Erste Abtheilung.

Ueber die Entwicklung der Potenzen von Sinus und Cosinus in Reihen, die nach Sinus und Cosinus der vielfachen Bogen fortgehen.

§. 1.

Der von Euler*) betretene Weg, diese Entwicklung zu erhalten, ist im wesentlichen folgender: Man setzt

$$\text{Cos.}\,x + \sqrt{-1}\,.\,\text{Sin.}\,x = y$$

$$\text{und Cos.}\,x - \sqrt{-1}\,.\,\text{Sin.}\,x = z,$$

und man hat $y + z = 2\,.\,\text{Cos.}\,x$,

so wie $yz = 1$.

Nun ist aber nach dem binomischen Lehrsatz $(y+z)^m =$ einer Reihe, deren n^{tes} Glied ausgedrückt wird, durch $m_n\,.\,y^{m-n}\,z^n$,

oder durch $m_n\,.\,y^{m-2n}(yz)^n$,

oder, weil $yz = 1$, durch $m_n\,.\,y^{m-2n}$,

so daſs man hat

$$\text{I.}\quad (y+z)^m = S\,.\,[m_\alpha\,.\,y^{m-2\alpha}],$$

*) Novi Commentarii Acad. Petrop. t. V. 1755. p. 164.

wenn wir hier, und von nun an immer, durch das dem allgemeinen Gliede vorgesetzte S die Reihe selbst, so wie durch die deutschen Buchstaben diejenigen vorstellen lassen, welche nach und nach die Werthe 0, 1, 2, 3, 4, etc. erhalten müssen.

Ferner ist bekanntlich

$(\text{Cos.}\,x + \sqrt{-1}\,.\,\text{Sin}\,x)^p = \text{Cos.}\,px + \sqrt{-1}\,.\,\text{Sin.}\,px,$

oder, wenn man $m - 2\mathfrak{a}$ statt p, und y statt $\text{Cos.}\,x + \sqrt{-1}\,.\,\text{Sin.}\,x$ setzt,

$y^{m-2\mathfrak{a}} = \text{Cos.}(m-2\mathfrak{a})x + \sqrt{-1}\,.\,\text{Sin.}(m-2\mathfrak{a})x,$

und wenn dies in (I) substituirt, und statt $y+z$ sein Werth $2\,\text{Cos.}\,x$ gesetzt wird:

$$(2\,.\,\text{Cos.}\,x)^m$$
$$= S\,.\,[m_{\mathfrak{a}}\,.\,(\text{Cos.}(m-2\mathfrak{a})x + \sqrt{-1}.\text{Sin.}(m-2\mathfrak{a})x)]$$

oder

$$\text{II.}\ \begin{cases} (2\,.\,\text{Cos.}\,x)^m = S\,.\,[m_{\mathfrak{a}}\,.\,\text{Cos.}(m-2\mathfrak{a})x] + \\ \qquad + \sqrt{-1}\,.\,S\,.\,[m_{\mathfrak{a}}\,.\,\text{Sin.}(m-2\mathfrak{a})\,.\,x]. \end{cases}$$

Bezeichnet man hier die erste Reihe

$S\,.\,[m_{\mathfrak{a}}\,.\,\text{Cos.}(m-2\mathfrak{a})x]$ durch X,

die andere $S\,.\,[m_{\mathfrak{a}}\,.\,\text{Sin.}(m-2\mathfrak{a})x]$ durch Y,

so hat man

$$\text{III.}\ (2\,.\,\text{Cos.}\,x)^m = X + \sqrt{-1}\,.\,Y.$$

Es ist aber ferner nach dem binomischen Lehrsatz, wenn man $z+y$ statt $y+z$ nimmt,

$$\text{IV.}\ (z+y)^m = S\,.\,[m_{\mathfrak{a}}\,.\,z^{m-2\mathfrak{a}}],$$

welches auch unmittelbar folgt, wenn man z und x in der Gleichung (I.) mit einander vertauscht.

Aber auch, wie oben

$(\mathrm{Cos.}\,x - \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin.}\,x)^p = \mathrm{Cos.}\,px - \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin.}\,px,$

oder

$$\begin{cases} (\mathrm{Cos.}\,x - \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin.}\,x)^{m-2\alpha} \\ \quad = \mathrm{Cos.}\,(m-2\alpha)x - \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin.}\,(m-2\alpha)\,x; \end{cases}$$

folglich wenn man dies in (IV.) substituirt, und $2\,\mathrm{Cos.}\,x$ statt $z+y$ schreibt:

V. $(2\,\mathrm{Cos.}\,x)^m = X - \sqrt{-1}\,.\,Y;$

wo X und Y dieselben Reihen vorstellen, wie in (III.).

Addirt man nun die Gleichungen (III.) und (V.), so erhält man

VI. $(2\,\mathrm{Cos.}\,x)^m = X = S\,.\,[m_\alpha\,.\,\mathrm{Cos.}\,(m-2\alpha)x],$

und wenn dieselben Gleichungen von einander subtrahirt werden:

VII. $0 = Y = S\,.\,[m_\alpha\,.\,\mathrm{Sin.}\,(m-2\alpha)\,x].$

§. 2.

Davon, daſs $Y = 0$ ist, wenn m eine absolute ganze Zahl, kann man sich noch auf folgende Art überzeugen. Es hat nehmlich die Reihe Y dann $m+1$ Glieder. Unter diesen ist das $(p+1)^{\text{te}}$ Glied vom Anfange $= m_p\,.\,\mathrm{Sin.}\,(m-2p)x$, und das $p+1^{\text{te}}$ Glied vom Ende ist das $(m-p+1)^{\text{te}}$ Glied vom Anfange, also auch $= m_{m-p}\,.\,\mathrm{Sin.}\,[m-2(m-p)]\,x$

$$= m_{m-p}\,.\,\mathrm{Sin.}\,[-(m-2p)\,x];$$

und diese beiden Glieder addirt geben Null, weil $m_p = m_{m-p}$ und $\mathrm{Sin.}\,(-v) = -\,\mathrm{Sin.}\,v$. Es heben sich also die gleichweit vom Anfange und vom Ende stehenden Glieder einander auf, und das mittlere Glied, welches in dem Falle übrig bleibt, in welchem $m+1$ eine ungerade, also m eine gerade Zahl, ist das $(\frac{1}{2}m+1)^{te}$ vom Anfang, also $= m_{(\frac{1}{2}m)} \,.\, \text{Sin.}\, o \,.\, x = o$; mithin immer

$$Y = o.$$

§. 3.

Lagrange*) hat dieselbe Aufgabe ohngefähr auf nachstehende Art zu lösen gesucht. Er setzt

$$\text{I.} \qquad y = (\text{Cos.}\, x)^m$$

und diese Gleichung differentiirt, giebt:

$$\frac{dy}{dx} = -m \,.\, (\text{Cos.}\, x)^{m-1} \,.\, \text{Sin.}\, x;$$

und wenn man $(\text{Cos.}\, x)^m$ eliminirt,

$$\text{II.} \qquad my \,.\, \text{Sin.}\, x + \text{Cos.}\, x \,.\, \frac{dy}{dx} = o.$$

Es kommt nun darauf an, irgend eine Reihe von gewünschter Form mit unbestimmten Koefficienten anzunehmen, und nachgehends diese Koefficienten so zu bestimmen, daſs diese Reihe statt y gesetzt, der Differentialgleichung (II.) genüge. Enthält dann diese Reihe noch eine unbestimmte Constante, so ist sie als das vollständige Integral auzusehen, so daſs die Constante nur noch zweckmäſsig bestimmt werden muſs, um das besondere Integral $(\text{Cos.}\, x)^m$, welches das vollständige umfassen muſs, zu liefern.

---

*) Léçons sur le Calcul des fonctions. Léçon XI.

La grange setzt daher

$$y = A.\mathrm{Cos.}\,nx + B.\mathrm{Cos.}(n-1)x + C.\mathrm{Cos.}(n-2)x + \\ + D.\mathrm{Cos.}(n-3)x + E.\mathrm{Cos.}(n-4)x + \ldots\ldots$$

wo n und A, B, C, D, etc. noch zu bestimmen sind.

Daraus folgt:

$$\frac{dy}{dx} = -[nA.\mathrm{Sin.}\,nx + (n-1)B.\mathrm{Sin.}(n-1)x + \\ + (n-2)C.\mathrm{Sin.}(n-2)x + \ldots.]$$

und wenn man diese Werthe statt y und $\frac{dy}{dx}$ in die Gleichung (II.) substituirt.

$$\text{III.}\quad m[A.\mathrm{Cos.}\,nx + B.\mathrm{Cos.}(n-1)x + \\ + C.\mathrm{Cos.}(n-2)x + \ldots.].\mathrm{Sin.}\,x \\ -[nA.\mathrm{Sin.}\,nx + (n-1).B.\mathrm{Sin.}(n-1)x + \\ + (n-2).C.\mathrm{Sin.}(n-2)x + \ldots].\mathrm{Cos.}\,x = 0;$$

oder, wenn mittelst der Formel

$$2.\mathrm{Sin.}\,x.\mathrm{Cos.}\,y = \mathrm{Sin.}(x+y) + \mathrm{Sin.}(x-y)$$

die Produkte der Sinus und Cosinus entwickelt und geordnet werden:

$$\left.\begin{array}{l} (mA-nA).\mathrm{Sin.}(n+1)x \\ +[mB-(n-1)B].\mathrm{Sin.}\,nx \\ +[mC-mA-(n-2)C-nA].\mathrm{Sin.}(n-1)x \\ +[mD-mB-(n-3)D-(n-1)B].\mathrm{Sin.}(n-2)x \\ +[mE-mC-(n-4)E-(n-2)C].\mathrm{Sin.}(n-3)x \\ + \text{ etc. etc. etc.} \end{array}\right\} = 0\ldots\text{IV.}$$

Alle Werthe von n, A, B, C, D, ... welche nun dieser Gleichung genügen, genügen auch der Differentialgleichung (II.), entsprechen also der Forderung vollkommen. — La grange genügt aber dieser Gleichung (IV.), indem er setzt:

$$\begin{array}{r} (m-n).A=0 \\ (m-n+1).B=0 \\ (m-n+2).C-(m+n)\quad .\quad A=0 \\ (m-n+3).D-(m+n-1).B=0 \\ (m-n+4).E-(m+n-2).C=0 \end{array}$$

u. s. w. f.

Und diesen Gleichungen genügt er wieder, indem er $m=n$, und dann aus ihnen B, C, D, E, etc. in A ausgedrückt findet; während A unbestimmt bleibt, mithin als die willkührliche Constante angesehen werden muſs. Man erhält dadurch

$$\text{V.}\quad y=A[\text{Cos.}\,mx+m_1.\text{Cos.}(m-2)x+$$
$$+m_2.\text{Cos.}(m-4)x+\ldots.]$$

Zur Bestimmung der Constante A setzt man $x=0$, wo dann $y=1$ werden muſs, und erhält also

$$1=A.(1+m_1+m_2+m_3+\ldots)=A.(1+1)^m;$$

mithin $$A=\frac{1}{2^m}.$$

Auch La grange erhält daher auf diesem Wege, wie früher Euler

$$(2.\text{Cos.}\,x)^m = X,$$

also auch $$0 = Y,$$

wobei La grange ausdrücklich bemerkt, daſs diese Entwicklung allgemein für jeden Exponenten m gelte.

§. 4.

Poiſson *) bemerkte, daſs diese dem Anschein nach so streng erwiesene Gleichung

$$(2.\text{Cos.}\,x)^m = X \qquad\qquad \text{oder}$$

*) Correspondance sur l'Ecole polytechnique. 1811. p. 212.

$$\text{I.}\left\{\begin{array}{l}(2.\text{Cos.}\,x)^m = \text{Cos.}\,mx + m_1.\text{Cos.}\,(m-2)x + m_2.\\ \qquad\text{Cos.}\,(m-4)x + \ldots\end{array}\right.$$

nicht gilt, wenn $x = \pi$ und $m = \frac{1}{3}$ gesetzt wird; denn es ist dann

$$\begin{aligned}\text{Cos.}\,(m-2\alpha)x &= \text{Cos.}\,(m\pi - 2\alpha\pi) = \text{Cos.}\,m\pi,\\ \text{Cos.}\,x &= \text{Cos.}\,\pi = -1;\end{aligned}$$

und die Gleichung (I.) giebt daher in diesem Falle

$$\begin{aligned}(-2)^{\frac{1}{3}} &= \text{Cos.}\,\frac{\pi}{3}.\left[1 + (\tfrac{1}{3})_1 + (\tfrac{1}{3})_2 + (\tfrac{1}{3})_3 + \ldots\right]\\ &= \text{Cos.}\,\frac{\pi}{3}.(1+1)^{\frac{1}{3}} = \text{Cos.}\,\frac{\pi}{3} \times 2^{\frac{1}{3}},\end{aligned}$$

welches Resultat offenbar unrichtig ist, weil man bekanntlich hat

$$(-2)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}.(-1)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}.\left(\text{Cos.}\frac{\pi}{3} \pm \sqrt{-1}.\text{Sin.}\frac{\pi}{3}\right).$$

§. 5.

Dies gab Veranlassung zu wiederholten Versuchen, die allgemeine Gültigkeit oder Ungültigkeit der Gleichungen

$$\begin{aligned}(2.\text{Cos}\,x)^m &= X\\ \text{und}\qquad 0 &= Y,\end{aligned}$$

von denen die eine aus der andern nothwendig folgert, nachzuweisen. Lacroix *) bemerkt, daſs auf demselben Wege, auf welchem Lagrange seiner Differentialgleichung (§. 3. II.) durch dies allgemeine Integral

*) Traité du calcul differentiel et du calcul intégral. 2° Edit. T. 3me. p. 616.

$$y = A \,.\, X$$

genügte, ihr auch durch

$$y = B \,.\, Y,$$

folglich auch durch

$$y = A . X + B . Y$$

genügt werde, daſs aber dann der merkwürdige Umstand eintrete, daſs, obgleich die Differentialgleichung nur von der ersten Ordnung wäre, doch ein Integral mit zwei willkührlichen Constanten ihr genüge; den Principien des Integralkalkuls entgegen. — Doch läſst sich annehmen, daſs eine in der Natur der Sache gegründete Abhängigkeit der beiden Constanten A und B statt finde, so daſs nur noch eine von beiden als willkührliche Constante angesehen werden könne. Dies scheint sich auch zu bestätigen, wenn man bemerkt, daſs sowohl $y = X$, als auch $y = Y$ der Differentialgleichung (§. 3. II.) genügen, daſs man daher zu gleicher Zeit habe

$$\frac{dX}{dx} + mX \,.\, \text{tg.}\, x = o$$

und

$$\frac{dY}{dx} + mY \,.\, \text{tg.}\, x = o,$$

woraus dann folgt, wenn tg. x eliminirt wird,

$$X . dY - Y . dX = o \text{ oder } \frac{dX}{X} = \frac{dY}{Y},$$

welches integrirt, giebt:

$$Y = CX \quad \text{oder} \quad X = D . Y,$$

so daſs dadurch das Integral

$$y = A . X + B . Y \text{ übergeht in}$$

$y = (A + BC) . X$, oder in $y = (AD + B) . Y$, d. h. in $y = E . X$, oder in $y = F . Y$, wo die Constanten E und F noch bestimmt werden müssen. — Für $x = 0$, also $y = 1$, erhält man aber: $E = \frac{1}{2^m}$ und $F = \frac{1}{0}$; weshalb das zweite Integral, als hier unbrauchbar, verworfen, das erste aber beibehalten werden muſs. Dieses liefert aber wieder, und zwar für jeden Werth von m,

$$(2 \text{Cos.} x)^m = X \quad \text{und} \quad 0 = Y,$$

was auch Euler und Lagrange gefunden haben.

§. 6.

Déflers *) stellt über diesen Gegenstand folgende Betrachtungen an: Man hat, was auch x seyn mag,

$$(\text{Cos.} x)^m = \left(1 - \frac{x^2}{2'} + \frac{x^4}{4'} + \frac{x^6}{6'} + \ldots\right)^m$$
$$= 1 + Ax^2 + Bx^4 + Cx^6 + \ldots,$$

wo A, B, C, etc. constant, d. h. von x unabhängig und reel sind. Hieraus glaubt nun Déflers folgern zu müssen, daſs der von Poiſson aufgestellte Ausdruck

$$(2 \text{Cos.} x)^m = X + \sqrt{-1} . Y$$

nur dann richtig seyn könne, wenn $Y = 0$ ist, also wenn er in den andern

$$(2 \text{Cos.} x)^m = X$$

übergehe, weil nur dann in der Entwicklung

*) Lacroix Traité du Calcul diff. et int. T. III. p. 616. sqq.

von $(2\,\mathrm{Cos.}\,x)^m$ nach ganzen und steigenden Potenzen von x, bloſs die geraden Potenzen von x vorkommen, und die Entwicklung selber die Eigenschaft erhalte, durch die Substitution von $-x$ statt x, nicht verändert zu werden, wie solches dem Ausdruck $(2\,\mathrm{Cos.}\,x)^m$ zukommt.

§. 7.

Daſs aber $Y = 0$ seyn müsse, sucht Déflers noch durch folgenden direkten Beweis auſser Zweifel zu setzen. Da nehmlich Y die Reihe bedeutet

$$\mathrm{Sin.}\,mx + m_1 . \mathrm{Sin.}(m-2)\,x + m_2 . \mathrm{Sin.}(m-4)\,x + \ldots,$$

so findet man sogleich, wenn man statt der Sinus, die nach den Potenzen von x fortlaufenden Reihen setzt und ordnet:

$$Y = \frac{x}{1}\Big(m + m_1.(m-2) + m_2.(m-4) + m_3.(m-6) + \ldots\Big)$$
$$- \frac{x^3}{3'}\Big(m^3 + m_1.(m-2)^3 + m_2.(m-4)^3 + m_3.(m-6)^3 + \ldots\Big)$$
$$+ \frac{x^5}{5'}\Big(m^5 + m_1.(m-2)^5 + m_2.(m-4)^5 + m_3.(m-6)^5 + \ldots\Big)$$
$$+ \quad \text{etc.} \quad \text{etc.}$$

so daſs das allgemeine Glied zum Koefficienten hat, die Reihe:

$$m^p + m_1 . (m-2)^p + m_2 . (m-4)^p + m_3 . (m-6)^p + \ldots,$$

wo p eine ungerade Zahl bedeutet. Um diese Reihe zu summiren, betrachte man die Funktion

$$T_p = m^p . t^m + m_1 . (m-2)^p . t^{m-2} + m_2 . (m-4)^p . t^{m-4} + \ldots$$

aus welcher sie für $t = 1$ hervorgeht. Man findet dann leicht

$$\frac{d.T_p}{dt} = \frac{T_{p+1}}{t}, \text{ oder } T_{p+1} = t.\frac{d.T_p}{dt}.$$

Setzt man hier nach und nach $p = 0, 1, 2, 3,$ etc., so erhält man:

$$T_1 = t.\frac{d.T_0}{dt}, \quad T_2 = t.\frac{d.T_1}{dt}, \quad T_3 = t.\frac{d.T_2}{dt}, \text{ etc.}$$

wo

$T_0 = t^m + m_1.t^{m-2} + m_2.t^{m-4} + m_3.t^{m-6} + .. = (t + t^{-1})^m$ ist;

und man erleichtert sich die Bestimmung von T_1, T_2, etc., wenn man $t + t^{-1} = z$

und $t.\frac{dz}{dt} = t.(1 - t^{-2}) = t - t^{-1} = v$ setzt,

so daſs $T_0 = z^m$, und für $t = 1$, noch $z = 2$ und $v = 0$ wird. Es ergiebt sich dann augenblicklich:

$$T_1 = \frac{t.d.(z^m)}{dt} = m.z^{m-1}.t\frac{dz}{dt} = m.z^{m-1}.v$$

$$T_2 = t.\frac{dT_1}{dt} = m(m-1).z^{m-2}.v^2 + m.z^m,$$

$$\left(\text{weil } \frac{dv}{dt} = z\right)$$

$$T_3 = t.\frac{dT_2}{dt} = m(m-1)(m-2).z^{m-3}.v^3 + \\ + [2m.(m-1) + m^2].z^{m-1}.v;$$

u. s. w. f.;

in welchen Ausdrücken die Summe der Exponenten von z und v, $= m$ ist, während der höchste Exponent von v dem Zeiger an T gleich kommt, und diese Exponenten von Glied zu Glied um zwei Einheiten sich verändern, so daſs alle ihre Glieder für $t = 1$ (weil dann $v = 0$ ist) verschwinden müssen, wenn p ungerade, dagegen nur bis auf das letzte verschwinden, wenn p gerade ist; welches Gesetz leicht bis ins Unendliche nachgewiesen werden kann. Es ist also immer

$T_p = 0$ für $t = 1$ und p eine ungerade Zahl; folglich ist immer, wenn p eine ungerade Zahl

$$m^p + m_1 . (m-2)^p + m_2 . (m-4)^p + m_3 . (m-6)^p + \ldots = 0,$$

für jeden Werth von m; also auch immer

$Y = 0$, dahero auch $(2 \, \mathrm{Cos.}\, x)^m = X$.

§. 8.

Plana *) (Professor der Astronomie zu Turin) behauptet auch, Y wäre immer $= 0$, den einzigen Fall ausgenommen, wenn $x = \pi$, den aber sein Beweis selbst angebe. Es ist nehmlich:

$$\mathrm{Sin.}\, x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

also

$$Y = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \times$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{mx\sqrt{-1}} + m_1 . e^{(m-2)x\sqrt{-1}} + m_2 . e^{(m-4)x\sqrt{-1}} + \ldots \\ - e^{-mx\sqrt{-1}} - m_1 . e^{-(m-2)x\sqrt{-1}} - m_2 . e^{-(m-4)x\sqrt{-1}} - \ldots \end{array} \right\}$$

oder

$$Y = \frac{e^{mx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} (1 + e^{-2x\sqrt{-1}})^m - \frac{e^{-mx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} (1 + e^{2x\sqrt{-1}})^m,$$

*) Annales de Mathématiques p. Gergonne. 1820. 21.

wie sich sogleich einsehen läſst, wenn man auf diesen letztern Ausdruck den binomischen Lehrsatz anwendet. Es ist aber

$$e^{\pm 2x\sqrt{-1}} = \text{Cos.}\,2x \pm \sqrt{-1}\,.\,\text{Sin.}\,2x$$
$$= 2(\text{Cos.}\,x)^2 - 1 \pm 2\sqrt{-1}\,.\,\text{Sin.}\,2x;$$

also auch:

$$Y = \frac{(2\,\text{Cos.}\,x)^m\,.\,e^{mx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}(\text{Cos.}\,x - \sqrt{-1}\,.\,\text{Sin.}\,x)^m$$
$$- \frac{(2\,\text{Cos.}\,x)^m\,.\,e^{-mx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}(\text{Cos.}\,x + \sqrt{-1}\,.\,\text{Sin.}\,x)^m.$$

Und weil $e^{\pm mx\sqrt{-1}} = \text{Cos.}\,mx \pm \sqrt{-1}\,.\,\text{Sin.}\,mx$, so wie $(\text{Cos.}\,x \pm \sqrt{-1}\,.\,\text{Sin.}\,x)^m = \text{Cos.}\,mx \pm \sqrt{-1}\,.\,\text{Sin.}\,mx$ auch

$$(\text{C}).\,Y = \frac{(2\,\text{Cos.}\,x)^m}{2\sqrt{-1}}(\text{Cos.}\,mx + \sqrt{-1}\,.\,\text{Sin.}\,mx) \times (\text{Cos.}\,mx - \sqrt{-1}\,.\,\text{Sin.}\,mx)$$
$$- \frac{(2\,\text{Cos.}\,x)^m}{2\sqrt{-1}}(\text{Cos.}\,mx - \sqrt{-1}\,.\,\text{Sin.}\,mx) \times (\text{Cos.}\,mx + \sqrt{-1}\,.\,\text{Sin.}\,mx)$$

d. h. $Y = 0$, es mag m eine ganze oder gebrochene Zahl seyn. — Plana meint nun aber ferner, daſs diese letztere Folgerung aufhöre, wenn $x = \pi$, und glaubt, daſs diese Ausnahme in seinem Beweise bereits liege.

§. 9.

Wir überheben uns, Weiteres aus der Abhandlung des Herrn Plana zu berichten, da es uns scheint, als wenn alles, was er in der Abhandlung als Endresultat herausbringt, weder auf Neuheit noch auf Gründlichkeit Anspruch machen könne. Daſs die Ausnahme für $x = \pi$ aus der Formal (☾) nicht hervorgehe, fällt in die Augen; daſs sie nicht die einzige Ausnahme sey, wie Plana nach Poiſson meinte, ersieht man ebenfalls sogleich, weil, was $x = \pi$ liefert, auch eben so für $x = \pm(2n+1).\pi$ hervorgeht.

Beweise ähnlicher Art, daſs $Y = 0$ sey, lieſsen sich noch mehre darlegen. Am einfachsten und zugleich der direkteste, scheint folgender zu seyn:

Es bezeichnet nehmlich Y die Reihe

$$S.[m_\alpha . \text{Sin.}(m - 2\alpha)x],$$

so daſs $2\sqrt{-1}.Y = S.[m_\alpha . 2\sqrt{-1}.\text{Sin.}(m-2\alpha)x]$.

Nun ist aber

$$2\sqrt{-1}.\text{Sin.}(m-2\alpha)x = e^{(m-2\alpha)x\sqrt{-1}} - e^{-(m-2\alpha)x\sqrt{-1}},$$

folglich wenn man dies substituirt:

$$(\odot)\ 2\sqrt{-1}.Y = S[m_\alpha . e^{(m-2\alpha)x\sqrt{-1}}] - S.[m_\alpha . e^{-(m-2\alpha)\sqrt{-1}}].$$

Nach dem binomischen Lehrsatze hat man dagegen:

$$\begin{aligned}(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})^m &= S.[m_\alpha . (e^{x\sqrt{-1}})^{m-\alpha} . (e^{-x\sqrt{-1}})^\alpha] \\ &= S.[m_\alpha . e^{(m-\alpha)x\sqrt{-1}} . e^{-\alpha x\sqrt{-1}}] \\ &= S.[m_\alpha . e^{(m-2\alpha)x\sqrt{-1}}].\end{aligned}$$

Eben so findet man nach demselben Lehrsatze:

$$(e^{-x\sqrt{-1}} + e^{x\sqrt{-1}})^m = S.[m_\alpha . e^{-(m-2\alpha)x\sqrt{-1}}].$$

Substituirt man nun diese Werthe in die Gleichung ($\odot$), so erhält man:

$$2\sqrt{-1}.Y = 0 \quad \text{oder} \quad Y = 0,$$

wie es scheint, für jeden Werth von x und von m.

§. 10.

Ganz auf dieselbe Weise läſst sich auch noch zeigen, daſs X oder $S.[m_\alpha . \text{Cos.}(m - 2\alpha)x] = (2\,\text{Cos.}\,x)^m$ seyn müsse. — Denn man hat

$$2\,\text{Cos.}(m-2\alpha)x = e^{(m-2\alpha)x\sqrt{-1}} + e^{-(m-2\alpha)x\sqrt{-1}};$$

folglich

$$2.X = S.[m_\alpha . e^{(m-2\alpha)x\sqrt{-1}}] + S.[m_\alpha . e^{-(m-2\alpha)x\sqrt{-1}}]$$
$$= (e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})^m + (e^{-x\sqrt{-1}} + e^{x\sqrt{-1}})^m$$
$$= 2.(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})^m = 2.(2\,\text{Cos.}\,x)^m,$$

also $X = (2\,\text{Cos.}\,x)^m$; welches auch wieder für jeden Werth von m und von x zu gelten scheint.

§. 11.

Selbst aus Poiſsons Meinung, daſs $X + \sqrt{-1}.Y$ und $X - \sqrt{-1}.Y$ im allgemeinen als zwei von einander verschiedene Werthe von $(2\,\text{Cos.}\,x)^m$ anzusehen wären, scheint sich ableiten zu lassen, daſs z. B. für $m = \frac{1}{p}$ (wo p eine positive ganze Zahl seyn mag), Y doch immer der Null gleich seyn müsse. Denn es ist aus den Lehrbüchern der Algebra bekannt, daſs man alle Werthe von $a^{\frac{1}{p}}$ oder $\sqrt[p]{a}$ erhalte, wenn man einen dieser Werthe mit allen Werthen von $1^{\frac{1}{p}}$ oder $\sqrt[p]{1}$, oder mit $\text{Cos.}\frac{2n\pi}{p} \pm \sqrt{-1}.\text{Sin.}\frac{2n\pi}{p}$ oder mit $\text{Cos.}\frac{2\nu\pi}{p} \pm \sqrt{-1}.\text{Sin.}\frac{2\nu\pi}{p}$ multiplicirt, wo n und ν alle Werthe 0, 1, 2, 3, ... bis p — 1 haben sollen. Es sind also alle p Werthe von $(2\,\mathrm{Cos.}\,x)^{\frac{1}{p}}$ enthalten in der Formel

$$1)\ (X+\sqrt{-1}.\,Y).\left(\mathrm{Cos.}\frac{2n\pi}{p}+\sqrt{-1}.\,\mathrm{Sin.}\frac{2n\pi}{p}\right),$$

aber auch in der Formel

$$2)\ (X-\sqrt{-1}.\,Y).\left(\mathrm{Cos.}\frac{2v\pi}{p}+\sqrt{-1}.\,\mathrm{Sin.}\frac{2v\pi}{p}\right).$$

Dann muſs jedoch einer der p Werthe in (1.) einem der p Werthe in (2.) gleich seyn; also muſs es immer zu jedem Werth von n einen zugehörigen Werth von v geben, so daſs dann

$$(X+\sqrt{-1}.\,Y).\left(\mathrm{Cos.}\frac{2n\pi}{p}+\sqrt{-1}.\,\mathrm{Sin.}\frac{2n\pi}{p}\right)$$

$$=(X-\sqrt{-1}.\,Y).\left(\mathrm{Cos.}\frac{2v\pi}{p}+\sqrt{-1}.\,\mathrm{Sin.}\frac{2v\pi}{p}\right),$$

wo die Abhängigkeit des v von n noch zu bestimmen bleibt. Multiplicirt man aber links und rechts, und setzt die reelen und die imaginären Theile einzeln einander gleich, wie man dies immer zu thun pflegt, so erhält man hieraus:

$$3)\ X.\,\mathrm{Cos.}\frac{2n\pi}{p}-Y.\,\mathrm{Sin.}\frac{2n\pi}{p}$$
$$=X.\,\mathrm{Cos.}\frac{2v\pi}{p}+Y.\,\mathrm{Sin.}\frac{2v\pi}{p}$$

und

$$4)\ X.\,\mathrm{Sin.}\frac{2n\pi}{p}+Y.\,\mathrm{Cos.}\frac{2n\pi}{p}$$
$$=X.\,\mathrm{Sin.}\frac{2v\pi}{p}-Y.\,\mathrm{Cos.}\frac{2v\pi}{p},$$

welche beide Gleichungen identisch seyn müssen, wenn man nur zu jedem Werth von n, den zugehörigen Werth von v nimmt. Weil aber diese Gleichungen (3.) und (4.) für jeden Werth von x, also auch für $x = 0$, wo dann auch $Y = 0$ ist, gelten müssen, so muſs nothwendig seyn

$$\text{Cos.}\ \frac{2n\pi}{p} = \text{Cos.}\ \frac{2v\pi}{p}$$

$$\text{und}\quad \text{Sin.}\ \frac{2n\pi}{p} = \text{Sin.}\ \frac{2v\pi}{p};$$

und diese Werthe in (3.) und (4.) gesetzt, geben

$$2Y.\ \text{Sin.}\ \frac{2n\pi}{p} = 0$$

$$\text{und auch}\quad 2Y.\ \text{Cos.}\ \frac{2n\pi}{p} = 0;$$

also wenn man beide letztern Gleichungen quadrirt und addirt, auch

$$4Y^2 = 0 \quad \text{und} \quad Y = 0,$$

$$\text{wenn}\quad m = \frac{1}{p}\ \text{ist.}$$

§. 12.

Aus allen diesen Entwicklungen scheint also hervorzugehen, daſs im allgemeinen

$$(2\,\text{Cos.}\,x)^m = X \quad \text{und} \quad 0 = Y$$

ist, wie Euler und La grange gefunden haben, und man könnte sich vielleicht berechtigt glauben, die offenbaren Ausnahmen nicht bloſs für $x = \pi$, sondern für $x = \pm(2n + 1)\pi$, aus demselben Gesichtspunkt zu betrachten, aus welchem man die allgemeine Gültigkeit mehrerer anderer Sätze, z. B. des Taylor'schen Lehrsatzes, zuläſst, wenn er auch in besondern Fällen Ausnahmen zu erleiden scheint.

Auf der andern Seite dagegen liefern diese letzterwähnten Sätze, z. B. der Taylor'sche, in diesen besondern Fällen doch eigentlich nicht unrichtige Resultate, sondern, wie es scheint, mehr unbrauchbare, oder es zeigt vielmehr die unbrauchbare Form, unter der sie nun erscheinen, an, daſs dieser Fall eine Ausnahme bilde, wie sich auch wohl strenge beweisen läſst; während die hiesigen Ausnahmen geradezu, nicht eine unbrauchbare oder einen Widerspruch anzeigende Form, sondern wirklich ein unrichtiges Resultat liefern.

§. 13.

Was aber vor uns nicht erwiesen zu seyn scheint, daſs nehmlich die Gleichungen $Y = 0$, also auch $X = (2 \operatorname{Cos.} x)^m$ nicht bloſs unendlich viele Ausnahmen erleiden, für besondere Werthe von x; sondern daſs diese Gleichungen wirklich im Allgemeinen unrichtig sind, und keineswegs allgemein zugelassen werden dürfen, sondern im Gegentheil nur in Ausnahmsfällen gelten, scheint uns unwiderstehlich zu zwingen, die vorige Ansicht zu verlassen, und anzunehmen, daſs in allen den vorhergehenden Beweisen und Entwicklungen an irgend einer Stelle ein unrichtiger Schlufs gezogen sey, der dann auch das unrichtige Resultat zu Wege gebracht habe.

Nehmen wir nehmlich an, dafs im allgemeinen $Y = 0$ oder $S . [m_{\alpha} . \mathrm{Sin.} (m - 2\alpha) x] = 0$, also dann auch $X = (2 \mathrm{Cos.} x)^m$ sey, so müfste dies auch noch der Fall seyn, wenn $\pi + x$ statt x gesetzt würde. Es ist aber

$$\mathrm{Sin.} [(m - 2\alpha)(\pi + x)] = \mathrm{Sin.} [m\pi + (m - 2\alpha) x]$$
$$= \mathrm{Sin.}\, m\pi . \mathrm{Cos.} (m - 2\alpha) x + \mathrm{Cos.}\, m\pi . \mathrm{Sin.} (m - 2\alpha) x;$$

und es würde also dann Y übergehen in

$$S . [m_{\alpha} . \mathrm{Cos.} (m - 2\alpha) x] . \mathrm{Sin.}\, m\pi +$$
$$+ S . [m_{\alpha} . \mathrm{Sin.} (m - 2\alpha) x] . \mathrm{Cos.}\, m\pi.$$

d. h. in $X . \mathrm{Sin.}\, m\pi + Y . \mathrm{Cos.}\, m\pi$, und weil nach der Annahme $Y = 0$ und $X = (2 \mathrm{Cos.} x)^m$ ist, in $\mathrm{Sin.}\, m\pi . X$, oder in $\mathrm{Sin.}\, m\pi . (2 \mathrm{Cos.} x)^m$; so dafs dann auch seyn müfste, für jeden Werth von x und m,

$$\mathrm{Sin.}\, m\pi . (2 \mathrm{Cos.} x)^m = 0;$$

welche Gleichung jedoch offenbar nur dann für jeden Werth von x gilt, wenn m eine (positive oder negative) ganze Zahl ist, weil nur dann $\mathrm{Sin.}\, m\pi = 0$ ist.

§. 14.

Es mag daher jetzt von allem bisher mitgetheilten abstrahirt und versucht werden, anzugeben, wie und durch welche Mittel es möglich seyn dürfte, sowohl in der vorliegenden Aufgabe, als auch in allen ähnlichen Fällen nothwendig richtige und solche Resultate zu erhalten, bei welchen zugleich alle etwaigen Ausnahmen, die sie erleiden, durch die Entwicklung selbst auf das bestimmteste ausgesprochen werden, wie dies dem Gange einer strengen Wissenschaft angemessen ist. Diese, gröſstentheils oder vielleicht durchaus bekannten, aber, wie es scheint, nicht immer mit der gehörigen Sorgfalt beobachteten Principien, deren wir uns bei unsern Arbeiten bedienen, und die wir auch hier in Anwendung bringen werden, mögen deshalb hier in der Kürze bloſs historisch zusammengestellt, und zum Theil auch nur angedeutet werden.

I. Es scheint aber vor allem bemerkt werden zu müssen der Unterschied zwischen einem allgemeinen Ausdruck und einen besondern (Zahlenwerth). So lange der Ausdruck allgemein ist, ist er weder reel noch imaginär, sondern der allgemeine Ausdruck kann noch beides werden, das Eine so gut wie das Andere.

Aus $a + b\sqrt{-1} = c + d\sqrt{-1}$ scheint also z. B. nicht geschlossen werden zu dürfen, daſs $a = c$ und $b = d$ seyn müsse, so lange a, b, c, d, noch allgemein sind. Dagegen ist der Schluſs strenge erwiesen,

α) wenn man weiſs, daſs a, b, c, d, bestimmte reele Ausdrücke sind, oder auch

β) wenn a, b, c, d, ganz allgemein sind, aber auſser der gegebenen Gleichung noch diese zweite $a - b\sqrt{-1} = c - d\sqrt{-1}$

mitgegeben ist, also auch wenn man bestimmt überzeugt ist, daſs die Gleichung

$$a + b\sqrt{-1} = c + d\sqrt{-1}$$

für beide Werthe von $\sqrt{-1}$ zugleich Statt findet. — Z. B. bei

$$(-3) + 2\sqrt{-1} = (2\sqrt{-1}) + (3\sqrt{-1})\cdot\sqrt{-1}$$

ſindet diese zweite

$$(-3) - 2\sqrt{-1} = (2\sqrt{-1}) - (3\sqrt{-1})\cdot\sqrt{-1}$$

nicht statt; daher natürlich auch obige Folgerung nicht.

II. Jede Relation zwischen Ausdrücken ist eine Gleichung, und jede Gleichung nothwendig eine *identische*; so daſs die sogenannten *algebraischen* und *transcendenten* Gleichungen (die man besser *Bestimmungsgleichungen* nennen könnte), so wie auch die *Differentialgleichungen*, nur *der Form nach* und nur dadurch von den vorzugsweise so genannten identischen Gleichungen verschieden sind, deſs einer oder mehrere der darin vorkommenden Buchstaben oder sonstigen Zeichen, bestimmte Werthe repräsentiren, welche Werthe man sich dafür wirklich gesetzt denken muſs, wenn man die eigentliche Gleichung (die ihrer Definition entsprechende) haben will.

III. Man scheint besondere Sorgfalt auf die vieldeutigen Ausdrücke wenden zu müssen, und bemerken, daſs ein vieldeutiger Ausdruck jedesmal nur *einen* seiner mehreren Werthe vorstellt, obgleich er dann in besondern Fällen einen völlig bestimmten, oder auch einen beliebigen, oder endlich einen von andern Werthen abhängigen repräsentiren kann. Schreibt man z. B.

$\sqrt{9} = -3$ oder $\sqrt{9} = +3$, so stellt in der ersten Gleichung das zweideutige Zeichen $\sqrt{9}$ den bestimmten seiner Werthe -3 vor, so daſs die Gleichung $\sqrt{9} = -3$ nicht anders gedacht werden kann, als $-3 = -3$; in der andern Gleichung $\sqrt{9} = +3$, stellt dagegen $\sqrt{9}$ den Werth $+3$ vor, so daſs die Gleichung selbst wesentlich zusammenfällt mit $+3 = +3$.

In der Gleichung dagegen

$$\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{36}$$

sind die Werthe, welche jedesmal durch die Wurzeln vorgestellt werden, von einander abhängig, so daſs zwei dieser 3 Wurzeln jeden beliebigen ihrer Werthe (obgleich jedesmal nur einen einzigen) vorstellen, während dann aber die 3te Wurzel einen bestimmten, von denen der übrigen Wurzeln abhängigen, hier durch die Gleichung selbst bedingten Werth repräsentirt.

IV. Ist also A ein vieldeutiger Ausdruck, und kommt solcher in einer Untersuchung mehrere male vor, so darf man ihn, obgleich er der Form nach derselbe ist, doch im Kalkul nicht eher als einen und denselben betrachten, bevor man sich nicht überzeugt hat, daſs er jedesmal auch wirklich dieselbe Bedeutung habe, d. h. daſs er auch jedesmal wirklich immer einen und denselben seiner Werthe repräsentirt. Man darf also z. B. nur dann

$$A + A = 2A, \qquad A \cdot A = A^2$$
$$pA \pm qA = (p \pm q) \cdot A \qquad \text{u. s. w.}$$

setzen, wenn man überzeugt ist, daſs dieses A jedesmal dieselbe Bedeutung hat. — Man kann daher z. B. nicht unbedingt

$$\sqrt{-1} + \sqrt{-1} = 2\sqrt{-1}, \quad \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1$$
$$\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-3} = (\sqrt{-3})^2 = -3, \text{ u. s. w. setzen.}$$

V. Die vieldeutigen Ausdrücke, die am häufigsten vorkommen, sind: die Wurzeln, die Logarithmen, und die zu irgend einer trigonometrischen Linie gehörigen Bogen (im allgemeinsten, analytischen Sinne genommen), und, was man vorzüglich zu bemerken hat, die sämmtlichen Potenzen im allgemeinen. Jede zu einem Bogen gehörige trigonometrische Linie ist dagegen nur eindeutig, für sie also keine weitere Vorsicht nöthig. Für die übrigen der so eben erwähnten Ausdrücke scheint aber die Regel (IV.) bei dem allgemeinen Arbeiten immer gehörig berücksichtigt werden zu müssen. Und besonders wird dies Noth thun bei den Potenzen, weil man gerade bei diesen am geneigtesten zu seyn scheint, solche zu übertreten.

VI. Eine Potenz a^x hat aber nur einen einzigen Werth, wenn x eine (positive oder negative) ganze Zahl ist; sie hat ν verschiedene Werthe, wenn $x = \pm \frac{\mu}{\nu}$ und dabei der Bruch $\frac{\mu}{\nu}$ in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückt ist; sie hat unendlich viele verschiedene Werthe, wenn x reel aber irrational, oder wenn x imaginär ist. Ist daher x allgemein, so muſs, da x noch jeden besondern Werth erhalten kann, a^x im Allgemeinen als unendlich vieldeutig angesehen und behandelt werden.

Die Formeln der Potenzen

$$a^x . a^y = a^{x+y} \quad ; \quad a^x : a^y = a^{x-y}$$
$$a^x . b^x = (ab)^x \quad ; \quad a^x : b^x = (a:b)^x$$
$$(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$$

nebst dem binomischen Lehrsatze gelten also nur in so ferne, als jede Potenz einen ihrer Werthe repräsentirt, während diese Werthe nicht durchgehends willkührlich genommen werden können, sondern in einer durch die Gleichung selbst bedingten Abhängigkeit zu einander stehen. — Immer aber erhält man alle Werthe einer allgemeinen Potenz a^x, wenn man einen derselben mit allen Werthen von 1^x oder mit

$$\text{Cos.}\,(2nx\pi) \pm \sqrt{-1}\,.\,\text{Sin.}\,(2nx\pi),$$

wo n die Null und alle absoluten ganzen Zahlen, bis ins Unendliche, vorstellt, multiplicirt. — Will man daher bei dem allgemeinen Umformen der Ausdrücke mit Potenzen, nicht bloſs solche andere Ausdrücke haben, welche einigen (unbestimmten) Werthen, sondern solche, welche allen Werthen der gegebenen Ausdrücke entsprechen, so muſs man mit Sorgfalt auf das so eben bemerkte Rücksicht nehmen, um nicht umgeformte Ausdrücke zu erhalten, welche jene gegebenen nicht ganz und vollständig darstellen, sondern nur einzelne in ihnen enthaltene Elemente.

VII. Bei unendlichen Reihen scheint man wieder unterscheiden zu müssen, die allgemeinen von den als numerisch gedachten. — So lange die Reihen ganz allgemein sind, sind sie weder convergent noch divergent. Diese Allgemeinheit kann aber durch die Bedingung der Convergeng oder der Divergenz vermindert werden, und dann muſs man sich schon die einzelnen Glieder (nicht mehr als allgemeine, sondern bereits) als reele oder als imaginäre, und die Reihe selbst als eine numerische denken. — Umgekehrt, so oft davon die Rede ist, ob der Werth einer Reihe ein reeler oder ein imaginärer sey, kann die Reihe selbst nicht mehr als eine ganz allgemeine angesehen werden, weil eben die Eigenschaft des reelen und des imaginären, nicht an die ganz allgemeinen, sondern bloſs an die besondern Ausdrücke geknüpft ist.

VIII. Entwickelung eines Ausdrucks (schlechthin, oder in eine Reihe) ist nichts weiteres als Umformung, und giebt jedesmal eine identische Gleichung, mit denen allein sich der ganze Kalkul beschäftigt. — Eine solche Umformung könnte man vollständig oder unvollständig nennen, je nachdem sie allen oder nur einigen Werthen (oder nur einem

einzi-

einzigen) des gegebenen Ausdrucks entspricht. In beiden Fällen kann aber die Entwicklung richtig seyn. — Eine richtige Entwicklung muſs den Ausdruck, dem sie entspricht, in jedem Augenblick wieder reproduciren können, worin sich eben der Charakter der Identität oder der Umformung ausspricht. — Eine unendliche Reihe ist zwar nur in der Idee vorhanden, aber als Vernunftbegriff vollkommen ausgesprochen durch das Fortschreitungsgesetz. — Eben deshalb ist eine unendliche Reihe auch im Allgemeinen (wo von ihrer Convergenz oder Divergenz noch nicht die Rede seyn kann) vollkommen geeignet einen gegebenen Ausdruck vollständig zu repräsentiren, wenn man nur, das richtige Fortschreitungsgesetz zu haben, überzeugt seyn kann. Durch dieses Fortschreitungsgesetz reproducirt sich nachher immer wieder der gegebene Ausdruck, und kein dem Wesen nach von ihm verschiedener, wenn man nur bey den weitern Umwandlungen, welche eine solche unendliche Reihe erleiden kann, die nöthige Sorgfalt verwendet, damit nicht wesentliche Bestandtheile des Fortschreitungsgesetzes, oder andere von der Theorie als wesentlich anerkannte Elemente während der Arbeit selbst verlohren gehen.

IX. Von dem Werthe einer unendlichen Reihe kann nur dann die Rede seyn, wenn sie einen Werth hat, d. h. wenn sie convergirt (wenn die Summe von noch so vielen ihrer Glieder nie unendlich grofs, sondern zwischen bestimmten endlichen Grenzen eingeschlossen werden kann). — Hieraus folgt, was für die Behandlung der Reihen nicht unwichtig zu seyn scheint:

1) Alle Schlüsse, welche sich auf Werthbestimmung einer unendlichen Reihe gründen, gelten nur unter der Voraussetzung, einmal dafs die Reihe nicht mehr allgemein ist, sondern bereits als eine numerische anerkannt wird, dann auch, dafs die Reihe selbst convergirt.

Sind diese Voraussetzungen nicht gerechtfertigt, so werden alle solche Schlüsse in der Regel zu Wiedersprüchen führen.

2) Ist ein endlicher Ausdruck, einer unendlichen Reihe im Allgemeinen gleich (identisch), so hat für jeden Werth der unendlichen Reihe, der endliche Ausdruck nothwendig denselben Werth. Aber umgekehrt, von dem Werth des endlichen Ausdrucks auf den gleichen Werth der unendlichen Reihe zu schliefsen, geht nur in so ferne an, als die Reihe wirklich einen Werth hat; dieser Schlufs gilt also in allen den Fällen nicht mehr, in welchen die unend-

liche Reihe divergirt d. h. gar keinen Werth mehr hat.

3) Ist daher eine unendliche Reihe von der Art, daſs sie in gar keinem Falle convergirt, daſs sie also nie einen Werth hat, so hört jeder Schluſs, der sich auf ihren Werth bezieht, in allen Fällen auf, und alles in Bezug auf den Werth dieser Reihe Erschlossene, oder auf den Werth einer solchen Reihe oder auf das Daseyn desselben Gegründete hört in allen Fällen auf nothwendig wahr zu seyn, eben weil die Voraussetzung, unter welcher diese Schlüsse allein Gültigkeit haben können, hier nie statt findet. (Wir meinen, daſs die so erschlossene Resultate, eben so gut unrichtige als auch richtige seyn können).

4) Da eine unendliche Reihe, im Falle sie divergirt, gar keinen Werth hat, so kann man in diesem Falle, aus ihren reelen Gliedern, nicht auf ihren reelen Werth, und also auch nicht auf den reelen Werth des mit ihr im Allgemeinen identischen endlichen Ausdruks schlieſsen; so daſs also alle Glieder einer unendlichen Reihe reel seyn können, während, wenn die Reihe zugleicher Zeit divergirt, der ihr im Allgemeinen gleiche endliche Ausdruck, eben so gut ei-

nen imaginären als auch einen reelen Werth haben kann. *)

Als Beyspiele mögen die Entwikklungen von $\frac{1}{1-p}$ und von $\sqrt{1-p^2}$ in, nach ganzen Potenzen von p fortlaufenden Reihen, dienen.

Eben so wenig kann man aus den imaginären Gliedern einer divergenten unendlichen Reihe auf den imaginären Werth des ihr im allgemeinen gleichen endlichen Ausdrucks schliefsen.

5) Umgekehrt aber: hat der endliche Ausdruck in einem besondern Fall einen imaginären Werth; und sind zu gleicher Zeit die Glieder der Entwikkelung (der unendl. Reihe) alle reel, so mufs die Reihe nothwendig in diesem Falle divergiren; so wie, wenn sie convergirt und alle ihre Glieder reel sind, der ihr im Allgemeinen gleiche endliche Ausdruck dann nothwendig auch

---

*) Sind also, um ein Beyspiel der Anwendung zu geben, a, b, c, d, alle oder zum Theil unendliche Reihen, so kann man aus

$$a + b\sqrt{-1} = c + d\sqrt{-1}$$

nur dann schliefsen, dafs $a = c$ und $b = d$ seyn müsse, entweder wenn alle unendliche Reihen convergiren und reele Werthe haben, (also nicht unbedingt schon wenn die einzelnen Glieder der Reihen reel sind), oder wenn sie noch allgemein sind, aber aufser $a + b\sqrt{-1} = c + d\sqrt{-1}$ im Allgemeinen auch noch diese andere Gleichung

$a - b\sqrt{-1} = c - d\sqrt{-1}$, gegeben ist. (Vergl. I.).

einen reelen Werth haben mufs. (Vergl. IX. 2.) *)

X. Wenn bei den indirekten Umformungs-Methoden (z. B. bei derjenigen, wo aus dem gegebenen Ausdruck erst eine Differentialgleichung gebildet, dazu aber nachher wiederum das Integral gesucht wird, in der Hoffnung oder mit der besondern Aufmerksamkeit, dasselbe in umgeformter Gestalt zu erhalten; ferner auch schon bei der gewöhnlichen Methode der unbestimmten Koefficienten) die Koefficienten nur unter der Voraussetzung strenge bestimmt werden können, dafs die vorkommenden Reihen convergiren, so kann man die Resultate **nicht nothwendig** als

---

*) Wir glauben hier noch bemerken zu dürfen, dafs in den Fällen, wo Umwandlungen in Reihen gewünscht werden, um nachher die Werthe der Ausdrücke durch diese Reihen bestimmen zu können, oder auch in denen, wo man auf eine bestimmte Convergenz weitere Schlüsse gründen will, es wesentlichen Nutzen gewähren dürfte, den Reihen, (endliche oder unendliche aber) schon bestimmte Elemente beyzugeben, die zugleich die Natur der zu verwandelnden Ausdrücke in sich aufgenommen haben. Indem nehmlich dann mehr Ursachen der Divergenz wegfallen, ist auch die Wahrscheinlichkeit gröfser, eine umfassende Convergenz zu erhalten. — So convergiren z. B. (wie es scheint, aus diesem Grunde) die Reihen für die Logarithmen schneller und umfassender, wenn man selbst wieder Logarithmen in die Entwickelung einführt. — Vorzüglichen Nutzen scheint diese Bemerkung auch in einer Theorie der **allgemeinen** Fakultäten zu haben, wo sich die ferneren Schlüsse blofs auf die Convergenz der gebrauchten Reihen gründen können, und nur dann nothwendig allgemein gültig sind. —

allgemeingültige annehmen, obgleich sie nothwendig richtig sind für die Fälle, welche der Voraussetzung entsprechen.

Aber um selbst für diese Fälle nothwendig richtige Resultate zu erhalten, muſs man jedesmal sorgfältig untersuchen, ob auch wirklich der Theorie überall genügt sey. Es darf also namentlich keine Koefficienten-Bestimmung statt finden, bei welcher die im Unendlichen vernachlässigten Glieder selbst unendlich groſs werden müssen; und im Falle solche unendlich groſs werden können, so würde die Umformung nur für die Fälle nothwendig richtig verbleiben, für welche dieses nicht mehr statt findet.

Hat man sich dagegen von der allgemeinen Gültigkeit der Form auf direktem Wege überzeugt, und ist man sicher, daſs das Fortschreitungsgesetz das Wesen des umzuformenden endlichen Ausdrucks im allgemeinen in sich schlieſse, so daſs die Koefficienten als die Constanten angesehen werden können, so ist eine solche Entwikkelung auch allgemein gültig (d. h. sie paſst dann für alle möglichen besondern Fälle zugleich).

Untersucht man genau die in (§. 3.) angegebene Entwickelung des La grange, so ist es leicht zu finden, daſs diese Bedingungen daselbst nicht berücksichtigt zu seyn scheinen; denn es werden bei der Entwickelung im Unendlichen Glieder vernachläſsigt, deren Koefficienten unendlich groſs sind, so daſs man nicht mit Sicherheit auf das Verschwinden dieser vernachläſsigten Glieder, auch nicht in einem einzigen Falle, schlieſsen dürfte. — Dieser Umstand scheint zugleich die in den folgenden Paragraphen angezeigten, den Principien des Integralkalkuls entgegenlaufenden Resultate, oder vielmehr ihre Unzuläſsigkeit zu erklären.

XI. Mit dieser Bemerkung steht nachstehende in genauer Verbindung: Bei allen vorzunehmenden Umformungen mittelst der Methode der unbestimmten Koefficienten, muſs man sich vorher von der allgemeinen Zulässigkeit der angenommenen Form der Entwicklung vergewissern. Es ist zwar sehr leicht einzusehen, daſs jede Unzuläſsigkeit der angenommenen Form der Entwicklung, eben weil ihre Annahme einen Widerspruch involvirt, diesen Widerspruch auch in den Endresultaten aussprechen werde; allein es scheint irrig zu seyn anzunehmen, daſs sich dieser Widerspruch sogleich bei der Bestimmung der Koefficienten zeigen müsse. Im Gegentheil ist nicht nur dazu kein hinreichender Grund vorhanden, sondern die angenommene Form muſs sogar zu nothwendig richtigen, keinen Widerspruch anzeigenden Koefficientenbestimmungen führen, sobald diese angenommene Form der Entwicklung auch nur in einem einzigen besondern Fall gerechtfertigt seyn sollte; wenn sie auch in allen übrigen Fällen unzuläſsig ist. — Dies findet namentlich in der (§. 3.) angegebenen Entwicklung des La grange statt. Die von ihm für (Cos. x)^m angenommene Form der Entwicklung ist die wahre, wenn m eine ganze Zahl; folglich müssen sich die unbestimmten Koefficienten finden lassen (wenigstens für diese Werthe von m); und die Entwicklung selbst findet also statt, aber nur für den Fall, daſs m eine ganze Zahl. Der Widerspruch, der in der Unzuläſsigkeit der von La grange für den allgemeinen Fall angenommenen Form der Entwicklung liegt, bleibt deshalb noch immer vorhanden, und zeigt sich, wie wir (§. 13.) gezeigt haben, wenn man $\pi + x$ statt x setzt; oder zeigt sich vielmehr eben in der allgemeinen Ungültigkeit der Entwicklung.

Die direkten Umformungsmethoden scheinen deshalb vor allen indirekten den Vorzug zu haben. Wenigstens mag es gut seyn, sich ihrer immer zur vorläufigen Bestimmung der Form zu bedienen, wenn man es auch nachher bequemer und zweckmäſsiger finden sollte, indirekt zu verfahren.

Vorstehende Bemerkungen kann man übrigens durch viele leicht zu findende Beispiele bestätigen lassen, welches hier der Kürze wegen unterblieben ist. Ohne gehörigen Beweis bleiben manche dieser Bestimmungen jedoch noch immer problematisch, weshalb diese Beweise und überhaupt eine Theorie des Kalkuls in dem schon angeführten Lehrbuche des Verfassers versucht worden ist.

§. 15.

Betrachten wir nun die Euler'sche Entwicklung (§. 1.), so sieht man sogleich, daſs im allgemeinen

$$X + \sqrt{-1} . Y \quad \text{und} \quad X - \sqrt{-1} . Y$$

zwei verschiedene Werthe von $(2\,\mathrm{Cos}.\,x)^m$ seyn können. Aus den Gleichungen

$$1)\ (2\,\mathrm{Cos}.\,x)^m = X + \sqrt{-1} . Y$$

$$\text{und } 2)\ (2\,\mathrm{Cos}.\,x)^m = X - \sqrt{-1} . Y$$

kann man also durch Addition bloſs schlieſsen nach (§. 14. IV u. VI.):

$$(2\,\mathrm{Cos}.\,x)^m + (2\,\mathrm{Cos}.\,x)^m = 2X,$$

aber nicht $\quad 2 . (2\,\mathrm{Cos}.\,x)^m = 2X,$

weil in den Gleichungen (1) und (2) (die, wie alle Gleichungen, nur als identische Gleichungen angesehen werden können) der Ausdruck $(2\,\mathrm{Cos}.\,x)^m$ jedesmal einen andern seiner Werthe repräsentiren kann. Wenn m eine positive ganze Zahl, bleibt der Euler'sche Schluſs gültig, wie bekannt ist, und wie auch schon Poiſson bemerkt hat. — Er bliebe auch noch gültig, wenn m eine negative ganze Zahl ist, wenn nur die Reihen X und Y zugleich einen Werth hätten.

§. 16.

Was Déflers (§. 7.) schlieſst, dürfte, wie es scheint, nur dann gelten, wenn nachgewiesen werden könnte, daſs, wenn man $(\mathrm{Cos.}\,x)^m$ oder vielmehr

$$\left(1-\frac{x^2}{2'}+\frac{x^4}{4'}-\frac{x^6}{6'}+\ldots\right)^m$$

allgemein nach dem polynomischen Lehrsatze entwickelt, die Koefficienten der entstehenden Reihe nicht unendlich werden. Umgekehrt sieht man ein, daſs, wenn $(\mathrm{Cos.}\,x)^m$ sich nicht allgemein nach den geraden Potenzen von x entwickeln läſst, die Form der Entwicklung selbst solches anzeigen müsse.

Was aber den andern Beweis des **Déflers** betrifft, daſs $Y=0$ sey, wie solches (§. 8.) beigebracht wurde, so scheint aus den vorstehenden Principien hervor zu gehen:

1) Daſs die Summation der Reihe

$$m^p.t^m+m_1(m-2)^p.t^{m-2}+m_2.(m-4)^p.t^{m-4}+m_3.(m-6)^p t^{m-6}+\ldots$$

wie sie dort gefunden wurde, sehr strenge ist, und daſs also z. B. sehr strenge

$$(☾)\ m^3.t^m+m_1.(m-2)^3\,t^{m-2}+m_2.(m-4)^3.t^{m-4}+$$
$$+m_3.(m-6)^3.t^{m-6}+\ldots$$

im allgemeinen identisch mit dem dortigen

$$m(m-1)(m-2).z^{m-3}v^3+[2m(m-1)+m^2].z^{m-1}v$$

oder mit

$$(\odot)\ m(m-1)(m-2).\left(t+\frac{1}{t}\right)^{m-3}.\left(t-\frac{1}{t}\right)^3+$$
$$+[2m(m-1)+m^2].\left(t+\frac{1}{t}\right)^{m-1}.\left(t-\frac{1}{t}\right)$$

angenommen werden müsse.

2) Daſs dagegen die unendliche Reihe (☾) nur dann einen Werth habe, wenn sie convergirt, also z. B. wenn t sehr groſs ist. In jedem andern Falle dagegen, und auch für $t=1$, bestimmt sich zwar der Werth des Ausdrucks (⊙), welcher aber nur dann mit dem Werthe der Reihe (☾) zusammenfallen kann, wenn letztere wirklich einen Werth hat. Da nun aber die Reihe (☾) für $t=1$ nur dann einen Werth zu haben scheint, wenn m eine (positive) ganze Zahl ist, so scheint sie auch nur in diesem Fall mit dem Werthe des Ausdrucks (⊙), also mit Null, zusammenzufallen. *). —

3) Wäre dagegen in dem Ausdruck Y, der in (§. 8.) verwandelt werden sollte, nicht

$$m^p + m_1.(m-2)^p + m_2.(m-4)^p + \ldots.$$

sondern vielmehr diese andere Reihe

$$m^p.t^m + m_1(m-2)^p.t^{m-2} + m_2(m-4)^p.t^{m-4} + \ldots$$

vorgekommen, so konnte man sogleich im Allgemeinen den mit ihr identischen endlichen Ausdruck für sie selbst setzen, und das Resultat war dann noch immer mit Y identisch; und im Falle Y selbst convergirte, muſste dann jeder Werth dieses mit Y identischen Ausdrucks, dem von Y gleich seyn.

---

*) Daſs dann die Reihe

$$m^p + m_1.(m-2)^p + m_2.(m-4)^p + \ldots.$$

für jedes ungerade p der Null gleich sey, erhellet übrigens unmittelbar, weil in ihr jedes Glied doppelt, aber mit entgegengesetzten Zeichen vorkommt.

§. 17.

Betrachten wir den (§. 9.) gegebenen Beweis, so finden wir ihn ganz streng, bis zu Ende, wo

$$2\sqrt{-1}\,.\,Y = (e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})^m - (e^{-x\sqrt{-1}} + e^{x\sqrt{-1}})^m$$

gefunden, wo aber rechts dafür nicht o gesetzt werden darf. — Da $e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} = 2\,\mathrm{Cos.}\,x$ ist, so kann man dies auch so schreiben:

$$2\sqrt{-1}\,.\,Y = (2\,\mathrm{Cos.}\,x)^m - (2\,\mathrm{Cos.}\,x)^m,$$

oder $$2\sqrt{-1}\,.\,Y = (2\,\mathrm{Cos.}\,x)^m\,[1^m - 1^m],$$

oder $$2\sqrt{-1}\,.\,Y = (2\,\mathrm{Cos.}\,x)^m\,[\mathrm{Cos.}\,(\pm 2nm\pi) - \mathrm{Cos.}\,(\pm 2vm\pi) + \sqrt{-1}\,(\mathrm{Sin.}(\pm 2nm\pi) - \mathrm{Sin.}\,(\pm 2vm\pi))],$$

wo $(2\,\mathrm{Cos.}\,x)^m$ einen beliebigen ihrer Werthe repräsentirt.

Mit Nothwendigkeit kann man also auf diesem Wege sich nicht überzeugen, daſs $Y = o$ seyn müsse, den Fall ausgenommen, in welchem m eine ganze Zahl wird, und Y zugleich einen endlichen Werth haben muſs.

§. 18.

Eben so finden wir die Entwicklung in (§. 10.) ganz strenge, bis dahin, wo

$$2X = (e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})^m + (e^{-x\sqrt{-1}} + e^{x\sqrt{-1}})^m$$

gefunden ist, wofür man aber rechts nicht unbedingt $2(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})^m$ setzen darf, wie dort geschehen (S. §. 14. IV. VI.). Die Gleichung wird vielmehr, wenn man $2\,\mathrm{Cos.}\,x$ statt $e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}$ setzt,

$$2X = (2\,\mathrm{Cos.}\,x)^m\,(1^m + 1^m)$$

oder $2X = (2\,\text{Cos.}\,x)^m\,[\text{Cos.}(\pm 2nm\pi) + \text{Cos.}(\pm 2vm\pi)$
$+ \sqrt{-1}\,(\text{Sin.}(\pm 2nm\pi) + \text{Sin.}(\pm 2vm\pi))]$,
wo $(2\,\text{Cos.}\,x)^m$ einen beliebigen ihrer Werthe vorstellt.

Es ist demnach auf diesem Wege nur dann mit Sicherheit $X = (2\,\text{Cos.}\,x)^m$, wenn m eine ganze Zahl ist und X wirklich einen Werth hat.

§. 19.

Was endlich den Beweis (§. 11.) betrifft, so ist leicht einzusehen, wenn man die vorstehenden Principien in Anwendung bringen will, daſs, weil sich die dortigen Schlüsse auf Werthe gründen, sie nur so lange gelten, als die dortigen Reihen wirklich Werthe haben, also nur in so ferne sie convergent sind. Unter diesen Voraussetzungen bleiben die dortigen Gleichungen (3. und 4.) noch streng richtig, nur mit der Einschränkung, daſs sie nicht als allgemeine identische Gleichungen, sondern nur als Werth-Identitäten statt finden. Dies ändert die dann folgenden Schlüsse dahin ab, daſs zwischen den Werthen von X und Y (für verschiedene Werthe von x) und zwischen den Werthen von n und v eine durch die Gleichungen (3. und 4.) selbst bedingte Abhängigkeit statt finden muſs; daſs aber die Abhängigkeit von n und v nicht nothwendig von dem Werthe von x unabhängig ist, sondern im Gegentheil für andere Werthe von x auch allemal eine andere werden kann. Der übrige Theil des dortigen Beweises (§. 11.) gilt also nicht mehr, und daher hat das dortige Endresultat keine grössere Gültigkeit, als vorher auch. *)

§. 20.

Es gelten also die Entwicklungen von $(2\,\mathrm{Cos.}\,x)^m$ des **Euler, Lagrange**, und die übrigen, unsre eigenen (§. §. 8. 9. 10. und 11.) mit eingeschlossen, nur für den Fall nothwendig, daſs m eine ganze positive Zahl ist; und wenn m eine ganze negative Zahl wäre, nur dann, wenn zugleich X und Y wirklich einen Werth haben sollten. Eine allgemein gültige Entwicklung mag nun versucht werden.

§. 21.

Die einfachste und direkteste scheint folgende zu seyn. Man hat nehmlich

$$2\,\mathrm{Cos.}\,x = e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}};$$

folglich, nach dem binomischen Lehrsatz

$$(2\,\mathrm{Cos.}\,x)^m = S.\,[m_\alpha.\,(e^{x\sqrt{-1}})^{m-\alpha}(e^{-x\sqrt{-1}})^\alpha],$$

oder $(2\,\mathrm{Cos.}\,x)^m = S.\,[m_\alpha.(e^{x\sqrt{-1}})^{m-2\alpha}]$.

Nun ist aber

$$e^{x\sqrt{-1}} = \mathrm{Cos.}\,x + \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin.}\,x,$$

und daher

$$(e^{x\sqrt{-1}})^{m-2\alpha} = \mathrm{Cos.}\,(m-2\alpha)x + \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin.}(m-2\alpha)x,$$

oder, wenn man rechts alle Werthe haben will,

---

*) Wenn man z. B. aus den Gleichungen (§. 11. n. 3 u. 4.) für $x=0$ $v=n$ gefunden hat, so ergiebt sich im Gegentheil für $x=\pi$, die Abhängigkeit $v=n+1$, aus denselben Gleichungen. — Darüber giebt besonders der letzte Theil dieser Bogen noch mehr Aufschluſs.

$$(e^{x\sqrt{-1}})^{m-2\alpha} = \text{Cos.}(m-2\alpha)(\pm 2n\pi + x)$$
$$+\sqrt{-1}.\text{Sin.}(m-2\alpha)(\pm 2n\pi + x)$$
$$= \text{Cos.}[\pm 2mn\pi + (m-2a)x]$$
$$+\sqrt{-1}.\text{Sin.}[\pm 2mn\pi + (m-2\alpha)x].$$

Dies oben substituirt, giebt:

$$(\male)\ldots(2\,\text{Cos.}\,x)^m = S.[m_\alpha.\text{Cos.}(\pm 2mn\pi + (m-2\alpha)x)]$$
$$+\sqrt{-1}.S.[m_\alpha.\text{Sin.}(\pm 2mn\pi + (m-2\alpha)x)],$$

welches die gesuchte Entwicklung ist, und in welcher der Ausdruck rechts eben so vollständig ist, als der Ausdruck links, in so ferne n, alle Werthe 0, 1, 2, 3, bis ins Unendliche vorstellen soll.

§. 22.

Weil

$$\text{Cos.}[\pm 2mn\pi + (m-2\alpha)x] = \text{Cos.}(\pm 2mn\pi).\text{Cos.}(m-2\alpha)x$$
$$-\text{Sin.}(\pm 2mn\pi).\text{Sin.}(m-2\alpha)x$$

und

$$\text{Sin.}[\pm 2mn\pi + (m-2\alpha)x] = \text{Sin.}(\pm 2mn\pi).\text{Cos.}(m-2\alpha)x$$
$$+\text{Cos.}(\pm 2mn\pi).\text{Sin.}(m-2\alpha)x,$$

so geht obige Entwicklung ($\male$. §. 21.) auch noch in folgende über:

$$(2\,\text{Cos.}\,x)^m = \text{Cos.}(\pm 2mn\pi).S.[m_\alpha.\text{Cos.}(m-2\alpha)x]$$
$$-\text{Sin.}(\pm 2mn\pi).S.[m_\alpha.\text{Sin.}(m-2\alpha)x]$$
$$+\sqrt{-1}.(\text{Sin.}(\pm 2mn\pi).S.[m_\alpha.\text{Cos.}(m-2\alpha)x]$$
$$+\text{Cos.}(\pm 2mn\pi).S.[m_\alpha.\text{Sin.}(m-2\alpha)x])$$

oder wenn man die Bezeichnungen von (§. 1.) beibehält:

$$(4)\ldots(2\,\text{Cos.}\,x)^m = X.\text{Cos.}(\pm 2mn\pi) - Y.\text{Sin.}(\pm 2mn\pi)$$
$$+\sqrt{-1}.[X.\text{Sin.}(\pm 2mn\pi) + Y.\text{Cos.}(\pm 2mn\pi)]$$

wo n sowohl o, als auch alle ganzen Zahlen vorstellt.

Man sieht zu gleicher Zeit, wie diese (für jedes m) allgemein gültige Entwicklung in das frühere Resultat

$$(2\,\mathrm{Cos.}\,x)^m = X$$

übergeht, so bald m eine positive ganze Zahl wird, weil dann $Y = o$ erkannt werden muſs (§. 2.).

§. 23.

Setzt man in (4) $n = o$, so erhält man

$$(2\,\mathrm{Cos.}\,x)^m = X + \sqrt{-1}\,.\,Y$$

wo $\sqrt{-1}$ zweideutig ist, so daſs man eben so

$$(2\,\mathrm{Cos.}\,x)^m = X + \sqrt{-1}\,.\,Y,$$

als auch $(2\,\mathrm{Cos.}\,x)^m = X - \sqrt{-1}\,.\,Y$

hat; und man sieht also, wie $X + \sqrt{-1}\,.\,Y$ und $X - \sqrt{-1}\,.\,Y$ (dieselben Resultate, die auch Euler schon erhalten hat) als zwei im Allgemeinen verschiedene Werthe von $(2\,\mathrm{Cos.}\,x)^m$ angesehen werden müssen.

Hätte man daher das erste der Euler'schen Resultate genommen

$$(2\,\mathrm{Cos.}\,x)^m = X + \sqrt{-1}\,.\,Y$$

und solches rechts dadurch vervollständigt, daſs man diesen Werth $X + \sqrt{-1}\,.\,Y$ mit allen Werthen von 1^m oder mit

$$\mathrm{Cos.}\,(\pm 2mn\pi) + \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin.}\,(\pm 2mn\pi),$$

wo n, Null und alle ganzen Zahlen vorstellt, multiplizirte, so hätte man erhalten

$$(2\,\mathrm{Cos.}\,x)^m = (X + \sqrt{-1}\,.\,Y)\,.\,[\mathrm{Cos.}\,(\pm 2mn\pi) + \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{Sin.}\,(\pm 2mn\pi)],$$

welche Formel genau mit der (4) Formel zusammenfällt.

§. 24.

Auch bei der Entwicklung in (§. 21.) kann man, und es scheint dies jedesmal bequemer zu seyn, die dort genommene Rücksicht, alle Werthe der Entwicklung zu erhalten, vernachläſsigen, und nur einen Werth zu erhalten trachten. Die Entwicklung sieht dann so aus:

Es ist

$$(2\,\mathrm{Cos}.\,x)^m = (e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})^m,$$

also nach dem binomischen Lehrsatze

$$(2\,\mathrm{Cos}.\,x)^m = \mathrm{S}.\,[m_{\mathfrak{a}}.\,e^{(m-2\mathfrak{a})x}].$$

Aber

$$e^{(m-2\mathfrak{a})x} = \mathrm{Cos}.\,(m-2\mathfrak{a})\,x + \sqrt{-1}.\,\mathrm{Sin}\,(m-2\mathfrak{a})\,x,$$

folglich, wenn man dies substituirt:

$$(2\,\mathrm{Cos}.\,x)^m = \mathrm{S}.\,[m_{\mathfrak{a}}.\,\mathrm{Cos}.\,(m-2\mathfrak{a})\,x] + \sqrt{-1}.\,\mathrm{S}.\,[m_{\mathfrak{a}}.\,\mathrm{Sin}.\,(m-2a)\,x]$$

oder $(2\,\mathrm{Cos}.\,x)^m = X + \sqrt{-1}\,Y;$

und vollständig

$$(2\,\mathrm{Cos}.\,x)^m = 1^m.\,(X + \sqrt{-1}.\,Y),$$

welches wieder mit der Formel (4) zusammenfällt.

§. 25.

Wollte man eine indirekte Entwicklung vorziehen, so könnte man auch auf folgende Art verfahren:

Man setze $y = (\mathrm{Cos}.\,x)^m$

und entwickle, indem man diese Gleichung differentiirt und $(\mathrm{Cos}.\,x)^m$ eliminirt, die Differentialgleichung

$$my . \text{Sin.}\, x + \frac{dy}{dx} . \text{Cos.}\, x = 0,$$

woraus wieder, wenn man für Sin. x und Cos. x die Werthe

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \text{ und } \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

setzt, hervorgeht,

$$my . (1 - e^{-2x\sqrt{-1}}) + \sqrt{-1} . \frac{dy}{dx} . (1 + e^{-2x\sqrt{-1}}) = 0,$$

oder

$$(\text{♀}) \ldots my(1 - z) + \sqrt{-1} . \frac{dy}{dx} . (1 + z) = 0,$$

wenn $z = e^{-2x\sqrt{-1}}$.

Nun nehme man an

$$y = e^{mx\sqrt{-1}} (\alpha + \beta . z + \gamma . z^2 + \delta . z^3 + \varepsilon . z^4 + \ldots)$$

und differentiire, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = m\sqrt{-1} . e^{mx\sqrt{-1}} (\alpha + \beta . z + \gamma . z^2 + \delta . z^3 + \varepsilon . z^4 + \ldots)$$

$$+ e^{mx\sqrt{-1}} . \frac{dz}{dx} (\beta + 2\gamma . z + 3\delta . z^2 + 4\varepsilon . z^3 \ldots)$$

oder, weil $\frac{dz}{dx} = -2\sqrt{-1} . z$ ist,

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{-1} . e^{mx\sqrt{-1}} [m\alpha + (m-2)\beta . z + (m-4)\gamma . z^2 + (m-6)\delta . z^3 + \ldots].$$

Substituirt man diese Werthe für y und $\frac{dy}{dx}$ in die obige Differentialgleichung (♀), ordnet man nach Potenzen von z, dividirt durch $e^{mx\sqrt{-1}}$, und setzt die einzelnen Koefficienten der Null gleich, so erhält man zuletzt

$$\alpha = \alpha$$
$$\beta = m_1 \alpha$$
$$\gamma = m_2 \alpha$$
$$\delta = m_3 \alpha$$

u. s. w. f.;

also

$$(\mathrm{Cos}\, x)^m = \alpha . e^{mx\sqrt{-1}} . (1 + m_1 . z + m_2 . z^2 + m_3 . z^3 + \ldots),$$

wo noch die Constante α zu bestimmen bleibt. Weil aber für $x = 0$, $e^{mx\sqrt{-1}} = 1$, $\mathrm{Cos}.\, x = 1$, $z = 1$ wird, so erhält man zur Bestimmung der Constante

$$1^m = \alpha . (1 + m_1 + m_2 + m_3 + \ldots) = \alpha (1 + 1)^m = \alpha . 2^m.$$

Also

$$(2\,\mathrm{Cos}.x)^m = 1^m \times e^{mx\sqrt{-1}} (1 + m_1 . z + m_2 . z^2 + m_3 . z^3 + \ldots),$$

oder, wenn man für z seinen Werth setzt und wirklich multiplizirt,

$$(2\,\mathrm{Cos}.\, x)^m = 1^m \times (e^{mx\sqrt{-1}} + m_1 . e^{(m-2)x\sqrt{-1}} + m_2 . e^{(m-4)x\sqrt{-1}} + m_3 . e^{(m-6)x\sqrt{-1}} + \ldots)$$

oder auch

$$(2\,\mathrm{Cos}.\, x)^m = 1^m . S . [m_\mathfrak{a} . e^{(m-2\mathfrak{a})x\sqrt{-1}}],$$

aus welcher Gleichung endlich, wenn man

$$e^{(m-2\mathfrak{a})x\sqrt{-1}} = \mathrm{Cos}.(m-2\mathfrak{a})x + \sqrt{-1} . \mathrm{Sin}.(m-2\mathfrak{a})x$$

zu Hülfe nimmt, das bekannte Resultat

$$(2\,\mathrm{Cos}.\, x)^m = (X + \sqrt{-1} . Y)$$

hervorgeht.

§. 26.

Wir brauchen wohl nicht zu bemerken, daſs eine solche Entwicklung nichts empfehlenswerthes hat, einmal weil man nicht wissen kann, ob die angenommene Form der Entwicklung auch wirklich allgemein zuläſsig ist (§. 14. XI.), bevor man das nicht erst untersucht hat; weil man also, wenn die Form geradezu angenommen worden, auch wenn sich die Koefficienten bestimmen lassen, ohne jene vorgängige Untersuchung über die Form, nicht überzeugt seyn kann, daſs die gefundene Entwicklung wirklich allgemein gültig ist, sondern fürchten muſs, daſs sie nur für die Fälle gilt, für welche die angenommene Form gerechtfertigt ist; dann aber auch weil in der Regel jede solche indirekte Methode nur auf groſsen Umwegen zum Ziele führt, und im wesentlichen doch wieder mit dem direkten Gange zusammenfallen muſs.

Uebrigens ist in vielen Fällen der Nutzen der indirekten Methoden nicht zu verkennen; nur glauben wir, daſs so lange, als es möglich ist auf einem direkten Wege zum Ziele zu gelangen, dieser dann jedem indirekten immer vorzuziehen seyn dürfte, und daſs indirekte Wege nur mit groſser Vorsicht anzuwenden seyn dürften. *)

*) Wenn es bloſs darauf ankommt Resultate zu erzielen, erlaubt sich der Verf. alle Wege, auch solche denen er nicht traut. Hat er aber die Resultate gefunden, so betritt er, um sich von den Grenzen ihrer Gültigkeit zu überzeugen, nur

§. 27.

Man hat also allgemein für jeden Werth von m,

$$\text{I. } (2\,\mathrm{Cos.}x)^m = [X.\mathrm{Cos.}(\pm 2mn\pi) - Y.\mathrm{Sin.}(\pm 2mn\pi)] + \sqrt{-1}.[X.\mathrm{Sin.}(\pm 2mn\pi) + Y.\mathrm{Cos.}(\pm 2mn\pi)],$$

wo n sowohl Null als auch jede ganze Zahl vorstellt, und wo X und Y die Reihen

$$S.[m_\alpha.\mathrm{Cos.}(m-2\alpha)x] \text{ und } S.[m_\alpha.\mathrm{Sin.}(m-2\alpha)x]$$

oder die Reihen

$$\mathrm{Cos.}mx + m_1.\mathrm{Cos.}(m-2)x + m_2.\mathrm{Cos.}(m-4)x + \ldots \text{in inf.}$$

und

$$\mathrm{Sin.}mx + m_1.\mathrm{Sin.}(m-2)x + m_2.\mathrm{Sin.}(m-4)x + \ldots \text{in inf.}$$

bedeuten. Und dies nur ist die allgemeingültige Entwicklung von $(2\,\mathrm{Cos.}x)^m$ nach Cosinus und Sinus der vielfachen Bogen.

Ist aber m eine positive ganze Zahl, so erhält man aus dieser allgemeinen Entwicklung

II. $(2\,\mathrm{Cos.}x)^m = X$, weil dann $0 = Y$ ist.

§. 28.

Untersuchen wir nun, in welchen Fällen die hier mit X und mit Y bezeichneten Reihen

$$S.[m_\alpha.\mathrm{Cos.}(m-2\alpha)x] \text{ und } S.[m_\alpha.\mathrm{Sin.}(m-2\alpha)x]$$

convergent seyn müssen.

Wir wissen aber, daſs die Summe der Glieder einer unendlichen Reihe nicht immer ein endliches Resultat giebt, wenn auch die Glieder der Reihe beständig abnehmen. So erhalten wir z. B. aus

$$-\log.(1-x) = x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots$$

---

diejenigen, auf die er sich verlassen zu können glaubt. Irren ist dann noch immer menschlich.

für $x=1$

$$-\log. 0 = \infty = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \ldots$$

wo die Glieder beständig abnehmen, während ihre Summe unendlich groſs ist.

Wenn man daher unter einer convergenten Reihe nicht bloſs diejenige versteht, deren Glieder beständig abnehmen, sondern eine solche in welcher die Summe von beliebig und noch so vielen ihrer Glieder jedesmal einen endlichen Ausdruck liefert, der nicht in's unendliche wächst, sondern mittelst dessen, je weiter man fortgeht, immer bestimmtere Grenzen gebildet werden können, welche der Werth der Reihe nicht übersteigen kann, oder zwischen denen er liegen muſs, so wird die jedesmalige Untersuchung über die Convergenz der Reihen in den meisten Fällen eine sehr delikate werden; und es scheint daher jeder Beitrag, der zur Erleichterung derselben dienen kann, beachtungswerth zu seyn.*)

§. 29.

Es sei zuerst die Reihe

$$1 - m_1 + m_2 - m_3 + m_4 \ldots . \pm m_n$$

die aus $n+1$ Gliedern besteht, und die auch dargestellt werden kann durch

$$S.\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=n}{[(-1)^{\mathfrak{a}}.m_{\mathfrak{a}}]} \quad \text{oder durch} \quad S.\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=n}{\left[\frac{(-1)^{\mathfrak{a}}.m^{\mathfrak{a}|-1}}{\mathfrak{a}'}\right]},$$

zu summiren.

*) Wenn auch der, einer unendlichen Reihe im allgemeinen gleiche Ausdruck einen bestimmten Werth hat, so kann die Reihe selbst doch divergent seyn, wie bekannt ist, und wie wir (§. 14. IX.) noch besonders erwähnt haben.

Nach dem binomischen Lehrsatze für Fakul täten hat man

$$\frac{(a+b)^{n|r}}{n'} = S.\left[\frac{a^{\mathfrak{a}|r}.b^{\mathfrak{b}|r}}{\mathfrak{a}'.\mathfrak{b}'}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=n};$$

folglich, wenn man setzt statt $\frac{a,\ b,\ r}{m,\ -1,\ -1}$,
beziehlich

auch $$\frac{(m-1)^{n|-1}}{n'} = S.\left[\frac{m^{\mathfrak{a}|-1}.(-1)^{\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{a}'\ .\ \mathfrak{b}'}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=n};$$

oder, weil $(-1)^{\mathfrak{b}|-1} = (-1)^{\mathfrak{b}}.1^{\mathfrak{b}|1} = (-1)^{\mathfrak{b}}.\mathfrak{b}'$ ist, wenn man zu gleicher Zeit mit $(-1)^n$ multiplizirt,

$$(\mathfrak{C}).\ \frac{(-1)^n.(m-1)^{n|-1}}{n'} = S.\left[\frac{(-1)^{\mathfrak{a}}.m^{\mathfrak{a}|-1}}{\mathfrak{a}'}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=n} = S.\left[(-1)^{\mathfrak{a}}.m_{\mathfrak{a}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=n}.$$

Es ist also die Summe der Reihe

$$1 - m_1 + m_2 - m_3 + m_4 - \ldots \pm m_n = \frac{(-1)^n.(m-1)^{n|-1}}{n'},$$

oder auch $= (-1)^n.(m-1)_n.$

§. 30.

Die Gleichung (§. 29. $\mathfrak{C}$.) läſst sich auch so schreiben:

$$\frac{(1-m)^{n|1}}{n'} = S.\left[\frac{(-m)^{\mathfrak{a}|1}}{\mathfrak{a}'}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=n}$$

oder wenn man $-m$ statt m setzt,

$$\frac{(1+m)^{n|1}}{n'} = S.\left[\frac{m^{\mathfrak{a}|1}}{\mathfrak{a}'}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=n}.$$

das heiſst

$$1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m+1)}{2} + \frac{m(m+1)(m+2)}{2 \cdot 3} + \ldots$$
$$+ \frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{2 \cdot 3 \ldots n}$$
$$= \frac{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots(m+n)}{2 \cdot 3 \ldots n}.$$

§. 31.

Schreibt man aber den Binomial-Koefficienten $(m-1)_n$ so, nehmlich

$$(P) \ldots \frac{m-1}{1} \cdot \frac{m-2}{2} \cdot \frac{m-3}{3} \cdot \frac{m-4}{4} \cdot \frac{m-5}{5} \ldots \frac{m-n}{n},$$

so erhellet augenblicklich:

1) Für $m = 0$ ist solcher $= \pm 1$;
oder $(m-1)_n = \pm 1$.

2) So lange m positiv ist, groſs oder klein, so wird man doch immer n so groſs nehmen können, daſs $m-n$ negativ ist. Bei irgend einem der Faktoren von (P) wird der Uebergang vom positiven zum negativen statt finden; und wäre n nicht gröſser, so hätte offenbar $(m-1)_n$ für diesen Werth von n einen bestimmten endlichen Werth Q. Für jedes folgende n sind aber alle in (P) folgenden negativen Faktoren (absolut genommen) offenbar kleiner als 1 (obgleich sie sich der Einheit desto mehr nähern, je gröſser n wird); folglich ist für jedes gröſsere n der Binomial-Koefficient $(m-1)_n < Q$ (vom Zei-

chen überall abgesehen); also wird der Werth von $(m-1)_n$ nie unendlich, sondern es wird solcher immer kleiner noch, je grösser man n nimmt, so lange nur m positiv ist.

Also convergirt die Reihe

$1 - m_1 + m_2 - m_3 + m_4 - m_5 + \ldots$ in inf.

ganz gewiſs, so lange m positiv ist; während sie für $m = 0$, der Einheit gleich wird. (§. 29.)

§. 32.

Es ist aber

$1 - m_1 . z + m_2 . z^2 - m_3 . z^3 + \ldots \text{ in inf} = (1-z)^m$

und deshalb der Werth der Reihe links, so lange sie convergirt, dem Werthe von $(1-z)^m$ nothwendig gleich (§. 14. IX.) Da sie nun convergirt für $z = 1$, so lange m positiv bleibt, so ist ihr Werth dann auch allemal

$$= (1-1)^m \text{ d. h.} = 0.$$

Es ist also die Summe von unendlich vielen Gliedern der Reihe $1 - m_1 + m_2 - m_3 + m_4 \ldots$, so lange m positiv ist, nothwendig $= 0$.

Aber dieselbe Summe ist $= (-1)^n (m-1)_n$, wenn man n unendlich groſs nimmt (§. 29.); folglich allemal

$$(m-1)_n = 0, \text{ wenn } m \text{ positiv und } n = \infty.$$

§. 33.

Für $z = 1$ und m negativ muſs dagegen die Reihe

$$1 - m_1 . z + m_2 . z^2 - m_3 . z^3 + \ldots \text{ in inf.}$$

nothwendig divergiren; denn convergirte sie, d. h. hätte sie einen Werth, so müſste ihr Werth zu gleicher Zeit der von $(1-z)^m$ seyn, für $z=1$ und m negativ.

Da aber in diesem Falle $(1-z)^m$ in $(1-1)^m$ oder 0^m oder ∞ übergeht, so kann demnach die Reihe

$$1-m_1+m_2-m_3+m_4-\ldots \text{ in inf.}$$

nicht convergiren, sondern sie muſs divergiren, so lange m negativ ist. — Die Summe von unendlich vielen ihrer Glieder ist also dann unendlich groſs, also auch dann nach (§. 29.) der Binomial-Koefficient $(m-1)_n$ allemal unendlich groſs, wenn m negativ und $n=\infty$ ist.

§. 34.

Für den Binomial-Koefficienten $(m-1)_n$ oder p_n, wenn man $m-1=p$, also $m=p+1$ setzt, haben wir also folgende Resultate erhalten:

1) Er ist allemal $=\pm 1$, wenn $m=0$ oder $p=-1$;

2) Je gröſser n wird, desto mehr nähert er sich der Null, wenn m positiv oder wenn p zwischen -1 und $+\infty$ liegt; er nähert sich aber desto mehr dem Unendlichen, wenn m negativ oder p zwischen -1 und $-\infty$ liegt, je gröſser n wird.

§. 35.

Für die Convergenz der Reihe

$$1-m_1+m_2-m_3+m_4-\ldots \text{ in inf.}$$

haben wir dagegen erhalten:

1) Sie convergirt allemal, wenn m positiv;

2) Sie divergirt allemal, wenn m negativ.

3) Für $m = o$, ist die Reihe selbst $= 1$.

§. 36.

Da nun aus

$$1 - m_1 + m_2 - m_3 + m_3 - \ldots \text{ in inf.}$$

diese andere

$$(R) \ldots 1 + m + \frac{m(m+1)}{2} + \frac{m(m+1)(m+2)}{2 \cdot 3}$$

$$+ \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots \text{ in inf.}$$

hervorgeht, wenn man $-m$ statt m setzt, so ist klar, daſs diese letztere divergirt, wenn jene convergirt, so wie sie convergirt, wenn jene divergirt.

Es convergirt also die Reihe R nothwendig, wenn nur m negativ, übrigens von der Null noch so wenig verschieden ist. — Setzt man ihre Summe $= S$, so hat man

$$\frac{S-1}{m} = 1 + \frac{m+1}{2} + \frac{(m+1)(m+2)}{2.\ 3.}$$

$$+ \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{2.\ 3.\ 4.} + \ldots \text{ (T)},$$

und es convergirt also auch diese Reihe rechts, die durch (T) bezeichnet seyn mag, allemal, wenn m negativ, übrigens von der Null so wenig verschieden ist, als man nur immer will. Für $m = o$, geht die Reihe (T) über in die bekannte

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \ldots \qquad \text{(U)}$$

welche bekanntlich divergirt. —

Dividirt man in der Reihe (T) das $n+1^{te}$ Glied $\frac{(m+1)^{n|1}}{(n+1)'}$, durch das n^{te} Glied $\frac{(m+1)^{n-1|1}}{n'}$, so erhält man zum Quotienten

$$\frac{m+n}{n+1}.$$

Dividirt man in der Reihe (U) ebenfalls das $n+1^{te}$ Glied durch das n^{te}, so erhält man

$$\frac{n}{n+1}.$$

Und da die Reihe (T) immer convergirt, so lange m negativ, übrigens von der Null noch so wenig verschieden ist, so scheint jede Reihe nothwendig convergiren zu müssen, in welcher von irgend einem Gliede ab, der Quotient des $n+1^{ten}$ Gliedes durch das n^{te} Glied $< \frac{n}{n+1}$ ist, wenn die Reihe auch lauter positive Glieder hat.*)

§. 37.

Wendet man dies auf die andere Reihe

(V.) $1 + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \dots$ in inf.

an, so erhält man zum Quotienten des $n+1^{ten}$ Gliedes durch das n^{te}, $\frac{m_{n+1}}{m_n}$ oder $-\frac{n-m}{n+1}$; und man sieht also dem (§. 36.) zu folge, daſs

*) Es scheint sonach die Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \dots \text{ in inf.}$$

gleichsam eine Grenze der Convergenz zu bilden, wenigstens für die Reihen, die lauter positive Glieder haben.

diese Reihe (V.) gewiſs allemal convergirt, so lange m positiv ist; und zwar nicht bloſs diese Reihe an sich, die zuletzt (wenn m positiv) immer Glieder mit abwechselnden Zeichen haben wird, sondern es convergirt auch diese Reihe noch, wenn man alle ihre Glieder positiv nimmt, so lange nur m positiv bleibt.

§. 38.

Ist m negativ und $= -p$ (wo also p positiv angenommen wird), so geht die Reihe (V) oder $S.[m_{\mathfrak{a}}]$ über in

$$S.[(-p)_{\mathfrak{a}}] = S.\left[(-1)^{\mathfrak{a}} . \frac{p^{\mathfrak{a}|1}}{\mathfrak{a}'}\right].$$

Sondert man hier alle ungeraden Glieder, und alle geraden von einander ab (dadurch daſs man $2\mathfrak{a}$ und $2\mathfrak{a}+1$ statt $\mathfrak{a}$ schreibt), so erhält man

$$S.\left[(-1)^{\mathfrak{a}}.\frac{p^{\mathfrak{a}|1}}{\mathfrak{a}'}\right] = S.\left[\frac{p^{2\mathfrak{a}|1}}{(2\mathfrak{a})'}\right] - S.\left[\frac{p^{2\mathfrak{a}+1}}{(2\mathfrak{a}+1)'}\right]$$

und wenn man hier die gleichvielten Glieder vereinigt

$$S.\left[(-1)^{\mathfrak{a}}.\frac{p^{\mathfrak{a}|1}}{\mathfrak{a}'}\right] = S.\left[\frac{p^{2\mathfrak{a}|1}}{(2\mathfrak{a})'} - \frac{p^{2\mathfrak{a}+1|1}}{(2\mathfrak{a}+1)'}\right],$$

oder

$$S.(m_{\mathfrak{a}}) = S.[(-p)_{\mathfrak{a}}] = (1-p).S.\left[\frac{p^{2\mathfrak{a}|1}}{(2\mathfrak{a}+1)'}\right],$$

wo in $S.\left[\frac{p^{2\mathfrak{a}|1}}{(2\mathfrak{a}+1)'}\right]$ alle Glieder positiv sind, so lange p positiv ist. — Dividirt man hier das $n+1^{te}$ Glied durch das n^{te}, so erhält man

$$\frac{(p+2n-2)(p+2n-1)}{2n \;.\; (2n+1)};$$

und dieser Quotient ist noch immer kleiner als $\frac{n}{n+1}$, so lange $p \leqq 1$, also $m \geqq -1$ ist, d. h. entweder $m = -1$, oder m zwischen 0 und -1 liegt. — Für jeden andern positiven Werth von p, z. B. für $p = 1 + x$, wird derselbe Quotient

$$\frac{(p+2n-2)(p+2n-1)}{2n. \quad (2n+1)} = \frac{[x+(2n-1)](x+2n)}{2n. \quad (2n+1)}$$

$$= \frac{x^2+(4n-1)x+2n(2n-1)}{2n. \quad (2n+1)}$$

und man kann nun die (positiven) Werthe von x suchen, für welche dieser Quotient

$$\frac{x^2+(4n-1)x+2n(2n-1)}{2n. \quad (2n+1)} < \frac{n}{n+1},$$

d. h. $x^2 + (4n-1)x < \frac{2n}{+1}$ ist,

und man überzeugt sich leicht, daſs dieser Bedingung für jeden (noch so groſsen) Werth von n, durch keinen (positiven) Werth von x, genügt werden kann.

§. 39.

Die Reihe

$$1 + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \ldots \text{ in inf.}$$

convergirt also an sich, und auch noch wenn man alle ihre Glieder positiv nimmt, so lange m positiv ist; sie convergirt noch, (aber nicht mehr, wenn man alle ihre Glieder positiv nimmt), wenn m zwischen — 1 und 0 liegt. — Dagegen divergirt sie allemal, wenn m zwischen — 1 und — ∞ liegen sollte.

§. 40.

Da nun in obigen Reihen X und Y oder $S.[m_{\alpha}.\mathrm{Cos.}(m-2\alpha)x]$ und $S.[m_{\alpha}.\mathrm{Sin.}(m-2a)x]$ so lange x reel ist, weil dann alle Cosinus und Sinus (absolut genommen) $\leqq 1$ sind, alle einzelnen Glieder gleich oder kleiner sind, als die gleichnamigen Glieder in der Reihe

$$S.[m_{\alpha}],$$

so werden diese Reihen X und Y, auch wenn man alle ihre Glieder positiv nimmt, folglich um so vielmehr an sich, nothwendig in allen den Fällen convergiren, in welchen die Reihe

$$S.[m_{\alpha}],$$

wenn man ebenfalls ihre Glieder alle positiv nimmt, convergirt, also wenn m eine ganz beliebige aber positive Zahl ist.

Anmerkung.

Obgleich übrigens $S.[m_{\alpha}]$ für jeden Werth von m der zwischen — 1 und — ∞ liegt, divergirt (während sie in diesem Falle abwechselnde Zeichen hat), so bliebe doch noch zu untersuchen übrig, ob nicht vielleicht doch die Reihen X und Y für einen solchen Werth von m und für gewisse Werthe von x convergent werden könnten; einmal weil ihre Glieder kleiner sind (abgesehen vom Zeichen) als die gleichnamigen Glieder der Reihe S.$[m_a]$ und dann auch weil die Cosinus und Sinus periodische Zeichen-Aenderungen bewirken.

Aber eben dieser periodischen Zeichen-Aenderungen wegen, besonders aber weil unter den Gliedern, je weiter man fortgeht, immer gröſsere und gröſsere und zuletzt unendlich groſse sich vorfinden, für alle Werthe von x für welche die Reihe noch bleibt, glauben wir, einer vorläufig darüber angestellten Untersuchung zu Folge, schlieſsen zu dürfen, daſs auch X und Y allemal divergiren, wenn m einen negativen Werth hat, der zwischen -1 und $-\infty$ liegt.

§. 41.

In allen den Fällen aber, in welchen X und Y convergiren, kann man von den Werthen von $(2\,\text{Cos.}\,x)^m$ auf die Werthe der allgemeinen Entwicklung (§. 27.):

$$X.\text{Cos.}(\pm 2mn\pi) - Y.\text{Sin.}(\pm 2mn\pi)$$
$$+\sqrt{-1}\,[X\,\text{Sin.}(\pm 2mn\pi) + Y.\text{Cos.}(\pm 2mn\pi)]$$

mit Nothwendigkeit. und ohne daſs man Widersprüche zu befürchten hätte, schlieſsen.

In allen den Fällen dagegen, in welchen die Reihen X und Y divergiren, ist Y nie der Null gleich, auch wenn m eine negative ganze Zahl seyn sollte, so lange nicht alle einzelneu Glieder verschwinden. — Denn im Allgemeinen ist Y nicht identisch $= 0$ (§. 13.), und ein besonderer Werth von Y kann nicht der Null gleich wer-

werden, so lange nicht dieses Y wirklich einen Werth hat, also so lange Y nicht convergent ist.

Man erhält bekanntlich alle Werthe von $(2\,\text{Cos}.\,x)^m$, wenn man $2\,\text{Cos}.\,x$ absolut nimmt und den reelen positiven Werth seiner m^{ten} Potenz mit allen Werthen von $(+1)^m$ oder $(-1)^m$ multiplizirt, je nachdem $\text{Cos}.\,x$ positiv oder negativ ist. Setzte man nun statt $(+1)^m$ oder statt $(-1)^m$, die gleichgeltenden Ausdrücke

$$\text{Cos}\,(\pm 2mn\pi) + \sqrt{-1}\,.\,\text{Sin}.(\pm 2mn\pi)$$

und $\text{Cos}.[\pm(2n+1)m\pi] + \sqrt{-1}\,.\,\text{Sin}.[\pm(2n+1)m\pi]$,

und wollte man dann von dem Werthe dieses n auf den zugehörigen Werth des n in der Formel (§. 27.), unabhängig von den Werthen von x schliefsen, so müfsten die darauf gegründeten Resultate keineswegs nothwendig richtig seyn, sondern sie werden in der Regel leicht zu bemerkende Widersprüche enthalten. (Vergl. §. 14. und §. 19.).

§. 42.

Nimmt man die Gleichung

$$2\sqrt{-1}\,.\,\text{Sin}.\,x = e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}x},$$

so hat man

$$(2\sqrt{-1}\,.\,\text{Sin}.\,x)^m = S.[m_\alpha.(-1)^\alpha.\,e^{(m-2\alpha)x\sqrt{-1}}]$$

oder

$$(2\sqrt{-1}\,.\,\text{Sin}.\,x)^m = S.[(-1)^\alpha.\,m_\alpha.\,\text{Cos}.(m-2\alpha)\,x]$$
$$+\sqrt{-1}\,.\,S.[(-1)^\alpha.\,m_\alpha.\,\text{Sin}.(m-2\alpha)\,x].$$

Bezeichnet man diesen Ausdruck rechts durch

$${}_1X + \sqrt{-1}\,.\,{}_1Y$$

so hat man dann auch

$$(2\sqrt{-1}.\mathrm{Sin.}x)^m = {}_1X.\mathrm{Cos.}(\pm 2mn\pi) - {}_1Y.\mathrm{Sin.}(\pm 2mn\pi)$$
$$+\sqrt{-1}\,[{}_1X.\mathrm{Sin.}(\pm 2mn\pi) + {}_1Y.\mathrm{Sin.}(\pm 2mn\pi)],$$

welche Entwicklung ebenfalls ganz allgemein für jedes m gilt.

§. 43.

Ist dagegen m eine ganze positive Zahl, so geht diese allgemeine Formel des (§. 42.) über in

$$(2\,\mathrm{Sin.}x)^m = (-1)^{\frac{m}{2}}.S.[(-1)^a.m_a.\mathrm{Cos.}(m-2a)x] = (-1)^{\frac{m}{2}}.{}_1X$$

wenn m eine gerade Zahl ist; dagegen in

$$(2\,\mathrm{Sin.}x)^m = (-1)^{\frac{m-1}{2}}.S.[(-1)^a m_a.\mathrm{Sin.}(m-2a)x] = (-1)^{\frac{m-1}{2}}.{}_1Y$$

wenn m eine ungerade Zahl ist.

§. 44.

Eine andere allgemein gültige Entwicklung von $(2\,\mathrm{Sin.}x)^m$ würde man auch noch aus (§. 27.) erhalten, wenn man daselbst $\frac{1}{2}\pi - x$ statt x setzte, weil dann Cos. x in Cos. $(\frac{1}{2}\pi - x)$, d. h. in Sin. x übergeht.

Die Reihen X und Y, oder $S.[m_a.\mathrm{Cos.}(m-2a)x]$ und $S.[m_a.\mathrm{Sin.}(m-2a)x]$ gehen dann über in

$S.[m_a\,\mathrm{Cos.}(m-2a)(\frac{1}{2}\pi-x)]$ und $S.[m_a.\mathrm{Sin.}(m-2a)(\frac{1}{2}\pi-x)]$.

Bezeichnet man diese Reihen durch

$${}_2X \quad \text{und} \quad {}_2Y,$$

so hat man dann

$$(2\,\mathrm{Sin.}x)^m = 1^m \times ({}_2X + \sqrt{-1}\,.\,{}_2Y),$$

oder auch

$$(2\,\mathrm{Sin.}x)^m = {}_2X.\mathrm{Cos.}(\pm 2mn\pi) - {}_2Y.\mathrm{Sin.}(\pm 2mn\pi)$$
$$+\sqrt{-1}\,[{}_2X.\mathrm{Sin.}(\pm 2mn\pi) + {}_2Y.\mathrm{Cos.}(\pm 2mn\pi)]$$

welche Entwickelung abermals ganz allgemein gültig ist.

§. 45.

Man kann sich auch hier augenblicklich überzeugen, daſs ${}_2Y = 0$ seyn muſs, so oft m eine ganze positive Zahl ist (§. 2.). — In diesem Falle hat man also bloſs

$$(2\,\mathrm{Sin.}\,x)^m = {}_2X = S\,.\,[m_\alpha\,.\,\mathrm{Cos.}\,(m-2\alpha)(\tfrac{1}{2}\pi - x)].$$

Setzt man hier 2p statt m, so daſs m eine gerade Zahl wird, so hat man

$$\begin{aligned}(2\,\mathrm{Sin.}\,x)^{2p} &= S\,.\,[(2p)_\alpha\,.\,\mathrm{Cos.}\,((p-\alpha)\pi-(2p-2\alpha)x)]\\ &= S\,.\,[(2p)_\alpha.\mathrm{Cos.}p\pi.\mathrm{Cos.}\alpha\pi.\mathrm{Cos.}(2p-2\alpha)x]\\ &= \mathrm{Cos.}\,p\pi.\,S.\,[(-1)^\alpha.(2p)_\alpha.\,\mathrm{Cos.}(2p-2\alpha)x].\end{aligned}$$

Eben so hat man

$$\begin{aligned}&(2\,\mathrm{Sin.}\,x)^{2p+1}\\ &= S.[(2p+1)_\alpha.\,\mathrm{Cos.}\,((p-\alpha)\pi-(2p+1-2\alpha)x+\tfrac{1}{2}\pi)]\\ &= -S.[(2p+1)_\alpha.\,\mathrm{Sin.}\,((p-\alpha)\pi-(2p+1-2\alpha)x)]\\ &= +S.[(2p+1)_\alpha.\,\mathrm{Cos.}\,p\pi\,.\,\mathrm{Cos.}\alpha\pi\,.\mathrm{Sin.}(2p+1-2\alpha)x]\\ &= +\mathrm{Cos.}\,p\pi\,.\,S.\,[(-1)^\alpha.(2p+1)_\alpha.\,\mathrm{Sin.}\,(2p+1-2\alpha)x],\end{aligned}$$

welche Resultate genau dieselben sind, die man auch (§. 43.) für denselben Fall erhalten hat.

§. 46.

Wenn aber die durch X und Y bezeichneten Reihen, d. h. die Reihen

$\mathrm{Cos.}mx + m_1.\mathrm{Cos.}\,(m-2)x + m_2\,.\,\mathrm{Cos.}\,(m-4)x + \ldots$ in inf.

und

$\mathrm{Sin.}\,mx + m_1\,.\,\mathrm{Sin.}\,(m-2)\,x + m_2\,.\,\mathrm{Sin.}\,(m-4)x + \ldots$ in inf.,

wie wir (§. 40.) gezeigt haben, für jeden reelen Werth von x convergiren, so lange für m eine beliebige aber positive (rationale oder irrationale) Zahl gesetzt wird, so haben diese so numerisch gedachten Reihen in jedem solchen besondern Fall nothwendig einen bestimmten Werth, der für die erstere Reihe nach (§. 13.) (und wie der Fall $x = \pi$, oder überhaupt $x = \pm(2n+1)\pi$ zeigt) nicht nothwendig $= (2\,\mathrm{Cos.}\,x)^m$, und für die zweite nicht nothwendig $= 0$ ist. Es bleibt also doch noch immer die Aufgabe ungelöſst, den (allemal existirenden) Werth dieser so numerisch gedachten Reihen, für jeden positiven Werth von m, und für jeden beliebigen reelen Werth von x, wirklich zu bestimmen.

Weil diese Aufgabe nicht bloſs ein sehr bedeutendes praktisches Interesse haben dürfte, sondern auch, was wir in diesem Augenblicke vorzüglich berücksichtigen, durch ihre Lösung auf die Theorie der Winkelfunktionen, und insbesondere auf den hier beachteten Theil derselben, dasjenige Licht geworfen werden würde, durch welches allein die bis jetzt vielbesprochenen oben angedeuteten Schwierigkeiten ganz und völlig aufgeklärt werden dürften, so ist zu Ende dieser Bogen versucht worden, wie solche dem Anschein nach einen etwas feinen Kalkul erfordernde Aufgaben zu behandeln seyn dürften, um erfreuliche Resultate zu erhalten.