

## Erklärung der gebrauchten Zeichen.

### I. Das Produkt

$a(a+r)(a+2r)(a+3r)\dots[a+(m-1)r]$   
ist durchgehends durch das Kramp'sche Fakultätenzeichen  $a^{m|r}$  vorgestellt, und unter den Lehrsätzen der Fakultäten sind hier vorzüglich diese vier gebraucht:

$$1) a^{m|r} = [a+(m-1)r]^{m-1-r}$$

$$2) a^{m+n|r} = a^{m|r} \cdot (a+mr)^{n|r}$$

$$3) a^{m-n|r} = \frac{a^{m|r}}{[a+(m-n)r]^{n|r}}$$

$$4) h^m \cdot a^{m|r} = (ha)^{m|h}$$

und noch der binomische Lehrsatz für Fakultäten; alle jedoch nur unter der Voraussetzung, daß die Exponenten ganze positive Zahlen oder Null sind.

II. Das Produkt  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots m$ , oder richtiger die Fakultät  $1^{m|1}$  oder  $m^{m|1-1}$ , wird hier immer bezeichnet durch die Kramp'schen Zeichen

$m'$  oder  $m!$

so daß  $0' = 1' = 1$ ;  $2' = 2$ ;  $3' = 6$ ;  $4' = 24$ ;  
u. s. w. f.

A



III. Die Binomial-Koefficienten der  $m^{\text{ten}}$  Potenz (z. B. von  $a + b$ ) werden bezeichnet durch

$$m_0, m_1, m_2, m_3, m_4 \dots m_n, \text{ u. s. w. f.},$$

so dafs  $m_n = \frac{m^{n-1}}{n} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots[m-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$

IV. Die Reihen (endliche und unendliche) sind hier meist nur durch ihr allgemeines Glied vorgestellt, so dafs dem allgemeinen Gliede noch das Summenzeichen  $S$  vorgesetzt wird. Der grössern Deutlichkeit und der leichtern Uebersicht wegen, ist der Zeiger im allgemeinen Gliede immer durch einen Buchstaben des deutschen Alphabets ausgedrückt, so dafs man ihn daran sogleich erkennen kann. — Auf diese Weise drücken wir z. B. den binomischen Lehrsatz so aus:

1)  $(a + b)^m = S. [m_\alpha \cdot a^{m-\alpha} \cdot b^\alpha]$ , wo  $m$  willkürlich, oder auch so:

2)  $(a + b)^m = S. [m_\beta \cdot a^\alpha \cdot b^\beta]$ , wenn  $m$  eine ganze Zahl,  
 $\alpha + \beta = m$

wo die untergesetzte Gleichung, da die deutschen Buchstaben veränderliche Werthe vorstellen, aber nie andere als Null oder absolute ganze Zahlen, nichts weiter ausdrückt, als dafs, während  $\alpha$  nach und nach die Werthe  $0, 1, 2, 3, \dots$  bis  $m$  erhält,  $\beta$  zu jedem Werth von  $\alpha$  denjenigen erhalten soll, der den von  $\alpha$  zu der (ganzen) Zahl  $m$  ergänzt.

Andere Formen des binomischen Lehrsatzes sind noch:



$$3) (a + b)^m = S. \left[ \frac{(a + b)^m}{a^{\alpha'} \cdot b^{\beta'}} \cdot a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \right], \text{ wenn } m$$

eine ganze Zahl,  
 $\alpha + \beta = m$

$$4) (a + b)^m = S. \left[ \frac{m^{\beta I - 1}}{b^{\beta'}} \cdot a^{m - \beta} \cdot b^{\beta} \right], \text{ wenn } m$$

allgemein, u. dergl. mehr.

Der binomische Lehrsatz für Fakultäten er-  
 giebt sich aber aus dem für Potenzen, wenn man  
 in dem letzteren überall Fakultäten mit einer  
 und derselben Differenz  $r$ , statt der Potenzen  
 setzt. — So hat man also auch:

$$5) \left\{ \begin{aligned} (a + b)^{mIr} &= S. [m_{\alpha} \cdot a^{m - \alpha Ir} b^{\alpha Ir}] \\ &= S. \left[ \frac{m^{\alpha I - 1}}{a^{\alpha'}} \cdot a^{m - \alpha Ir} \cdot b^{\alpha Ir} \right] \end{aligned} \right.$$

oder auch

$$6) (a + b)^{mIr} = S. \left[ \frac{m'}{a^{\alpha'} \cdot b^{\beta'}} \cdot a^{\alpha Ir} \cdot b^{\beta Ir} \right]$$

$\alpha + \beta = m$

$$7) \frac{(a + b)^{mIr}}{m'} = S. \left[ \frac{a^{\alpha Ir} \cdot b^{\beta Ir}}{a^{\alpha'} \cdot b^{\beta'}} \right];$$

$\alpha + \beta = m$

wo aber in den (nn. 5. 6. u. 7.)  $m$  immer eine  
 absolute ganze Zahl vorausgesetzt wird. \*)

V. Von den höhern trigonometrischen Rela-  
 tionen gebrauchen wir hier vorzüglich nach-  
 stehende:

---

\*) Eine Theorie dieser Summenzeichen findet man in der treff-  
 lichen Schrift: Theorie der comb. Integrale, von H. A.  
 Rothe, Professor zu Erlangen. Nürnberg 1820.



$$1) \left\{ \begin{array}{l} (\text{Cos. } x + \sqrt{-1} \cdot \text{Sin. } x)^m \\ = \text{Cos. } mx + \sqrt{-1} \cdot \text{Sin. } mx \end{array} \right.$$

$$2) \left\{ \begin{array}{l} (\text{Cos. } x + \sqrt{-1} \cdot \text{Sin. } x)^m \\ = \text{Cos } m(\pm 2n\pi + x) + \sqrt{-1} \cdot \text{Sin } m(\pm 2n\pi + x) \end{array} \right.$$

wo das  $n$  rechts, die Null und alle ganzen Zahlen repräsentirt;

$$3) \text{Cos. } x \pm \sqrt{-1} \cdot \text{Sin. } x = e^{\pm x\sqrt{-1}}$$

$$4) 2 \cdot \text{Cos. } x = e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}$$

$$5) 2\sqrt{-1} \cdot \text{Sin. } x = e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}$$

VI. Statt endlich, wenn dies wünschenswerth erscheinen sollte, uns in unnütze Weitläufigkeiten hinsichtlich der Aufzählung aller Werthe einer Potenz, z. B.  $(2 \text{Cos. } x)^m$  für jeden Werth von  $m$ , einzulassen, entlehnen wir hier lieber ein für allemal die allgemeine Formel dieser Werthbestimmung, und setzen sie her, welche dann für jeden gegebenen besondern Fall augenblicklich das gewünschte liefert. Diese ist aber:

$$\left\{ \begin{array}{l} (P + Q\sqrt{-1})^{p+q}\sqrt{-1} = e^{pL.R - q(\pm 2n\pi + \phi)} \\ \times (\text{Cos. } [qL.R + p(\pm 2n\pi + \phi)] + \\ + \sqrt{-1} \cdot \text{Sin } [qL.R + p(\pm 2n\pi + \phi)]) \end{array} \right.$$

wo  $n$  rechts 0 und alle ganzen Zahlen vorstellt, während  $L$  den reelen Werth des natürlichen Logarithmen bezeichnet,  $R$  den absoluten Werth von  $\sqrt{p^2 + Q^2}$ , und  $\phi$  den absolut kleinsten Bogen (im Längenmaasse für den Radius 1), dessen Cosinus  $= \frac{P}{R}$  und Sinus  $= \frac{Q}{R}$  ist, wo endlich



$p, q, P, Q$  beliebig reele Ausdrücke (also auch Null) seyn können.

Setzt man in dieser Formel  $Q=0$ , und auch  $q=0$ , so erhält man alle Werthe von  $P^P$  ausgedrückt, durch die Formel

$$e^{pL.R} \times [\text{Cos. } p(\pm 2n\pi + \Phi) + \sqrt{-1} \cdot \text{Sin. } p(\pm 2n\pi + \Phi)]$$

wo  $n$  Null und jede ganze Zahl vorstellt, wäh-

rend  $\frac{Q}{R} = 0$  und  $\frac{P}{R} = \pm 1$ , also  $\Phi = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \pi \end{matrix} \right\}$  ist, je

nachdem  $P$  positiv oder negativ; wo endlich statt  $e^{pL.R}$  der reele Werth von  $R^P$  gesetzt werden kann.

Die Entwicklung dieser und ähnlicher allgemeinen Resultate kann auch noch in dem zweiten Theile des: Lehrbuchs der Analysis, Berlin 1822 (von demselben Verfasser) nachgesehen werden; so wie wir uns hinsichtlich der hier angewandten Theorie des Kalkuls ein für allemal auf dieses Lehrbuch berufen müssen.