Die analytische Behandlung der Kegelschnitte ist offenbar die zweckmäßigste, wenn sie zugleich als Einführung in die analytische Geometrie dienen soll, jedoch ist die Allgemeinheit der Entwickelung nur scheinbar, da die Schule sich gezwungen sieht, die Gleichungen zu specialisiren, wodurch denn auch die Auffindung der Eigenschaften der verschiedenen Kurven, ihre Uebereinstimmung und ihre Verschiedenheiten nicht auf kürzerem Wege gefunden werden, als auf dem geometrischer Entwickelung, welche den Vorzug der Anschaulichkeit bietet. Die Resultate geometrischer Untersuchung lassen sich aber auch leicht in Gleichungen umsetzen, in gleicher Weise, wie planimetrische Lehrsätze in Form von Gleichungen auszusprechen längst üblich ist, und wie sich die Gleichung der geraden Linie und des Kreises schon frühzeitig aus planimetrischen Untersuchungen ergeben. Bei der folgenden Zusammenstellung von Lehrsätzen, bei denen keine Haupteigenschaft der Kegelschnitte unberührt bleibt, bin ich bei der alten Methode stehen geblieben. Möglicherweise erscheint dies antiquirt, ich glaube aber, daß die Benutzung einfacher Hülfsmittel und ihre stätige Wiederholung für die Schule erfolgreicher sei. Ich habe deshalb auch die Benutzung der Kunstwörter der neueren Geometrie vermieden, deren Einführung in den geometrischen Unterricht der Schulen, wenigstens in der durch manche für den Schulgebrauch bestimmte in den letzten Jahren erschienene Schriften angestrebten Weise, mir nicht gerechtfertigt erscheint. Dies nachzuweisen, würde ein näheres Eingehen auf diese Schriften erfordern, wozu hier nicht der Ort ist. Da die Auswahl, Reihenfolge und Aussage der Lehrsätze die Hauptsache ist, so habe ich geglaubt, in den Beweisen sparsam sein zu dürfen. C.

---

1. Wenn eine Gerade, welche durch einen festen Punkt geht, über den Umfang eines festen Kreises gleitet, so heißt die so entstandene Fläche eine *Kegelfläche*, der feste Punkt ihr *Scheitelpunkt* oder *Scheitel*.

Zusatz 1. Die Kegelfläche erstreckt sich zu beiden Seiten des Scheitels ins Unendliche.

2. Die beiden im Scheitel zusammenstoßenden Theile der Kegelfläche sind gegenbildlich zu einander. Jeder heißt daher die *Gegenfläche* des andern.

3. Vom Scheitelpunkte aus läßt sich nach jedem Punkte der Kegelfläche eine Gerade ziehen, welche ganz in dieselbe fällt, und deren Verlängerung über den Scheitel hinaus ganz in der Gegenfläche liegt. Diese Geraden heißen die *Seiten* der Kegelfläche.

4. Sämmtliche Seiten der Kegelfläche bilden ein Strahlenbüschel im Raume.

5. Der feste Kreis heißt *Grundkreis* der Kegelfläche.

Anmerkung. In der Körperlehre heißt der vom Grundkreise und von dem zwischen Grundkreis und Scheitel liegenden Theile der Kegelfläche allseitig begränzte Raum *Kegel*. Da hier von diesem Körper nie die Rede ist, bedient man sich der Kürze wegen der Worte Kegel und Gegenkegel statt Kegelfläche und Gegenkegelfläche.

2. Die Verbindungsgerade des Scheitels mit dem Mittelpunkte des Grundkreises heißt *Achse* des Kegels.

3. Jede durch die Achse gelegte Ebene schneidet die Kegelfläche in zwei sich schneidenden Geraden. Ein solcher Schnitt des Kegels heißt *Achsenschnitt*.

4. Halbirt die Achse den Winkel jedes Achsenschnitts, steht sie also auf dem Grundkreise senkrecht, so heißt der Kegel ein *gerader*; ist die Achse gegen den Grundkreis geneigt, ein *schiefer*.

Zus. Der gerade Kegel kann entstanden gedacht werden durch die Drehung eines Winkels um einen seiner Schenkel.

5. Die Ebene, welche durch eine Berührungslinie am Grundkreise und durch die nach dem Berührungspunkte gezogene Seite des Kegels bestimmt ist, hat nur diese Seite mit der Kegelfläche gemein. Sie heißt *Berührungsebene* des Kegels.

Zus. 1. Durch jeden Punkt der Kegelfläche, den Scheitelpunkt ausgenommen, läßt sich eine und nur eine Berührungsebene legen.

2. Alle unendlich vielen Berührungsebenen des Kegels gehen durch den Scheitelpunkt.

3. Durch jeden Punkt außerhalb des Kegels lassen sich zwei Berührungsebenen an den Kegel legen.

6. Jede Ebene, welche durch den Scheitelpunkt und durch eine Sehne des Grundkreises geht, schneidet die Kegelfläche in zwei sich schneidenden Geraden.

7. Jede Ebene, welche durch den Scheitelpunkt und durch eine Gerade in der Ebene des Grundkreises geht, welche keinen Punkt mit dem Grundkreise gemein hat, hat mit der Kegelfläche nur den Scheitelpunkt gemein.

Zus. Es können also durch den Scheitel eines Kegels drei der Lage nach wesentlich verschiedene Ebenen gelegt werden.

8. Wenn irgend eine Ebene, welche nicht durch den Scheitelpunkt geht, die Kegelfläche schneidet, so heißt der Durchschnitt des Kegels und der Ebene ein Kegelschnitt.

9. Wird durch den Scheitelpunkt eines Kegels eine Ebene zur Kegelschnittsebene parallel gelegt, so wird diese den Kegel entweder schneiden, oder ihn berühren, oder ganz außerhalb desselben liegen. Hiernach werden drei Arten des Kegelschnitts unterschieden, sie heißen der Reihe nach Hyperbel, Parabel, Ellipse.*)

Zus. 1. Jede Hyperbelebene schneidet beide Theile der Kegelfläche, jede Parabel- oder Ellipsenebene nur einen Theil.

2. Die Hyperbel hat zwei von einander getrennte Zweige, auch Gegenschnitte genannt.

3. Die Hyperbel und Parabel umschließen den Raum nicht, und gehen mit der Kegelfläche ins Unendliche fort. Die Ellipse ist eine in sich zurücklaufende krumme Linie und umschließt die Ebene allseitig.

4. Ein Kegelschnitt kann von einer Geraden nur in zwei Punkten geschnitten werden.**)

5. Das in den beiden Durchschnittspunkten begränzte Stück der Schneidenden heißt Sehne.

6. Die Hyperbelsehnen, welche Punkte zweier Gegenschnitte verbinden, liegen außerhalb der Hyperbel; alle übrigen Sehnen liegen innerhalb des Kegelschnitts.

10. Jede dem Grundkreise parallele Ebene schneidet die Kegelfläche in einem Kreise.

Zus. Der Kreis ist ein besonderer Fall der Ellipse.

11. Zieht man in dem auf dem Grundkreise senkrechten Achsenschnitte des schiefen Kegels irgendwo zum Durchmesser des Grundkreises eine Antiparallele, und legt durch sie eine Ebene senkrecht auf den Achsenschnitt, so schneidet auch diese Ebene den Kegel in einem Kreise.

Zus. Dieser Kreis heißt Wechselschnitt.

12. Jeder Kreisschnitt eines Kegels, welcher nicht dem Grundkreise parallel ist, ist ein Wechselschnitt.

13. Legt man durch irgend einen Punkt eines Kegelschnitts die Berührungsebene an die Kegelfläche, so ist der Durchschnitt der Berührungsebene und der Kegelschnittsebene eine Berührungslinie am Kegelschnitt.

Zus. 1. In jedem Punkte hat ein Kegelschnitt nur eine Berührungslinie.

2. Zwei beliebige Berührende an der Parabel***) oder an einem Hyperbelzweige müssen sich schneiden.

3. Jede die Ellipse oder die Hyperbel Berührende hat eine zu ihr parallele Berührungslinie.****)

14. Jede Ebene, welche durch eine Seite des Kegels und durch einen beliebigen nicht in dieser Seite liegenden Punkt eines Kegelschnitts gelegt wird, schneidet die Ellipse in zwei Punkten, die Parabel in einem, die Hyperbel in zweien, nämlich jeden Zweig in je einem.

15. Legt man durch den Scheitel des Kegels die dem Hyperbelschnitt parallele Ebene, und in den dadurch bestimmten Seiten die beiden Berührungsebenen an den Kegel, so schneiden diese die Hyperbelebene in zwei sich schneidenden Geraden, welche keinen Punkt mit der Hyperbel gemeinschaftlich haben.

---

*) J. Newtoni Phil. nat. princ. math. ed. Le Seur et Jacquier. I. Adn. 224. Vergl.: Steiner Systematische Entwickelung etc. 1. S. 130 ff.

**) Steiner 1. S. 149.

***) Steiner 1. S. 134 und 141.

****) Steiner 1. S. 142.

16. Diese beiden Geraden heißen die **Asymptoten** der Hyperbel; ihr Winkel, in welchem die Hyperbel liegt der **Asymptotenwinkel**.*)

17. Jede Gerade, welche durch einen Punkt der einen Asymtote zur andern parallel gezogen wird, schneidet einen der Hyperbelzweige und zwar in **einem** Punkte.

Bew. Fig. 1. Die Hyperbelebene schneide den Grundkreis in AB. Die Ebene SED sei zu jener Ebene parallel. Die in D und E angelegten Berührungslinien schneiden die AB in G und H. JG und JH seien die Asymptoten. Ziehe durch K auf JH die $KL \parallel JG$, welche die AB in L zwischen A und G schneiden möge. Da auch $JG \parallel SD$, so ist auch $KL \parallel SD$, und da offenbar DL den Grundkreis schneidet, so bestimmt sie irgend eine Sehne, diese sei DN, und die Ebene SDLK schneidet den Kegel in den Seiten SD und SN. Es muß also die KL die SN schneiden d. h. die KL muß der Kegelfläche begegnen. Da aber die Ebene KLDS nur die Geraden SN und SD mit der Kegelfläche gemein hat, so kann die KL derselben zum zweitenmale nicht begegnen.

Liegt K auf der andern Seite des Durchschnittspunktes der Asymptoten, so trifft die Parallele die Gegenfläche.

Zus. 1. Jede Gerade, welche durch den Durchschnittspunkt der Asymptoten gehend, den Asymptotenwinkel schneidet, schneidet auch beide Hyperbelzweige. Dasselbe geschieht durch jede einer solchen Geraden Parallele.

2. Jede Gerade, welche durch den Durchschnittspunkt der Asymptoten gehend, den Nebenwinkel des Asymptotenwinkels theilt, kann keinen Punkt mit der Hyperbel gemein haben.

3. Eine Berührungslinie an der Hyperbel kann nie durch den Durchschnittspunkt der Asymptoten gehen, und muß beide Schenkel desselben Asymptotenwinkels schneiden.

4. Zwei Berührungslinien an demselben Hyperbelzweige schneiden sich innerhalb des zugehörigen Asymptotenwinkels; zwei Berührungslinien an beiden Hyperbelzweigen sind entweder parallel oder schneiden sich innerhalb des Nebenwinkels des Asymptotenwinkels.

5. Die Asymptoten lassen sich als Berührungslinien ansehen, deren Berührungspunkt in unendlicher Entfernung liegt.

18. Verlängert man die durch die Hyperbelebene im Grundkreise oder in ihm parallelen Kreisen bestimmte Sehne bis zu den Asymptoten, so sind je zwei solcher Verlängerungen einander gleich.

19. Diese durch die beiden Asymptoten bestimmten Strecken werden durch jeden Hyperbelpunkt so getheilt, daß das Rechteck aus beiden Theilstücken für dieselbe Hyperbel constant ist.

Bew. Fig. 1. Die Berührungsstrecken an den einzelnen einander parallelen Kreisen sind gleich, und also auch deren Quadrate, folglich durch den Kreislehrsatz in Verbindung mit (18):

$$HB \times BG = GA \times AH = H'B' \times B'G' = G'A' \times A'H' = \ldots$$

20. Der Satz (19) bleibt gültig für beliebige aber einander parallele Sehnen der Hyperbel.

Bew. Fig. 2. $AB \parallel CD$. AK sei dem Grundkreise parallel und $AK \parallel CN$

so ist $\triangle AEJ \backsim CGM$ und $AFL \backsim CHO$, also:

$$AE : CG = AJ : CM$$
$$AF : CH = AL : CO$$
$$\overline{AE \times AF : CG \times CH = AJ \times AL : CM \times CO}$$

folglich nach (19) $AE \times AF = CG \times CH$

Ferner: $$AE : BE = AJ : BP$$
$$AF : BF = AL : BQ$$
$$\overline{AE \times AF : BE \times BF = AJ \times AL : BP \times BQ}$$

also auch: $AE \times AF = BE \times BF$

daher: $$AE \times (AB + BF) = BF\,(AB + AE)$$
$$AE \times AB + AE \times BF = BF \times AB + AE \times BF$$

d. h. $AE = BF$.

In gleicher Weise einfach ist der Beweis, wenn die Sehne zwei Punkte der Gegenschnitte verbindet.

Zus. 1. Die Theilstücke zwischen Hyperbel und Asymptote sind bei jeder Sehne einander gleich.

2. Wird die Sehne eine Berührungslinie an der Hyperbel, so wird sie im Berührungspunkte halbirt.

*) Ueber **conjugirte Hyperbeln** s. unter andern Lacroix Traité élém. de Trig. etc. §. 167. Plücker, Anal. Geom. Entw. 1. S. 131.

3. Das Quadrat über der halben, den Sehnen parallelen, Berührungslinie ist also der Inhalt jener im Lehrsatze erwähnten Rechtecke.

4. Auf parallelen Berührungslinien an derselben Hyperbel werden durch die Asymptoten gleiche Strecken abgeschnitten.

5. Die Verbindungsgeraden der Berührungspunkte paralleler Berührungslinien, so wie entsprechender Theilungspunkte paralleler Sehnen gehen durch den Durchschnittspunkt der Asymptoten.

6. Die beiden Hyperbelzweige sind einander congruent und liegen in gleicher Weise zwischen den Asymptoten.

21. Die Rechtecke aus den Theilstücken zweier sich schneidenden Sehnen verhalten sich zu einander, wie die Rechtecke der Theilstücke dieser Sehnen, welche durch eine der Asymptoten bewirkt werden.

Bew. Fig. 3. Es sind 10 Lagefälle möglich; der Gang des Beweises ist für jeden Fall derselbe. Die beiden gegebenen Sehnen seien AB und CD, welche sich in E schneiden, von den Asymptoten aber in F und G, in H und J geschnitten werden. Ziehe durch C die K L || AB, so ist:

$$JE : IC = EG : CL$$
$$HE : HC = EF : CK$$
$$\overline{JE \times HE : JC \times HC = EF \times EG : CK \times CL}$$
$$(DE - DJ) \times (CE + DJ) : JC \times HC = (EB + BF)(EA + BF) : BF \times AF$$
$$DE \times CE + \underbrace{DE \times DJ - CE \times DJ}_{\| \atop \overbrace{+ DC \times DJ + CE \times DJ}} - DJ^2 : \quad EB \times EA + \underbrace{EB \times BF + EA \times BF}_{\| \atop \overbrace{AB \times BF - EB \times BF}} + BF^2 :$$
$$DE \times CE + \underbrace{DC \times DJ - DJ^2}_{\| \atop \overbrace{+ CJ \times JD + DJ^2}} : \quad = EB \times EA + \underbrace{AB \times BF + BF^2}_{\| \atop \overbrace{+ AF \times BF - BF^2}} :$$
$$DE \times CE + \underbrace{CJ \times JD}_{\| \atop CJ \times CH} : CJ \times CH = EB \times EA + AF \times BF : AF \times BF$$
$$DE \times CE : CJ \times CH = EB \times EA : AF \times BF$$
$$DE \times CE : AB \times BE = JC \times HC : AF \times BF$$

Der Satz bleibt richtig, wenn eine der Sehnen oder beide in Berührungslinien übergehen; z. B. für die Lage G^1F^1 wird die Gleichung:

$$DE^1 \times CE^1 : A^1E^{12} = JC \times HC : A^1F^{12}$$

Ebenso kann die Sehne durch den Durchschnittspunkt der Asymptoten gehen.

Zus. Wird die eine Sehne eine Berührungslinie und geht die andere durch den Durchschnittspunkt der Asymptoten nach dem Berührungspunkte, so wird ihre Hälfte Schwerlinie in dem durch die Berührungslinie abgeschnittenen Dreiecke; ist also der Asymptotenwinkel ein Rechter, so sind die im Lehrsatze erwähnten Rechtecke einander gleich für alle Sehnenpaare, von denen die eine der Berührungslinie, die andere der durch den Durchschnittspunkt der Asymptoten zum Berührungspunkte gehenden Sehne parallel ist.

22. Werden zwei einander parallele Sehnen der Hyperbel von einer dritten geschnitten, so verhalten sich die Rechtecke aus den Theilstücken jeder Sehne, wie die Rechtecke aus den entsprechenden Theilstücken der schneidenden Sehne.

Zus. Der Satz gilt auch für die Ellipse und Parabel.

23. Werden zwei einander parallele Sehnen der Hyperbel von einer Parallelen zu einer der Asymptoten geschnitten, so verhalten sich die Rechtecke aus den Theilstücken der Sehnen wie die entsprechenden Theilstücke auf der Schneidenden vom Hyperbelpunkte aus gerechnet.

24. Verbindet man die Berührungspunkte zweier beliebiger Berührungslinien an einem beliebigen Kegelschnitte, so wird jede dieser Verbindungsgeraden parallele Sehne von den beiden Berührungslinien so begränzt, daß die beiden Theilstücke zwischen ihnen und dem Kegelschnitte einander gleich sind.

Bew. Ziehe die beiden Seiten des Kegels durch die Berührungspunkte und lege zu der so bestimmten Ebene durch die der Verbindungssehne der Berührungspunkte parallel gezogenen Sehne eine parallele Ebene, welche also eine Hyperbel bestimmt, zu welcher die beiden Berührungslinien und die Seiten des Kegels die die Asymptoten gebenden Berührungsebenen festlegen. Die beiden im Satze erwähnten Stücke sind also nach 20 Zus. 1 einander gleich.

Zus. Geht die Sehne in eine Berührungslinie über, so wird dieselbe im Berührungspunkte halbirt.

25. Die Verbindungsgerade des Mittelpunkts der Verbindungssehne der Berührungspunkte mit dem Durchschnittspunkte der beiden Berührungslinien, beziehlich die zu ihnen von jenem Mittelpunkte aus parallel gezogene Gerade halbirt alle zur Verbindungssehne parallel gezogenen Sehnen und geht durch den Berührungspunkt der ihr parallelen Berührungslinien.

26. Jede Halbirungsgerade paralleler Sehnen heißt **Durchmesser** des Kegelschnitts, die Durchschnittspunkte des Durchmessers und der Kurve ihre **Scheitel**; die halben Sehnen heißen **Ordinaten**, und die zwischen Scheitel und Ordinate liegenden Theilstücke des Durchmessers **Abscissen**.

Zus. 1. Jeder Durchmesser schneidet die Parabel in einem Punkte, die Ellipse in zweien, die beiden Hyperbelzweige in je einem.

2. Jeder Durchmesser bestimmt auf der Parabel einen Scheitel, auf der Ellipse und Hyperbel zwei (Scheitel und Gegenscheitel). Jeder Parabeldurchmesser ist daher unbegränzt, auf den Durchmessern der Ellipse und Hyperbel bestimmen die beiden Scheitel eine Strecke.

3. In der Hyperbel und Ellipse verhalten sich die Quadrate zweier Ordinaten wie die Rechtecke aus den beiden zugehörigen Abscissen.

4. In der Parabel verhalten sich die Quadrate zweier Ordinaten wie die zugehörigen Abscissen.

5. In der Hyperbel und Ellipse gehören zu gleichen Abscissen gleiche Ordinaten.

6. In der Ellipse hat die Ordinate ein Maximum in der Mitte des begränzten Stücks des Durchmessers; in der Hyperbel und Parabel wachsen die Ordinaten mit den Abscissen über alles Maß hinaus.

7. Die durch den Scheitel zur Ordinate gezogene Parallele ist stets eine Berührungslinie am Kegelschnitt.

8. Die vorstehenden Sätze gestatten Umkehrungen.

27. Alle Durchmesser der Parabel sind einander parallel.

Zus. 1. Außer den zugehörigen Ordinaten-Sehnen halbirt ein Parabeldurchmesser keine Sehne der Kurve.

2. Zwei Sehnen der Parabel können sich niemals **gegenseitig** halbiren.

3. Jede Sehne der Parabel und jede Berührungslinie an derselben muß (hinreichend verlängert) **jeden** Durchmesser schneiden.

4. Parallele Sehnen der Parabel werden durch einen beliebigen Durchmesser so geschnitten, daß die Rechtecke aus den Theilstücken jeder Sehne sich verhalten, wie die den Sehnen zugehörigen Theilstücke des Durchmessers vom Scheitelpunkte aus gerechnet*).

28. Gehen von einem Punkte außerhalb der Parabel ein Durchmesser und eine Berührungslinie aus, so wird der Abstand jenes Punktes und des Fußpunktes der Ordinate des Berührungspunktes im Scheitel der Parabel halbirt.

Bew. Fig. 4. P sei der gegebene Punkt; PA der Durchmesser, PB die Berührende, BC die Ordinate. Ziehe von B den Durchmesser, also BF || PA und von A die zugehörige Ordinate, also AE || PB, welche die Kurve zum zweitenmale in E trifft, und durch BF in D halbirt wird, so ist, wenn noch EG || BC gezogen wird $PBC \backsim AEG$, also da $AD = PB$ und $AE = 2PB$, auch $EG = 2BC$, daher: $BC^2 : EG^2 = AC : AG$

$$BC^2 : 4BC^2 = AC : AG$$

oder $AG = 4AC$. Aber auch $AG = 4AC = 2PC$, daher $4AC = 2PC$, d. h. $AC = \frac{1}{2}PC$.

29. Alle Durchmesser der Hyperbel gehen durch den Durchschnittspunkt der Asymptoten und werden in demselben halbirt; und alle Durchmesser der Ellipse halbiren sich in einem und demselben Punkte.

Bew. Fig. 5. Für die Hyperbel folgt der Satz schon aus 20. In der Ellipse sei AB ein beliebiger Durchmesser, die in A und B angelegten Berührungslinien sind also einander parallel. Ist M die Mitte von AB, so wird die zu den beiden Berührungslinien in A und B durch M parallel gezogene Gerade SS^1 in M halbirt. CD weiche also von dieser Richtung ab. Ziehe $DF \parallel SS^1 \parallel CE$

*) Vergl. 23. Ueber die Analogie der Parabeldurchmesser und der Asymptoten der Hyperbel s. Plücker, 1 S. 138. 191.

so ist: $$AF \quad FB : AE \times EB = DF^2 : CE^2$$

Dreieck $MEC \backsim MFD$ also: $DF : CE = MF : ME$ daher:

$$AF \times FB : AE \times EB = MF^2 : ME^2$$
$$AF \times FB : MF^2 = AE \times EB : ME^2$$
$$(AM + MF)(AM - MF) : MF^2 = (AM + ME)(AM - ME) : ME^2$$
$$AM^2 - MF^2 : MF^2 = AM^2 - ME^2 : ME^2$$
$$AM^2 : MF^2 = AM^2 : ME^2$$
$$MF = ME$$

also $MEC \cong MFD$ d. h. $MC = MD$

30. Der allen Durchmessern gemeinschaftliche Mittelpunkt heißt **Mittelpunkt** der Hyperbel, beziehlich der Ellipse.

Zus. Sehnen der Ellipse oder Hyperbel können sich nur im Mittelpunkte der Kurve gegenseitig halbiren.

31. In der Hyperbel und Ellipse halbirt jede durch den Mittelpunkt zu den Ordinaten irgend eines Durchmessers parallel gezogene Sehne alle diesem Durchmesser parallelen Sehnen der Kurve.

Zus. 1. Diese Halbirungssehne ist Durchmesser in Bezug auf jenen ersten Durchmesser und auf die zu dem letzteren parallelen Sehnen.

2. Diese Gerade und der zuerst angenommene Durchmesser heißen **conjugirte Durchmesser**.

3. Jeder Durchmesser hat nur einen conjugirten Durchmesser.

4. In der Ellipse sind je zwei conjugirte Durchmesser Strecken, in der Hyperbel ist stets der eine Durchmesser begränzt, der andere unbegränzt.

5. In der Ellipse ist jede durch den Mittelpunkt gezogene Sehne ein Durchmesser; in der Hyperbel jede durch den Mittelpunkt gezogene Gerade mit Ausnahme der beiden Asymptoten, welche die Gränzlagen bestimmen, in welchen die begränzten Durchmesser sich von den unbegränzten scheiden.

6. In der Ellipse Fig. 5 ist offenbar:

$$MS^2 : JG^2 = BM \times MA : BJ \times JA$$
oder $$AM^2 : MS^2 = BJ \times JA : JG^2$$

Wendet man nun 21 auf die Hyperbel Fig. 6 an, so ist:

$$DC \times CE : AC \times CB = DM \times ME : JA \times JB$$
$$DC \times CE : AC^2 = ME^2 : GE^2$$

daher nimmt man bei der Hyperbel als conjugirten Durchmesser die durch den Mittelpunkt zur Berührungslinie im Scheitelpunkte parallel gezogene und dieser Berührungslinie, wie sie durch die Asymptoten begränzt ist, gleich gemachte, im Mittelpunkte halbirte Strecke an, wodurch also auch bei der Hyperbel diese an sich unbegränzten Durchmesser zu bestimmten Strecken werden. Es ist also dem Durchmesser DE der Durchmesser VW conjugirt.

7. In der Ellipse und Hyperbel verhalten sich die Quadrate zweier conjugirter Durchmesser zu einander wie das Rechteck aus den beiden Theilstücken des ersten Durchmessers zum Quadrate der zugehörigen Ordinate.

8. Sind je zwei conjugirte Durchmesser einander gleich, so ist die Ellipse ein Kreis und bei der Hyperbel der Asymptotenwinkel ein rechter.

32. Wird das Verhältniß der Quadrate zweier conjugirten Durchmesser auf ein Streckenverhältniß zurückgeführt, dessen erstes Glied der erste Durchmesser ist, also:

$$d_1^2 : d_2^2 = d_1 : p$$

so ist auch $$d_1 \times p = d_2^2 \text{ oder } d_1 : d_2 = d_2 : p$$

Diese dritte Proportionale zu dem ersten und zweiten Durchmesser heißt **Parameter**.

Zus. 1. Zu jedem Paare conjugirter Durchmesser gehört ein besonderer Parameter.

2. Der Parameter ändert sich bei jedem dieser Paare, je nachdem man den einen oder den andern als ersten Durchmesser annimmt.

$$d_1 : d_2 = d_2 : p_1$$
$$d_2 : d_1 = d_1 : p_2$$

Hieraus folgt: $p_2 : d_1 = d_1 : d_2 = d_2 : p_1$ d. h. je zwei conjugirte Durchmesser sind zwei mittlere Proportinalen zwischen ihren Parametern.

3. Sind in einer Ellipse die Durchmesser stäts einander gleich, ist die Ellipse also ein Kreis, so ist auch der Parameter dem Durchmesser gleich.

4. Ist in einer Hyperbel der Asymptotenwinkel ein rechter, also jeder Durchmesser seinem conjugirten Durchmesser gleich, so ist auch der Parameter dem Durchmesser gleich. Eine solche Hyperbel heißt eine *gleichseitige**).

33. Da in der Parabel das Verhältniß des Quadrates der Ordinate zur Abscisse ein constantes ist, so heißt die dritte Proportionale zur Abscisse und Ordinate der Parameter.

Zus. In der Parabel ist also das Quadrat der Ordinate gleich dem Rechtecke aus dem Parameter und der Abscisse.

Anm. Durch die Einführung des Parameters in die Gleichungen in 31, 6 findet man, daß in der Ellipse das Quadrat der Ordinate *kleiner*, in der Hyperbel dagegen *größer* ist als das Rechteck aus Parameter und Abscisse, daher die Namen dieser krummen Linien: *ἡ παραβολή*, das Vergleichen; *ἡ ἔλλειψις*, das Zurückbleiben; *ἡ ὑπερβολή*, das Uebermäßige. Es ist nämlich

$$JG^2 = \frac{d_2^2}{d_1^2}(d_1 \mp AJ)\,AJ = \frac{p}{d_1}(d_1 \mp AJ)\,AJ$$

$$= p \times AJ \mp \frac{p \times AJ^2}{d_1}$$

Zugleich geht hieraus hervor, daß bei sehr großem Werthe von d_1 und kleinem Werthe von d_2 für kleine Werthe von AJ die Ellipsen und Hyperbeln in ihrer Krümmung einer Parabel sehr nahe kommen.

34. Schneidet man einen oder mehrere Durchmesser durch zwei oder mehrere einander parallele Sehnen, so verhalten sich die auf dem oder den Durchmessern durch die Sehnen bestimmten Theilstücke zu einander wie die Rechtecke der entsprechenden Theilstücke der Sehnen. Die Sehne kann auch Berührungslinie sein.

Bew. Ziehe die den Sehnen parallele Berührungslinie, verlängere die Durchmesser bis zum Durchschnitt mit derselben, ziehe vom Berührungspunkte den Durchmesser und wende 23, 1 und 25, 4 an.

35. Gehen von einem Punkte außerhalb an einen Kegelschnitt die beiden Berührungslinien, und zieht man zu der einen derselben eine Sehne parallel, so wird sie von der andern so geschnitten, daß das Rechteck ihrer Theilstücke gleich ist dem Quadrate des Stückes auf ihr zwischen der Berührungslinie und der Verbindungssehne der beiden Berührungspunkte.

Zus. 1. Die parallele Sehne kann ebenfalls Berührungslinie werden (bei der Ellipse und Hyperbel).

2. Bei der Hyperbel kann die eine der beiden Berührungslinien Asymptote werden. Die Verbindungssehne der beiden Berührungspunkte wird dann zur Asymptote parallel.

36. Zieht man von zwei beliebigen Hyperbelpunkten zu jeder der Asymptoten ein Paar paralleler Strecken, so sind die Rechtecke je zweier von demselben Punkte ausgehender Strecken einander gleich.

Bew. Verbinde die beiden Hyperbelpunkte durch eine Gerade, so entstehen zwei Paare ähnlicher Dreiecke.

Zus. 1. Zieht man von einem Hyperbelpunkte zu beiden Asymptoten Parallele, so ist das entstandene Parallelogramm von constanter Größe; dieses Parallelogramm heißt die *Potenz* der Hyperbel**).

2. Alle Dreiecke, welche im Asymptotenwinkel durch ein Berührende an der Hyperbel erzeugt werden, sind einander inhaltsgleich***)

37. Der auf der Kegelschnittsebene senkrechte Achsenschnitt bestimmt einen Durchmesser, dessen Ordinaten auf demselben senkrecht stehen.

38. Der Durchmesser, dessen Ordinaten auf ihm senkrecht sind, heißt *Achse* des Kegelschnitts.

Zus. 1. Hyperbel und Ellipse haben zwei Achsen, die Parabel nur eine.

2. Die Achsen der Hyperbel halbiren den Winkel der Asymptoten und dessen Nebenwinkel.

*) In der Hyperbel heißt jeder durch die Kurve unmittelbar begränzte Durchmesser diameter transversa auch latus transversum, der andere diameter conjugata. Der Parameter heißt latus rectum. Latus rectum aequale lateri transverso, daher diese Bezeichnung.

**) Newt. I, S. 124. Theor. IV.

***) Plücker 2, S. 10[illegible].

3. Die durch die Hyperbel begränzte Achse ist der kleinste aller Durchmesser, und diese letzteren wachsen mit ihrer Entfernung von der Achse.

4. In der Hyperbel ist die zweite Achse kleiner als irgend ein conjugirter Durchmesser.

5. In der Ellipse sind die beiden Achsen ungleich; die größere ist der größte, die kleinere der kleinste aller Durchmesser, und die Durchmesser wachsen stätig von der kleinern zur größern Achse.

6. In der Hyperbel und Ellipse sind die Durchmesser, welche von den Endpunkten einer zur Achse parallelen Sehne ausgehen, einander gleich.

7. Die Halbirungslinie des Winkels gleicher Durchmesser in der Hyperbel und Ellipse ist eine Achse.

39. Die Verbindungsgerade der Mittelpunkte beliebiger auf einem Durchmesser senkrechter Sehnen der Parabel ist die Achse der Parabel.

Zus. 1. Die Berührungslinien der Parabel in den Endpunkten einer auf dem Durchmesser senkrechten Sehne bis zur Achse gemessen sind einander gleich.

2. Gehen von einem Punkte zwei gleiche Berührungslinien an die Parabel, so ist die Halbirungslinie ihres Winkels die Achse.

40. Gehen von einem Punkte an eine Parabel die beiden Berührungslinien, so ist diejenige die größere, deren Berührungspunkt die größere Ordinate hat.

41. Die Ellipse hat nur ein Paar einander gleiche conjugirte Durchmesser, und zwar gehen sie parallel den Verbindungsgeraden der Endpunkte beider Halbachsen.

Zus. Im Kreise sind alle conjugirten Durchmesser einander gleich und jeder ist zugleich Achse.

42. In der gleichseitigen Hyperbel sind conjugirte Durchmesser stäts einander gleich, in der ungleichseitigen kein Paar.

Zus. Die gleichseitige Hyperbel entspricht in gewisser Weise dem Kreise*).

43. Bestimmen vier beliebige Punkte eines Kegelschnitts ein Viereck und zieht man von einem beliebigen fünften Punkte der Kurve zu zwei benachbarten Seiten des Vierecks die Parallelen, so werden diese von den Gegenseiten des Vierecks so geschnitten, daß das Verhältniß der Rechtecke aus je zwei Theilstücken derselben Parallelen unveränderlich ist.

Bew. Fig. 7. 8. 9. Die vier gegebenen Punkte seien A, B, C, D; von einem beliebigen fünften Punkte der Kurve E geht EFG || AB und EHJ || AD. Ziehe durch B und C die Parallelen zu AD, welche erstere die Kurve zum zweitenmal in Q schneidet, verbinde D mit Q, welche die zu AD durch E und C parallel gezogenen Geraden in M und L schneidet, so ist DJM ∽ DCL und BPG ∽ COB.

$$\begin{array}{ll} \text{Also:} & JM : CL = MD : LD \\ & \qquad\quad\;\; = AH : OA \\ & \qquad\quad\;\; = EF : OA \text{ oder } JM : EF = CL : OA \\ & BP : PG = CO : BO \\ & EH : \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{daher:} & JM \times EH : EF \times PG = CL \times CO : OA \times OB = EH \times HK : HA \times HB \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\; = NO \times CO : \qquad\qquad\;\; = EH \times EM : EF \times EP \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{folglich:} & EH \times EM \pm JM \times EH : EF \times PG \pm EF \times EP = EH \times EM : EF \times EP \\ \text{oder} & \qquad EH \times FJ \qquad\quad : \qquad EF \times EG \qquad = CL \times CO : OA \times BO \end{array}$$

Das letzte Verhältniß ändert sich aber nicht durch die Ortsveränderung von E. So lange also E ein Punkt der Kurve bleibt, ist auch das Verhältniß der ersten beiden Produkte constant.

Zus. 1. Da $EH \times EJ : EF \times EG = EH \times EM : EF \times EP$

so ist $EJ : EG = EM : EP$

d. h. der Punkt C kann bei festliegenden Punkten A, B, D, E seinen Ort auf der Kurve ändern, ohne daß das Verhältniß EJ : EG seinen Werth ändert.

2. Es können je zwei benachbarte Punkte zusammenfallen und die durch sie bestimmten Sehnen in Berührungslinien übergehen.

3. Legt man an einen Kegelschnitt zwei Berührungslinien und zieht durch einen beliebigen Punkt des Kegelschnitts zur Verbindungssehne der beiden Berührungspunkte eine Parallele, so wird diese durch die Berührungslinie so geschnitten, daß das Rechteck ihrer Theilstücke zum

---

*) Vergl. Steiner S. 144. Die Gleichung $x^2 \pm y^2 = a^2$ gibt, je nach dem Vorzeichen, den Kreis oder die gleichseitige Hyperbel.

Quadrate der vom beliebigen Kurvenpunkte zur Verbindungssehne der Berührungspunkte einer der Berührungslinien parallel gezogenen Strecke ein konstantes Verhältniß hat.

4. In der Hyperbel oder Parabel kann einer der vier Punkte in unendliche Entfernung rücken, wodurch die zu ihm führenden Geraden den Asymptoten, beziehlich dem Durchmesser parallel werden.

5. Ist in einem Kegelschnitt ein Viereck gegeben, und zieht man von einem fünften Kurvenpunkte zu zwei benachbarten Seiten parallele Sehnen, verbindet die beiden Durchschnittspunkte derselben mit den beiden andern Vierecksseiten durch eine Gerade, zieht zu dieser eine Parallele und verbindet die Durchschnittspunkte derselben mit den beiden vom fünften Punkte ausgehenden Sehnen mit den zweiten Endpunkten der ersten beiden Vierecksseiten, so schneiden sich diese Verbindungsgeraden stets auf einem Punkte der Kurve. In der Hyperbel und Parabel kann einer der Punkte in unendlicher Entfernung liegen. (Der Satz gestattet eine Umkehrung.)

44. Zwei Kegelschnitte können, ohne zusammenzufallen höchstens vier Punkte gemeinschaftlich haben*).

Bew. Hätten sie fünf Punkte mit einander gemein, so würde sich nach 43,5 beliebig oft ein sechster, beiden gemeinschaftlicher Punkt bestimmen lassen.

45. Bestimmen wir beliebige Punkte eines Kegelschnitts ein Viereck und zieht man von einem fünften Punkte nach den vier Seiten des Vierecks beliebige Gerade, zu diesen von einem beliebigen sechsten Punkte des Kegelschnitts Parallele bis zum Durchschnitt mit den entsprechenden Seiten, so ist das Verhältniß der Rechtecke aus den von je zwei Gegenseiten des Vierecks bestimmten Strecken für beide Punkte dasselbe.

Bew. Ziehe durch den fünften und sechsten Punkt zu demselben Nebenseitenpaare des Vierecks parallele Gerade bis zum Durchschnitt mit den andern beiden Seiten, so entstehen vier Paare ähnlicher Dreiecke, deren Proportionen in Verbindung mit 43 den Satz erweisen.

In der Lage der Punkte können dieselben besondern Beziehungen wie in 43 eintreten.

Zus. 1. Bestimmen wir beliebige Punkte eines Kegelschnitts ein Viereck, so wird die durch den Durchschnittspunkt zweier Gegenseiten und den Durchschnittspunkt der Diagonalen bestimmte Sehne in jenen Punkten harmonisch getheilt.

2. Gehen von einem Punkte an einen Kegelschnitt die beiden Berührungslinien, so wird jede durch jenen Punkt gehende Sehne in ihm und der Verbindungssehne der Berührungspunkte harmonisch getheilt.

3. Gehen von einem Punkte an einen Kegelschnitt die beiden Berührungslinien, und zieht man durch ihn eine Parallele zur Verbindungssehne der beiden Berührungspunkte, so wird jede einen Punkt der Parallelen mit dem Mittelpunkte der Verbindungssehne verbindende Strecke von der Kurve harmonisch getheilt.

4. Legt man an den Kegelschnitt in je zwei conjugirten harmonischen Theilpunkten die Berührungslinien, so schneiden sich dieselben stets auf jener Parallelen, oder sie sind derselben parallel.

5. Schneiden sich zwei Sehnen eines Kegelschnitts, so liegt der Durchschnittspunkt der in den Endpunkten der einen angelegten Berührungslinien auf der andern Sehne.

46. Zwei Kegelschnitte berühren sich, wenn sie in demselben Punkte dieselbe Gerade berühren.

Zus. 1. Zwei Kegelschnitte können sich höchstens in zwei Punkten berühren.

2. Ein Kegelschnitt kann in demselben Punkte unendlich viele Berührungskreise haben. Der Ort für die Mittelpunkte derselben ist die auf der gemeinschaftlichen Berührungsgeraden im Berührungspunkte errichtete Senkrechte.

47. Legt man von einem Punkte der Achse an einen Kegelschnitt die beiden Berührenden, welche bei der Ellipse auch einander parallel sein können, und beschreibt den die Berührungslinien in diesen beiden Punkten berührenden Kreis, so berührt dieser auch den Kegelschnitt und liegt übrigens ganz außerhalb der Kurve.

Zus. 1. Ist bei der Ellipse der Punkt auf der großen Achse angenommen, so liegt der Kreis, wie stets bei der Hyperbel und Parabel, ganz innerhalb der Kurve; ist der Punkt auf der kleinen Achse angenommen, so umschließt der Kreis die Ellipse.

2. Sind die beiden Berührungslinien an der Ellipse einander parallel, so ist die Verbindungssehne der Berührungspunkte entweder die große oder die kleine Achse. Hiernach erhält

*) Steiner §. 41. S. 147 ff. Gleichseitige Hyperbeln sind, da ihr Asymptotenwinkel gegeben ist, schon durch vier Punkte vollständig bestimmt. Vergl. Plücker 1. S. 206.

man entweder den kleinsten die Ellipse umschließenden oder den größten der Ellipse eingeschriebenen Kreis.

3. Errichtet man in einem Kreise auf dem Durchmesser senkrechte Sehnen, und schneidet auf ihnen vom Durchmesser aus nach beiden Seiten verhältnißgleiche Stücke ab, so liegen die so gewonnenen Endpunkte auf einer Ellipse, deren große oder kleine Achse jener Durchmesser ist, je nachdem das Theilverhältniß ein ächter oder unächter Bruch ist.

4. Schneidet man von der Achse der Ellipse aus auf den Ordinaten verhältnißgleiche Stücke ab, so liegen die neuen Endpunkte wieder auf einer Ellipse.

48. **Gehen von einem Punkte der Achse an einen Kegelschnitt die beiden Berührungslinien, und zieht man von dem einen Berührungspunkte aus den Durchmesser, von dem andern die zugehörige Doppelordinate, und beschreibt über dieser als Sehne den Kreis, welcher die Berührungslinie und also die Kurve berührt, so hat dieser Kreis außer den beiden Endpunkten der Doppelordinate keinen Punkt mit dem Kegelschnitt gemein.**

Beweis wird leicht geführt, wenn ein die Berührende im Ausgangspunkte der Doppelordinate berührender und die Kurve in irgend einem dritten, einmal rechts, einmal links von der Verbindungssehne der beiden Berührungspunkte liegenden, Punkte schneidender Kreis konstruirt wird, den man in den im Lehrsatze erwähnten Kreis übergehen läßt.

Zus. Dieser Kreis hat die merkwürdige Eigenschaft in demselben Punkte den Kegelschnitt zu berühren und zu schneiden.*) Er bildet den Uebergang von den die Kurve und die Berührende in diesem Punkte gleichzeitig berührenden die Kurve hier umhüllenden und den dieselbe Bedingung erfüllenden innerhalb der Kurve liegenden Kreisbogen. Er ist ein sich der Kurve besonders genau anschmiegender Kreis, er bestimmt die Krümmung der Kurve an dieser Stelle durch die leichter vergleichbare Krümmung des Kreises. Er heißt Krümmungskreis.

49. **Zieht man vom Berührungspunkte des Krümmungskreises und des Kegelschnitts den Durchmesser des letztern, so bestimmt derselbe in jenem eine Sehne, welche dem Parameter dieses Durchmessers gleich ist.**

Bew. Fig. 10. A sei der Punkt der Achse, von welchem aus die Berührenden AB,AC an den Kegelschnitt gelegt sind. Von B aus ist der Durchmesser BD, von C die zugehörige Ordinate CE gezogen, ebenso von C aus der Durchmesser CF, welcher den Krümmungskreis in C d. h. den die AC in C berührenden und die CE als Sehne fassenden Kreis in G trifft. Nimm auf dem Kegelschnitt, hier auf dem Bogen CB den beliebigen Punkt H und lege durch ihn einen die AC in C berührenden Kreis, welcher den Kegelschnitt zum zweitenmale in J, die CG in K schneidet. Ziehe von H die HN || AC, welche die CG in L schneidet. Errichtet man noch auf AC in C die Senkrechte, den Ort für die Mittelpunkte aller Berührungskreise an AC in C, so bestimmt sie die Durchmesser beider Kreise. Sie schneide die HN in O, welches offenbar der Mittelpunkt von HN ist. Es ist nun, wenn p den Parameter für den Durchmesser CF bezeichnet:

$$HL^2 = CL \times p \text{ oder } CL : HL = HL : p$$
$$\text{aber auch } CL : HL = LN : LK$$
$$\text{d. h. } HL : p = LN : LK$$
$$\text{oder } HL : LN = p : LK$$

d. h. für $HL \gtreqless LN$ ist auch $p \gtreqless LK$. Je näher aber H nach C rückt L nach O, und L gleichzeitig nach C, und K nach G, und wenn H nach C fällt und damit die Punkte N, L, O, H mit C zusammenfallen, fällt auch K mit G zusammen und es wird $CG = p$.

Zus. 1. Geht der beliebige Durchmesser in die Achse über, so fallen die Punkte B und C und F mit dem Scheitel zusammen und FG wird Durchmesser des Krümmungskreises und zugleich der der Achse zugehörige Parameter. In der Hyperbel, Parabel und in der Ellipse, wenn die Achse die große Achse ist, liegt der Krümmungskreis ganz innerhalb der Kurve, er ist der größte aller eingeschriebenen Berührungskreise; ist aber die gewählte Achse die kleine Achse der Ellipse, so umhüllt der Krümmungskreis die Kurve und ist der kleinste aller umschriebenen Berührungskreise an dieser Stelle.

*) Dieser Umstand kann nur bei einer Oskulation der 2 n ten Ordnung stattfinden. Der Kreis und der Kegelschnitt haben eine Oskulation zweiter Ordnung.

50. Legt man an eine Parabel eine Berührungslinie, und errichtet auf ihr im Berührungspunkte eine Senkrechte, so faßt diese und die Ordinate des Berührungspunktes auf der Achse den halben Parameter zwischen sich.

51. In der Parabel übertrifft der Parameter irgend eines Durchmessers den Parameter der Achse um die vierfache Abscisse des Scheitels des Durchmessers.

52. Legt man an die Ellipse oder Hyperbel in den Endpunkten eines beliebigen Durchmessers die beiden Berührungslinien und schneidet sie durch eine beliebige dritte Berührungslinie an der Kurve, so ist das Rechteck aus den auf den ersten beiden bestimmten Strecken gleich dem vierten Theile des Rechtecks aus dem Durchmesser und seinem Parameter.

Bew. Fig. 11. Es sei AB der Durchmesser, C der Mittelpunkt, in A und B sind die Berührungslinien angelegt, welche von den im beliebigen Punkte D angelegten Berührenden in E und F geschnitten werden. Der Durchmesser wird in G durchsetzt. Der durch C gezogene conjugirte Durchmesser ist den ersten beiden Berührungslinien parallel, und schneidet die dritte in H. Es ist in leichter Folgerung aus 47, 2, wenn noch die $DJ \parallel AE$ gezogen ist:

$$CG : CA = CA : CJ$$

oder $CG \times CJ = CA^2$

oder $CG \times CJ : CJ^2 = CA^2 : CJ^2$

oder $CG : CJ = CA^2 : CJ^2$

oder $CG : GJ = CA^2 : CJ^2 - CA^2$

$$= CA^2 : AJ \times BJ$$

Aber $AJ \times JB : DJ^2 = AB^2 : CH^2$

$$= AB^2 : AB \times p$$
$$= 4AC^2 : 4AC \times \tfrac{1}{2}p$$
$$= AC^2 : \tfrac{1}{2}AC \times p$$

Also: $CG : GJ = \tfrac{1}{2}AC \times p : DJ^2$

Aus den ähnlichen Dreiecken folgt aber auch:

$$AE : JD = CH : FB \text{ oder } AE \times FB = JD \times CH$$

und $CG : GJ = CH : DJ$

d. h. $CG : GJ = CH \times JD : DJ^2$

$$= AE \times FB : DJ^2$$
$$= \tfrac{1}{2}AC \times p : DJ^2$$
$$= \tfrac{1}{4}AB \times p : DJ^2$$

53. Beschreibt man über der großen Achse der Hyperbel oder der Ellipse als Durchmesser einen Kreis, zieht durch ihn eine übrigens beliebige Sekante, welche den Kegelschnitt berührt, und errichtet auf der Sekante in den Durchschnittspunkten mit dem Kreise Senkrechte, so schneiden diese die Achse so, daß die Rechtecke aus den beiden Abschnitten der Achse einander und dem Rechtecke aus jenen beiden Senkrechten, auch dem vierten Theile des Rechtecks aus der Achse und ihrem Parameter gleich sind.

Bew. Lege in den Scheitelpunkten Berührungslinien an den Kegelschnitt bis zum Durchschnitt mit der Sekante, und wende den vorigen Lehrsatz, die aus den ähnlichen Dreiecken entstehenden Proportionen und den Sehnensatz des Kreises an.

Ist bei der Ellipse die Sekante der Achse parallel, so werden die Senkrechten den in den Scheitelpunkten angelegten Berührungslinien gleich.

Zus. 1. Die Durchschnittspunkte der Senkrechten mit der Achse haben von dem ihnen nächsten Scheitelpunkte gleichen Abstand.

2. Da mit der Veränderung des Theilpunktes einer Strecke auch die Größe des aus den Theilstücken gebildeten Rechtecks sich ändert, so sind diese beiden Durchschnittspunkte offenbar für jede Berührungslinie dieselben.

54. Legt man an eine Parabel eine Berührungslinie und errichtet im Scheitel der Parabel auf der Achse eine Senkrechte bis zur Berührenden, ferner auf der letzteren in diesem Durchschnittspunkte eine Senkrechte, so schneidet dieselbe auf der Achse vom Scheitel aus den vierten Theil des Parameters ab.

Bew. Verlängere die Berührungslinie bis zum Durchschnitt mit der Achse, und beachte 28.

55. Diese ausgezeichneten Punkte der drei Kegelschnitte heißen deren **Brennpunkte**. Die Parabel hat nur **einen** Brennpunkt, die Ellipse und Hyperbel haben deren **zwei**.

Zus. 1. Legt man an die Ellipse oder Hyperbel in den Endpunkten der großen Achse die beiden Berührungslinien, so begränzen sie jede beliebige dritte Berührungslinie am Kegelschnitt so, daß der Halbkreis über dieser Strecke als Durchmesser durch die beiden Brennpunkte geht.

2. In jedem Kegelschnitt ist die senkrechte Ordinate des Brennpunktes dem halben Parameter, also die auf der Achse im Brennpunkte senkrecht stehende Sehne dem Parameter gleich.

3. In der Ellipse ist der Abstand der Endpunkte der kleinen Achse von einem der Brennpunkte der halben großen Achse gleich.

4. In der Hyperbel schneidet die auf der Achse im Scheitel errichtete Senkrechte auf der Asymptote den halben Abstand der beiden Brennpunkte ab, und ebenso groß ist die Verbindungsstrecke des Scheitels mit dem Endpunkte der kleinen Achse.

5. Im Kreise fallen beide Brennpunkte mit dem Mittelpunkte zusammen.

6. In der Ellipse heißt der Abstand des Brennpunktes von dem Mittelpunkte die Excentricität. Das Quadrat der Excentricität ist stäts gleich der Differenz der Quadrate der beiden Halbachsen. Die Excentricität, d. h. die Abweichung vom Kreise, ist also desto geringer, je geringer der Unterschied zwischen der großen und der kleinen Achse der Ellipse ist. Auch auf die Hyperbel läßt sich der Begriff Excentricität übertragen.

7. In der gleichseitigen Hyperbel ist die große Halbachse die mittlere Proportionale zwischen den Abständen eines Brennpunktes von den beiden Scheiteln.

8. In der gleichseitigen Hyperbel schneidet die Senkrechte von dem Brennpunkte auf die Asymptote gefällt auf letzterer die große Halbachse ab.

9. In der Parabel halbirt die Senkrechte vom Brennpunkte auf die Berührungslinie gefällt das Stück der letzteren zwischen Berührungspunkt und Achse. (cf. 54.)

56. Die Verbindungsstrecke irgend eines Kegelschnittpunktes mit dem Brennpunkte heißt Leitstrahl. In der Ellipse und Hyperbel hat jeder Kurvenpunkt zwei Leitstrahlen, in der Parabel nur einen.

57. In der Ellipse und Hyperbel bilden die beiden Leitstrahlen des Berührungspunktes einer Berührungslinie mit der letzteren gleiche Winkel.

Bew. Fälle von den Brennpunkten auf die Berührungslinie die beiden Senkrechten und zeige die Aehnlichkeit der so entstandenen Dreiecke mit Hülfe des über der großen Achse als Durchmesser geschlagenen Kreises.

58. In der Parabel bildet der Leitstrahl des Berührungspunktes einer Berührungslinie mit der letzteren denselben Winkel wie der vom Berührungspunkte aus gezogene Durchmesser.

Anm. Wie 54 aus 53, so folgt auch 58 aus 57, wenn der eine Brennpunkt in unendlicher Entfernung gedacht wird.

59. In der Ellipse ist die Summe, in der Hyperbel die Differenz der beiden Leitstrahlen desselben Kurvenpunktes der großen Achse gleich.

Bew. Stelle durch Zirkelschlag um den Kurvenpunkt die Summe beziehlich die Differenz der beiden Leitstrahlen dar; verbinde den neuen Endpunkt mit dem andern Brennpunkte, und den Mittelpunkt dieser Strecke mit dem Mittelpunkte der Achse.

Zus. Die in der Ellipse oder Hyperbel vom Mittelpunkte zur Berührungslinie einem Leitstrahle des Berührungspunktes parallel gezogene Strecke ist der großen Halbachse gleich.

60. In der Ellipse und Hyperbel ist das Rechteck aus den beiden Leitstrahlen irgend eines Kurvenpunktes dem vierten Theile des Rechtecks aus dem Durchmesser dieses Kurvenpunktes und seinem Parameter gleich.

Bew. Lege im Kurvenpunkte an den Kegelschnitt die Berührungslinie und ebenso die Berührungslinien an denselben in den Endpunkten der großen Achse, welche bis zum Durchschnitt mit der ersteren verlängert werden. Wende 52 an.

61. Errichtet man auf der Berührungslinie an einem Kegelschnitt im Berührungspunkte eine Senkrechte bis zum Durchschnitt mit der großen Achse, so schneiden die Senkrechten von diesem Punkte auf die Leitstrahlen gefällt auf denselben vom Berührungspunkte aus den halben Parameter der großen Achse ab. In der Parabel tritt an die Stelle des einen Leitstrahls der Durchmesser des Berührungspunktes.

Zus. Die Senkrechte auf der Berührungslinie theilt den Abstand der beiden Brennpunkte so, daß das Rechteck der Theilstücke um das Quadrat der Senkrechten vermehrt (Hyperbel) oder vermindert (Ellipse) dem Rechtecke aus den beiden Leitstrahlen des Berührungspunktes gleich ist.

Anm. Die auf der Berührungslinie im Berührungspunkte errichtete und in der großen Achse begränzte Senkrechte heißt Normale, das Stück der Achse zwischen der Normalen und der Ordinate Subnormale, das Stück der Berührungslinie zwischen dem Berührungspunkte und der großen Achse heißt Tangente und ihre Projektion auf die Achse Subtangente.

62. Legt man an einen Kegelschnitt in den Endpunkten einer durch den Brennpunkt gehenden Sehne die beiden Berührungslinien, so geht die auf der Sehne im Brennpunkte errichtete Senkrechte durch den Durchschnittspunkt der Berührungslinien, ist beziehlich ihnen parallel.

63. Verlängert man die Achse einer Parabel über ihren Scheitelpunkt hinaus um den Abstand des Brennpunktes vom Scheitel, und errichtet in diesem Punkte auf der Achse eine Senkrechte, so sind die Abstände jedes Parabelpunktes von dem Brennpunkte und von dieser Geraden einander gleich.

Zus. 1. Diese Senkrechte heißt die Direktrix der Parabel.

2. Der Abstand eines Parabelpunktes vom Brennpunkte oder von der Direktrix ist der vierte Theil des Parameters des durch diesen Punkt gezogenen Durchmessers.

3. Der Leitstrahl irgend eines Parabelpunktes ist gleich der auf der Achse gemessenen Abscisse dieses Punktes vermehrt um den vierten Theil des Parameters der Achse.

4. In der Parabel ist der Unterschied der Leitstrahlen zweier Kurvenpunkte dem Unterschiede ihrer auf der Achse bestimmten Abscissen gleich.

64. Schneidet man in der Ellipse oder Hyperbel vom Scheitelpunkte aus auf der großen Achse außerhalb der Kurve ein Stück ab, welches sich zum Abstande des Scheitelpunkts vom Brennpunkte verhält, wie die große Achse selbst zum Abstande der beiden Brennpunkte von einander, und errichtet man im Endpunkte dieses Theilstücks auf der Achse eine Senkrechte, so haben die Abstände jedes Kurvenpunktes von dem Brennpunkte und von dieser Geraden ein unveränderliches Verhältniß zu einander.

Bew. Fig. 12. Der Annahme nach ist $FF^1 : AB = AF : AC$ oder $FF^1 : AF = AB : AC$, also auch $FF^1 - AB : AF = AB - AC : AC$ d. h. $AF^1 : AF = BC : AC$. Hiernach müssen sich die in D und G angelegten Berührungslinien auf der in C errichteten Senkrechten schneiden, und zugleich HF senkrecht auf DG stehen, daher geht der Kreis über DH als Durchmesser durch F und E. Da W. $F^1DH = HDF$ so ist $DJ = DF$ also $DF^1 - DF = DF^1 - DJ = AB$. Es ist aber auch W. $EDF^1 = DF^1F$ und W. $EFD = JFF^1$,

daher $$DEJ \backsim F^1JF \text{ d. h.}$$
$$FF^1 : FJ = DJ : DE$$
oder $$FF^1 : AB = DF : DF$$

Anm. Diese Gerade heißt auch die Direktrix der Ellipse oder Hyperbel, und es könnte also ein Kegelschnitt auch erklärt werden als diejenige Kurve, deren Punkte ein und dasselbe Verhältniß der Abstände von einem festen Punkte und einer festen Geraden haben. Je nachdem dieses Verhältniß größer, gleich oder kleiner als Eins ist, ist die Kurve eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse. Werden große Achse und der Abstand der beiden Brennpunkte beide unendlich, so erhalten wir $DF = DE$, die Parabel; wird der Abstand der Brennpunkte von einander o, die große Achse 2r, $DF = r$ wie im Kreise, so wird $DE = \infty$ d. h. die Direktrix des Kreises ist eine beliebige unendlich entfernte Gerade.

65. In der Ellipse ist die Summe, in der Hyperbel die Differenz der Quadrate je zweier conjugirter Durchmesser constant, nämlich gleich der Summe, beziehlich der Differenz, der Quadrate der beiden Achsen.

66. In der Ellipse und Hyperbel sind die aus je zwei conjugirten Durchmessern construirten Parallelogramme inhaltsgleich.

Aufgaben.

1) In irgend einem gegebenen Kegelschnitt zu einer gegebenen Sehne den Durchmesser zu finden.
2) In einer gegebenen Parabel die Achse zu bestimmen.
3) Den Mittelpunkt einer gegebenen Ellipse oder Hyperbel zu bestimmen.
4) In einer gegebenen Ellipse oder Hyperbel zu gegebenem Durchmesser den conjugirten zu finden.
5) In einem gegebenen Kegelschnitt von einem gegebenen Punkte aus auf gegebenen Durchmesser die Ordinate zu ziehen.
6) An einen gegebenen Kegelschnitt in einem gegebenen Punkte eine Berührungslinie anzulegen.

7) Die Asymptoten einer gegebenen Hyperbel zu finden.
8) Zu jedem Hyperbeldurchmesser den conjugirten Durchmesser der Größe nach zu finden.
9) Die Achsen einer Hyperbel zu bestimmen.
10) In irgend einem gegebenen Kegelschnitt zu gegebenem Durchmesser den Parameter zu bestimmen.
11) Die Achsen einer gegebenen Ellipse zu bestimmen.
12) Aus den beiden gegebenen Achsen die Ellipse zu zeichnen.
13) Aus den gegebenen Asymptoten und einem Kurvenpunkte die Hyperbel zu zeichnen.
14) Aus den gegebenen Achsen der Ellipse die Brennpunkte zu bestimmen.
15) Aus den gegebenen Achsen der Hyperbel die Brennpunkte zu bestimmen.
16) In einer gegebenen Parabel den Brennpunkt zu bestimmen.
17) In einem gegebenen Punkte an einen Kegelschnitt die Berührungslinie zu legen.
18) Von einem Punkte außerhalb an eine Ellipse die Berührungslinie zu legen*).
19) Von einem Punkte außerhalb an eine Hyperbel eine Berührungslinie zu legen.
20) Aus der Direktrix und dem Brennpunkte die Parabel zu zeichnen.
21) Von einem Punkte außerhalb an die Parabel eine Berührungslinie zu legen.
22) Aus der großen Achse und den beiden Brennpunkten die Ellipse oder Hyperbel zu zeichnen.
23) Zwischen zwei Strecken zwei mittlere Proportionalen zu zeichnen.
24) Durch fünf gegebene Punkte einen Kegelschnitt zu legen**).

*) Plücker 1, S. 196.
**) Plücker 1, S. 197.

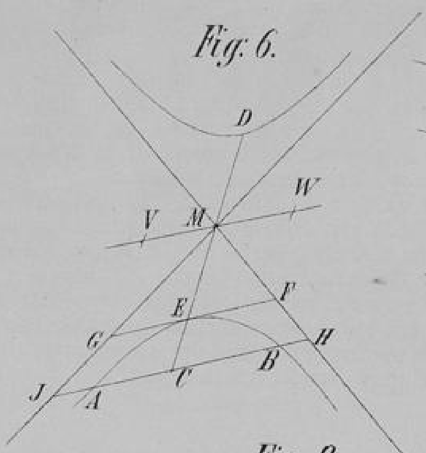

Fig. 6.

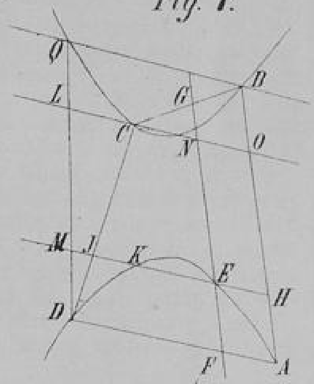

Fig. 7.

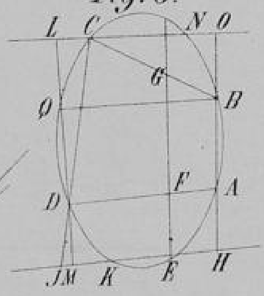

Fig. 8.

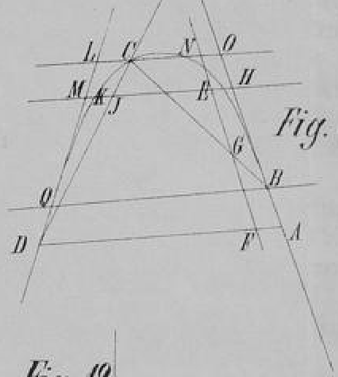

Fig. 9.

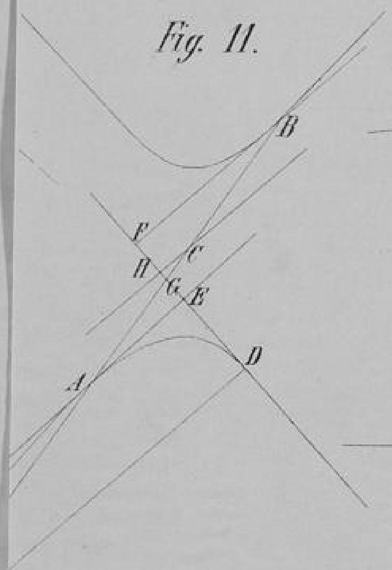

Fig. 11.

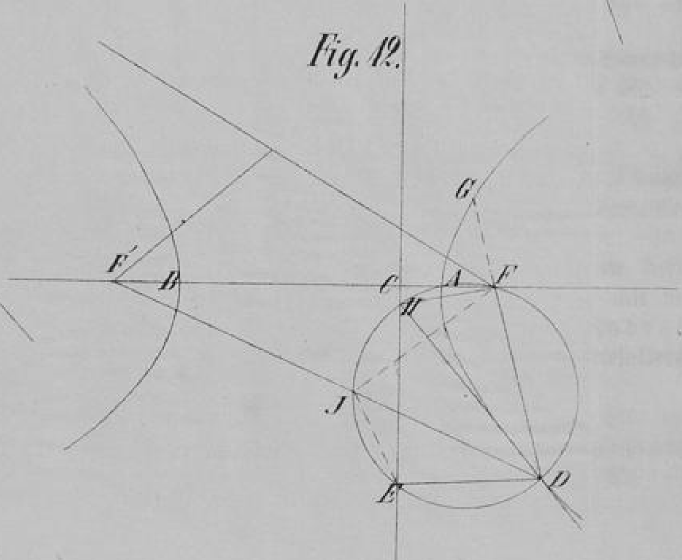

Fig. 12.

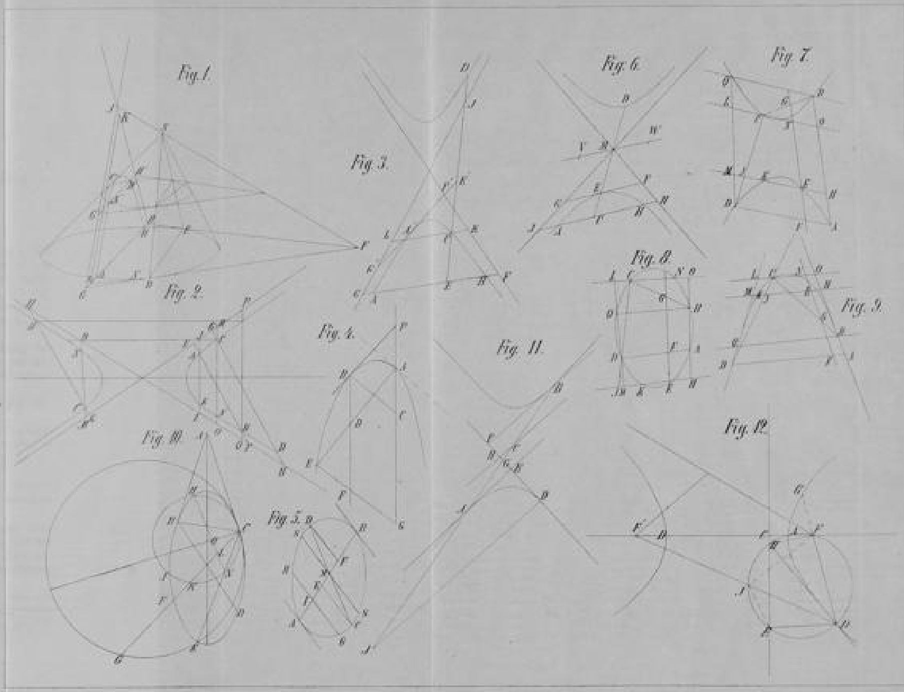
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.