Dritte Abtheilung.

Summation einiger allgemeinen Reihen.

§. 55.

Wir legen uns die Aufgabe vor, die Reihen

$$\begin{matrix}\text{Cos.}\\\text{Sin.}\end{matrix} n\alpha + \begin{matrix}\text{Cos.}\\\text{Sin.}\end{matrix} (n+p)\alpha . \frac{z^m}{1} + \begin{matrix}\text{Cos.}\\\text{Sin.}\end{matrix} (n+2p)\alpha . \frac{z^{2m}}{2'}$$

$$+ \begin{matrix}\text{Cos.}\\\text{Sin.}\end{matrix} (n+3p)\alpha . \frac{z^{3m}}{3'} + \ldots \text{ in inf.}$$

zu summiren, welche Reihen man auch ausdrücken kann durch

$$\text{S.}\left[\text{Cos.}(n+\mathfrak{a}p)\alpha . \frac{z^{\mathfrak{a}m}}{\mathfrak{a}'}\right] \text{ und S.}\left[\text{Sin.}(n+\mathfrak{a}p)\alpha . \frac{z^{\mathfrak{a}m}}{\mathfrak{a}'}\right];$$

und wo n, p, α, z und m beliebige reele oder imaginäre, also ganz allgemeine Ausdrücke bedeuten.

§. 56.

Wir bemerken zunächst, daſs diese anderen Reihen

$$\text{S.}\left[\text{Cos.}(n+\mathfrak{a}\alpha) . \frac{z^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}'}\right] \text{ und S.}\left[\text{Sin.}(n+\mathfrak{a}\alpha) . \frac{z^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}'}\right]$$

in obige allgemeine übergehen, wenn man $n\alpha$ statt n, $p\alpha$ statt α und z^m statt z setzt. Wir

wol-

wollen daher lieber diese letzten einfachern Reihen summiren.

§. 57.

Weil aber

$$2\,\mathrm{Cos.}\,x = e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}$$

und $2\sqrt{-1}.\,\mathrm{Sin.}\,x = e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}$

ist, und man diese beiden Formeln vereint auch so schreiben kann

$$\begin{matrix} 2.\,\mathrm{Cos.} \\ 2.\sqrt{-1}.\,\mathrm{Sin.} \end{matrix}\; x = e^{x\sqrt{-1}} \pm e^{-x\sqrt{-1}},$$

so erhält man, dies anwendend, sogleich:

$$\mathrm{S.}\left(\begin{matrix} 2\,\mathrm{Cos.} \\ 2\sqrt{-1}.\,\mathrm{Sin.} \end{matrix}\,(n+\mathfrak{a}\alpha).\frac{z^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}'}\right)$$

$$= \mathrm{S.}\left(e^{(n+\mathfrak{a}\alpha)\sqrt{-1}}.\frac{z^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}'}\right) \pm \mathrm{S.}\left(e^{-(n+\mathfrak{a}\alpha)\sqrt{-1}}.\frac{z^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}'}\right)$$

$$= e^{n\sqrt{-1}}\,\mathrm{S.}\left((e^{\alpha\sqrt{-1}}.z)^{\mathfrak{a}}\right) \pm e^{-n\sqrt{-1}}.\mathrm{S.}\left(\frac{(e^{-\alpha\sqrt{-1}}.z)^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}'}\right)$$

$$= e^{n\sqrt{-1}}.\,e(e^{\alpha\sqrt{-1}}.z) \pm e^{-n\sqrt{-1}}.\,e(e^{-\alpha\sqrt{-1}}.z),$$

weil bekanntlich $\mathrm{S.}\left(\frac{x^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}'}\right) = e^x$ ist.

Es ist aber

$$e^{\pm\alpha\sqrt{-1}} = \mathrm{Cos.}\,\alpha \pm \sqrt{-1}.\,\mathrm{Sin.}\,\alpha,$$

folglich, wenn man dies substituirt,

$$\mathrm{S.}\left(\begin{matrix} 2\,\mathrm{Cos.} \\ 2\sqrt{-1}.\,\mathrm{Sin.} \end{matrix}\,(n+\mathfrak{a}\alpha).\frac{z^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}'}\right)$$

$$= e^{z.\,\mathrm{Cos.}\,\alpha}\left(e^{(n+z\,\mathrm{Sin.}\,\alpha)\sqrt{-1}} \pm e^{-(n+z\,\mathrm{Sin.}\,\alpha)\sqrt{-1}}\right)$$

$$= e^{z\,\mathrm{Cos.}\,\alpha} \times \begin{matrix} 2\,\mathrm{Cos.} \\ 2\sqrt{-1}.\,\mathrm{Sin.} \end{matrix}\,(n + z\,\mathrm{Sin.}\,\alpha).$$

Oder

$$1) \; S.\left(\mathrm{Cos.}(n+\mathfrak{a}\alpha).\frac{z^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}'}\right) = e^{z.\mathrm{Cos}.\alpha}.\mathrm{Cos.}(n+z.\mathrm{Sin}.\alpha)$$

$$2) \; S.\left(\mathrm{Sin.}(n+\mathfrak{a}\alpha).\frac{z^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}'}\right) = e^{z.\mathrm{Cos}.\alpha}.\mathrm{Sin.}(n+z.\mathrm{Sin}.\alpha),$$

welches die verlangten Summen sind.

§. 58.

Setzt man hier statt n, α, z
beziehlich $n\alpha, p\alpha, z^m$
so erhält man

$$3) \; S.\left(\mathrm{Cos.}(n+\mathfrak{a}p)\alpha.\frac{z^{\mathfrak{a}m}}{\mathfrak{a}'}\right)$$
$$= e^{z^m \mathrm{Cos}.p\alpha} \times \mathrm{Cos.}(n\alpha + z^m.\mathrm{Sin}.p\alpha)$$

$$4) \; S.\left(\mathrm{Sin.}(n+\mathfrak{a}p)\alpha.\frac{z^{\mathfrak{a}m}}{\mathfrak{a}'}\right)$$
$$= e^{z^m.\mathrm{Cos}.p\alpha} \times \mathrm{Sin.}(n\alpha + z^m.\mathrm{Sin}.p\alpha).$$

Und für $p = -1$ und $m = 1$,

$$5) \; S.\left(\mathrm{Cos.}(n-\mathfrak{a})\alpha.\frac{z^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}'}\right) = e^{z.\mathrm{Cos}.\alpha} \times \mathrm{Cos.}(n\alpha-z.\mathrm{Sin}.\alpha)$$

$$6) \; S.\left(\mathrm{Sin.}(n-\mathfrak{a})\alpha.\frac{z^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}'}\right) = e^{z.\mathrm{Cos}.\alpha} \times \mathrm{Sin.}(n\alpha-z.\mathrm{Sin}.\alpha).$$

Diese letztern beiden Formeln hat Herr Tralles (Abhandl. d. Berl. Akad. 1820. 21.) mit Hülfe einer *n*fachen Differentiation aus einer besondern Form, für ein ganzes positives *n*, und hernach durch eine *n*fache Integration auch für ein ganzes negatives *n* erwiesen; hier sind sie nur besondere Fälle weit allgemeinerer Reihen und für jedes (reele oder imaginäre) *n* gültig.

§. 59.

Für $n = 0$ ergiebt sich aus (§. 57. 1. u. 2.)

7) $S.\left(\mathrm{Cos.}(a\alpha).\frac{z^a}{a'}\right) = e^{z.\mathrm{Cos}.\alpha} \times \mathrm{Cos.}\,(z.\,\mathrm{Sin.}\,\alpha)$

8) $S.\left(\mathrm{Sin.}\,(a\,\alpha).\frac{z^a}{a'}\right) = e^{z.\mathrm{Cos}.\alpha} \times \mathrm{Sin.}\,(z.\,\mathrm{Sin.}\,\alpha)$.

Und wenn man hier $-z$ statt z setzt;

9) $S.\left((-1)^a.\mathrm{Cos.}(a\alpha).\frac{z^a}{a'}\right) = e^{-z.\mathrm{Cos}.\alpha} \times \mathrm{Cos.}\,(z.\,\mathrm{Sin.}\,\alpha)$,

10) $S.\left((-1)^{a+1}.\,\mathrm{Sin.}\,(a\,\alpha).\,\frac{z^a}{a'}\right)$

$= e^{-z.\mathrm{Cos}.\alpha} \times \mathrm{Sin.}\,(z.\,\mathrm{Sin.}\,\alpha)$,

wodurch dieselben Reihen mit abwechselnden Zeichen summirt sind.

§. 60.

Addirt und subtrahirt man aber die Gleichungen (7. und 9.), weil im ersten Falle die ungeraden, im andern dagegen die geraden Potenzen von z wegfallen, so findet sich:

11) $S.\left(\mathrm{Cos.}\,(2\,a\,\alpha).\,\frac{z^{2a}}{(2a)'}\right)$

$= \mathrm{Cos.}\,(z.\,\mathrm{Sin.}\,\alpha).\,\frac{e^{z.\mathrm{Cos}.\alpha} + e^{-z.\mathrm{Cos}.\alpha}}{2}$

12) $S.\left(\mathrm{Cos.}\,(2\,a+1)\,\alpha.\,\frac{z^{2a+1}}{(2a+1)'}\right)$

$= \mathrm{Cos.}\,(z.\,\mathrm{Sin.}\,\alpha).\,\frac{e^{z.\mathrm{Cos}.\alpha} - e^{-z\,\mathrm{Cos}.\alpha}}{2}$

Geschieht dasselbe mit den Gleichungen (8. und 10.), so hat man noch:

$$13)\ S.\left(\mathrm{Sin.}(2\mathfrak{a}\alpha).\frac{z^{2\mathfrak{a}}}{(2\mathfrak{a})'}\right)$$

$$= \mathrm{Sin.}\,(z.\mathrm{Sin.}\,\alpha).\frac{e^{z.\,\mathrm{Cos.}\,\alpha} - e^{-z.\,\mathrm{Cos.}\,\alpha}}{2}$$

$$14)\ S.\left(\mathrm{Sin.}(2\mathfrak{a}+1)\alpha.\frac{z^{2\mathfrak{a}+1}}{(2\mathfrak{a}+1)'}\right)$$

$$= \mathrm{Sin.}\,(z.\,\mathrm{Sin.}\,\alpha).\frac{e^{z.\,\mathrm{Cos.}\,\alpha} + e^{-z.\,\mathrm{Cos.}\,\alpha}}{2}.$$

§. 61.

Wird in den Gleichungen (11 — 14.) $z.\sqrt{-1}$ statt z gesetzt, und bemerkt man dabei, daſs
$$\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = \mathrm{Cos.}\,x;\ \frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \mathrm{Sin.}\,x$$
und $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2} = \mathrm{Cos.}(x\sqrt{-1});\ \dfrac{e^x-e^{-x}}{2\sqrt{-1}} = \mathrm{Sin.}(-x\sqrt{-1})$

ist, so erhält man, wenn in 12. u. 14. noch durch $\sqrt{-1}$ dividirt wird:

$$15)\ S.\left((-1)^{\mathfrak{a}}.\,\mathrm{Cos.}(2\mathfrak{a}\alpha).\frac{z^{2\mathfrak{a}}}{(2\mathfrak{a})'}\right)$$

$$= \mathrm{Cos.}\,(z.\,\mathrm{Cos.}\,\alpha).\frac{e^{z.\,\mathrm{Sin.}\,\alpha} + e^{-z.\,\mathrm{Sin.}\,\alpha}}{2}$$

$$16)\ S.\left((-1)^{\mathfrak{a}}.\,\mathrm{Cos.}(2\mathfrak{a}+1)\alpha.\frac{z^{2\mathfrak{a}+1}}{(2\mathfrak{a}+1)'}\right)$$

$$= \mathrm{Sin.}(z.\,\mathrm{Cos.}\,\alpha).\frac{e^{z.\,\mathrm{Sin.}\,\alpha} + e^{-z.\,\mathrm{Sin.}\,\alpha}}{2}$$

$$17)\ S.\left((-1)^{\mathfrak{a}}.\,\mathrm{Sin.}(2\mathfrak{a}\alpha).\frac{z^{2\mathfrak{a}}}{(2\mathfrak{a})'}\right)$$

$$= \mathrm{Sin.}\,(z.\,\mathrm{Cos.}\,\alpha).\frac{e^{-z.\,\mathrm{Sin.}\,\alpha} - e^{z.\,\mathrm{Sin.}\,\alpha}}{2}$$

$$18)\ S.\left((-1)^a . \text{Sin.}(2a+1)\alpha . \frac{z^{2a+1}}{(2a+1)'}\right)$$
$$= \text{Cos.}(z.\text{Cos.}\alpha) . \frac{e^{z.\text{Sin.}\alpha} - e^{-z.\text{Sin.}\alpha}}{2}.$$

Addirt oder subtrahirt man hier wieder die Gleichungen (15. und 18.), desgleichen (16. und 17.), so erhält man neue Reihen, die wiederum alle Potenzen von z enthalten, deren Koefficienten aber abwechselnd Sinus und Cosinus sind, und für welche sich beziehlich die Summen ergeben

$$19)\quad (15)+(18) = e^{z.\text{Sin.}\alpha} \times \text{Cos.}(z.\text{Cos.}\alpha)$$
$$20)\quad (15)-(18) = e^{-z.\text{Sin.}\alpha} \times \text{Cos.}(z.\text{Cos.}\alpha)$$
$$21)\quad (16)-(17) = e^{z.\text{Sin.}\alpha} \times \text{Sin.}(z.\text{Cos.}\alpha)$$
$$22)\quad (16)+(17) = e^{-z.\text{Sin.}\alpha} \times \text{Sin.}(z.\text{Cos.}\alpha).$$

§. 62.

Multiplizirt man die Gleichungen (7. und 8.) beziehlich mit Cos. n und Sin. n, und addirt man die Resultate, so erhält man wiederum die allgemeine Formel (1.). — Desgleichen erhält man die allgemeine Formel (2.), wenn die Gleichungen (7. und 8.) beziehlich mit Sin. n. und Cos. n multiplizirt und die Resultate dann addirt werden.

Man konnte also auch bloſs die Reihen (7. und 8.) unmittelbar summiren, und dann auf dem so eben bezeichneten Wege erst die allgemeinen Resultate (1 — 4.) ableiten.

§. 63.

Für $\alpha = 0$ erhält man aus den Gleichungen (15 — 16.) auch noch

23) $S.\left(\frac{(-1)^{a}.z^{2a}}{(2a)'}\right) = \text{Cos.}\, z$

24) $S\left(\frac{(-1)^{a}.z^{2a+1}}{(2a+1)'}\right) = \text{Sin.}\, z.$

Wird in der Gleichung (7.) $\alpha = 0$ gesetzt, so erhält man die bekannte Gleichung wieder, die wir oben bei der Summation angewandt haben, nehmlich

$$S.\left(\frac{z^{a}}{a'}\right) = e^{z}.$$

Wir enthalten uns übrigens der Aufzählung fernerer besonderer Zusammensetzungen, die sich leicht noch bilden, da es uns hier vorzüglich um die Aufstellung der Methode zu thun war, durch welche man zu den allgemeinen Resultaten (1. und 2.) und zu noch weit allgemeinern gelangen kann, die wir in der 4ten Abtheilung andeuten wollen.

§. 64.

Sollte die Reihe

$$S.\left([\text{Cos.}(a\alpha)]^{n}.\frac{z^{a}}{a'}\right)$$

summirt werden, so erhielte man auf demselben hier betretenen Wege, weil

$$[2\,\text{Cos.}(a\alpha)]^{n} = (e^{a\alpha\sqrt{-1}} + e^{-a\alpha\sqrt{-1}})^{n}$$

und dieses wieder, nach dem binomischen Lehrsatze

$$= S.\left(n_{b}.(e^{a\alpha\sqrt{-1}})^{n-b}.(e^{-a\alpha\sqrt{-1}})^{b}\right)$$

$$= S.\left(n_{b}.(e^{(n-2b)\alpha\sqrt{-1}})^{a}\right) \text{ ist,}$$

$$2^n . S . \left([\mathrm{Cos.}(\mathfrak{a}\alpha)]^n . \frac{z^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}'} \right)$$
$$= S . \left(\frac{n_{\mathfrak{b}} . (e^{(n-2\mathfrak{b})\alpha\sqrt{-1}} . z)^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}'} \right)$$
$$= S . \left(n_{\mathfrak{b}} . e^{(e^{(n-2\mathfrak{b})\alpha\sqrt{-1}} . z)} \right),$$

in so ferne man $S . \left(\frac{x^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}'} \right) = e^x$ hat.

Da aber

$$e^{(n-2\mathfrak{b})\alpha\sqrt{-1}} = \mathrm{Cos.}(n-2\mathfrak{b})\alpha + \sqrt{-1} . \mathrm{Sin.}(n-2\mathfrak{b})\alpha,$$

so erhält man, wenn man dies substituirt:

$$2^n . S . \left([\mathrm{Cos.}(\mathfrak{a}\alpha)]^n . \frac{z^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}'} \right)$$
$$= S . [n_{\mathfrak{b}} . e^{z . \mathrm{Cos.}(n-2\mathfrak{b})\alpha} . e^{z . \sqrt{-1} . \mathrm{Sin.}(n-2\mathfrak{b})\alpha}]$$

und weil $e^{z\sqrt{-1} . \mathrm{Sin.}(n-2\mathfrak{b})\alpha}$

$$= \mathrm{Cos.}[z . \mathrm{Sin.}(n-2\mathfrak{b})\alpha] + \sqrt{-1} . \mathrm{Sin.}[z . \mathrm{Sin.}(n-2\mathfrak{b})\alpha],$$

wiederum

25) $$2^n . S . \left([\mathrm{Cos.}(\mathfrak{a}\alpha)]^n . \frac{z^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}'} \right)$$
$$= S . [n_{\mathfrak{b}} . e^{z . \mathrm{Cos.}(n-2\mathfrak{b})\alpha} \times \mathrm{Cos.}(z . \mathrm{Sin.}(n-2\mathfrak{b})\alpha)]$$
$$+ \sqrt{-1} . S . [n_{\mathfrak{b}} . e^{z . \mathrm{Cos.}(n-2\mathfrak{b})\alpha} \times \mathrm{Sin.}(z . \mathrm{Sin.}(n-2\mathfrak{b})\alpha)]$$

für jeden Werth von n.

§. 65.

Dasselbe Resultat erhielte man auch, wenn man die Entwickelung (§. 24.) zu Hülfe nimmt, nach welcher man hat

$$2^n . [\mathrm{Cos.}(\mathfrak{a}\alpha)]^n = S . [n_{\mathfrak{b}} . \mathrm{Cos.}(n-2\mathfrak{b})\mathfrak{a}\alpha]$$
$$+ \sqrt{-1} . S . [n_{\mathfrak{b}} . \mathrm{Sin.}(n-2\mathfrak{b})\mathfrak{a}\alpha].$$

Gebraucht man dies, so hat man

$$2^n . S.\left([\text{Cos.}(\mathfrak{a}\alpha)]^n . \frac{z^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}'}\right) = S.\left(n_{\mathfrak{b}} . \text{Cos.}\mathfrak{a}(n-2\mathfrak{b})\alpha . \frac{z^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}'}\right)$$

$$+ \sqrt{-1} . S.\left(n_{\mathfrak{b}} . \text{Sin.}\,\mathfrak{a}(n-2\mathfrak{b})\alpha . \frac{z^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}'}\right),$$

folglich, nach den Gleichungen (§. 7. u. 8.), wenn man statt α, setzt $(n - 2\mathfrak{b})\alpha$, dasselbe Resultat wie (§. 64. n. 25.).

§. 66.

Für n eine positive ganze Zahl, folgt sogleich aus (§. 64. u. §. 65.):

26) $$S.\left([\text{Cos.}(\mathfrak{a}\alpha)]^n . \frac{z^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}'}\right)$$

$$= S.[n_{\mathfrak{b}} . e^{z . \text{Cos.}(n-2\mathfrak{b})\alpha} \times \text{Cos.}(z . \text{Sin.}(n-2\mathfrak{b}\alpha))]$$

27) $$0 = S.[n_{\mathfrak{b}} . e^{z . \text{Cos.}(n-2\mathfrak{b})\alpha} \times \text{Sin.}(z . \text{Sin.}(n-2\mathfrak{b})\alpha)]$$

wo die Ausdrücke rechts endliche Reihen sind, deren Gliederzahl $n + 1$ ist.

Wir enthalten uns für jetzt der weitern Ausführung, die leicht ist, und eilen zur folgenden 4ten Abtheilung.

Anmerkung.

Setzt man

1) $$\phi(z) = S.\left(\text{Cos.}(\mathfrak{a}\alpha) . \frac{z^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}'}\right)$$

2) $$\psi(z) = S.\left(\text{Sin.}(\mathfrak{a}\alpha) . \frac{z^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}'}\right)$$

so erhält man leicht, durch Differentiation:

3) $$\frac{d.\phi z}{dz} = \text{Cos.}\alpha . \phi(z) - \text{Sin.}\alpha . \psi(z)$$

4) $\frac{d.\psi z}{dz} = \text{Sin.}\alpha.\varphi(z) + \text{Cos.}\alpha.\psi(z).$

Und wenn man noch einmal nach z differentiirt:

5) $\frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} = \text{Cos.}\alpha.\frac{d.\varphi(z)}{dz} - \text{Sin.}\alpha.\frac{d.\psi(z)}{dz}$

6) $\frac{d^2\psi(z)}{dz^2} = \text{Sin.}\alpha.\frac{d.\varphi(z)}{dz} + \text{Cos.}\alpha.\frac{d.\psi(z)}{dz}.$

Hieraus durch Elimination:

7) $\frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} - 2\,\text{Cos.}\alpha.\frac{d.\varphi(z)}{dz} + \varphi(z) = 0$

8) $\frac{d^2\psi(z)}{dz^2} - 2\,\text{Cos.}\alpha.\frac{d\psi(z)}{dz} + \psi(z) = 0.$

Um nun die erste dieser Gleichungen (7.) zu integriren setze man, da sie linearisch ist,

$\varphi(z) = e^{mz}$ also $\frac{d.\varphi(z)}{dz} = m.e^{mz}, \frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} = m^2.2e^{mz}$

und die Gleichung (7.) giebt dann

9) $m^2 - 2\,\text{Cos.}\alpha.m + 1 = 0$ oder

10) $m = \text{Cos.}\alpha \pm \sqrt{-1}.\text{Sin.}\alpha;$

folglich die Integralgleichung

11) $\varphi z = A.e^{z.(\text{Cos.}\alpha + \sqrt{-1}.\text{Sin.}\alpha)} + B.e^{z(\text{Cos.}\alpha - \sqrt{-1}.\text{Sin.}\alpha)}$

Aber nach (8) eben so

12) $\psi z = C.e^{z(\text{Cos.}\alpha + \sqrt{-1}.\text{Sin.}\alpha)} + D.e^{z(\text{Cos.}\alpha - \sqrt{-1}.\text{Sin.}\alpha)}$

wo nur noch die Constanten zu bestimmen sind.

Weil aber $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ für $z = 0$ in 1 und 0 übergehen, so hat man aus (11 und 12)

13) $1 = A + B$, 14) $0 = C + D$.

Für $z = 0$ wird aber nach (3. u. 4.):

$$\frac{d.\varphi}{dz} = \text{Cos.}\,\alpha, \qquad \frac{d.\psi}{dz} = \text{Sin.}\,\alpha$$

folglich, wenn man die Gleichungen (11 und 12.) nach z differentiirt und dann $z = 0$ setzt, und die vorliegendeu Gleichungen benutzt

15) $0 = A - B$ und 16) $1 = (C - D)\sqrt{-1}$.

Also, wenn man (13 — 16.) verbindet

$$A = B = \tfrac{1}{2} \text{ und } C = \frac{1}{2\sqrt{-1}}, \; D = -\frac{1}{2\sqrt{-1}}.$$

Dadurch gehen aber die Gleichungen (11 u. 12.) über in

17) $$S.\left(\text{Cos.}(\alpha\alpha).\frac{z^{\alpha}}{\alpha'}\right) = e^{z.\,\text{Cos.}\,\alpha} \times \frac{e^{z.\,\text{Sin.}\,\alpha\sqrt{-1}} + e^{-z.\,\text{Sin.}\,\alpha\sqrt{-1}}}{2}$$

18) $$S.\left(\text{Sin.}(\alpha\alpha).\frac{z^{\alpha}}{\alpha'}\right) = e^{z.\,\text{Cos.}\,\alpha} \times \frac{e^{z.\,\text{Sin.}\,\alpha\sqrt{-1}} - e^{-z.\,\text{Sin.}\,\alpha\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

so daſs man auf diesem Wege dieselben Resultate erhält, als auf dem vorhergehenden.

Da diese letztere Methode selten die Vorzüge hat, die man ihr zuweilen beizulegen scheint, so ist solche hier nur im Vorbeigehen berührt worden.