Vierte Abtheilung.

Noch eine Summation sowohl allgemeiner als auch numerischer Reihen.

§. 67.

Wir haben in der vorhergehenden Abtheilung Reihen summirt, von der Form

$$1 + \frac{\mathrm{Cos}.\alpha}{1} + \frac{\mathrm{Cos}.\,2\alpha}{2'} + \frac{\mathrm{Cos}.\,3\alpha}{3'} + \ldots \text{ in inf.}$$

$$\frac{\mathrm{Sin}.\alpha}{1} + \frac{\mathrm{Sin}.2\alpha}{2'} + \frac{\mathrm{Sin}.3\alpha}{3'} + \ldots \text{ in inf.}$$

deren einzelne Glieder noch mit den Potenzen von z multiplizirt seyn konnten. — Nehmen wir nun statt der Potenzen, die Fakultäten von z mit der Differenz — 1.

Es seyen also zu summiren die Reihen

$$S.\left[\mathrm{Cos}.\,\alpha a.\frac{z^{a|-1}}{a'}\right] \text{ und } S.\left[\mathrm{Sin}.\,a\alpha.\frac{z^{a|-1}}{a'}\right]$$

die wir der Kürze wegen auch durch P und Q bezeichnen wollen.

§. 68.

Man erhält sogleich nach der in der vorhergehenden Abtheilung gebrauchten Methode, weil

$$\begin{matrix} 2\,\mathrm{Cos.} \\ 2\sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin.} \end{matrix}\; x = e^{x\sqrt{-1}} \pm e^{-x\sqrt{-1}} \text{ ist,}$$

$$S.\left[\begin{matrix} 2\,\mathrm{Cos.} \\ 2\sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin.} \end{matrix}(\mathfrak{a}\alpha)\frac{z^{\mathfrak{a}I-1}}{\mathfrak{a}'}\right] = S.\left[e^{\mathfrak{a}\alpha\sqrt{-1}}.\frac{z^{\mathfrak{a}I-1}}{\mathfrak{a}'}\right]$$
$$\pm S.\left[e^{-\mathfrak{a}\alpha\sqrt{-1}}.\frac{z^{\mathfrak{a}I-1}}{\mathfrak{a}'}\right].$$

Nun ist aber nach dem binomischen Lehrsatze

$$(1+e^{\pm\alpha\sqrt{-1}})^z = S.[z_{\mathfrak{a}}.(e^{\pm\alpha\sqrt{-1}})^{\mathfrak{a}}]$$
$$= S.\left[\frac{z^{\mathfrak{a}I-1}}{\mathfrak{a}'}e^{\pm\mathfrak{a}\alpha\sqrt{-1}}\right]$$

folglich

1) $$S.\left[\mathrm{Cos.}(\mathfrak{a}\alpha).\frac{z^{\mathfrak{a}I-1}}{\mathfrak{a}'}\right]$$
$$= \frac{(1+e^{\alpha\sqrt{-1}})^z + (1+e^{-\alpha\sqrt{-1}})^z}{2}$$

und

2) $$S.\left[\mathrm{Sin.}(\mathfrak{a}\alpha).\frac{z^{\mathfrak{a}I-1}}{\mathfrak{a}'}\right]$$
$$= \frac{(1+e^{\alpha\sqrt{-1}})^z - (1+e^{-\alpha\sqrt{-1}})^z}{2\sqrt{-1}}.$$

Weil aber auch

$$e^{\pm\alpha\sqrt{-1}} = \mathrm{Cos.}\,\alpha \pm \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin.}\,\alpha \qquad \text{ist,}$$

so giebt dies noch

3) $$S.\left[\mathrm{Cos.}(\mathfrak{a}\alpha).\frac{z^{\mathfrak{a}I-1}}{\mathfrak{a}'}\right]$$
$$= \frac{[(1+\mathrm{Cos.}\alpha)+\sqrt{-1}.\mathrm{Sin.}\alpha]^z + [(1+\mathrm{Cos.}\alpha)-\sqrt{-1}.\mathrm{Sin.}\alpha]^z}{2}$$

$$4)\ S.\left[\mathrm{Sin.}(\mathfrak{a}\alpha).\frac{z^{\mathfrak{a}I-1}}{\mathfrak{a}'}\right]$$
$$=\frac{[(1+\mathrm{Cos.}\alpha)+\sqrt{-1}.\mathrm{Sin.}\alpha]^z-[(1+\mathrm{Cos.}\alpha)-\sqrt{-1}.\mathrm{Sin.}\alpha]^z}{2\sqrt{-1}}$$

welche Gleichungen für jedes z gelten müssen.

§. 69.

Es ist aber

$$1+\mathrm{Cos.}\,\alpha=2\,\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}\alpha.\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}\alpha$$
$$\mathrm{Sin.}\,\alpha=2\,\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}\alpha.\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}\alpha$$

und zu gleicher Zeit

$$(\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}\alpha\pm\sqrt{-1}.\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}\alpha)^z$$
$$=\mathrm{Cos.}(\pm 2n\pi+\tfrac{1}{2}\alpha)z\pm\sqrt{-1}.\mathrm{Sin.}(\pm 2n\pi+\tfrac{1}{2}\alpha)z$$

Mithin gehen die Gleichungen (3. und 4.) über in

$$5)\ S.\left[\mathrm{Cos.}(\mathfrak{a}\alpha).\frac{z^{\mathfrak{a}I-1}}{\mathfrak{a}'}\right]=(2\,\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}\alpha)^z$$
$$\times\tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\mathrm{Cos.}(\pm 2n\pi+\tfrac{1}{2}\alpha)z+\sqrt{-1}.\mathrm{Sin.}(\pm 2n\pi+\tfrac{1}{2}\alpha)z\\+\mathrm{Cos.}(\pm 2\nu\pi+\tfrac{1}{2}\alpha)z-\sqrt{-1}.\mathrm{Sin.}(\pm 2\nu\pi+\tfrac{1}{2}\alpha)z\end{array}\right\}$$

$$6)\ S.\left[\mathrm{Sin.}(\mathfrak{a}\alpha).\frac{z^{\mathfrak{a}I-1}}{\mathfrak{a}'}\right]=(2\,\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}\alpha)^z.$$
$$\times\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left\{\begin{array}{l}\mathrm{Cos.}(\pm 2n\pi+\tfrac{1}{2}\alpha)z+\sqrt{-1}.\mathrm{Sin.}(\pm 2n\pi+\tfrac{1}{2}\alpha)z\\-\mathrm{Cos.}(\pm 2\nu\pi+\tfrac{1}{2}\alpha)z+\sqrt{-1}.\mathrm{Sin.}(\pm 2\nu\pi+\tfrac{1}{2}\alpha)z\end{array}\right\}$$

wo $(\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}\alpha)^z$ einen beliebigen seiner Werthe vorstellt, während n und ν unbestimmt bleiben, jedesmal Null oder eine ganze Zahl vorstellen, in jedem besondern Falle aber erst bestimmt werden können.

Unter diesen Voraussetzungen sind aber die vorstehenden Gleichungen noch allgemein für jedes z gültig und für jedes α.

§. 70.

Nehmen wir aber an, daſs z eine beliebige positive (absolute) rationale oder irrationale Zahl, und α beliebig reel ist, so convergiren die Reihen zur Linken allemal, wie aus den in der ersten Abtheilung angestellten Betrachtungen über die Convergenz augenblicklich hervorgeht. Dann haben diese Reihen auch allemal einen Werth, und der allgemeine Ausdruck zur rechten muſs diesen Werth liefern in jedem Falle.

Um nun diese Werthe zu finden unterscheiden wir die beiden Fälle von einander

1) wenn $\mathrm{Cos.}\frac{1}{2}\alpha$ positiv, wenn also $\frac{1}{2}\alpha$ zwischen die Grenzen $\pm(2\mu-\frac{1}{2})\pi$ und $\pm(2\mu+\frac{1}{2})\pi$ fällt,

2) wenn $\mathrm{Cos.}\frac{1}{2}\alpha$ negativ ist, wenn also $\frac{1}{2}\alpha$ zwischen den Grenzen $\pm(2\mu+\frac{1}{2})\pi$ und $\pm(2\mu+\frac{3}{2})\pi$ liegt.

I[ter] Fall, wenn $\mathrm{Cos.}\frac{1}{2}\alpha$ positiv ist;

§. 71.

Die Gleichungen (5. und 6.) gehen in diesem Falle, weil nun der imaginäre Theil wegfallen, folglich $n = \nu$ genommen werden muſs, über in

$$7)\ S.\left(\mathrm{Cos.}(a\alpha).\frac{z^{a\mathrm{I}-1}}{a'}\right) = (2\,\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}\alpha)^z.\mathrm{Cos.}z(\pm 2n\pi+\tfrac{1}{2}\alpha)$$

$$8)\ S.\left(\mathrm{Sin.}(a\alpha).\frac{z^{a\mathrm{I}-1}}{a'}\right) = (2\,\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}\alpha)^z.\mathrm{Sin.}z(\pm 2n\pi+\tfrac{1}{2}\alpha).$$

wo $(2\,\mathrm{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,a)^z$ seinen absoluten Werth vorstellt, während n entweder Null oder eine ganze positive Zahl bedeutet, die nun noch zu bestimmen übrig bleibt.

§. 72.

Man bemerkt aber leicht, dafs die Reihen P und Q (§. 67.) sich stetig ändern zugleich mit den stetig sich ändernden Werthen von α. Daraus folgt aber, dafs für alle Werthe von $\tfrac{1}{2}\alpha$, welche zwischen je zwei der zunächstliegenden Grenzen $+(2\mu-\tfrac{1}{2})\pi$ und $+(2\mu+\tfrac{1}{2}\pi)$ oder

$$-(2\mu-\tfrac{1}{2})\pi \text{ und } -(2\mu+\tfrac{1}{2})\pi$$

genommen werden können, (und für welche die obigen Gleichungen (6. und 7.) dann gelten, wenn nur z positiv ist), der Werth von n unverändert derselbe bleiben mufs, weil im Gegentheil für Werthe von $\tfrac{1}{2}\alpha$ die zwischen denselben Grenzen liegen, die Werthe der den Reihen gleichen Ausdrücke sprungweise fortgehen würden, diese also den Werthen der Reihen nicht entsprechen könnten, wie solches doch nach (§. 14.) sein mufs.

Kann man daher den Werth von n für irgend einen Werth von α bestimmen, so bleibt dieser Werth derselbe für alle übrigen Werthe von α, die zwischen denselben Grenzen liegen, innerhalb derer jedesmal die Gleichungen (7. u. 8.) gelten.

§. 73.

Nun liegt $\pm 2\mu\pi$ zwischen den Grenzen $\pm(2\mu-\tfrac{1}{2})\pi$ und $\pm(2\mu+\tfrac{1}{2})\pi$. Für $\tfrac{1}{2}\alpha = \pm 2\mu\pi$

erhält man aber aus (7. und 8.), weil

$$\mathrm{S.}\left(\frac{z^{aI-1}}{a'}\right) = 2^z \text{ und } \mathrm{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\alpha = 1 \text{ ist,}$$

$$2^z = 2^z.\ \mathrm{Cos.}(\pm 2n \pm 2\mu).\pi.z$$
$$0 = 2^z.\ \mathrm{Sin.}(\pm 2n \pm 2\mu).\pi.z;$$

woraus $\pm n = \mp \mu$ folgt.

Da nun für diesen Werth von $\frac{1}{2}\alpha = \pm 2\mu\pi$, der zwischen den Grenzen $\pm(2\mu - \frac{1}{2})\pi$ und $\pm(2\mu + \frac{1}{2})\pi$ liegt, $\pm n = \mp\mu$ ist, so gilt dies für alle Werthe von α zwischen denselben Grenzen.

Man hat also aus (7. und 8.), unter der Voraussetzung daſs z eine beliebige positive (rationale oder irrationale) Zahl bedeutet, für alle Werthe von $\frac{1}{2}\alpha$, die zwischen den Grenzen $\pm(2\mu - \frac{1}{2}\pi)$ und $\pm(2\mu + \frac{1}{2})\pi$ liegen,

$$9)\ \mathrm{S.}\left(\mathrm{Cos.}(a\alpha).\frac{z^{aI-1}}{a'}\right)$$
$$= (2\,\mathrm{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\alpha)^z.\ \mathrm{Cos.}(\mp 2\mu\pi + \tfrac{1}{2}\alpha).z$$

$$10)\ \mathrm{S.}\left(\mathrm{Sin.}(a\alpha).\frac{z^{aI-1}}{a'}\right)$$
$$= (2\,\mathrm{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\alpha)^z.\ \mathrm{Sin.}(\mp 2\mu\pi + \tfrac{1}{2}\alpha).z$$

nach welchen Ausdrücken rechts der Werth der Reihen links für jeden Werth von α sehr bequem berechnet werden kann, wenn man nur nicht vergiſst, daſs hier die Potenz $(2\,\mathrm{Cos.}\,\frac{1}{2}\alpha)^z$ ihren absoluten Werth vorstellt, und wenn man μ dem Werthe von α gemäſs nimmt, während z eine beliebige positive Zahl bleibt.

§. 74.

§. 74.

Setzt man in den Gleichungen (9. und 10.) 2α statt α, so erhält man für alle Werthe von α zwischen den Grenzen $\pm(2\mu - \frac{1}{2})\pi$ und $\pm(2\mu + \frac{1}{2})\pi$, und wenn z eine beliebige (rationale oder irrationale) positive Zahl bedeutet:

$$11)\ S.\left(\mathrm{Cos.}(2\mathfrak{a}\alpha).\frac{z^{\mathfrak{a}|-1}}{\mathfrak{a}'}\right)$$

$$= (2\,\mathrm{Cos.}\,\alpha)^z.\,\mathrm{Cos.}(\mp 2\mu\pi + \alpha).z$$

$$12)\ S.\left(\mathrm{Sin.}(2\mathfrak{a}\alpha).\frac{z^{\mathfrak{a}|-1}}{\mathfrak{a}'}\right)$$

$$= (2\,\mathrm{Cos.}\,\alpha)^z.\,\mathrm{Sin.}(\mp 2\mu\pi + \alpha).z,$$

wo μ einen bestimmten, jedesmal dafür zu setzenden Werth hat.

§. 75.

Multiplizirt man die Gleichungen (11. u. 12.) beziehlich mit $\mathrm{Cos.}\,\alpha z$ und $\mathrm{Sin.}\,\alpha z$, und addirt oder subtrahirt man nachgehens die Resultate, so erhält man:

$$13)\ S.\left(\mathrm{Cos.}(z - 2\mathfrak{a})\alpha.\frac{z^{\mathfrak{a}|-1}}{\mathfrak{a}'}\right)$$

$$= (2\,\mathrm{Cos.}\,\alpha)^z.\,\mathrm{Cos.}(2\mu\pi z)$$

$$14)\ S.\left(\mathrm{Cos.}(z + 2\mathfrak{a})\alpha.\frac{z^{\mathfrak{a}|-1}}{\mathfrak{a}'}\right)$$

$$= (2\,\mathrm{Cos.}\,\alpha)^z.\,\mathrm{Cos.}(\mp z\mu\pi + 2\alpha)z$$

Multiplizirt man dagegen dieselben Gleichungen (11. und 12.) beziehlich mit $\mathrm{Sin.}\,\alpha z$ und $\mathrm{Cos.}\,\alpha z$, und subtrahirt oder addirt nachgehens die Resultate, so ergiebt sich noch:

$$15)\ S.\left(\text{Sin.}(z-2\mathfrak{a})\alpha.\ \frac{z^{\mathfrak{a}|-1}}{\mathfrak{a}'}\right)$$
$$=(2\,\text{Cos.}\,\alpha)^z\,.\,\text{Sin.}(\pm 2\mu\pi z)$$

$$16)\ S.\left(\text{Sin.}(z+2\mathfrak{a})\alpha.\ \frac{z^{\mathfrak{a}|-1}}{\mathfrak{a}'}\right)$$
$$=(2\,\text{Cos.}\,\alpha)^z.\,\text{Sin.}(\mp 2\mu\pi+2\alpha)z,$$

welche Summationen (13. — 16.) gelten, wenn α zwischen den Grenzen $\pm(2\mu-\frac{1}{2})\pi$ und $\pm(2\mu+\frac{1}{2})\pi$ liegt, und z eine beliebige positive Zahl ist.

Ohne uns in nähere Details einzulassen, betrachten wir sogleich den (§. 70.) erwähnten

II^ten Fall, wo $\text{Cos.}\,\frac{1}{2}\alpha$ negativ ist, wo also $\frac{1}{2}\alpha$ zwischen den Grenzen $\pm(2\mu+\frac{1}{2})\pi$ und $\pm(2\mu+\frac{3}{2})\pi$ liegt.

§. 76.

In diesem Falle soll $|2\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}\alpha|^z$ den absoluten Werth der Potenz von $2\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}\alpha$ bedeuten, wenn nicht der negative Werth, sondern der absolute statt $2\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}\alpha$ genommen wird.

Die Gleichungen (5. und 6.) (§. 69.) gehen für diesen Fall aus den (§. 71.) angegebenen Gründen über,

weil $(\text{Cos.}\,\frac{1}{2}\alpha)^z = |\text{Cos.}\,\frac{1}{2}\alpha|^z.(-1)^z$
$$= |\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\alpha|^z.[\text{Cos.}(\pm\pi z)+\sqrt{-1}.\,\text{Sin.}\,(\pm\pi z)]$$
genommen werden muſs, in

$$17)\ S.\left(\text{Cos.}(\mathfrak{a}\alpha).\ \frac{z^{\mathfrak{a}|-1}}{\alpha'}\right)$$
$$=|2\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\alpha|^z.\,\text{Cos.}\,[\pm(2n+1)\pi+\tfrac{1}{2}\alpha)z$$

$$18)\ S.\left(\mathrm{Sin.}(\mathfrak{a}\,\alpha).\frac{z^{\mathfrak{a}\mathrm{I}-1}}{\mathfrak{a}'}\right)$$

$$= |2\,\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}\alpha|^{z}.\,\mathrm{Sin.}[\pm(2n+1)\pi+\tfrac{1}{2}\alpha]z,$$

wo n Null oder eine positive ganze Zahl bedeutet, die aber noch bestimmt werden muſs.

§. 77.

Die Betrachtungen des (§. 72.) wiederholend, überzeugt man sich leicht, daſs man den Werth von n nur für einen einzigen Werth von $\frac{1}{2}\alpha$, der zwischen den Grenzen $\pm(2\mu+\frac{1}{2})\pi$ und $\pm(2\mu+\frac{3}{2})\pi$ liegt, bestimmt zu haben braucht, um ihn für alle zwischen denselben Grenzen liegende Werthe zu haben, weil er für alle diese Werthe derselbe bleiben muſs.

Setzt man aber $\frac{1}{2}\alpha=\pm(2\mu+1)\pi$, also $\alpha=\pm(4\mu+2)\pi$, so gehen die Gleichungen (17. u. 18.) über in

$$2^{z} = 2^{z}.\,\mathrm{Cos.}[\pm(2n+1)\pi\pm(2\mu+1)\pi]$$

$$0 = 2^{z}.\,\mathrm{Sin.}[\pm(2n+1)\pi\pm(2\mu+1)\pi];$$

weshalb $\pm(2n+1)=\mp(2\mu+1)$ genommen werden muſs. Folglich hat man für alle Werthe von $\frac{1}{2}\alpha$ zwischen den Grenzen $\pm(2\mu+\frac{1}{2})\pi$ und $\pm(2\mu+\frac{3}{2})\pi$, wenn zugleich z eine beliebige positive Zahl bedeutet:

$$19)\ S.\left(\mathrm{Cos.}(\mathfrak{a}\,\alpha).\frac{z^{\mathfrak{a}\mathrm{I}-1}}{\mathfrak{a}'}\right)$$

$$= |2\,\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}\alpha|^{z}.\,\mathrm{Cos.}[\mp(2\mu+1)\pi+\tfrac{1}{2}\alpha]z$$

$$20)\ S.\left(\mathrm{Sin.}(\mathfrak{a}\,\alpha).\frac{z^{\mathfrak{a}\mathrm{I}-1}}{\mathfrak{a}'}\right)$$

$$= |2\,\mathrm{Cos.}\tfrac{1}{2}\alpha|^{z}.\,\mathrm{Sin.}[\mp(2\mu+1)\pi+\tfrac{1}{2}\alpha]z$$

wonach der Werth dieser Reihen P und Q für jeden Werth von α der zwischen diesen Grenzen liegt, bequem berechnet werden kann.

§. 78.

Setzt man auch hier 2α statt α, so ergiebt sich:

$$21)\ S.\left(\text{Cos.}(2\mathfrak{a}\alpha).\frac{z^{\mathfrak{a}I-1}}{\mathfrak{a}'}\right)$$
$$= |2\,\text{Cos.}\,\alpha|^z.\text{Cos.}[\mp(2\mu+1)\pi+\alpha].z$$

$$22)\ S.\left(\text{Sin.}(2\mathfrak{a}\alpha).\frac{z^{\mathfrak{a}I-1}}{\mathfrak{a}'}\right)$$
$$= |2\,\text{Cos.}\,\alpha|^z.\text{Sin.}[\mp(2\mu+1)\pi+\alpha].z,$$

für alle Werthe von α gültig, die zwischen den Grenzen $\pm(2\mu+\frac{1}{2})\pi$ und $\pm(2\mu+\frac{3}{2})\pi$ liegen, wenn dabei z eine beliebige positive Zahl ist.

§. 79.

Verfährt man auch hier wie in (§. 75.), so hat man noch:

$$23)\ S.\left(\text{Cos.}(z-2\mathfrak{a})\alpha.\frac{z^{\mathfrak{a}I-1}}{\mathfrak{a}'}\right)$$
$$= |2\,\text{Cos.}\,\alpha|^z.\,\text{Cos.}\,(2\mu+1).\pi z$$

$$24)\ S.\left(\text{Cos.}(z+2\mathfrak{a})\alpha.\frac{z^{\mathfrak{a}I-1}}{\mathfrak{a}'}\right)$$
$$= |2\,\text{Cos.}\,\alpha|^z.\,\text{Cos.}\,[\mp(2\mu+1)\pi+2\alpha]z$$

$$25)\ S.\left(\text{Sin.}(z-2\mathfrak{a})\alpha.\frac{z^{\mathfrak{a}I-1}}{\mathfrak{a}'}\right)$$
$$= |2\,\text{Cos.}\,\alpha|^z.\,\text{Sin.}[\pm(2\mu+1)\pi z]$$

$$26)\ S.\left(\text{Sin.}(z+2\mathfrak{a})\alpha.\frac{z^{\mathfrak{a}I-1}}{\mathfrak{a}'}\right)$$
$$= |2\,\text{Cos.}\,\alpha|^z.\,\text{Sin.}\,[\mp(2\mu+1)\pi+2\alpha]\,z.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man also die Werthe der links stehenden Reihen, für alle Werthe von α zwischen den Grenzen $\pm(2\mu+\frac{1}{2})\pi$ und $\pm(2\mu+\frac{3}{2})\pi$, und für jeden positiven (rationalen oder irrationalen) Werth von z.

§. 80.

Da aber die Reihen links in den Gleichungen (13. und 23. desgleichen 15. und 25.) wenn man x statt α und m statt z setzt, keine andern sind, als diejenigen welche wir im (§. 1.) und in der ganzen 1ten Abtheilung beziehlich durch X und Y bezeichnet haben, so sind also hierdurch auch diese Reihen X und Y, für jeden reelen Werth von x und für jeden positiven Werth von m summirt, welches (§. 46.) noch zu wünschen übrig geblieben war.

Wir finden also, aus den angeführten Gleichungen:

27) $X = (2\,\text{Cos.}\,x)^m \,.\, \text{Cos.}\,(2\mu\pi m)$

28) $Y = (2\,\text{Cos.}\,x)^m \,.\, \text{Sin.}\,(\pm 2\mu\pi m)$,

für alle Werthe von x zwischen den Grenzen $\pm(2\mu-\frac{1}{2})\pi$ und $\pm(2\mu+\frac{1}{2})\pi$; — dagegen

29) $X = |2\,\text{Cos.}\,x|^m \,.\, \text{Cos.}\,(2\mu+1)\pi m$

30) $Y = |2\,\text{Cos.}\,x|^m \,.\, \text{Sin.}\,[\pm(2\mu+1)\pi m]$,

für alle Werthe von x zwischen den Grenzen $\pm(2\mu+\frac{1}{2})\pi$ und $\pm(2\mu+\frac{3}{2})\pi$; wo in $|2\,\text{Cos.}\,x|^m$ statt 2 Cos. x nur der absolute Werth zu setzen, und von der Potenz auch nur der absolute Werth zu nehmen ist.

Nur muſs in allen Fällen m eine (beliebige) positive (rationale oder irrationale) Zahl seyn.

§. 81.

Geht man hier noch auf specielle Fälle ein, und betrachtet namentlich diejenigen, wo x in den ersten 4 Quadranten liegt, so erhält man

I. Für alle Werthe von x, die im 1ten Quadranten liegen, weil dann $\mu = 0$ ist in (27. u. 28.):

$$X = (2\,\mathrm{Cos}.\,x)^m$$
$$Y = 0;$$

II. Für alle Werthe von x im 2ten und 3ten Quadranten, weil dann in (29. u. 30.) $\mu = 0$ ist,

$$X = |2\,\mathrm{Cos}.\,x|^m \,.\, \mathrm{Cos}.\, m\pi$$
$$Y = |2\,\mathrm{Cos}.\,x|^m \,.\, \mathrm{Sin}.\, m\pi;$$

III. Für alle Werthe von x im 4ten Quadranten, weil dann in (27. u. 28.) $\mu = 1$ ist,

$$X = (2\,\mathrm{Cos}.\,x)^m \,.\, \mathrm{Cos}.\, 2m\pi$$
$$Y = (2\,\mathrm{Cos}.\,x)^m \,.\, \mathrm{Sin}.\, 2m\pi;$$

wenn nur überall m eine positive (rationale oder irrationale) Zahl ist.

§. 82.

Werden die hier betretenen Wege weiter verfolgt, so ist es sehr leicht, 1) noch weit allgemeinere Reihen zu summiren,*) und zugleich wirklich allgemeingültige (d. h. auf jeden beson-

---

*) So konnten z. B. in den Reihen (§. 67.) die einzelnen Glieder nicht bloſs mit den Fakultäten von z, sondern zugleich auch noch mit den Potenzen einer neuen veränderlichen y multiplizirt sein, und die Summation gelang noch immer.

dern Fall anwendbare und für jeden solchen besondern Fall richtige Resultate liefernde) Ausdrücke für die Summen zu erhalten; (so wie nach den in der 1ten Abtheilung angewandten Principien auch wiederum wirklich allgemeingültige Entwicklungen der endlichen Ausdrücke erlangt werden); 2) auch im Besondern, aus den allgemeingültigen Entwickelungen oder Summen-Ausdrücken, für jeden besondern Fall wiederum richtige Summen der verschiedenen numerischen Reihen zu erhalten. Dieses letztere scheint für die Anwendung wichtig zu seyn, weil, wenn man den allgemeinen Entwicklungen des La grange und aller derer, die solche wiedergegeben haben, Vertrauen schenkt, ein grofser Theil dieser numerischen Reihen, und unendlich viele Andere, von uns ein Andermal zu betrachtende, einen andern Werth erhalten, als derjenige ist, der sich auf dem hier betretenen Wege ergiebt; während dieser letztere Weg der Theorie des Kalkuls angemessen, und die auf ihm erhaltenen Resultate auch der Erfahrung entsprechend zu seyn scheinen, daher solche als die richtigen anzunehmen seyn dürften.