I.

Betrachtungen
über
einige Methoden,
eine gewisse Schwierigkeit
in der
Berechnung der Wahrscheinlichkeit
beym Spiel zu heben.

Betrachtungen
über
einige Methoden,
eine gewisse Schwierigkeit
in der
Berechnung der Wahrscheinlichkeit
beym Spiel zu heben.

Der Meßkünstler findet nicht selten bey der Anwendung seiner Schlüsse auf die Natur, merkliche Abweichungen von dem, was er nach seiner Rechnung hätte erwarten sollen. Es ist nicht sehr schwer den Grund hiervon im Allgemeinen anzugeben, und einzusehen, daß es nicht die Schuld der Mathematik seyn kann. Er abstrahirt sich von dieser Welt eine eigne, von welcher er die Gesetzbücher gleichsam selbst in Händen hat; keine Kraft kann in derselben wirken, ehe er sie selbst hinein legt; er weiß was überall geschieht, und aus seinen Formeln liest er Weissagungen ab; ohne ein Wunder hebt er Gesetze auf, verordnet andere, und gibt seiner Welt jede Gestalt, die er will. So weit leitet ihn die Mathematik, und Alles ist so gewiß als die ewigen Wahrheiten, worauf sie sich stützet. Könnte ein endlicher Verstand mehr als nur die allgemeinsten Gesetze in unserer wirklichen Welt entdecken, so wäre es dem Meßkünstler leicht, sie nach und nach in die seinige überzutragen, und so müßten Prophezeyhungen, die er für die letztere schreibt, auch in der ersteren gelten. Wer aber den Abstand erwägt von uns bis zu dem, der allein die Gesetztafeln dieses Ganzen in seiner allmächtigen Hand hält, der wird erkennen, wie unmöglich es ist, sich ein System von Kräften mit allen den unzähligen Beziehungen zu denken, das nicht schon selbst im Allgemeinen von diesem wirklichen abweichen sollte. Wenn also der Mathematikverständige aus seinem System auf das unsrige schließt, so muß er allemahl Unterschiede bemerken, so oft hier das allgemeine Gesetz durch besondere Umstände eingeschränkt wird, die dort nicht in Betracht gezogen worden sind. Wenn eine Bombe, die der Rechnung nach in einer Parabel nach dem Ziel fliegen sollte, weder nach dem Ziel, noch in einer Parabel fliegt; wenn eine Kraft, die eine gewisse Last heben sollte, kaum hinreicht die Maschine in Bewegung zu setzen: so liegt der Fehler nicht in der Rechnung, denn in der Welt, wie sie sich der Meßkünstler dachte, würde die Kraft die Last wirklich gehoben, und die Bombe ihr Ziel auf einer parabolischen Bahn gefunden haben. Auch in unrichtig abstrahirten allgemeinen Gesetzen kann er nicht liegen; sollte er dieser Erfahrungen wegen, die Gesetze des Galiläus verwerfen, oder andere für den Hebel festsetzen? Sondern darin lag der Fehler, daß er glaubte, sein System ginge mit dem unsrigen schon völlig gleich.

In der ganzen angewandten Mathematik wird man ähnliche Beyspiele finden, und es ist immer ein Gewinn Abweichungen von dieser Art zu entdecken, entweder um sie selbst zu vermindern, oder wo dieses nicht geschehen kann, bey jeder Anwendung die allgemeinen Sätze dadurch gehörig einzuschränken.

Ich will jetzo einige Betrachtungen über eine sehr merkwürdige Abweichung von dieser Art anstellen, die sich in einem Theile der angewandten Rechenkunst zeigt, der beym ersten Anblick weniger von einer Verbindung mit dem irdischen leiden zu können scheint, ich meine in der Berechnung der Wahrscheinlichkeit beym Spiel, und des dadurch zu bestimmenden Grades der Hoffnung der Spielenden. Ich verstehe hier nicht solche Abweichungen von der Rechnung, die eben deßwegen noch Statt finden müssen, weil Bestimmungen der Grade der Wahrscheinlichkeit noch bey weiten keine Weissagungen seyn sollen; nicht Abweichungen, die selbst in der Welt des Meßkünstlers Statt finden müßten, wenn er Zufälle hinein nähme; sondern solche, die eine Aehnlichkeit mit den oben erwähnten haben, und aus einer nicht sorgfältig genug gemachten Anwendung in sich wahrer Sätze auf die wirkliche Welt und die Gesellschaft entspringen.

Die Aufgabe, wobey diese Abweichung vorzüglich in die Augen fällt, ist eben deßwegen sehr berühmt geworden. Sie ist folgende: Zwey Personen A. und B. werfen eine Münze in die Höhe, die z. E. auf der einen Seite mit I. und auf der andern mit O. bezeichnet seyn soll *). A. der die Münze wirft, verspricht dem B. einen Thaler, wenn I. im ersten Wurf fällt, 2 Thaler wenn es erst im zweyten Wurf, 4 Thaler wenn es erst im dritten, 8 wenn es erst im vierten fällt, kurz, sollte es erst im n^{ten} Wurf fallen, so be-

*) Die Bezeichnung, welche ich hier gewählt habe, hat beyläufig noch den Nutzen, daß, wenn endlich die 1. fällt, sie mit allen den o, die vorher fielen, zusammen geschrieben, nach der Leibnitzischen Dyadik die Thaler zählt, welche A. bezahlen muß, hingegen gibt ihr Werth, mit 2 dividirt, den Einsatz des B. für so viel Würfe, und damit multiplicirt, die Menge aller möglichen Fälle, die in so viel Würfen vorkommen konnten.

zahlt A. an B. 2^{n-1} Thaler, und sollte n auch noch so groß seyn, sie wollen so lange werfen, bis I. fällt. Die Frage ist: wie viel Gewinn kann sich B. wahrscheinlicher Weise hieraus versprechen, oder wie viel muß er dem A. voraus bezahlen, daß sich dieser ohne Schaden in ein solches Spiel einlassen kann. Nach den bekannten Regeln der Rechnung des Wahrscheinlichen ist das, was B. bezahlen muß $= 1.\frac{1}{2} + 2.\frac{1}{4} + 4.\frac{1}{8} + \ldots\ldots 2^n.\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ldots\ldots$ das ist, unendlich viel, wenn n gar vorher nicht festgesetzt wird, und alle Schätze der Welt würden nicht zum Einsatz für den B. hinreichen, da im gemeinen Leben der größte Waghals von einem Spieler kaum 20 Thaler in einem solchen Spiel wagen würde, und gleichwohl könnte er sein Geld und noch

12 Thaler dazu, wieder bekommen, wenn nur I. erst im sechsten Wurf fiele. Damit weniger Geübte nicht etwa glauben, der Widerspruch zwischen der Rechnung und dem Urtheil des Spielers käme von der Voraussetzung her, daß A. ins unendliche fort werfen könne: so darf man nur statt n eine beträchtliche Zahl, als z. E. 100 setzen, so ist der Einsatz des B. 50 Thaler und damit kann er 2^{99} Thaler gewinnen; ja fiele auch I. schon im zwanzigsten Wurf, so gewönne er 524288 Thaler. Woher kommt dieser Widerspruch?

Als Hr. Nicolaus Bernoulli dem Hrn. Montmort *) diese Aufgabe zuerst vorlegte, so gab er zugleich dem

*) Analyse sur les Jeux de hazard par Mr. Montmort p. 402, so führt Hr. Bernoulli dieses Buch in der folgenden Abhandlung an, ich selbst habe es nicht gesehen.

Herrn Daniel Bernoulli davon Nachricht, und bath sich seine Meinung aus. Dieser hat auch wirklich eine Auflösung, mit dem, seinem Geschlechte eigenen Geiste gegeben *), welche mit einer von Herrn Cramer, die man in der nähmlichen Abhandlung lesen kann, auf eins hinaus läuft, unerachtet keiner von des andern seiner etwas wußte. Die Auflösung dieser beyden Gelehrten hängt hauptsächlich von folgenden Betrachtungen ab: Zwanzig Millionen Thaler machen mich zwar noch einmahl so reich, als zehen Millionen, aber nicht noch einmahl so glücklich; die Menschen schätzen das Geld nicht nach seinem absoluten Werth, sondern nach dem

*) Specimen theoriae nouae de mensura sortis in den Comment. acad. Petrop. Tom. V. p. 175. Das Wesentlichste aus dieser Abhandlung findet man im Hamb. Mag. T. I. St. 5. p. 73. übersetzt.

Gebrauch, den sie davon machen können. Ob jemand 160, 170 oder 180 Millionen gewinnt, ist ihm gleich viel, dessen ungeachtet muß B. für alle diese hohen Gewinnste haften, er muß bares Geld für etwas hingeben, das ihm nichts nützt, das ist, er wirft sein Geld weg. Nun setze man, unser A. und B. spielten nur auf fünf und zwanzig Würfe, so setzt B. 12 Thaler 18 Mariengroschen, und kann damit über 166 Millionen gewinnen, was hat er mehr nöthig als 13 Thaler zu wagen, da ihm 166 Millionen so viel sind als eine unendliche Summe? Ist B. ein König, so kann es ihm vielleicht nicht einerley seyn, ob er 160 oder 170 Millionen gewinnt, er kann also schon etwas mehr wagen; man sieht also hieraus, daß für eine unbestimmte Anzahl von Würfen doch der Einsatz nicht einerley ist, und daß er sich nach B's Vermögen richtet. Wie man ferner zu einer genauern Bestimmung des Einsatzes von B. gelangen kann, wenn sein Vermögen gegeben ist, wird man mit Vergnügen an den angeführten Orten selbst nachlesen, da es mich hier zu weit führen würde, und außerdem nicht einmahl zu meinem Endzwecke gehört. Ueber dieß so sinnreich auch jene Auflösungen sind, so läßt sich doch, wie diese großen Männer wohl werden gewußt haben, zweifeln, ob dadurch jemahls die Aufgabe hinlänglich wird aufgelöst werden können, da der Entschluß, den ein gewisses Individuum B. faßt, sein Geld zu wagen, von hundert Umständen abhängen kann, die vielleicht nie der Rechnung unterworfen werden können *). Herr

*) Z. E. läßt es sich so gerade weg annehmen, daß zwey Personen, davon der eine 1000

d'Alembert ist einen andern Weg gegangen, den Grund des obigen Widerspruchs zu finden. Er glaubt, daß überhaupt die ganze Rechnung des Wahrscheinlichen auf noch nicht genug bestimmte Sätze gegründet sey *). Hr. Beguelin hat sich nach ihm bemühet **), diese Sätze, zumahl in so fern sie in diesem Spiel angewandt werden können, genauer zu bestimmen. Beyden Männern haben die obigen Auflösungen kein Genüge gethan, weil sie sich, wie sie sagen, auf Umstände gründen, um welche man sich

Groschen, der andere 1000 Ducaten im Vermögen hat, gleich leicht oder gleich ungern, der eine 10 Groschen, der andere 10 Ducaten entbehren?

*) Opuscules mathemat. T. II. p. 1. seq. und nachher umständlicher in den Melanges de Litterature T. V.

**) Mem. de l'acad. de Berlin de l'année 1767. p. 382.

in der allgemeinen Betrachtung nicht bekümmern kann und darf.

Ob Herrn d'Alembert's Zweifel gegründet sind, und Herrn Beguelin's Gedanken etwas zur Hebung derselben beytragen, will ich nicht entscheiden. Zweifel und Auflösung sind beyde mit dem Scharfsinn abgefaßt, der sich von solchen Männern erwarten läßt, und geben, wenn sie auch nichts bewiesen, dem Ansehen Bernoulli's und Cramer's entgegen gesetzt, genugsam zu erkennen, daß die Aufgabe ihre Schwierigkeiten habe, und zugleich eine Warnung für alle, die es wagen, darüber zu denken und zu schreiben, es wenigstens mit Bedacht zu thun.

Mir ist es vorgekommen, als ob man des obigen Widerspruchs wegen nicht Ursache hätte, die alten Grundregeln der

Rechnung des Wahrscheinlichen umzuschmelzen, und daß es sich allgemein nie wird thun lassen, so wenig als man der Friction wegen nöthig hat die Mechanik auf andere Sätze zu gründen, oder so wenig sich dieses, wegen der veränderlichen Gesetze des Reibens, wird thun lassen; sondern, daß man lieber diese Hindernisse bey der Anwendung besonders in Betrachtung zieht und übrigens die abstrakten Lehren ungeändert läßt. Nach dieser Meinung wären Bernoulli's und Cramer's Auflösungen hinlänglich, obgleich ihre angegebenen Zahlen vielleicht bey besondern Fällen, wie in der Astronomie geschieht, durch angebrachte Verbesserungen der Wahrheit immer näher und näher gebracht werden könnten.

Ehe ich mich weiter hierüber erkläre, will ich erst in einem leichten Exempel zeigen, was Hoffnung und Einsatz berechnen, eigentlich heißt, um jedermann in den Stand zu setzen über die Frage zu urtheilen. Jemand hält in einem Beutel zwey Loose, einen Treffer und eine Niete, diese erlaubt er zweyen Personen zu ziehen, und verspricht dem, welchem der Treffer zufällt, 10 Thaler; der andere bekommt nichts. Hier fällt in die Augen, daß die beyden Personen dem Manne, der sie ziehen läßt, schon vor der Ziehung Dank für etwas schuldig sind, weil sie beyde in Verlegenheit seyn würden, wenn der Mann sein Wort wieder zurück nähme. Indem sie der Mann ziehen läßt, so gibt er sein Recht auf die 10 Thaler auf, und überläßt es den beyden übrigen, also wird wohl auf jeden die Hälfte fallen, und jeder hat, wenn man unparteyisch schätzen will, Hoffnung auf 5 Thaler, welches das arithmetische Mittel zwischen der Hoffnung die 10 Thaler ganz zu erhalten, und der Furcht nichts zu bekommen, ist. Dieses ist es, wofür sie sich vor der Ziehung bedankten, und dessen Verlust sie würde geschmerzt haben, wenn nichts aus der Sache geworden wäre; dasjenige, was sie dem Manne, der es vor der Ziehung verliert, auch vor derselben durch den Einsatz wieder erstatten müssen, wenn er es nicht verschenken will. Ich sagte mit Fleiß, wenn man unparteyisch schätzen will, denn auch hier zeigt sich schon etwas, welches in dem Fall mit A. und B. nur mehr gehäuft, sich auf einmahl sehr groß zeigt, und den Leser überrascht. Ein Liederlicher, der etwa nur seinen Durst nach Wunsch einmahl stillen wollte, und gar kein Geld hätte, würde seinen Antheil an den 10 Thalern vor der Ziehung vielleicht für einen Thaler verkaufen, so wie im Gegentheil, wenn der Mann sich die 10 Thaler von den beyden Personen wollte bezahlen lassen, eben der nähmliche Durstige, wenn er auch 6 Thaler hätte, wohl schwerlich 3 für jene Hoffnung geben würde. Haben wir dieses Menschen wegen nöthig neue Regeln festzusetzen? oder handelt der Mann unbillig, der 10 Thaler von den zwey Personen verlangt? Die beyden Personen haben es nicht nöthig sich einzulassen, aber wenn sie sich einlassen, so müssen sie so viel bezahlen. Geht man weiter und nimmt 9 Nieten und einen Treffer, 10 Personen und einen einzigen Preis von 1000 Ducaten an: so gibt die Rechnung für den Werth eines Looses 100 Ducaten, die meisten Menschen würden keine 8 wagen, auch diejenigen nicht, die Geld genug hätten 8 Ducaten in einer gemeinen Lotterie zu wagen. Ist dieses der Fehler der Rechnung? Gewiß nicht, denn der Mann, der diese Lotterie hat, verliert ja seine 1000 Ducaten gewiß. Aus diesen wenigen Beyspielen wird man schon gesehen haben, daß diese Rechnung mit der Vermischungsregel völlig einerley ist; so wie ich nähmlich aus dem Werth einer Bouteille Wein, und der Menge Wasser, worunter ich ihn gieße, den Werth einer Bouteille dieses Gemisches finden kann: so kann ich aus dem Werth einer Summe Geldes, die ich gewiß bekomme, ihren Werth berechnen, wenn sich die Furcht sie zu verlieren unter jene Gewißheit mischt. Niemand hat es aber noch der Alligationsregel zur Last gelegt, wenn ein Kenner für eine Bouteille, worin ein Theil Champagner mit 3 Theilen Wasser vermischt ist, keinen halben Gulden geben wollte, da sie es doch nach dieser Regel hier zu Lande werth wäre.

Kurz, die Rechnung bestimmt den Werth meiner Hoffnung bey einem Spiel, ohne sich mit Klugheitsregeln abzugeben, die sich unendlich verändern, und die der Mensch, der sein Interesse kennt, vermittelst der natürlichen Mathematik sehr geschwind findet, sobald er nur den Bruch sieht, der das Maß seiner Hoffnung ist. Diesen zu finden überläßt er gern den Mathematikverständigen, weil es in manchen Fällen große und schwere Rechnungen erfordert, allein das andere behält er lieber für sich, weil er mit Recht voraussetzt, daß sein Interesse niemand besser kennt, als er selbst. Ich glaube, man kann allgemein sagen: In eine Lotterie, wo ich mit 100 Thaler Einsatz entweder eine Million gewinne oder nichts, und wobey der Entrepreneur sicher gestellt ist, wird kein vernünftiger Mann einsetzen, was auch der Bruch seyn mag, der seine Hoffnung mißt; also unabhängig von einer Rechnung des Wahrscheinlichen läßt sich noch ein Fall denken, da ein Spieler sagen kann: ich wage keine 16 Thaler, und wo der Entrepreneur mit Recht 100 verlangen kann, folglich wird die Verminderung jener Brüche, wovon Herr d'Alembert *) redet, unmöglich, oder sie muß auf Bernoulli's Art geschehen. Ferner setze man, unser A. und B. spielten nur auf einen Wurf, so muß B. die Hälfte des Preises bezahlen, den ihm A. verspricht; um einen Groschen so zu spielen geht wohl an, aber die meisten Menschen

*) Opusc. math. T. II. p. 12.

würden unweislich handeln um 100 Thaler so zu spielen, außer wenn ihr Vermögen sehr groß ist, und dieses führt am Ende wieder auf Bernoulli's Auflösung, die doch verbessert werden sollte. Ich erinnere dieses gegen den Herrn Beguelin, der bey einer seiner Auflösungen *), die gemeine Rechnung bey einem einzigen Wurf für billig, und nur in den übrigen für falsch hält. Wenn also derselbe Mensch bey einer großen und einerley Wahrscheinlichkeit sich bald einlassen will, und bald nicht will: so wird dieses auch bey einem geringeren Einsatz, aber größern Unwahrscheinlichkeit zu gewinnen, geschehen müssen.

Hier muß ich vor allen Dingen einem Einwurf begegnen, den man dem Herrn

*) a. a. O. §. XII. seq.

Bernoulli überall macht, und den ich noch nicht beantwortet gefunden habe. Man wirft ihm nähmlich vor, indem er die Schwierigkeit zu heben suche, ziehe er Umstände in Betrachtung, um welche man sich im Allgemeinen nicht bekümmern könne, als z. E. das Vermögen des B. Es ist wahr, im Allgemeinen kommen sie nicht in Betracht, aber bey dieser Schwierigkeit ist es nothwendig, denn diese entsteht ja bloß daher, daß ein Mann, der kein abstrakter B. mehr ist, um Rath gefragt wird; ein Mann, der ein Vermögen hat, und etwas nicht thun will, bloß, weil er dieses Vermögen hat. Sobald man sagt, vermöge der allgemeinen Auflösung müßte B. eine unendliche Summe setzen, da doch kein vernünftiger Mann 20 Thaler wagen würde: so ist es so gut erlaubt, den Grund dieses Widerspruchs in den besondern Umständen des Mannes zu suchen, der gefragt wird, als in der Rechnung selbst, wie Herr d'Alembert und Beguelin gethan haben. Herr Bernoulli will erklären, warum dieser Mann so sagen muß, der ja doch mit seinem Urtheil die ganze Schwierigkeit macht.

Dieses wird, glaube ich, hinlänglich seyn des Herrn Bernoulli Methode gegen diejenigen zu rechtfertigen, die ihr den oben erwähnten Vorwurf machen; ob aber die Art, wie er aus dem Vermögen der Personen den Einsatz für jeden gegebenen Fall findet, noch Zweifeln unterworfen sey, dieses zu untersuchen gehört nicht hierher, ist, so viel ich weiß, noch nicht bestritten worden, und wird von Herrn Bernoulli selbst nicht als ausgemacht und vollkommen angegeben;

denn wo er einen Hauptsatz, worauf sie sich gründet, vorträgt, sagt er ausdrücklich: *valde probabile est* lucrulum quodvis semper emolumentum afferre summae bonorum reciproce proportionale.

Herrn d'Alembert's Meinung ist von der Bernoullischen gänzlich verschieden, er sagt am oben angeführten Ort, die ganze Schwierigkeit entstehe daher, weil die Mathematiker annähmen, daß z. E. mit der erwähnten Münze O. hundert Mahl hintereinander zu werfen eben so möglich sey, als der Fall, wo die Würfe so hintereinander geschähen 1001110110O u. s. w., welches, wie er behauptet, nicht ist. Er beklagt sich in den Melanges de litterature mit Recht über diejenigen, die, um seine Meinung zu widerlegen, ihm weitläuftig durch Rechnungen gezeigt haben, daß nach den Regeln der Combinationen kein Fall wahrscheinlicher sey als der andere. Freylich dem Herrn d'Alembert solche Gründe entgegen setzen, kommt mir nicht viel besser vor, als einem gelehrten Vertheidiger der Dreyeinigkeit die Beweise der Multiplication entgegen setzen wollen; die Zweifel des erstern kommen, so wie die Ueberzeugung des letzteren, gewiß nicht daher, weil sie die weisen Widerlegungen ihrer Gegner noch nicht gewußt haben.

Unterdessen da Herr d'Alembert sich nur bloß auf die Erfahrung beruft, so haben seine Gegner immer ein Recht zu sagen, daß die Erfahrung nichts beweise, daß sie nicht lange genug angestellt worden seyen; daß sie aus ihrer Methode begreifen und erklären können, warum O. nicht oft hintereinander fallen könne, Herr d'Alembert aber nicht, wenn er bloß sagt, es sey physisch unmöglich. Daß O. nicht oft 6 Mahl hinter einander fallen könne, ist ein Erfahrungssatz, daß es aber auch 100 Mahl fallen könne, ist ein Satz, den uns, ohne die Erfahrung, ein Vernunftschluß lehrt. Man begreift, daß wenn unsere Erde so groß wäre als Jupiter, und überall so bevölkert, als Europa, manche Begebenheiten, Genies und Meisterstücke derselben, die wir jetzt als einzeln bewundern, weniger selten seyn würden, ungeachtet es auch alsdann einzelne geben würde. Wenn einige Personen auf einer kleinen unbewohnten Insel, auf dem ungeheuren stillen Meer verlassen säßen, aber doch segeln könnten, wenn sie nur einen Compaß und einen Quadranten hätten, würde man sie nicht verlachen, wenn sie auf der Insel dergleichen Instrumente suchen wollten, und wieviel würde man wohl gegen eins verwetten können, daß sie nichts von der Art finden würden, wenn sie auch noch so lange suchten; und gleichwohl hat sich der Fall zugetragen, man hat einen Quadranten und Compaß gesucht, und gefunden *); ja, weil dem Quadranten, den man fand, noch einige wesentliche Stücke fehlten, so suchte man weiter, und fand die Stücke in einem Kasten, der ans Ufer geworfen war, ich weiß nicht, ob es eben die waren, die zu dem nähmlichen Quadranten ehemahls gehört hatten, aber aus der Beschreibung sollte man eher das Gegentheil vermuthen.

*) Anson's Voyage round the world. Book. III. chap. III. in der kleinen Dubliner Ausgabe von 1748. p. 275.

Mir ist es begegnet, daß, da ich ein Dreygroschenstück, welches ich allemahl vorher sorgfältig in einem Becher schüttelte, 240 Mahl in die Höhe warf, und so auf den Boden des Zimmers fallen ließ, einmahl einerley Seite 9 Mahl hinter einander fiel, und zwar schon nach dem 101sten Wurf, da ich doch nach der gemeinen Rechnung 511 gegen 1 verwetten kann, daß jemand nicht 9 Mahl dieselbe Seite beym ersten Versuch wirft, und also in 512 Versuchen, das ist in 4608 Würfen erst einmahl erwartet werden kann. Ja, einmahl blieb es auf der scharfen Seite stehen, ohne umzufallen und ohne an einer Wand anzuliegen, es blieb nähmlich, indem es unter etwas durchlaufen wollte, in der Mitte stecken; ein Fall, der vielleicht unter hunderttausend Versuchen sich nicht ein einziges Mahl zuträgt, wenigstens an dem Ort nicht, wo ich die Versuche anstellte. Also die bloße Seltenheit jener Fälle, da eine Seite sehr oft hinter einander fällt, gibt uns kein Recht, sie aus der allgemeinen Betrachtung heraus zu lassen, ungeachtet die nähmliche Vernunft, die uns dieses lehrt, uns auch warnt, uns vor einem solchen Spiel zu hüthen, wo die Hoffnung, große Reichthümer zu bekommen, auf nichts Besserem, als auf solchen Begebenheiten, beruht.

Herr Beguelin hat sich bemühet, dasjenige mit einigen Gründen zu unterstützen, was Herr d'Alembert nur schlechthin behauptete, um die Mathematikverständigen auf diese neue Schwierigkeit aufmerksam zu machen. Die Frage ist nähmlich hierbey, wenn man die obige

Münze wirft, und 1 ist z. E. schon drey Mahl gefallen, ist es vor dem 4ten Wurf noch eben so wahrscheinlich, daß I. oder daß O. fällt, als es vor dem ersten Wurf war: oder ist es wahrscheinlicher, daß nun O. fallen wird, weil I. schon drey Mahl gefallen ist, und nun O. an die Reihe kommen muß, da es eben so viel Recht hat, wegen der völligen Gleichheit der Umstände. Folgende Gründe sind für die völlige Gleichheit der Wahrscheinlichkeit bey jedem einzelnen Wurf: Zwischen den einzelnen Würfen läßt sich keine Verbindung denken, jeder Wurf ist ein erster von einer neuen Reihe, und seine Verbindung mit den vorhergehenden ist nur in unserer Vorstellung; hätte man den nächsten Wurf 100 Jahre hernach und tausend Meilen von dem ersten Ort entfernt gethan: so würde die nähmliche Verbindung unter ihnen gewesen seyn, eine Secunde oder 100 Jahre sind hier eine gleich starke Zwischenwand. Daß O. mehr Recht bekommt zu fallen, wenn I. schon etliche Mahl gefallen ist, ist nur eine Erlärung der falschen Vorstellung von einer Verbindung und kein Beweis für dieselbe. Beyde Seiten haben allerdings, wenn man so reden darf, ein gleiches Recht zu fallen, also sollte die Münze billig auf der scharfen Seite stehen bleiben; da dieses aber nicht geschehen kann, so muß eine Seite oben hin zu liegen kommen und die andere wird ausgeschlossen, unerachtet nun beyde Anspruch machen, so geschieht doch beyden gleichsam ein Genüge, wenn nur eine von beyden fällt, welche, das ist gleichviel. Ich weiß nur, daß eine fallen muß, daß aber die andere endlich auch kommen muß, davon steckt nichts im dem Begriff, und ich zweifle fast, ob jemahls mit einigem Schein von Wahrheit etwas zur Bestätigung des letztern wird gesagt werden können.

Gegen dieses wendet Herr Beguelin nur im Vorbeygehen ein, die Natur bringe vermöge ihrer beständigen Wirksamkeit immer Veränderungen hervor, und gehe von einem auf das andere über. Hiergegen, glaube ich, hat man nicht Ursache etwas Weiteres zu sagen, als daß es zu wünschen wäre, daß solche Beweise ganz unterlassen würden, und wenigstens aus einer Wissenschaft wegblieben, wie diese, zu welcher diese Aufgabe gehört, und wo der Verstand überzeugt werden soll. Wenn eine gewisse Verhältniß, die unter den verschiedenen Fällen Statt findet, die Abwechselungen sehr wahrscheinlich macht, so werden sie kommen, und wenn auch die Natur einmahl allen Geschmack an der Mannigfaltigkeit verlieren sollte. Dieses sollte auch kein Beweis seyn, aber im §. IX. kommt Herr Beguelin auf einen, von dem er glaubt, daß er alle Beweise für die Gleichheit der Wahrscheinlichkeit, so einleuchtend sie auch scheinen mögen, schlechterdings über den Haufen werfe.

Man setze, sagt er, ein Mann, der auch A. heißen mag, habe eine solche Lotterie, wie ich schon oben eine angenommen habe, mit einem Treffer und einer Niete, oder mit gleichviel Treffern und Nieten; hieraus lasse er einen andern B. ziehen, und verspreche ihm allemahl, so oft er einen Treffer zieht, das Doppelte seines Einsatzes, (es versteht sich von selbst, daß nach jedem Zug das gezogene Loos wieder zu den übrigen kommt): so sind nach der gewöhnlichen Rechnung die Bedingungen billig. Ferner nehme man an, B. setze erst einen halben Thaler; um sich seines Schadens wieder zu erhohlen, wenn er verliert, so setze er beym zweyten Zug 1 Thaler, beym dritten 2, beym vierten 4, beym n^{ten} 2^{n-2} u. s. w.: so ist klar, daß A. früh oder spät verlieren muß; denn wenn B. ein einziges Mahl gewinnt, so bekommt er Alles, was er vorher verloren hat, mit Profit wieder, und A. verliert Alles, was er gewonnen hatte, und darüber. Wo ist nun diese Gleichheit, die doch nach der Rechnung wirklich da seyn soll? Denn wäre es allemahl bey jedem Zug eben so wahrscheinlich, fährt Hr. Beguelin fort, daß B. eine Niete, als daß er einen Treffer zieht: so muß es dem A. einerley seyn was B. setzt, oder zu welcher Zeit er aufhört. Ich muß bekennen, dieses Argument hat mich eben so wenig überzeugt als das, welches aus der Mannigfaltigkeitsliebe der Natur hergehohlt wurde. Eben deßwegen, kann man antworten, weil es gleich wahrscheinlich ist, daß A. verliert, und daß er nicht verliert, so soll er nicht so unbesonnen seyn, und auf ein solches Spiel so viel setzen, daß er, wenn er verliert, Alles verliert, was er vorher gewonnen hatte, welches hier Stillschweigens als das Vermögen des A. angenommen wird. Soll denn B. so lange Fehler ziehen, bis er müde wird, oder bis er kein Geld mehr hat? Nimmt sich B. nur die Geduld, zwanzig Züge zu thun, so läßt sich 1048575 gegen I. verwetten, daß er einmahl einen Treffer ziehen wird.

mit dessen Gewinnst er sich wegschleichen kann. Dieses lehrt die Rechnung, welche doch eine Gleichheit der Wahrscheinlichkeit bey jedem Zug voraussetzt; folglich kann der Grund, warum A. unbesonnen handelt, sich in ein solches Spiel einzulassen, nicht in einem solchen Schwinden der Wahrscheinlichkeit liegen. Spielt A. nur auf gleiche Einsätze, so sind die Umstände völlig gleich und auch für den A. zuträglich; ein anderer Beweis, daß das Widersinnige bloß in dem unüberlegten Geldsetzen des A, und nicht in etwas Anderem lag.

Alle diese Beweise, welche die Gleichheit der Wahrscheinlichkeik bey jedem einzelnen Wurf bekräftigen, könnten noch mehr aus einander gesetzt, und überhaupt vermehrt werden, ich will aber statt dessen nur noch eine Frage thun: Wenn ich die obige Münze 20 Mahl hinter einander werfen will, so sind überhaupt 1048576 Fälle möglich, diese könnte man auf eben so viele Zettel schreiben, wovon z. E. einer so anfangen würde: *** 10110001010 *), man müßte ein Zeichen an ein Ende machen, um allemahl den Anfang einer solchen Reihe von dem Ende gehörig zu unterscheiden. Diese Million Zettel schüttele man in einem Glücksrad, nun frage ich, ist es einerley ob A. zum B. sagt: hier werfe die Münze, fällt 1 im ersten Wurf, so gebe ich dir 1 Thaler u. s. w. wie wir oben gesehen haben, oder ob er sagt: ziehe einen Zettel aus dem Glücksrad, steht 1 zu Anfang der Reihe, so

*) Ich rechne den Anfang von der rechten Hand wegen des Umstandes mit der Leibnitzischen Dyadik.

gebe ich dir einen Thaler, kommt es erst in der zweyten Stelle, oder fängt sich die Reihe so an: ⋅⋅⋅ 10, 2 Thaler, nimmt es erst die dritte Stelle ein, oder fängt die Reihe so an: ⋅⋅⋅ 100, 4 Thaler u. s. w. Ist es gleichviel ob B. das eine oder das andere thut, so ist die vollkommene Gleichheit der Fälle klar, und B. kann den Zettel ziehen, wo 1 neunzehn Mahl 0 vor sich hat, so gut als irgend einen andern.

Ist aber ein Unterschied in den beyden Arten des Spiels, so bleibt die nähmliche Schwierigkeit, die man heben wollte, doch noch beym letztern, und sollte sich ja B. eher entschließen ein Zettel aus dem Glücksrad zu nehmen, so könnte dieses von einer falschen Vorstellung herkommen. Die Schwierigkeit bey dem letztern Spiel zu heben ist wohl nicht leicht ein anderer Weg möglich, als der Bernoullische.

Herr Beguelin glaubt ferner, daß nachdem man t Mahl 0 geworfen, so könne man t+1 gegen 1 verwetten, daß das nächste Mahl 1 fallen werde. Auf diese Art sollte man fast schließen können, daß die beständigen Abwechselungen, als z. E. der Fall ... 10101010, oder doch die Fälle mit vielen Abwechselungen, die wahrscheinlichsten wären, sie sind es aber nicht; nach der gewöhnlichen Rechnung ist dieser Fall auch einzig *), und ob ich auf diesen Fall oder auf ... 00000 halte, ist einerley. Die Erfahrung wird einen leicht davon überführen, der etwa sagen

*) Ich darf wohl nicht beweisen, daß überhaupt jeder Fall einzig ist, und daß, wenn alle 20 Würfe vorgeschrieben sind, eben so wenig Wahrscheinlichkeit für den einen als für den andern ist. Ich nenne nur diese so, weil man gewöhnlich die unsymmetrischen Fälle, wo 1 und 0 sehr unregelmäßig vermischt sind, unter eine Classe zu zählen pflegt.

wollte: man könne dieses nicht mit Rechnungen beweisen, welche die Gegner eben für unrichtig erklären. Damit dieses desto leichter werde zu übersehen, so habe ich eine Tafel für die Menge der Abwechselungen berechnet in dem Fall da A. und B. auf 20 Würfe spielen. Die Gründe der Rechnung lassen sich hier nicht beybringen. Es sind nähmlich allemahl nur 2 Fälle möglich, wo in n Würfen einerley Seite ohne Abwechselung fällt, ferner:

$2\,\frac{(n-1)}{1}$ Fälle mit einer Abwechselung

$2\left(\frac{(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2}\right)$ mit 2 Abwechselungen

$2\cdot\left(\frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\right)$ mit 3 und

$2\cdot\left(\frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdots(n-m)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}\right)$

mit m Abwechselungen.

Die Tafel für 20 Würfe ist folgende.

Menge der Abwechs.	mögliche Fälle	Menge der Abwechs.
0	2	19
1	38	18
2	342	17
3	1938	16
4	7752	15
5	23256	14
6	54264	13
7	100776	12
8	151164	11
9	184756	10

Hieraus sieht man, daß die Fälle, wo 1 und 0 sehr gemischt sind, eben so rar sind, als die, wo oft einerley hinter einander fällt; so ist der Fall mit 5 Abwechselungen eben so gemein, als der mit 14, dieses erklärt zugleich die Einrichtung der Tafel. Ich habe die obigen 240 Würfe hauptsächlich auch zu diesem Endzwecke gethan, das ist, ich habe 12 Versuche mit 20 Würfen angestellt, und folgende Abwechselungen gefunden:

einmahl	5	Abwechselungen
dreymahl	6	———————
einmahl	7	———————
zweymahl	8	———————
einmahl	9	———————
einmahl	10	———————
einmahl	11	———————
zweymahl	12	———————

Bey dem ersten mit den 5 Abwechselungen, der aber in der Ordnung, worin ich sie anstellte, der 6te war, fiel die eine Seite 9 Mahl hinter einander, da doch überhaupt nur 13603 Fälle unter den 1048576 möglich sind, worin 9 vorkommt, und in 30 derselben kommt es 2 Mahl vor.

Auf diese Art wird sich erkennen lassen, warum die Münze so oft abwechselt, ohne eine mystische und unbegreifliche Verbindung zwischen den einzelnen Würfen anzunehmen. Ich läugne nicht, daß sich auf Herrn Beguelin's Art Formeln finden lassen, die etwas geben, was in der Ausübung, zumahl wenn nicht lange gespielt wird, oft gebraucht werden kann, aber der Grund muß aus jenen Combinationen hergehohlt werden.

Ich sehe also nicht, daß man Ursache hat des Herrn Daniel Bernoulli Methode zu verwerfen, und derselben neue unterzuschieben. In der allgemeinen Betrachtung muß man der vollkommenen Gleichheit wegen, das Vermögen der Spielenden unendlich setzen; und alsdann geben sich keine Widersprüche, in der angewandten Lehre gibt es kein unendliches Vermögen, dieses schränkt die allgemeinen Schlüsse ein. Auf diese Art wäre diese Aufgabe wegen der Abweichung von der Rechnung, die sich bey ihrer Anwendung hervorthut, nicht seltsamer, als viele andere in der angewandten Mathematik.