Zweite Abtheilung.

Ueber die allgemeine Entwicklung der Sinus und Cosinus der vielfachen Bogen, nach Potenzen von Sinus und Cosinus der einfachen.

§. 47.

Man hat

1) $(\mathrm{Cos.}x + \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin.}\,x)^m = \mathrm{Cos.}mx + \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin.}mx$

2) $(\mathrm{Cos.}x - \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin.}\,x)^m = \mathrm{Cos.}mx - \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin.}mx.$

Addirt man daher oder subtrahirt man, so kommt

3) $2\,\mathrm{Cos.}mx = (\mathrm{Cos.}x + \sqrt{-1}.\mathrm{Sin.}x)^m + (\mathrm{Cos.}x - \sqrt{-1}.\mathrm{Sin.}x)^m$

4) $2\sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin.}mx = (\mathrm{Cos.}\,x + \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin.}\,x)^m$
$- (\mathrm{Cos.}\,x - \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin.}\,x)^m.$

Nun ist aber nach dem binomischen Lehrsatze

5) $(\mathrm{Cos.}\,x + \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin.}\,x)^m$
$= S\,.\,[m_\alpha.(\mathrm{Cos.}x)^{m-\alpha}.(\sqrt{-1})^\alpha.(\mathrm{Sin.}x)^\alpha],$

oder wenn man die ungeraden Glieder, und die geraden zusammennimmt (dadurch, daſs man erst 2α, dann $2\alpha+1$ statt α schreibt):

6) $(\mathrm{Cos.}\,x + \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin}\,x)^m$
$= S\,.\,[m_{2\alpha}.(-1)^\alpha.(\mathrm{Cos.}\,x)^{m-2\alpha}.(\mathrm{Sin.}\,x)^{2\alpha}]$
$+ \sqrt{-1}.S.[m_{2\alpha+1}.(-1)^\alpha.(\mathrm{Cos.}x)^{m-2\alpha-1}.(\mathrm{Sin.}x)^{2\alpha+1}].$

Eben so erhält man auch

7) $(\text{Cos.}\, x - \sqrt{-1} \cdot \text{Sin.}\, x)^m$

$$= S\,.\,[m_{2\alpha}\,.\,(-1)^\alpha\,.\,(\text{Cos.}\,x)^{m-2\alpha}\,.\,\text{Sin.}\,x^{2\alpha}]$$

$$-\sqrt{-1}\,.\,S\,.\,[m_{2\alpha+1}\,.\,(-1)^\alpha\,.\,(\text{Cos.}\,x)^{m-2\alpha-1}\,.\,(\text{Sin.}\,x)^{2\alpha+1}].$$

Also wenn man die beiden letzten Gleichungen addirt oder subtrahirt:

8) $\text{Cos.}\,mx = S\,.\,[m_{2\alpha}\,.\,(-1)^\alpha\,.\,(\text{Cos.}\,x)^{m-2\alpha}\,.\,\text{Sin.}\,x^{2\alpha}]$

und

9) $\text{Sin.}\,mx = S\,.\,[m_{2\alpha+1}\,.\,(-1)^\alpha\,.\,(\text{Cos.}\,x)^{m-2\alpha-1}\,.\,(\text{Sin.}\,x)^{2\alpha+1}]$

oder auch

10) $\text{Cos.}\,mx = (\text{Cos.}\,x)^m\,.\,S\,.\,[m_{2\alpha}\,.\,(-1)^\alpha\,.\,(\text{tg.}\,x)^{2\alpha}]$

11) $\text{Sin.}\,mx = (\text{Cos.}\,x)^m\,.\,S\,.\,[m_{2\alpha+1}\,.\,(-1)^\alpha\,.\,(\text{tg.}\,x)^{2\alpha+1}]$.

Und weil diese Entwicklungen bloſs aus dem binomischen Lehrsatze gefolgert sind, der für jedes m gleichmäſsig statt findet, so dürfte man solche Entwicklungen nach dem Beispiele Lagrange's und seiner Nachfolger für allgemeingültig halten, wenn nicht zu berücksichtigen wäre, was (§. 14.) in Bezug auf das Arbeiten mit allgemeinen Potenzen bemerkt worden ist.

§. 48.

Daſs die im (§. 47.) dargestellten Entwicklungen nicht allgemein gültig sind, erhellet sogleich, wenn in ihnen $\pm 2\mu\pi + x$ statt x gesetzt wird. Denn dann bleiben die Reihen rechts genau dieselben, während Cos. mx und Sin. mx übergehen in $\text{Cos.}\,(\pm 2\mu\pi + x)m$ und $\text{Sin.}\,(\pm 2\mu\pi + x)m$, so daſs man dann allgemein hätte

$$\text{Cos.}\,mx = \text{Cos.}\,m\,.\,(\pm 2\mu\pi + x)$$

$$\text{Sin.}\,mx = \text{Sin.}\,m\,.\,(\pm 2\mu\pi + x),$$

welches inzwischen offenbar nur dann für jeden Werth von x gilt, wenn m eine ganze Zahl ist.

§. 49.

Nach den Principien (§. 14.) ist es auch nicht schwer die Ursache davon zu erkennen. Es sind nehmlich die Gleichungen (1, 2.) und also auch (3. u. 4.) (§. 47.) nur unter der Voraussetzung gültig, daſs die Potenzen

$(\text{Cos.}\,x + \sqrt{-1}\,.\,\text{Sin.}\,x)^m$ und $(\text{Cos.}\,x - \sqrt{-1}\,.\,\text{Sin.}\,x)^m$

einen bestimmten ihrer Werthe vorstellen, wofür nachher nicht jeder beliebige andere derselben Werthe gesetzt werden darf. Die Entwicklungen in (6. u. 7. §. 47.) geben aber rechts auch jedesmal nur einen einzigen der Werthe der Potenzen links an. Indem man nun diese letzteren Werthe statt der allgemeinen Potenzen in (3. u. 4. §. 47.) substituirte, hat man vielleicht gerade andere Werthe für die Potenzen gesetzt, als die sie dort repräsentiren. Der (§. 48.) nachgewiesene Erfolg macht aber diese Vermuthung zur Gewiſsheit.

§. 50.

Will man daher wirklich allgemeingültige Resultate haben, so muſs man die Gleichungen (§. 47. 6. u. 7.) dadurch rechts vervollständigen, daſs man die dortigen Reihen noch mit 1^m, oder die erste mit

$$\text{Cos.}(\pm 2mn\pi) + \sqrt{-1}\,.\,\text{Sin.}(\pm 2mn\pi),$$

die andere dagegen mit

$$\text{Cos.}(\pm 2m\nu\pi) - \sqrt{-1}\,.\,\text{Sin.}(\pm 2m\nu\pi)$$

multiplicirt, damit, indem n und v noch willkührlich Null oder irgend eine ganze Zahl vorstellen, wenigstens der jedesmalige wahre Werth der Potenzen in den Gleichungen (3. u. 4. §. 47.) noch genommen werden könne. Bezeichnet man nachher die Reihen.

$$S.\,[m_{2a}.(-1)^a.(\mathrm{Cos.}\,x)^{m-2a}.(\mathrm{Sin.}\,x)^{2a}$$

und $S.\,[m_{2a+1}.(-1)^a.(\mathrm{Cos.}\,x)^{m-2a-1}.(\mathrm{Sin.}\,x)^{2a+1}]$,

oder $(\mathrm{Cos.}\,x)^m.S.[m_{2a}(-1)^a.(\mathrm{tg.}\,x)^{2a}]$

und $(\mathrm{Cos.}\,x)^m.S.[m_{2a+1}(-1)^a.(\mathrm{tg.}\,x)^{2a+1}]$

durch P und durch Q,

so erhält man:

$$\begin{aligned}2\,\mathrm{Cos.}\,mx = {} & [(\mathrm{Cos.}(\pm 2mn\pi)+\mathrm{Cos.}(\pm 2mv\pi))\\ & +\sqrt{-1}(\mathrm{Sin.}(\pm 2mn\pi)+\mathrm{Sin.}(\pm 2mv\pi))]\times P\\ & +\sqrt{-1}\times[(\mathrm{Cos.}(\pm 2mn\pi)-\mathrm{Cos.}(\pm 2mv\pi))\\ & +\sqrt{-1}(\mathrm{Sin.}(\pm 2mn\pi)-\mathrm{Sin.}(\pm 2mv\pi))]\times Q\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\sqrt{-1}.\mathrm{Sin.}\,mx = {} & [(\mathrm{Cos.}(\pm 2mn\pi)-\mathrm{Cos.}(\pm 2mv\pi))\\ & +\sqrt{-1}(\mathrm{Sin.}(\pm 2mn\pi)-\mathrm{Sin.}(\pm 2mv\pi))]\times P\\ & +\sqrt{-1}\times[(\mathrm{Cos.}(\pm 2mn\pi)+\mathrm{Cos.}(\pm 2mv\pi))\\ & +\sqrt{-1}(\mathrm{Sin.}(\pm 2mn\pi)+\mathrm{Sin.}(\pm 2mv\pi))]\times Q\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}12)\quad 2\,\mathrm{Cos.}\,mx = {} & (\mathrm{Cos.}(\pm 2mn\pi)+\mathrm{Cos.}(\pm 2mv\pi))\times P\\ & -(\mathrm{Sin.}(\pm 2mn\pi)-\mathrm{Sin.}(\pm 2mv\pi))\times Q\\ & +\sqrt{-1}[(\mathrm{Sin.}(\pm 2mn\pi)+\mathrm{Sin.}(\pm 2mv\pi))\times P\\ & +(\mathrm{Cos.}(\pm 2mn\pi)-\mathrm{Cos.}(\pm 2mv\pi))\times Q]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}13)\quad 2\,\mathrm{Sin.}\,mx = {} & (\mathrm{Cos.}(\pm 2mn\pi)+\mathrm{Cos.}(\pm 2mn\pi))\times Q\\ & +(\mathrm{Sin.}(\pm 2mn\pi)+\mathrm{Sin.}(\pm 2mv\pi))\times P\\ & +\sqrt{-1}[(\mathrm{Sin.}(\pm 2mn\pi)+\mathrm{Sin.}(\pm 2mv\pi))\times Q\\ & -(\mathrm{Cos.}(\pm 2mn\pi)-\mathrm{Cos.}(\pm 2mv\pi))\times P].\end{aligned}$$

Dies nun sind die allgemein gültigen Entwicklungen, welche, wie man sieht, für m eine ganze Zahl in

$$2\,\mathrm{Cos.}\,mx = P \text{ und } 2\,\mathrm{Sin.}\,mx = Q$$

übergehen, wie solche (§. 47.) gefunden worden sind. Die Entwicklungen des (§. 47.) gelten also nur, wenn m eine ganze Zahl ist; und für einen negativen ganzen Werth von m, wiederum nicht mehr als allgemeine Identitäten, sondern nur als Werth-Identitäten, und also nur unter der Voraussetzung daſs die vorkommenden Reihen convergent sind. (§. 14.).

§. 51.

In den Entwicklungen (12. u. 13. §. 50.) bedeuten n und v Null oder irgend eine absolute ganze Zahl, welche für jeden besondern Fall, in welchem die Reihen convergiren, so daſs nach ihren Werthen gefragt werden kann, noch besonders bestimmt werden müssen. Wir haben aber bereits früher gesehen, daſs man die Abhängigkeit der n und v von einander im Allgemeinen, unabhängig von den Werthen von x, nicht bestimmen könne, weil, so wie von besondern Werthbestimmungen die Rede ist, die allgemeine Identität aufhört, und dann alles das in seine Rechte treten muſs, was über die besondern Werth-Identitäten aus den Principien des Kalkuls hervorgeht. Diese lehren aber, daſs P, Q, n, und v, also auch x, n und v in einer gegenseitigen, durch die Gleichungen (12. und 13. §. 50.) selbst bedingten Abhängigkeit stehen.

Von diesem letztern kann man sich für den gegenwärtigen Fall auch noch à posteriori überzeugen. Setzt man nehmlich in den Formeln (12. und 13. §. 50.) $2\mu\pi + x$ statt x, so bleiben P und Q und überhaupt die Ausdrücke rechts unverändert, während $2\,\text{Cos.}\,mx$ und $2\,\text{Sin.}\,mx$ zur Linken in

$$2\,\text{Cos.}\,(2\mu\pi + x)m \text{ und } 2\,\text{Sin.}\,(2\mu\pi + x)m$$

oder in $2\,\text{Cos.}\,2\mu m\pi\,.\,\text{Cos.}\,mx - 2\,\text{Sin.}\,2\mu m\pi\,.\,\text{Sin.}\,mx$ und $2\,\text{Sin.}\,2\mu m\pi\,.\,\text{Cos.}\,mx + 2\,\text{Cos.}\,2\mu m\pi\,.\,\text{Sin.}\,mx$ übergehen. Multiplizirt man nun die so entstehenden neuen Gleichungen beziehlich mit $\text{Cos.}\,2\mu m\pi$ und mit $\text{Sin.}\,2\mu m\pi$, und addirt oder subtrahirt man hernach die Resultate, so erhält man links abermals $2\,\text{Cos.}\,mx$ und $2\,\text{Sin.}\,mx$, rechts aber, nach gehöriger Reduction, dieselben Ausdrücke wie (§. 50. 12. u. 13.) nur mit dem Unterschiede, daſs n in $n \pm \mu$, der Buchstabe v dagegen in $v \mp \mu$ übergegangen ist, so daſs also die Abhängigkeit des n von dem v, durch dieses μ selbst geändert, und der Unterschied $n - v$ um 2μ gröſser oder kleiner geworden ist; woraus zugleich das Gesetz dieser veränderlichen Abhängigkeit leicht abzuleiten seyn dürfte.

§. 52.

Statt der Gleichungen (3. u. 4. §. 47.) kann man auch diese setzen

14) $2\,\text{Cos.}\,mx = (\sqrt{-1}\,.\,\text{Sin.}\,x + \text{Cos.}\,x)^m$

15) $2\sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin.}\,mx = (\sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin.}\,x + \mathrm{Cos.}\,x)^m$
$- (-\sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin.}\,x + \mathrm{Cos.}\,x)^m.$

Man hat aber nach dem binomischen Lehrsatze

16) $(\sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin.}\,x + \mathrm{Cos.}\,x)^m$
$= (\sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin.}x)^m\,.\,S.[m_a\,.\,(-\sqrt{-1})^a\,.\,(\mathrm{Cotg.}x)^a]$

und

17) $(-\sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin.}\,x + \mathrm{Cos.}\,x)^m$
$= (-\sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin.}x)^m\,.\,S.[m_a\,.\,(\sqrt{-1})^a\,.\,(\mathrm{Cotg.}x)^a].$

und wenn man in (16. u. 17.) die ungeraden und die geraden Glieder absondert (dadurch, daſs man erst $2a$, dann $2a+1$ statt a schreibt), so erhält man:

18) $(\sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin.}\,x + \mathrm{Cos.}\,x)^m$
$= (\sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin.}\,x)^m\,.\,(S.[m_{2a}(-1)^a\,.\,(\mathrm{Cotg.}\,x)^{2a}]$
$- \sqrt{-1}\,.\,S.[m_{2a+1}\,.\,(-1)^a\,.\,(\mathrm{Cotg.}\,x)^{2a+1}])$

19) $(-\sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin.}\,x + \mathrm{Cos.}\,x)^m$
$= (-\sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin.}x)^m\,.\,(S.[m_{2a}\,.\,(-1)^a\,.\,(\mathrm{Cotg.}x)^{2a}]$
$+ \sqrt{-1}\,.\,S.[m_{2a+1}\,.\,(-1)^a\,.\,(\mathrm{Cotg.}x)^{2a+1}]).$

Dies in (14. u. 15.) substituirt:

20) $2\,\mathrm{Cos.}mx = (\mathrm{Sin.}x)^m\,.\,[((\sqrt{-1})^m + (-\sqrt{-1})^m)\,.\,{}_1P$
$- \sqrt{-1}\,.\,((\sqrt{-1})^m - (-\sqrt{-1})^m)\,.\,{}_1Q]$

21) $2\sqrt{-1}.\mathrm{Sin.}mx = (\mathrm{Sin.}x)^m\,.\,[((\sqrt{-1})^m - (-\sqrt{-1})^m)\,.\,{}_1P$
$- \sqrt{-1}\,.\,((\sqrt{-1})^m + (-\sqrt{-1})^m)\,.\,{}_1Q],$

wenn durch ${}_1P$ und ${}_1Q$ bezeichnet sind die Reihen

$S.[m_{2a}(-1)^a\,.\,(\mathrm{Cotg.}\,x)^{2a}]$

und $S.[m_{2a+1}(-1)^a\,.\,(\mathrm{Cotg.}\,x)^{2a+1}],$

wo ferner $(\mathrm{Sin.}\,x)^m$ einen beliebigen ihrer Werthe bedeutet, wenn man endlich in jedem besondern Falle für die beiden Potenzen $(\sqrt{-1})^m$ und $(-\sqrt{-1})^m$ die jedesmal gehörigen ihrer Werthe setzt; die jedoch von den Werthen von x selbst nach einem bestimmten Gesetze abhängig seyn werden.

Nimmt man statt m eine positive ganze Zahl, so gehen aus diesen allgemeinen Entwickelungen bekannte trigonometrische Relationen hervor.

§. 53.

La grange *) stellt außer den Entwicklungen (§. 47. 8. u. 9.) auch noch folgende auf:

$$\text{I. } 2\,\text{Cos.}\,mx = (2\,\text{Cos.}\,x)^m - m.(2\,\text{Cos.}\,x)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{2}(2\,\text{Cos.}\,x)^{m-4} - \text{etc. etc.}$$
$$+ (2\,\text{Cos.}\,x)^{-m} + m(2\,\text{Cos.}\,x)^{-m-2} + \frac{m(m+3)}{2}(2\,\text{Cos.}\,x)^{-m-4} - \text{etc. etc.}$$

$$\text{II. } 2\,\text{Sin.}\,mx = [(2\,\text{Cos.}\,x)^{m-1} - (m-2)(2\,\text{Cos.}\,x)^{m-3} + \frac{(m-3)(m-4)}{2}(2\,\text{Cos.}\,x)^{m-5} - \text{etc.}].\,\text{Sin.}\,x$$
$$-[(2\,\text{Cos.}\,x)^{-m-1} + (m+2)(2\,\text{Cos.}\,3)^{-m-3} + \frac{(m+3)(m+4)}{2}(2\,\text{Cos.}\,x)^{-m-5} - \text{etc.}]..\,\text{Sin.}\,x.$$

$$\text{III. Cos.}\,mx = [1 - \frac{m^2}{2}(\text{Cos}\,x)^2 + \frac{m^2(m^2-4)}{2\cdot 3\cdot 4}(\text{Cos.}\,x)^4$$
$$- \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}(\text{Cos.}\,x)^6 + \text{etc.}].\,\text{Cos.}\frac{m\pi}{2}$$

*) Leçons sur le Calcul des fonctions. Leçon XI.

$$+ \left[m \,.\, \text{Cos.}\, x - \frac{m(m^2-1)}{2 \cdot 3} (\text{Cos.}\, x)^3 \right.$$

$$\left. + \frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} (\text{Cos.}\, x)^5 \text{- etc.}\right] . \text{Sin.} \frac{m\pi}{2}$$

$$\text{IV. Sin.}\, mx = -\left[m \,.\, \text{Cos.}\, x - \frac{m(m^2-4)}{2 \cdot 3} \times \right.$$

$$\left. (\text{Cos.}\, x)^3 + \ldots\right] \text{Sin.}\, x \,.\, \text{Cos.} \frac{m\pi}{2}$$

$$+ \left[1 - \frac{m^2-1}{2} (\text{Cos.}\, x)^2 + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \times \right.$$

$$\left. (\text{Cos.}\, x)^4 - \ldots\right] \text{Sin}\, x \,.\, \text{Sin.} \frac{m\pi}{2}$$

$$\text{V. Sin.}\, mx = \text{Cos.}\, x \left[m \,.\, \text{Sin.}\, x - \frac{m(m^2-4)}{2 \cdot 3} (\text{Sin.}\, x)^3 \right.$$

$$\left. + \frac{m(m^2-4)(m^2-16)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} (\text{Sin.}\, x)^5 + \ldots\right]$$

$$\text{VI. Cos.}\, mx = \text{Cos.}\, x \left[1 - \frac{m^2-1}{2} (\text{Sin.}\, x)^2 \right.$$

$$\left. + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{2 \cdot 3 \cdot 4} (\text{Sin.}\, x)^4 + \ldots\right]$$

$$\text{VII. Cos.}\, mx = 1 - \frac{m^2}{2} (\text{Sin.}\, x)^2$$

$$+ \frac{m^2(m^2-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4} (\text{Sin.}\, x)^4 - \ldots.$$

$$\text{VIII. Sin.}\, mx = m \,.\, \text{Sin.}\, x - \frac{m(m^2-1)}{2 \cdot 3} (\text{Sin.}\, x)^2$$

$$+ \frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} (\text{Sin.}\, x)^4 - \ldots$$

Obgleich aber La grange diese 11^{te} Vorlesung bloſs dem Bestreben gewidmet hat, die allgemeine Gültigkeit der hier stehenden Entwickelungen auſser Zweifel zu setzen, so scheint er doch seinen Zweck verfehlt zu haben. Denn setzt man in allen diesen Entwickelungen $\pm 2\mu\pi + x$ statt x, so bleiben die Ausdrücke rechts unverändert, und es müſste dann auch allgemein

$$\text{Cos.}\, mx = \text{Cos.}\,(\pm 2\mu\pi + x)m$$

und

$$\text{Sin.}\, mx = \text{Sin.}\,(\pm 2\mu\pi + x)m$$

seyn, welches offenbar nicht der Fall ist, obgleich solches immer gilt, wenn m eine ganze Zahl.

§. 54.

Befolgt man die (§. 14.) angedeuteten Principien des Kalkuls mit der gehörigen Konsequenz, so wird man auch leicht, den Gang der Entwickelungen des La grange verfolgend, überall die Stelle nachweisen können, wo seine Schlüsse aufhören, allgemeine Gültigkeit zu haben. — Nach denselben Principien kann man nachher auch die wirklich allgemein-gültigen Entwickelungen durchzuführen versuchen. — Ferner lassen sich in Bezug auf diese Entwickelungen, wenn man in das Besondere eingeht, sehr interessante Untersuchungen anstellen, welche auf Summationen unendlich vieler numerischer Reihen hinauslaufen, für welche man, diesen Beweisen des La grange zu Folge, ganz andere Werthe bekommen würde, als sie in der That haben. Da wir jedoch in der 4^{ten} Abtheilung dieser Bogen, wie diese Untersuchungen angestellt werden dürften, an einem Falle nachzuweisen bemüht sind, so versparen wir, mehr Details über die vorliegenden Entwickelungen noch mitzutheilen, zu einer andern Gelegenheit.