, bedeuten (§. 26) die Buchstaben T, $\mathfrak{M}$, und $M\,\mathfrak{A}$.

§. 28.

Setzt man die Summe der statischen Momente um die Axe $\mathfrak{A}$, getheilt durch die Summe der Trägheitsmomente um die Schwerpunktsaxe, *plus* der Masse, multiplizirt mit dem Abstande der beiden Axen, dem für $\frac{dw}{2g\,dt}$ (§. 26.) erhaltenen Ausdrucke gleich, so ergiebt sich für die Summe der statischen Momente um die Axe $\mathfrak{A}$ folgender Ausdruck: $\mathfrak{S} + \mathfrak{S}' . \mathfrak{A}\,M$. Kennt man daher in irgend einem Systeme fest zusammenhängender Punkte, die Summe der statischen Momente $\mathfrak{S}$ um irgend eine Axe M; zieht senkrecht auf die

Axe M eine Gerade MM', und durch einen Punkt 𝔄 der Geraden MM' eine zur Axe M parallele Axe 𝔄; kennt man ferner die Summe der auf die durch diese Gerade und die Axe 𝔄 gelegte Ebene, ausfallenden senkrechten Drucke 𝔖′: so ist das statische Moment um die erwähnte Axe 𝔄 nach der eben erwähnten Gleichung bekannt, womit 𝔄M den Abstand der beiden Axen ausdrückt.

§. 29.

Befindet sich eine feste Masse in dem Falle einer gezwungenen Rotation um eine fixe Axe 𝔄, wie dieses §. 26. angenommen wurde, so sieht man leicht ein, dass diese Axe 𝔄 einen Druck erleiden müsse, welcher blos allein den an dieser Masse angebrachten Kräften $d, d', d'', \ldots\ldots$ zugeschrieben werden darf. Diesen Druck nach 3 auf einander senkrechten Ordinaten wollen wir in diesem Paragraphe bestimmen.

Man ziehe aus dem Schwerpunkte M der Masse eine Senkrechte auf die Axe 𝔄, nenne diese letztere die Axe $\mathfrak{B}$, und gedenke sich durch den Schneidepunkt der Axen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ eine Axe $\mathfrak{D}$ gezogen, welche auf den beiden erstern senkrecht steht. Nun zersetze man alle Kräfte d, d', d'', ..., nach solchen Richtungen, welche zu den Axen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$, parallel laufen, und nenne die nach diesen 3 Axen ausfallenden Kräfte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$, ..., ferner $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$, ..., ferner $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{d}''$, ..., so folgt: dass der Axendruck nach den Axen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B} = \mathfrak{a} + \mathfrak{a}' + \mathfrak{a}'' + \ldots\ldots$, und $\mathfrak{b} + \mathfrak{b}' + \mathfrak{b}'' + \ldots\ldots$, seyn müsse, indem nach diesen beiden Richtungen der Schwerpunkt der Masse binnen dem Zeitelemente dt, gar keine Bewegung erhält, und anderer Seits die fortschreitenden Bewegungen des Schwerpunkts nach diesen beiden Richtungen dieselben sind, als ob alle dahin wirkenden Kräfte im Schwerpunkte selbst angebracht wären (§. 20.)

Anders muss der Axendruck nach der Richtung der Axe $\mathfrak{D}$ bestimmt werden, da nach dieser der Schwerpunkt der Masse binnen dem Zeitelemente dt eine Bewegung erhält. Dieses Drucks wurde schon (§. 26.) erwähnt, woselbst er durch x bezeichnet wurde.

Nun war aber

$$x = -\frac{\mathfrak{A}M.dw}{2g\,dt}(m+m'+m'')+(d\,Cos\,\mu+\ldots)$$

oder

$x = -\mathfrak{A}M.\frac{dw}{2g\,dt}.\mathfrak{M}+\mathfrak{S}'$; ferner erhielten wir $\frac{dw}{2g\,dt} = \frac{\frac{\mathfrak{S}}{M\mathfrak{A}}+\mathfrak{S}'}{\mathfrak{M}.M\mathfrak{A}+\frac{T}{M\mathfrak{A}}}$, woraus sich die Gleichung ergiebt

$x = \frac{\mathfrak{S}'.T-\mathfrak{M}.M\mathfrak{A}.\mathfrak{S}}{T+\mathfrak{M}.M\mathfrak{A}^2}$. In dieser Gleichung bedeutet $\mathfrak{S}'$ die Summe der parallel zur Axe $\mathfrak{D}$ bestehenden Kräfte $\mathfrak{d}+\mathfrak{d}'+\mathfrak{d}''+\ldots\ldots$

§. 30.

Nebst dem im Paragraphe 29 untersuchten Drucke, erleidet die fixe Axe $\mathfrak{A}$ noch einen andern Druck, welcher nicht unmittelbar den Kräften d, d', d'', ... zuzuschreiben ist, sondern welcher von der blossen Rotationsbewegung der Masse, nämlich von der beständigen Ablenkung aller Massentheilchen von jenen Bahnen, welche dieselben dem Gesetze der Trägheit gemäss durchlaufen möchten, wären sie nicht gezwungen, sich um die Axe 𝔄 in Kreisen zu bewegen, herrührt.

Dieser Druck liesse sich zwar aus der in diesem Aufsatze vorgetragenen analytischen Bestimmung des Gesetzes der virtuellen Geschwindigkeiten sehr richtig berechnen; ich halte es indessen nicht der Mühe werth, die hiebei anzuwendende Methode hier anzuführen, da sie aus dem bisher Gesagten sehr leicht gefunden werden kann. Daher übergehe ich hier die Lehre der Centrifugalkraft, der freien Axe, und der 3 Hauptaxen jeder Masse gänzlich.

§. 31.

Bisher haben wir das Gesetz der virtuellen Geschwindigkeiten blos auf solche Fälle angewandt, wo die Kräfte an Punkten von einerlei festen Masse wirkend angenommen wurden. Betrachten wir nun ein System von Punkten, wobei letztere zwar unter einander nicht in einem festen, gegen einander unverschiebbaren Zusammenhange stehen, wobei sie jedoch dergestalt mit einander verbunden sind, dass durch die Bewegung eines dieser Punkte nach einer angenommenen Richtung um einen bestimmten Raum, alle übrigen Punkte dieses Systems um bestimmte Räume nach bestimmten Richtungen sich zu gleicher Zeit bewegen müssen; so ist es leicht, sich zu überzeugen, dass das in dem Paragraphen 4 bis 13 vom kombinirten dynamischen Bestreben eines Punktes einer festen Masse, Gesagte, auch von dem kombinirten dynamischen Bestreben eines Punktes bei einem solchen Systeme von Punkten behauptet werden könne, wo die Punkte erwähntermassen untereinander in Verbindung stehen. Bezeichnen wir daher das in einem solchen Falle Statt habende kombinirte Bestreben eines

Punktes nach irgend einer Richtung, welches das Resultat sowohl der individuellen dynamischen Bestrebungen aller übrigen Punkte, als der Art des Zusammenhanges aller dieser Punkte unter einander ist, durch $\mathfrak{D}$; ferner die individuellen dynamischen Bestrebungen der einzelnen Punkte durch $d, d', d'', \ldots$; endlich jene Räume, welche diese Punkte nach den Richtungen ihrer individuellen dynamischen Bestrebungen dann durchlaufen müssen, wenn man ein für allemal annimmt, es beschreibe der betrachtete Punkt nach der Richtung jenes kombinirten dynamischen Bestrebens den Raum $\mathfrak{S}$, durch $\mathfrak{s}, \mathfrak{s}', \mathfrak{s}'', \ldots$ so findet abermals folgende Gleichung Statt:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{H}\,(d\,\mathfrak{s} + d'\,\mathfrak{s}' + d''\,\mathfrak{s}'' + \ldots\ldots\ldots),$$

worin $\mathfrak{H}$ eine konstante Grösse ist.

§. 32.

Es wurde schon in vorhergehenden Paragraphen durch Auflösung einiger der interessantesten Aufgaben der Mechanik, die Wichtigkeit des bei jedem festen Körper Statt findenden Gesetzes der virtuellen Geschwindigkeiten erwiesen. Ich will nun auch hier zeigen, mit welchem glücklichen Erfolge man sich des Gesetzes der virtuellen Geschwindigkeiten in jenen Fällen bedienen könne, wo nicht blos von einer festen Masse, sondern von einem solchen Systeme von Punkten die Rede ist, dessen im vorhergehenden Paragraphe Erwähnung geschah.

§. 53.

Man gedenke sich 3 Pumpen, deren Kolben durch unter einander parallele Kolbenstangen, welche an 3 Krummzapfen um einerlei Axe hängen, dergestalt verbunden sind, dass, wenn in einer auf der Krummzapfenaxe senkrechten Ebene, der Endpunkt 𝔈 des Halbmessers E um die Krummzapfenaxe den Bogen 𝔖 beschreibt, die Kolben zu gleicher Zeit die Räume ſ, ſ′, ſ″, gegen die Richtungen ihrer dynamischen Bestrebungen d, d', d'' durchlaufen müssen. Man setze ferner: dass die mit den Kolben zu gleicher Zeit über die

Räume $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{s}''$, zu bewegenden Massen $= M, M', M''$, und die zu gleicher Zeit um die Krummzapfenaxe in Kreisen zu bewegenden Massen $= m, m'$, seyen, welche letztere von der Krummzapfenaxe in den beständigen Abständen e, e', angenommen werden. Wirkt nun im Endpunkte $\mathfrak{C}$, nach der Tangente des Kreises, welchen dieser Punkt um die Krummzapfenaxe beschreibt, eine Kraft P: so lässt sich das kombinirte dynamische Bestreben $\mathfrak{D}$ des Punktes $\mathfrak{C}$ nach der Richtung der eben erwähnten Tangente am Ende jeder Zeit t folgendermassen ausdrücken: $\mathfrak{D} = \mathfrak{H}\,(P\mathfrak{S} - d\mathfrak{s} - d'\mathfrak{s}' - d''\mathfrak{s}'')$, wobei zu bemerken ist, dass dieses kombinirte dynamische Bestreben sich auf die Grösse eines Druckes bezieht.

Finden am Ende derselben Zeit t, um die Krummzapfenaxe die Winkelgeschwindigkeit w, und an den Massen M, M', M'', die Geschwindigkeiten v, v', v'', Statt, so sind, wenn wir blos auf Quantität der Bewegung Rücksicht nehmen, die individuellen dynamischen

Bestrebungen der einzelnen Punkte des betrachteten Systems folgende:
$m.ew$, $m'.e'w$, $M.v$, $M'.v'$, $M''.v''$; ferner sind die von diesen Punkten nach den Richtungen ihrer individuellen dynamischen Bestrebungen zu gleicher Zeit durchlaufene Räume folgende: $\frac{e\mathfrak{S}}{E}$, $\frac{e'\mathfrak{S}}{E}$, ſ, ſ', ſ'', wenn der Punkt $\mathfrak{C}$ sich durch den Raum $\mathfrak{S}$ bewegt. Es lässt sich demnach das Bestreben $\mathfrak{D}'$ des Punktes $\mathfrak{C}$, als Quantität der Bewegung betrachtet, nach der Tangente des Kreises, welchen der Punkt $\mathfrak{C}$ um die Krummzapfenaxe beschreibt, folgendermassen ansetzen:

$$\mathfrak{D} = \alpha\left(Mv.ſ + M'v'.ſ' + M''v''.ſ'' + mew.\frac{\mathfrak{S}.e}{E} + \right.$$
$$\left. + m'.e'.w.\frac{\mathfrak{S}.e'}{E}\right).$$ In diesem Ausdrucke sind sowohl die Grössen v, v', v'', w; als jene ſ, ſ', ſ'', veränderlich, und von dem jedesmaligen Werthe der Zeit t abhängig. Man erhält daher den binnen dem Zeitelemente dt sich ergebenden Zuwachs an kombinirtem dynamischen Bestreben des Punktes $\mathfrak{C}$, wenn man obigen

Ausdruck in Bezug aller darin vorkommenden sich mit t ändernden Grössen differenziret. Um aber jenes Inkrementum zu erhalten, worum das kombinirte dynamische Bestreben des Punktes 𝔈, als Quantität der Bewegung betrachtet, binnen der Zeit dt darum wächst, weil binnen diesem Zeitelemente der kombinirte Druck 𝔇 im Punkte 𝔈 sich wirksam äussert, muss man von obigem Ausdrucke blos das Partialdifferenzial rücksichtlich der Grössen v, v', v'', w, nehmen, indem die Veränderlichkeit blos dieser Grössen der Wirkung des Bestrebens 𝔇 zuzuschreiben ist, weil die Veränderlichkeit der Grössen $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{s}''$, blos der veränderten Lage der Punkte des Systems gegen einander zuzuschreiben ist, welche Veränderung der Lage binnen dem Zeitelemente dt von der Wirkung der Kraft 𝔇 nicht abhängt, da (nach den allerersten Grundsätzen der Mechanik) der von jeder Masse binnen dem Zeitelemente dt beschriebene Raum blos jener ist, welchen die Masse, ihrer Trägheit gemäss, durchläuft, und das zwar darum, weil jener Raum, um welchen die Masse sich überdies noch wegen der durch die Kraft bewirkten Beschleunigung, bewegt, allemal ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung ist.

Wir haben daher für jenen Zuwachs des kombinirten dynamischen Bestrebens $\mathfrak{D}'$, welcher binnen dem Zeitelemente dt blos als eine Wirkung der Kraft $\mathfrak{D}$ anzusehen ist, folgenden Ausdruck:

$$\alpha\left(M\mathfrak{s}dv + M'\mathfrak{s}'dv' + M''\mathfrak{s}''dv'' + m\,e\,dw\,.\,\frac{\mathfrak{S}.e}{E} + \right.$$
$$\left. + m'.e'.dw\,.\,\frac{\mathfrak{S}e'}{E}\right).$$

Da aber das kombinirte dynamische Bestreben $\mathfrak{D}$ seiner unmittelbaren Wirkung gerade, und der Zeit dt, binnen welcher es diese Wirkung hervorbringt, verkehrt proportional seyn muss: so ist an der Richtigkeit folgender Gleichung nicht zu zweifeln:

$$(P.\mathfrak{S} - d\mathfrak{s} - d'\mathfrak{s}' - d''\mathfrak{s}'') = \frac{\lambda}{dt}\left(M\mathfrak{s}\,.\,dv + \right.$$
$$+ M'\mathfrak{s}'\,.\,dv' + M''\mathfrak{s}''\,.\,dv'' + \frac{m\mathfrak{S}e}{E}\,.\,e\,dw +$$
$$\left. + \frac{m'\mathfrak{S}e'}{E}\,.\,e'dw\right),$$

worin λ eine beständige Grösse ist.

Nehmen wir für den betrachteten Fall an, dass die Grössen d, d', d'', M, M', M'', verschwinden: so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{\lambda . dw}{dt} = \frac{EP}{e^2 m + e'^2 m'},$$ daher ist (§. 24.)

$\lambda = \frac{1}{2g}$, und folglich $P\mathfrak{S} - d\int - d'\int' - d''\int'' =$

$$= \frac{1}{2g\,dt}\Big(M\int dv + M'\int dv' + M''\int'' dv'' +$$
$$+ \frac{m\mathfrak{S}e}{E}\,e\,dw + \frac{m'\mathfrak{S}e'}{E}\,e'\,dw\Big).$$

Was hier von 3 Kolben, und 2 um die Krummzapfenaxe in Kreisen laufenden Massen bewiesen wurde, gilt eben so von jedem Falle, wo für diese Kolben und Massen was immer für beliebige Anzahlen genommen würden.

Ist der Krummzapfen einarmig, die Länge des Arms $= a$, der Winkel, den dieser am Ende der Zeit t mit der auf dem Horizonte Vertikalen bildet $= \varphi$; und darf man annehmen, dass der Pumpenkolben nach vertikaler Richtung allemal denselben Raum beschreibt, als der Endpunkt des Armes a, so ist $\mathfrak{f} = \frac{a\mathfrak{S}}{E} . Sin\,\varphi$; ferner (wie man sich leicht durch Aufzeichnen der Figur überzeugt) $dv = a\,dw . Sin\,\varphi$; daher ist

$$P\mathfrak{S} - \frac{d . a\mathfrak{S}}{E} . Sin\,\varphi = \frac{1}{2gdt} \quad \frac{Ma^2\mathfrak{S}}{E} Sin^2\varphi . dw,$$

folglich $\frac{dw}{2gdt} = \frac{E . P - d . a\,Sin\,\varphi}{M . a^2\mathfrak{S}^2 . \varphi}$.

Dieselbe Gleichung erhält man aber auch, wenn man die Aufgabe folgendermassen auflöst. Der Druck P, welcher an dem Hebelarme E wirkt, giebt für den Endpunkt des Armes a, nach der auf den Horizont (nicht auf den Arm a) senkrechten Richtung, also nach einer Richtung, welche mit dem Arme einen Winkel φ bildet, einen Druck $= \frac{P . E}{a . Sin\,\varphi}$ (nach der Lehre des Hebels). Der Kolben drückt aber an demselben Punkte senkrecht herab mit einer Kraft $= d$, also ist in diesem Punkte die Ueberwucht hinauf $= \frac{P . E}{a . Sin\,\varphi} - d$. Diese wirkt ganz auf die Beschleunigung der Masse M, also ist die beschleunigende Kraft dieser Masse

$$=\frac{\frac{P.E}{a.\,Sin\,\varphi}-d}{M}\text{, folglich}$$

$$dv=2g\left(\frac{\frac{P.E}{a.\,Sin\,\varphi}-d}{M}\right)dt.$$ Nun ist aber auch $dv=a.\,dw.\,Sin\,\varphi$, daher

ist $$\frac{dw}{2g\,dt}=\frac{P.E-d.\,a\,\mathfrak{C}.\,\varphi}{M.\,a^2\,Sin^2\,\varphi}.$$

§. 34.

Erwäget man den eigentlichen Sinn der in diesem Aufsatze vorgetragenen Sätze, und den Gang der dabei angewandten Rechnung, so ist es leicht, mit mathematischer Evidenz folgenden allgemeinen dynamischen Lehrsatz einzusehen: Wenn wie viel immer Punkte und Massen unter einander dergestalt verbunden sind, dass durch die Bewegung irgend eines Punktes $\mathfrak{C}$ nach einer angenommenen Richtung um einem festgesetzten Raum $\mathfrak{S}$, alle übrigen Punkte und Massen eines solchen Systems, zu gleicher Zeit, Räume von bestimmten Grössen, und nach bestimmten Richtungen zu durchlaufen gezwungen sind, so findet binnen jedem Zeitelemente dt folgendes Gesetz Statt:

Die Summe der Produkte aus den, in den verschiedenen Punkten und Massen des Systems, angebrachten Kräften (welche allemal durch die Grösse ihres Drucks bestimmt werden) in jene Räume, welche die Angriffspunkte dieser Kräfte zu gleicher Zeit zu durchlaufen dadurch gezwungen sind, dass der Punkt 𝔈 erwähntermassen den Raum 𝔖 beschreibt, ist allemal gleich dem Produkte aus dem Quotienten $\frac{1}{2g\,dt}$ in die Summe der Produkte aus den Massen in jene Räume, welche die Massen nach den Richtungen ihrer Bewegung zu gleicher Zeit zu durchlaufen gezwungen sind, wenn der Punkt 𝔈 erwähntermassen den Raum 𝔖 beschreibt, und in die Differenzialien jener Geschwindigkeiten, welche den Massen am Ende der Zeit t entsprechen.

Nennen wir daher $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$, ..., die in den verschiedenen Punkten des Systems angebrachten Kräfte, welche nach beliebigen Richtungen wirken mögen; ferner $d\mathfrak{s}$, $d\mathfrak{s}'$, $d\mathfrak{s}''$, ..., jene Räume, welche die Angriffspunkte dieser Kräfte nach den Richtungen ihrer Kräfte dann durchlaufen, wenn der Punkt $\mathfrak{C}$ den Raum $\mathfrak{S}$ beschreibt; ferner m, m', m'', m''', ..., die im Systeme befindlichen Massen; ferner v, v', v'', v''', ... deren Geschwindigkeiten am Ende der Zeit t nach den Richtungen jener Bewegungen, welche diesen Massen am Ende der Zeit t zukommen; endlich ds, ds', ds'', ds''', ..., jene Räume, welche die Massen m, m', m'', m''', ..., nach den eben erwähnten Richtungen ihrer Bewegungen dann durchlaufen, wenn der Punkt $\mathfrak{C}$ den Raum $\mathfrak{S}$ beschreibt, so lässt sich der eben angeführte Lehrsatz algebraisch folgendermassen ansetzen, da ds durch $v\,dt$, ds' durch $v'dt$, ds'' durch $v''dt$, ..., substituirt werden kann, $\mathfrak{p}\,d\mathfrak{s} + \mathfrak{p}'d'\mathfrak{s}' + \mathfrak{p}''d''\mathfrak{s}'' + \ldots\ldots$

$$= \frac{1}{2g} \left(m\,v\,dv + m'\,v'\,dv' + m''\,v''\,dv'' + \right.$$
$$\left. + m'''\,v'''\,dv''' + \ldots\ldots\ldots \right).$$

§. 35.

Man muss gestehen, dass die Allgemeinheit, Bestimmtheit und Evidenz dieses Lehrsatzes; dass ferner die Leichtigkeit, welche er gewähret, alle darnach behandelten Aufgaben der Dynamik dem analytischen Kalkul zu unterwerfen, demselben einen Vorzug einräumen, dessen sich wohl wenige Sätze der Dynamik rühmen dürften.

Es müsste sich, auf diesen Lehrsatz (dessen Richtigkeit sich sogleich nach dem §. 16. erweisen liesse) gestützet, ein vollständiges Lehrgebäude der Mechanik, mit einer ganz eigenen Kürze aufführen lassen, wobei es in jeder dynamischen Aufgabe blos mehr darauf ankäme, selbige auf eine geschickte Weise dem Gebiete dieses Lehrsatzes zu unterwerfen, und wo dann der übrige Theil der Arbeit nur mehr in richtigen Substitutionen bestehen könnte.

§. 36.

Eine Bemerkung über die bekannte Fundamentalformel der ungleichförmigen Bewegung $P = \frac{1}{2g\,dt} Q\,dv$, worin P die bewegende Kraft, Q das Gewicht der Masse, und v die Geschwindigkeit der Masse am Ende der Zeit t bedeuten, muss ich hier anführen, da diese Bemerkung auf meinen (in §. 34.) ausgedruckten allgemeinen Lehrsatz rücksichtlich der Frage anzuwenden ist, in wie ferne die Veränderlichkeit der Masse mit in Rechnung kommen müsse.

Geben wir dem Quotienten $\frac{1}{2g\,dt}$ ein für allemal denselben Werth, so ist leicht einzusehen, dass die binnen dem Zeitelemente dt wirkende Kraft P allemal dem Produkte $Q\,dv$ proportional seyn müsse, wenn Q beständig denselben Werth behält, da $Q\,dv$ die durch die Kraft P binnen der Zeit dt bewirkte Quantität der Bewegung ausdrückt. Ist die Masse Q veränderlich, wächst deren Werth daher binnen der Zeit dt um dQ: so ist die binnen dieser Zeit durch die Kraft P bewirkte Quantität der Bewegung $= (Q+dQ)\,dv = Q\,dv$, wenn der jedesmalige zugewachsene Massentheil am Ende der Zeit t schon die Geschwindigkeit v besass. Unter dieser Voraussetzung ist also auch $P = \frac{1}{2g\,dt} Q\,dv$, worin Q das Massengewicht, das am Ende der Zeit t Statt findet, ausdrückt. Ist hingegen der Fall von der Art, dass Q veränderlich ist, und dass die binnen dem Zeitelemente dt zuwachsende Masse am Ende der Zeit t noch keine Geschwindigkeit hat: so ist die durch die Kraft P binnen der Zeit dt ertheilte Menge der Bewegung nicht $(Q+dQ)\,dv$, sondern $Q\,dv + dQ(v+dv) = Q\,dv + v\,dQ$, also ist in einem solchen Falle die Gleichung $P = \frac{1}{2gdt} Qdv$ nicht wahr, sondern dann ist $P = \frac{1}{2gdt}(Qdv + vdQ)$. Hätte wohl gar die zuwachsende

Masse dQ eine negative Geschwindigkeit $-w$ am Ende der Zeit t, so wäre

$$P = \frac{1}{2g\,dt}(Q\,dv + v\,dQ + w\,dQ).$$

Ist Q veränderlich, so ist $d(Qv) = Q\,dv + + v\,dQ$ in jedem Falle das Inkrementum an Quantität der Bewegung, das dem Zeitelemente dt entspricht. Es ist aber dieser Zuwachs der binnen der Zeit dt wirkenden Kraft P nicht allemal ganz zuzuschreiben.

Ist binnen der Zeit dt die Masse dQ schon mit der Geschwindigkeit v hinzugetreten, so kommt der Kraft P nur der Theil $Q\,dv$, also $d(Qv) - v\,dQ$ zu. Ist aber die binnen der Zeit dt hinzugekommene Masse dQ mit gar keiner Geschwindigkeit versehen gewesen, so ist der Kraft P der Zuwachs $Q\,dv + v\,dQ = = d(Qv)$ zuzuschreiben. Ist endlich die binnen der Zeit dt zugetretene Masse dQ schon mit einer Geschwindigkeit $\pm w$ versehen gewesen, so ist der Kraft P der Zuwachs $Q\,dv + (v \mp w)\,dQ = d(Qv) \mp w\,dQ$ zuzuschreiben.

§. 37.

Folgende zwei Anwendungen des (§. 34.) ausgedruckten Lehrsatzes, mögen den gegenwärtigen Aufsatz beschliessen.

§. 38.

Denken wir uns eine unbiegsame Stange ohne Masse, an welcher kleine Kügelchen, z. B. ihrer zwei, auf und nieder geschoben werden können, und deren Massen wir m, m', nennen; sey diese Stange an einem ihrer beiden Enden an einer Axe dergestalt befestigt, dass sich die Stange sammt den zwei Kügelchen um diese Axe bewegen könne, doch so, dass die Stange beständig in einerlei durch die Axe senkrecht gelegter Ebene laufe; denken wir uns ferner, es besitze dieselbe Ebene zwei Kerben oder Rinnen von der Breite der Kügelchen, worin die Kügelchen sich bewegen, und es laufen diese Kerben nach krummen Linien von beliebigen Gesetzen, so sieht man ein, dass, wenn der Endpunkt des Radius $=1$, unserer Stange einen Bogen $\mathfrak{S}$ beschreibt, hiedurch jener Punkt der Stange, welcher von der Axe um die Länge l entfernt ist, und die beiden Kügelchen in ihren krummlinigten Kerben bestimmte Räume nach den Richtungen ihrer Endesgeschwindigkeiten durchlaufen müssen. Bestehe nun ein Druck d, in der erwähnten Ebene am Endpunkte der Länge l, welcher beständig senkrecht auf die Stange wirkt, so ergiebt sich folgendes aus dem Lehrsatze (§. 34).

Sind v, v' die Endesgeschwindigkeiten der Massen m, m'; ferner r, r' ihre Entfernungen von der Axe am Ende der Zeit t; ferner a, a' die Winkel, welche die Richtungen ihrer Bewegungen mit den auf der Stange durch ihre jedesmaligen Standpunkte gezogenen Senkrechten bilden: so folgt aus (§. 34.) die Gleichung
$$d\,l\,\mathfrak{S} = \frac{1}{2g\,dt}(m.r\,\mathfrak{S}\,Cos\,a\,.\,dv + m\,.\,r'\,\mathfrak{S}\,Cos\,a'.dv')$$
oder $d\,l = \frac{1}{2g\,dt}(m\,r\,Cos\,a\,d\,v + m'\,r'\,Cos\,a'.dv')$.

Dieselbe Gleichung erhält man aber auch auf folgende Art: Der Druck d beschleunigt die Massen m, m'. Sey nun x jener Theil dieses Druckes, welcher blos die Masse m beschleunigt, und $d-x$ jener Theil dieses Drucks, welcher blos die Masse m' beschleunigt, so wirkt (nach der Theorie des Hebels) unmittelbar auf die Masse m die bewegende Kraft $\frac{lx}{Cos\,a}$, und unmittelbar auf die Masse m' die bewegende Kraft $\frac{l(d-x)}{r' Cos\,a'}$; also ist $dv = \frac{2g\,dt\,.\,lx}{m.\;r\;Cos\;a}$, und $dv' = \frac{2g\,dt\,.\,l\,.\,(d-x)}{m'.r'.Cos\,a'}$; es ist aber $dv\,.\,Cos\,a : dv'\,.\,Cos\,a' = r : r'$, oder $\frac{lx}{mr} : \frac{l(d-x)}{m'.r'} = r : r'$, woraus folgt

$x = \frac{m.r^2 d}{m'.r'^2 + m.r^2}$, daher ist

$dv = \frac{2g\,dt.l.r.d}{Cos\,a\,(m'.r'^2 + m.r^2)}$, und

$dv' = \frac{2g\,dt.l\left(d - \frac{m r^2 d}{m'.r'^2 + m r^2}\right)}{m' r' Cos\,a'}$; hieraus folgt aber $m r\,dv\,Cos\,a = \frac{2g\,dt.l.d.m.r^2}{(m' r'^2 + m r^2)}$, und

$m' r'\,dv'\,Cos\,a' = 2g\,dt\,.\,l\,.\,d\left(\frac{m' r'^2}{m' r'^2 + m r^2}\right)$, woraus sich ergiebt

$$m r\,dv\,Cos\,a + m' r'\,dr'\,Cos\,a' =$$

$$= 2g\,dt.l.d\left(\frac{m.r^2}{m'.r'^2 + m r^2} + \frac{m' r'^2}{m' r'^2 + m r^2}\right)$$

$= 2g\,dt.l.d$, und endlich ist hieraus

$l.d = \frac{1}{2g\,dt}(m r\,dv\,Cos\,a + m' r'.\,dv'\,Cos\,a')$.

§. 39.

Eine Anwendung unsers Lehrsatzes, welche einen wichtigen Gegenstand der Mechanik betrifft, ist folgende. Wir wollen hier untersuchen, wie tief ein Pfahl durch den Schlag eines Rammklotzes, binnen der Dauer des Stosses, in den Boden zu dringen gezwungen werde, wenn man voraussetzen darf, dass die sich während dem Stosse berührenden Theile vollkommen elastisch sind.

Wir nennen zu diesem Ende das Gewicht der Ramme und des Pfahls $= M, G$, die Geschwindigkeit, womit erstere zum Stosse gelangt $= c$, den Widerstand, welchen der Pfahl gegen das Eindringen erleidet, und welchen wir während jeder Stosszeit als beständig annehmen, $= A$; endlich v und w die Geschwindigkeiten, so wie s und S die durchlaufenen Räume für die Ramme und den Pfahl, welche einer beliebigen Zeit t entsprechen. Dieses vorausgeseszt, folgt aus unserm Lehrsatze:

$$Mds - (A-G)\,dS = \frac{1}{2g}\,(Mvdv + Gwdw), \text{ also}$$

$$Ms - (A-G)S + C = \frac{1}{4g}\,(Mv^2 + Gw^2); \text{ nun}$$

ist für $s = 0$, $S = 0$, $w = 0$, der Werth von $v = c$, also ist $C = \frac{Mc^2}{4g}$, daher

$$Ms - (A - G)S = \frac{1}{4g}(M(v^2 - c^2) + Gw^2).$$

Ist der Stoss zu Ende, d. h. haben die zusammengedrückten Theile ihre ursprüngliche Gestalt wieder erhalten, so ist $s = S$, daher ist die binnen der Dauer des Stosses durch den Pfahl in den Boden eingedrungene Tiefe $S = \frac{M(v^2 - c^2) + Gw^2}{4g(M - A + G)}$, worin v und w sich auf das Ende des Stosses beziehen. Dasselbe Resultat lässt sich aber auch folgendermassen erhalten:

Sey P die binnen dem Zeitelemente dt zwischen dem Rammklotze und dem Pfahle wirksame Kraft, welche eben so stark auf erstere hinauf, als auf letztere herabdrückt; so folgt aus den Fundamentalformeln der ungleichförmigen Bewegung für die Beschleunigung des Klotzes

$P - M = -\frac{M \cdot v dv}{2g ds}$, und für jene des Pfahls

$P + G - A = \frac{G \cdot w dw}{2g dS}$; daher ist

$Pds = Mds - \frac{Mvdv}{2g}$, und

$$PdS = (A-G)dS + \frac{Gwdw}{2g}, \text{ folglich}$$

$$Pd(S-s) = (A-G)dS - Mds + \frac{Gwdw + Mvdv}{2g}.$$

Wird diese Gleichung integriret, so erhält man

$$SPd(S-s) = (A-G)S - Ms + \frac{Gw^2 + Mv^2}{4g} + C.$$

Hier drückt die Differenz $S-s$ jene Tiefe aus, worum die beiden Massen binnen der Zeit t in einander gedrungen sind. Nun ist leicht einzusehen, dass $SPd(S-s)$ eine Funktion seyn müsse, welche verschwindet, wenn $S-s$ verschwindet. Beziehen wir demnach alle veränderlichen Grössen auf das Ende des Stosses, wodurch $S=s$ wird, so erhalten wir die Gleichung $P=(A-G-M)S+$ $+\frac{Gw^2+Mv^2}{4g}+C$. Diese Gleichung gilt aber auch für den Anfang des Stosses, wenn man darein $S=0$, $w=0$, $v=c$ substituirt, daher ist $0=\frac{Mc^2}{4g}+C$, oder $C=-\frac{Mc^2}{4g}$.

Es ist demnach zu Ende des Stosses

$$0 = (A-G-M)S + \frac{Gw^2 + M(v^2-c^2)}{4g}, \text{ woraus}$$

$$S = \frac{M(v^2-c^2) + G \cdot w^2}{4g(M-A+G)} \text{ folgt.}$$

ch

$-Mvdv$

hält man

$\frac{Mv^2}{}+C.$

ne Tiefe
nen der
Nun ist
s) eine
hwindet,
vir dem-
das En-
, so er-
$-M) S+$

gilt aber

nn man
t, daher

r.

ses

, woraus

t.