Consonanz und Tonleiter,

vom mathematisch-physikalischen Standpunkte betrachtet.

Musice est exercitium arithmeticae occultum
nescientis se numerare animi.
Leibnitz.

Der mächtige, fördernde Einfluß, den in neuerer Zeit die Mathematik auf Astronomie, Physik und Mechanik in allen ihren unzähligen practischen Anwendungen gefunden hat, ist vielfach Ursache gewesen, daß man dieselbe auch auf Wissenschaften und Künste ausdehnte, die ihr, wenigstens auf den ersten Anblick, fremder zu sein schienen. Hat man doch die Idee des Schönen, wie sie sich in der Natur und in Kunstproducten ausspricht, unter mathematische Formeln, und vielfach mit Glück, zu bringen gesucht. Nirgends aber erscheint es berechtigter, das Schöne durch die Sprache der Mathematik bestimmen zu wollen, als in der Musik, da sich hier durch das Gesetz der Schwingungszahlen eine sichere Handhabe darbietet. Wie die Anwendung der Zahl auf die Geometrie ein Mittel geworden ist, unzählige Curven gleichsam a priori zu bestimmen und ihre Gestalt und Eigenschaften zu entwickeln, ohne daß die Anschauung derselben durch das Auge erforderlich wäre, ebenso, zweifele ich nicht, wird es gelingen, aus der Zahl in Verbindung mit den Schwingungsgesetzen unter Voraussetzung von wenigen ganz einfachen ästhetischen Grundsätzen Melodien zu construiren, ohne das Ohr um Rath zu fragen. Man hat mir eingewendet, daß dadurch das Charakteristische, Geistige der Musik geläugnet und dem Verstande ein unberechtigtes Uebergewicht über das Gefühl zugesprochen werde, daß es dem letzteren überlassen bleiben müsse, die analogen Beziehungen der Tonverbindungen unter sich zu der Welt der Empfindungen und Vorstellungen zu bestimmen: — aber da die Töne dem rein Körperlichen, die Ideen und Gefühle, so weit sie bewußter Natur sind, dem Geistigen angehören, so sind diese Analogien entweder ganz einfacher Art und lassen sich dann auch verstandesmäßig fassen, oder aber sie sind so vager Natur, daß der geistige Reichthum der Musik oft in ihrer Vieldeutigkeit zu bestehen scheint. Wenn Beethoven eine Symphonie mit dem verminderten Septimenaccord c. e. g. b. beginnen läßt, so kann auch die Akustik nachweisen, daß ein solcher Anfang eigentlich kein Anfang ist; es wird daher dem Hörer zugemuthet, etwas Vorhergegangenes zu supponiren oder wenn man will aus dem Folgenden zu bestimmen, nicht anders als wenn Göthe seine Elegie „Herrmann und Dorothea" mit den Worten anfängt:

„Also das wäre Verbrechen, daß einst Properz mich begeistert!"

Solche einfachere Analogien wollen wir gerne zugestehen, aber sie würden die mathematische Gesetzmäßigkeit der Melodie sowohl wie der Harmonie nicht ausschließen, sondern nur von Einfluß bei der Wahl aus dem gesetzmäßig Möglichen sein.

Daß übrigens die theoretisch gebildeten Musiker wenigstens die mathematische Begründung der Harmonielehre für möglich und wünschenswerth halten, zeigen die meisten diesen Gegenstand behandelnden Lehrbücher, in denen gewöhnlich ein akustisches Anfangscapitel über Schwingungszahlen voraufgeht, ohne freilich in irgend welcher Beziehung zum Folgenden zu stehen; ja einzelne Harmonielehrer sprechen es offen aus, daß in dieser Beziehung eine Lücke in der musikalischen Litteratur sich finde.*) In neuerer Zeit hat Hauptmann in seiner Schrift: „Zur Natur der Harmonik und Metrik, Leipzig 1853" den Versuch gemacht, jenes akustische Anfangscapitel in einen wesentlichen Zusammenhang mit der Harmonielehre zu bringen, aber auch er sieht sich nach einem ähnlichen manches Unbegründete enthaltenden Eingange genöthigt, die Bezeichnung durch die Zahl für ein interessantes Combinationsspiel zu erklären, das für die Sache keinen näheren Aufschluß biete und den Begriff nicht erleichtern, ihn vielmehr nur verhüllt darstellen könne. — Die folgende kleine Abhandlung, die den Anfang einer mathematisch begründeten Harmonielehre bilden soll, ist nun meinerseits ein Versuch, jenen Zahlenanfang wieder aufzunehmen.

Aus den Lehren der Physik ist bekannt, daß jeder Schall durch Schwingungen des tönenden Körpers hervorgebracht, durch Schwingungen des leitenden Körpers, gewöhnlich der Luft, fortgepflanzt wird. Sind diese Schwingungen einander gleich und folgen dieselben regelmäßig und zwar so schnell auf einander, daß man sie nicht mehr einzeln unterscheiden kann, so wird der Gesammteindruck ein musikalischer Ton genannt. Die Schwingungen der Luft bestehen in aufeinanderfolgenden Verdichtungen und Verdünnungen derselben, und man nennt die Entfernung von einer Verdichtung zur nächsten die Wellenlänge des Tones. Diese Wellenlänge steht im umgekehrten Verhältniß zur Anzahl der Schwingungen in einem bestimmten Zeitraum, so daß das Product von Wellenlänge und Schwingungszahl eine constante Größe, nämlich den Weg ausmacht, den der Schall in dem gleich großen Zeitraum zurücklegt. Stehen die Schwingungszahlen in geometrischer Progression, so nennen wir die Töne gleich weit von einander entfernt. Gehen wir nun von einem Grundtone C aus, so heißt der Ton, dessen Wellenlänge halb so groß, dessen Schwingungszahl also doppelt so groß ist, die Octav von C. Der Ton, dessen Wellenlänge $^2/_3$ des Grundtones beträgt, der also während 2 Schwingungen desselben deren 3 macht, heißt Quint. Ebenso ist das Verhältniß der Schwingungszahl des Grundtones zu der der Quart 3 : 4, zur großen Sert 3 : 5, zur großen Terz 4 : 5, zur kleinen Terz 5 : 6, zur Secunde 8 : 9 u. s. w. Nehmen wir z. B. 120 Schwingungen für C in einem gewissen Zeitraum an, so macht deren in gleicher Zeit: D $^9/_8 \cdot 120 = 135$ Es $^6/_5 \cdot 120 = 144$ E $^5/_4 \cdot 120 = 150$ F $^4/_3 \cdot 120 = 160$ G $^3/_2 \cdot 120 = 180$ A $^5/_3 \cdot 120 = 200$ c $2 \cdot 120 = 240$.

Je einfacher das Verhältniß ist, in welchem die Schwingungszahlen zweier Töne zu einander stehen, desto consonirender ist das Intervall. So ist die größte Consonanz der Gleichklang (1 : 1), dann folgt die Octav (1 : 2), die Quint (2 : 3), die Quart (3 : 4), die Sert (3 : 5), die große Terz (4 : 5), die kleine Terz (5 : 6) u. s. w. So unzweifelhaft diese Thatsache ist, so ist sie doch bisher genügend nicht erklärt worden. Häufig sucht man die Consonanz in der natürlichen Zahlenreihe:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
C	c	g	$\overline{c}$	$\overline{e}$	$\overline{g}$	$\overline{b}$	$\overline{\overline{c}}$	$\overline{\overline{d}}$	$\overline{\overline{e}}$	$\overline{\overline{f}}$	$\overline{\overline{g}}$	$\overline{\overline{a}}$	$\overline{\overline{b}}$	$\overline{\overline{h}}$	$\overline{\overline{\overline{c}}}$

Aber abgesehen davon, daß die Töne hierbei 4 Octaven durchlaufen ($16 = 2^4$) und einige sich

*) Vergleiche Richter, Lehrbuch der Harmonie, Leipzig 57, Vorrede.

häufig, andere gar nicht wiederholen, werden weder alle Töne unserer chromatischen Tonleiter dadurch ausgedrückt, noch stimmen die Zahlen 7, 11, 13, 14 genau für die Töne, deren Schwingungsverhältnisse sie angeben sollen. — Eben so wenig hat Hauptmann Recht, wenn er glaubt, daß die harmonischen Bestimmungen aus den Verdoppelungen, Potenzen und wechselseitigen Producten der Zahlen 1, 3 und 5 hervorgehen. Zuerst nämlich, wie H. selbst einräumt, würde man auf diese Weise nie zur Quart, zur Sext und kleinen Terz gelangen, und dann, was wäre zur Erklärung des eigentlichen Wesens der Consonanz gewonnen? Wo möglich noch weniger, als durch die vorige Erklärung.

In der Akustik wird jenes Gesetz der Consonanz gewöhnlich als eine Art von Axiom hingestellt, das durch die Erfahrung genugsam bestätigt keiner Begründung bedarf; wir glauben jedoch, dasselbe auf die folgende Art erklären zu dürfen. In der Fig. I möge die feiner ausgezogene Curve einen beliebigen Ton, etwa C, die oberhalb der Abscissenlinie gelegenen Theile derselben die Verdichtungen, die unteren die Verdünnungen der Luft darstellen, während die senkrechte Entfernung der Curve von der Abscissenachse die Intensität der Verdichtung oder Verdünnung bedeute. Die zweite punktirte Linie bezeichne dasselbe noch einmal intonirte C. Bekannt ist nun, daß wenn zwei Wellensysteme interferiren, an der Stelle, wo Berg und Berg sich schneiden, ein Wellenberg entsteht, der der Summe jener beiden gleich ist, und ebenso zwei sich schneidende Wellenthäler ein Thal gleich der Summe beider Thäler hervorbringen. Treffen Wellenberg und Wellenthal zusammen, so entsteht ein Berg oder Thal, jenachdem jener größer oder kleiner als dieses war, und zwar giebt die Differenz beider das Maß der Höhe oder Tiefe ab. Sind Wellenberg und Wellenthal gleich, so vernichten sie sich gegenseitig, und es entsteht eine Ebene. Addirt man nun in unserer Figur die Ordinaten beider Curven, wobei die unter der Linie gelegenen negativ zu nehmen sind, und verbindet die Endpunkte durch eine neue Curve, so erhält man ein Bild des Zusammenklanges beider Töne. Statt der ganzen Summe der Ordinaten haben wir der Bequemlichkeit der Zeichnung wegen nur die halbe Summe genommen, so daß die resultirende Curve stets die Mitte zwischen den erzeugenden Curven hält und durch ihre Durchschnittspunkte hindurchgeht. Es entspricht diese Halbirung keiner Veränderung in der Tonhöhe, sondern nur einer Verminderung der Intensität. Die neue Curve ist vollkommen regelmäßig; der Wellenberg ist dem Wellenthale gleich, und beide bestehen aus gleichen Hälften. — Fig. II giebt ein Bild des Intervalles der Octav, Fig. III der Quint, Fig. IV der Sext. Der Grundton ist feiner ausgezogen, der höhere Ton punktirt; den Zusammenklang zeigt die stärkere Linie, und es ist wie vorher die Summe der Ordinaten halbirt. Bezeichnen wir nun der Reihe nach den ersten Berg mit 1, das folgende Thal mit 2, den folgenden Berg mit 3 u. s. w., so entsprechen sich in dem Zusammenklang der Octav Berg 1 und Thal 4, Thal 2 und Berg 3, so daß nach zwei vollständigen Schwingungen die Periode wiederkehrt. Bei der Quint entsprechen sich 1 und 6, 2 und 5, 3 und 4, bei der Sext 1 und 10, 2 und 9, 3 und 8, 4 und 7, 5 und 6. Man sieht, daß die Anzahl der in der Periode enthaltenen vollständigen Schwingungen durch die höchste Zahl in dem einfachsten Verhältniß der Schwingungszahlen der Töne bezeichnet wird, und es liegt daher nahe, diese Zahl als das Maß der Consonanz anzusehen.*)

---

*) Der durch Fig. I—IV zur Anschauung gebrachte Satz würde sich folgendermaßen beweisen lassen: Schon Newton hat die Geschwindigkei v eines vibrirenden Theilchens dargestellt durch die Formel

$$v = a\cos(nt + \tau)$$

wo n Anzahl der Schwingungen in der Zeit 2π, a eine constante Längengröße, deren Länge im Verhältniß zur Intensität des Tones steht, t die veränderliche und τ eine constante Zeitgröße bedeutet, die sich nur auf den bestimmten Anfangspunkt

Aus der Art und Weise, wie sich die einzelnen Theile der Periode entsprechen, folgt, daß sich die resultirende Curve innerhalb derselben stets in zwei Hälften wird theilen lassen, die ihrer Gestalt nach gleich, durch ihre verschiedene Lage zur Abscissenlinie einen gleich intensiven aber entgegengesetzten Schwingungszustand des Zusammenklanges ausdrücken. (In Figur I sind solche Hälften Aa und aB, in Fig. II Ab und bB, in Fig. III Ac und cB, in Fig. IV Af und fB.) — Besteht die Periode aus so vielen einzelnen Schwingungen, daß das Ohr nicht mehr sie alle gleichzeitig zu fassen und die volle Regelmäßigkeit in der Wiederkehr derselben zu erkennen im Stande ist, so muß natürlich das Intervall dissonirend wirken. Es ist ein solches Intervall einem Gebäude zu vergleichen, dessen entsprechende Theile von der Mitte aus gerechnet sich vollständig gleichen, das aber bei steter Verschiedenheit der auf einander folgenden Theile so ungünstig gelegen ist, daß das Auge das Ganze nicht auf einmal überschauen kann, und das daher den Eindruck der Unregelmäßigkeit machen wird.

Wenn wir das Intervall 27 : 40 in der oben angegebenen Weise zeichnen, so wird die Periode, wie vorher bewiesen, 40 doppelte, d. h. aus Berg und Thal bestehende Schwingungen enthalten, und das Intervall daher stark dissonirend scheinen. In jeder dieser Perioden würde aber nach 3 doppelten Schwingungen der frühere Zustand zwar nicht ganz genau aber doch nur sehr wenig verändert wiederkehren, und da unser Ohr nicht scharf genug ist, diesen sehr kleinen Unterschied aufzufassen, so halten wir die Periode schon nach 3 Schwingungen

---

bezieht, von wo an t zu rechnen ist, und mithin auf die Gestalt der Curve keinen Einfluß ausüben kann. Da aber, wie Euler nachgewiesen hat, die gleichzeitigen Geschwindigkeiten und Verdichtungen eines Lufttheilchens stets dasselbe Verhältniß zu einander haben, so ist es erlaubt, in der obigen Formel durch v den Grad der Verdichtung und Verdünnung in einem bestimmten Zeittheilchen auszubrücken. Interferiren nun zwei Töne, von denen der eine n, der andere m Schwingungen in einem bestimmten Zeitraume macht, und bezeichnen wir ihre Intensität durch a und b, die Entfernung vom Schwingungsanfang bis zu der Zeit, von wo an t zu rechnen ist, durch τ und δ, so haben wir für die Verdichtung oder Verdünnung die Formel

$$v = a \cos (nt + \tau) + b \cos (mt + \delta)$$

Die Anzahl der Wellenberge und Wellenthäler in jeder Periode der resultirenden Curve wird nun offenbar durch die Anzahl der Maxima und Minima für v während der Periode 2π ausgedrückt, die wir auf die bekannte Weise durch Differentialrechnung bestimmen wollen. Es ist

$$\frac{dv}{dt} = - an \sin nt - bm \sin mt. \qquad \frac{d^2v}{dt^2} = - an^2 \cos nt - bm^2 \cos mt.$$

Da der erste Differentialquotient nicht unendlich sein kann, so haben wir ihn nur = o zu setzen und nachzuweisen, daß der zweite Differialquotient nicht gleichzeitig verschwindet.

$$- an \sin nt - bm \sin mt = o \text{ (I)}$$

Wäre nun auch der 2te Differentialquotient = o, so würde aus der Verbindung beider Gleichungen folgen:

$$\tan nt = \frac{n}{m} \tan mt,$$

was nur für t = o wahr sein kann. Aber für t = o verschwindet auch der 3te Differentialquotient

$$\frac{d^3v}{dt^3} = an^3 \sin nt + am^3 \sin mt \text{ und der 4te } \frac{d^4v}{dt^4} = an^4 \cos nt + bm^4 \cos mt$$

wird eine von Null verschiedene Größe. Daraus folgt, daß für jeden Werth von t in der Gleichung I v ein Maximum oder Minimum sein muß. In der Gleichung I sei nun $n = rp$, $m = sp$, so daß r und s relative Primzahlen, p also das größte Maß von n und m ist, so läßt sich durch wiederholte Anwendung der trigonometrischen Formel:

$$\sin (n + 1) \alpha = 2 \sin n \alpha \cos \alpha - \sin (n - 1) \alpha$$

und durch Division der Gleichung mit sin pt dieselbe auf eine Gleichung für cos pt vom $(r - 1)$ Grade, resp. $(s - 1)$ Grade zurückführen, je nachdem r oder s größer ist, worin cos pt also auch sin pt $(r - 1)$ resp. $(s - 1)$ Werthe haben wird. Daß die Gleichung durch sin pt theilbar war, drückt aus, daß ein fernerer Werth sin pt = o verschwunden ist, und wenn wir nun bedenken, daß nach gehöriger Berücksichtigung der Vorzeichen in der Periode 2π jeder sinus zwei verschiedenen Winkeln angehört, so finden wir leicht, daß die Anzahl der Maxima und Minima in der Periode zwei mal so groß als die größte Verhältnißzahl ist, und diese Verhältnißzahl daher die Anzahl der vollständigen aus Berg und Thal bestehenden Schwingungen in der Periode angiebt.

für geschlossen und werden daher das Intervall 27 : 40 als Quint, d. h. als 2 : 3 auffassen. Wäre unser Ohr vollkommen scharf, so würde die geringste Unreinheit im Stande sein, eine Consonanz in die stärkste Dissonanz zu verwandeln, und zwar um so mehr, je weniger das Intervall verändert würde; ja eine Consonanz würde höchstens theoretisch denkbar sein, da ein bestimmtes Intervall vollkommen genau herzustellen natürlich unmöglich ist. — Die sogenannte Temperatur der Töne und die Möglichkeit der enharmonischen Verwechselungen beruht ebenfalls auf diesem Umstande. Ueber die Frage, wie weit man die Unterschiede naheliegender Verhältnisse vernachlässigen darf, kann natürlich nur die Erfahrung entscheiden; in dem obigen Falle war das Intervall um das Komma 80 : 81 erhöht. ($^{40}/_{27} \times {}^{81}/_{80} = {}^{3}/_{2}$.)

Wir können also das im Vorigen über die Consonanz Gesagte dahin zusammenfassen:

Um die Consonanz eines Verhältnisses zu prüfen muß man die Schwingungszahlen der Töne auf das kleinste Verhältniß zurückführen. Je kleiner nun die größte Zahl dieses Verhältnisses ist, desto größer ist die Consonanz. Bei Verhältnissen, die durch größere Zahlen ausgedrückt werden, muß man jedoch zugleich untersuchen, ob ein anderes durch kleinere Zahlen ausgedrücktes Verhältniß existirt, das von dem gegebenen nur wenig abweicht, und darf dann diese Verhältnisse vertauschen. (Am leichtesten geschieht diese Prüfung durch Kettenbrüche.)

Aus unserer Erklärung der Consonanz folgt ferner, daß abgesehen vom Einklang dieser Begriff ein durchaus relativer ist. Die regelmäßige Wiederkehr derselben Schwingungszustände in symmetrischer Reihenfolge ist immer im Zusammenklange von zwei Tönen vorhanden, aber das Intervall ist um so dissonirender, je größer die Anzahl der einzelnen in solcher Reihenfolge wiederkehrenden unter sich verschiedenen Schwingungen ist. Consonanzen und Dissonanzen sind also nicht, wie die Musiker gewöhnlich annehmen, qualitativ, sondern quantitativ verschieden.

Wenden wir uns jetzt zur Construction der Tonleiter. Innerhalb der Octave liegen natürlich unendlich viele Töne, wie es zwischen den Verhältnissen 1 : 1 und 1 : 2 unzählige andere giebt, und es wird daher im Folgenden zunächst nachzuweisen sein, mit welcher Berechtigung wir aus dieser unendlichen Anzahl der Intervalle gerade unsere jetzt gebräuchlichen herausgehoben haben. — Es ist klar, daß bei der Interpolation von Verhältnissen zwischen 1 : 1 und 1 : 2 zunächst dasjenige Verhältniß zu berücksichtigen sein wird, welches ihm an Einfachheit am nächsten steht, nämlich 2 : 3 (Quint). Wollten wir jedoch fortfahren, nach Maßgabe ihrer Consonanz zwischen diese Verhältnisse andere einzuschieben, dann würde keine Grenze des Aufhörens abzusehen sein, und was die Hauptsache ist, die eingeschalteten Zahlen würden in immer verwickeltere Verhältnisse zu einander treten. Sollen aber diese dasselbe einfache Verhältniß zu einander bewahren, soll also jeder aufgenommene Ton wieder seine Quint haben, so ist, wenn wir der Einfachheit wegen statt der Verhältnisse ihre Exponenten setzen, die Aufgabe die, zwischen 1, $^{3}/_{2}$, 2 Zahlen zu interpoliren, die mit jenen eine geometrische Progression bilden. Derjenige Exponent wird natürlich in der Progression der beste sein, durch den Glieder in dieselbe eingeführt werden, die den Zahlen der consonirenden Töne, d. h. den einfachsten Brüchen an Werth möglichst nahe kommen. Mit Hülfe der Logarithmen und der Kettenbrüche können wir nun in folgender Weise die verschiedenen Möglichkeiten der Interpolation bestimmen:

$$\log {}^3\!/_2 = 0{,}1760913$$
$$\log 2 = 0{,}3010300$$
$$\frac{\log {}^3\!/_2}{\log 2} = \frac{1760930}{3010300}$$

Da nun, wenn die Zahlen in geometrischer Progression stehen, ihre Logarithmen eine arithmetische bilden, so giebt offenbar der Nenner jenes Bruchs die Anzahl der Intervalle an, in welche die Octave getheilt werden müßte, und der Zähler zeigt an, das wie vielte Glied in der Reihe die Quint sein würde, wenn man die Töne eben so rein halten wollte, als die Logarithmen genau sind. Nun aber überhört das Ohr erfahrungsmäßig eine Ungenauigkeit von einem gewöhnlichen Komma; wir dürfen also für jenen Bruch durch Hülfe der Kettenbrüche andere durch viel kleinere Zahlen ausgedrückte suchen, deren Werth jenem nur annähernd gleich ist.

$$\frac{1760913}{3010300} = {}^1\!/_1 + {}^1\!/_1 + {}^1\!/_2 + {}^1\!/_2 + {}^1\!/_3 \text{ u. s. w.}$$

Die Annäherungswerthe sind der Reihe nach 1, ${}^1\!/_2$, ${}^3\!/_5$, ${}^7\!/_{12}$, ${}^{24}\!/_{41}$ u. s. w. Den ersten Anspruch auf einige Genauigkeit hat hier erst der 3te, der bedeutet, wenn man die ganze Octav in 5 Theile theilt, würde die Quint drei von ihnen umfassen; der 4te zeigt die Quint als siebenten Ton einer 12stufigen, der 5te als 24ten einer 41stufigen Tonleiter. — Nimmt man, wie vorher die Quint, jetzt das Verhältniß der Quart zu Hülfe so erhält man folgende Näherungswerthe:

	${}^1\!/_2$,	${}^2\!/_5$,	${}^5\!/_{12}$,	${}^{17}\!/_{41}$	2c. 2c.
Ebenso für die Sext:	1,	${}^2\!/_3$,	${}^3\!/_4$,	${}^{14}\!/_{19}$	2c. 2c.
für die große Terz:	${}^1\!/_3$,	${}^9\!/_{28}$,	${}^{19}\!/_{59}$,	${}^{47}\!/_{146}$	2c. 2c.
für die kleine Terz:	${}^1\!/_3$,	${}^1\!/_4$,	${}^5\!/_{19}$,	${}^{89}\!/_{111}$	2c. 2c.

Nehmen wir für die Quint ${}^5\!/_{12}$, für die Sext ${}^3\!/_4$, für die große Terz ${}^1\!/_3$, für die kleine Terz ${}^1\!/_4$ an, und bringen alle Brüche auf ihren gemeinsamen Nenner zwölf so haben wir, da ${}^3\!/_4 = {}^9\!/_{12}$, ${}^1\!/_4 = {}^3\!/_{12}$, ${}^1\!/_3 = {}^4\!/_{12}$ 2c. ist, folgende Reihe für die Consonanzen in der Octav.

C.	Es.	E.	F.	G.	A.	c.
Grundton.	3,	4,	5,	7,	9,	12 Intervalle.

Der vierte Näherungswerth für die Quint war offenbar nicht anzuwenden, weil bei einer Octave, die 41 Intervalle umfaßt, die einzelnen Intervalle nicht mehr zu unterscheiden sind, und weil überdieß in einem solchen System außer der Quart die übrigen Consonanzen fehlen würden. Es bleibt nun noch zweierlei übrig, nämlich erstens die übrigen Intervalle zu bestimmen und ihre Schwingungsverhältnisse durch möglichst kleine Zahlen darzustellen, und zweitens nachzuweisen, daß die Abweichung vom wahren Werthe in der Reihe nicht das erlaubte Maß überschreitet.

Theilen wir den log 2 durch 12 und multipliciren die Quotienten der Reihe nach mit den Zahlen 1—12, so erhalten wir die Logarithmen der Tonverhältnisse unserer chromatischen Tonleiter in der sogenannten gleichschwebenden Temperatur:

Anzahl der Intervalle.	Ton.	Logarithmen der Schwingungszahlen.	Schwingungszahlen.	Angenäherter Werth der Schwingungsz. in kl. Brüchen.
0	c	0	1	
1	cis	0,0250858	1,0594	$^{17}/_{16}$, $^{18}/_{17}$, $^{25}/_{24}$, $^{16}/_{15}$
2	d	0,0501717	1,1224	$^{9}/_{8}$, $^{10}/_{9}$
3	dis	0,0752575	1,1892	$^{6}/_{5}$, $^{73}/_{64}$
4	e	0,1003433	1,2599	$^{5}/_{4}$
5	f	0,1254292	1,3448	$^{4}/_{3}$
6	fis	0,1505150	1,4142	$^{64}/_{45}$, $^{25}/_{18}$
7	g	0,1756008	1,4983	$^{3}/_{2}$
8	gis	0,2006867	1,5874	$^{8}/_{5}$, $^{25}/_{16}$
9	a	0,2257725	1,6817	$^{5}/_{3}$, $^{27}/_{16}$
10	ais	0,2508583	1,7817	$^{16}/_{9}$, $^{125}/_{72}$
11	h	0,2759442	1,8877	$^{50}/_{27}$, $^{15}/_{8}$
12	$\overline{c}$	0,3010300	2	

Der Exponent unserer Progression, oder was dasselbe ist, die Schwingungszahl für cis kommt dem Bruch $^{18}/_{17}$ am nächsten. Um jedoch durch Multiplication nicht zu Brüchen zu gelangen, die durch größere Zahlen ausgedrückt sind, bedient man sich, wenn man die chromatische Tonleiter durch kleine Brüche darstellen, die consonirenden Intervalle also rein haben will, abwechselnd der Brüche $^{25}/_{24}$ und $^{16}/_{15}$ (kleiner und großer halber Ton) zwischen denen $^{18}/_{17}$ annähernd das geometrische Mittel ist. — In unserer Tabelle ist die Schwingungszahl für e $= 1,2599 = {}^{5}/_{4}.\ 1,008$, für f $= 1,3448 = {}^{4}/_{3}.\ 1,008$, für g $= 1,4983 = {}^{3}/_{2} : 1,001$, für a $= 1,6817 = {}^{5}/_{3}.\ 1,009$. In allen Fällen beträgt also die Abweichung von den durch kleine Verhältnißzahlen ausgedrückten Intervallen weniger als ein Komma.

Das reichhaltige Capitel über Temperatur, große und kleine ganze oder halbe Töne wollen wir hier nicht weiter ausführen, weil dessen rein mathematische Natur schon längst festgestellt ist. Ueber die sogenannten enharmonischen Töne möge hinzugefügt werden, daß man sie in der Regel durch verschiedene Schwingungsverhältnisse darstellt, die aber so nahe an einander liegen, daß das Ohr sie nicht unterscheidet, und sie also verwechselt werden können. Die Verschiedenheit in der Darstellung durch Zahlen hat darin ihren Grund, daß sie aus der Multiplication verschiedener Verhältnisse entstanden sind, d. h. wie der Musiker sagt verschiedene Bedeutung haben. Es dient daher die verschiedene Vorzeichnung durch Kreuze oder Been nur zur Erleichterung der Auffassung für den Musiker. Solche verschiedene Zahlenverhältnisse können indeß auch bei gleichem Namen eintreten; so hat a als Dominante von d $^{9}/_{8}.\ ^{3}/_{2} = {}^{27}/_{16}$, als große Terz von f $^{4}/_{3}.\ ^{5}/_{4} = {}^{5}/_{3}$ zur Schwingungszahl.

Wir haben im Vorhergehenden gezeigt, daß die Eintheilung der Octav gerade in 12 Intervalle (halbe Töne) eine wohlbegründete war, da bei dieser Eintheilung 1) die großen

Consonanzen [1 : 1, 1 : 2, 2 : 3, 3 : 4, 3 : 5, 4 : 5, 5 : 6*)] festgehalten werden konnten und 2) die Verhältnisse wenigstens annähernd in geometrischer Progression standen, die Entfernung von je zwei auf einander folgenden Tönen also nur unmerkbar verschieden war. Es war uns auf diese Weise möglich geworden jedem Tone der chromatischer Tonleiter seine Quint, Terz, Quart u. s. w. zu geben, ohne zu Tönen unsere Zuflucht zu nehmen, die außerhalb der Tonleiter lagen, wobei freilich die vollkommene Reinheit der Intervalle geopfert werden mußte. Nehmen wir nun aus der fünften Rubrik unserer Tabelle die einfachsten Brüche für jeden Ton heraus, die von dem Werthe, den sie in der reinen Progression haben, um weniger als ein Komma abweichen, so würde unsere zwölfstufige Tonleiter etwa folgendermaßen dargestellt werden:

Grundton	1ste,	2te,	3te,	4te,	5te,	6te,	7te,	8te,	9te,	10te,	11te,	12te Stufe.
1	$^{16}/_{15}$,	$^{9}/_{8}$,	$^{6}/_{5}$,	$^{5}/_{4}$,	$^{4}/_{3}$,	$^{64}/_{45}$,	$^{3}/_{2}$,	$^{8}/_{5}$,	$^{5}/_{3}$,	$^{16}/_{9}$,	$^{15}/_{8}$,	2.

Ein Blick auf die vorhergehende Reihe zeigt, daß in derselben noch viele größere Verhältnißzahlen vorkommen und zwar veranlaßt durch die Nothwendigkeit, die geometrische Progression aufrecht zu erhalten; eine andere Frage ist, ob wir nicht durch Weglassung einzelner Glieder, wobei natürlich der feste Zusammenhang der übrigen gewahrt bleiben muß, die Einfachheit der Reihe vergrößern können. Zu dieser sowie zu allen Untersuchungen, bei denen es nur auf die Entfernung vom Grundton, d. h. auf die Größe des Verhältnisses, und nicht auf die Bedeutung des Tones, d. h. auf die Art ankommt, wie dies Verhältniß entstanden ist, können wir uns der Zahlen 1 bis 12 als Logarithmen der zwölf Intervalle bedienen, zu denen die Schwingungszahl von cis die Basis abgiebt, weil ja die Schwingungszahlen der Stufen eine geometrische Progression bilden. Es würde demnach 0 zum Grundtone, 12 zur Octave, 7 zur Quint, 5 zur Quart, 4 zur großen Terz u. s. w. als Logarithmus gehören.

Vermittelst der Octave können wir natürlich keine Ausscheidung vornehmen; wollten wir in Quinten vorwärts gehen, so würden wir erst nach zwölf Quinten wieder zur Octave und zwar zur siebenten gelangen ($12 \times 7 = 7 \times 12$) und da 7 und 12 relative Primzahlen sind, so würden hierbei alle zwölf Töne wieder zum Vorschein kommen.**) Würden wir nach großen Terzen die Intervalle wählen, so erhielten wir die Stufen:

	0,	4,	8,		12,	
mit den Schwingungszahlen:	1,	$^{5}/_{4}$,	$^{8}/_{5}$,		2,	oder nach kleinen Terzen
die Stufen:	0,	3,	6,	9,	12,	
mit den Schwingungszahlen:	1,	$^{6}/_{5}$,	$^{64}/_{45}$,	$^{5}/_{3}$,	2,	aber in allen diesen Fällen

*) Die obigen sechs Intervalle enthalten alle Töne, deren Schwingungsverhältnisse sich durch die Zahlen 1 bis 6 darstellen lassen, denn die fehlenden Verhältnisse gehören entweder einem der schon vorhandenen Töne an, der um eine oder 2 Octaven erhöht ist (1 : 3, 1 : 4, 1 : 5, 2 : 5, 1 : 6), oder sind durch Theilung beider Glieder durch dieselbe Zahl auf ein einfacheres Verhältniß zurückzuführen, mit dem sie also dasselbe Intervall bezeichnen (3 : 3, 2 : 4, 4 : 4, 5 : 5, 2 : 6, 3 : 6, 4 : 6, 6 : 6). Daß die Musik mit denjenigen Intervallen, deren Schwingungsverhältnisse größere Zahlen als 6 erfordern, um dargestellt zu werden, die Reihe der Dissonanzen anfängt, mag einestheils daher rühren, daß in der chromatischen Tonleiter die Verhältnisse, welche durch die Zahl 7 dargestellt werden können, fehlen, also hinter der kleinen Terz (5 : 6) wirklich eine Art von Abschnitt vorhanden ist, vorzüglich aber wohl daher, daß die oben dargestellten Intervalle entweder im Dreiklange, oder in einer seiner Umkehrungen vorkommen. Von welcher Wichtigkeit aber für die Musik der Dreiklang ist, werden wir Seite 11 bei Construction der sogenannten diatonischen Tonleiter darlegen.

**) Es ist das der Grund der unter dem Namen Quintencirkel bekannten Erscheinung. Ebenso würde sich in 5 Octaven ein Quartencirkel, in 11 ein Septimencirkel (große Septime) darstellen lassen, da auch 5 und 12, 11 und 12 relative Primzahlen sind. Die kleine Septime führt durch 6 verschiedene Töne zur 5ten Octave ($6 \times 10 = 5 \times 12$) u. s. w.

fehlt die Quint und andere der großen Consonanzen, und dann ist die Anzahl der Töne in der Octav zu gering, um dem Ohr die nöthige Abwechselung zu bieten. Die große Sext würde in drei Octaven ($4 \times 9 = 3 \times 12$) dieselben Töne wie die kleine Terz, die kleine Sext in zwei Octaven ($3 \times 8 = 2 \times 12$) dieselben Töne wie die große Terz liefern. Ebenso wenig würden wir zu unserm Zwecke irgend eines der andern Intervalle gebrauchen können; ja wäre eine Aussonderung auf diese Art mit Beibehaltung der einfachsten Verhältnißzahlen überhaupt möglich, so würden wir sie Seite 8 direct gefunden haben. Es bleibt daher nur übrig die Reihe mit Hülfe zweier Verhältnisse zu vereinfachen, d. h. musikalisch gesprochen die neue (diatonische) Tonleiter mit Hülfe eines dreistimmigen Accordes aufzubauen.

Wir wiederholen: Das Princip, welches uns leitet, ist das, die Schwingungszahlen der Töne in möglichst einfache Verhältnisse zu einander treten zu lassen. Die Octave (1 : 2) erhalten wir jedem Tone einfach dadurch, daß wir auf die erste eine zweite Octave setzen, die dieselben Intervalle wie die erste umfaßt, d. h. in der zwischen den Schwingungszahlen Verhältnisse bestehen gleich denen in der ersten Octav. Die Quint, das nächst einfachste Verhältniß, (2 : 3) läßt sich, wie wir sahen, für jeden Ton nur dadurch gewinnen, daß die Schwingungszahlen, wie in der chromatischen Tonleiter, eine geometrische Progression bilden. Aber gesetzt, wir wollten der größeren Einfachheit der Reihe willen die reine Quint eines einzigen Tones opfern, so ergiebt sich für uns der Ausweg, den wir vorher das Aufbauen der Tonleiter vermittelst eines dreistimmigen Accordes (zweier Intervalle) nannten. Wir zerlegen die Quint (7) in zwei Intervalle (1 und 6, 2 und 5, 3 und 4) und lassen beide Intervalle regelmäßig abwechseln, dann ist der dritte Ton die Quint des ersten, der vierte die Quint des zweiten ꝛc. und es wird nur darauf ankommen, ohne alle Töne der chromatischen Tonleiter zu durchlaufen zum Anfangstone, der in einer höheren Octave liegen wird, zu gelangen. Unter den drei Möglichkeiten der Zerlegung (6 und 1, 2 und 5, 3 und 4) werden wir uns sofort für die letztere entscheiden, einmal, weil dann beide Theile der Quint consonirende Intervalle sind (große und kleine Terz. $5/4 \times 6/5 = 3/2$) und dann, weil wir auf diese Weise sehr leicht zum Anfangstone zurückkehren können. Fangen wir nämlich mit der kleinen Terz an, fügen die große Terz hinzu, dann die kleine, dann die große u. s. w., so kommen wir, weil $3 + 3 (4 + 3) = 24 = 2 \times 12$ ist, nach sieben Terzen zum Anfangston, aber um zwei Octaven erhöht, zurück.

Die Tonreihe würde demnach sein:

0. 3. 7. 10. 14. 17. 21. 24.

oder wenn wir den Anfangston 0 durch c bezeichnen:

c. es. g. b. $\bar{d}$. $\bar{f}$. $\bar{\bar{a}}$. $\bar{\bar{c}}$.

Bedenken wir nun, daß unsere Tonreihe nicht auf einem einzigen Intervalle, sondern auf zweien, d. h. auf einem dreistimmigen Accord gebaut ist, so wird es ganz natürlich sein, wenn wir nach einem Grundaccord der obigen Reihe, d. h. nach demjenigen Accorde fragen, der die Vermittelung und Verbindung der übrigen in der Reihe enthaltenen Accorde übernimmt. Die Verbindung zwischen zwei auf einanderfolgenden Accorden wird aber offenbar durch die Töne hergestellt, die beiden Accorden gemeinsam sind, so zwischen c, es, g und es, g, b durch es und g, zwischen es, g, b und g, b, $\bar{d}$ durch g und b. Der erste Accord c, es, g und der dritte g, b, d sind nur durch einen Ton verbunden; ebenso der zweite und vierte, dritte und fünfte u. s. w. Die äußeren Accorde c es g und b, $\bar{d}$, $\bar{f}$; c, es, g u. $\bar{d}$ $\bar{f}$ $\bar{a}$; es, g, b und $\bar{d}$, $\bar{f}$, $\bar{a}$; es, g, b und $\bar{f}$, $\bar{a}$, $\bar{c}$ haben keine Verbindung durch gemeinsame Töne; offenbar wird aber eine Beziehung dieser Accorde zu einander durch die dazwischen liegenden Accorde bewirkt, welche die Theile der einander fremden Dreiklänge zu einem Ganzen verbinden; so bilden zwischen c, es, g und b, $\overline{d}$, $\overline{f}$ die Dreiklänge es, g, b und g, b, $\overline{d}$ die Verbindung, von denen der erstere sich mehr an c, es, g, der letztere mehr sich an b, $\overline{d}$, $\overline{f}$ anschließt. Beide sind wieder durch die Töne g und b unter sich verbunden. Der Ton c kommt in unserer Reihe doppelt (c und $\overline{c}$) vor; lassen wir denselben links weg, so wird b, $\overline{d}$ $\overline{f}$ der Grundaccord; stoßen wir dagegen rechts $\overline{c}$ aus, so ist g, b, $\overline{d}$ der Accord, der die Verbindung der übrigen übernimmt:

Grundaccord: b. $\overline{d}$ $\overline{f}$		oder	g. b. $\overline{d}$
g, b. $\overline{d}$ und $\overline{d}$. $\overline{f}$ $\overline{a}$			es. g. b und b. $\overline{d}$. $\overline{f}$
es. g. b	$\overline{f}$ $\overline{a}$. $\overline{c}$	c. es. g.	$\overline{d}$ $\overline{f}$. a.

Verlegen wir die Töne beider Gruppen in eine Octav, so erhalten wir, indem wir vom Grundton des Grundaccords ausgehen, die beiden Tonreihen:

b. $\overline{c}$. $\overline{d}$. $\overline{es}$. $\overline{f}$. $\overline{g}$. $\overline{a}$. $\overline{b}$ und g. a. b. $\overline{c}$. $\overline{d}$. $\overline{es}$. $\overline{f}$. $\overline{g}$.

oder indem wir zum Grundton der ersten Reihe c, und dem entsprechend zum Grundton der zweiten Reihe a machen, und die Intervalle den obigen Tonfolgen gemäß construiren:*)

c. d. e. f. g. a. h. c und a. h. $\overline{c}$. $\overline{d}$. $\overline{e}$. $\overline{f}$. $\overline{g}$. $\overline{a}$.

Die erste dieser Tonfolgen ist die Cdur-Tonleiter, die zweite die Amoll-Tonleiter.**) Ehe wir jedoch auf die diatonischen Tonleitern und namentlich auf den Unterschied jener beiden sogenannten Tongeschlechter näher eingehen, wird es nothwendig sein, die einzelnen Accorde namentlich in Bezug auf ihre Consonanz näher zu betrachten, wobei zu unserem Zwecke vor Allem die dreistimmigen in Betracht kommen.

Was zunächst die Consonanz eines dreistimmigen Accordes anbetrifft, so ergiebt eine ähnliche Betrachtungsweise, wie sie Seite 3—6 aufgestellt wurde, leicht, daß dieselbe um so größer ist, durch je kleinere Zahlen die Schwingungsverhältnisse dargestellt werden, und wieder wird zum Anhaltspunkte für die Vergleichung die größte dieser Zahlen dienen. Die einfachsten Verhältnisse unter drei Zahlen sind nun offenbar

$1 : 2 : 3 \quad = C.\ c.\ g.$***)
$1 : 2 : 4 \quad = C.\ c.\ \overline{c}.$
$1 : 3 : 4 \quad = C.\ g.\ \overline{c}.$
$2 : 3 : 4 = 1 : \frac{3}{2} : 2 = C.\ G.\ c.$

aber diese Verhältnisse gehören nicht eigentlich dreistimmigen Accorden an, da in jedem derselben ein Ton doppelt, im zweiten sogar dreifach vorkommt. Es folgen sodann mit Auslassung der Accorde, in denen ein Ton doppelt vorkommt, sowie der Verhältnisse, wo alle Glieder durch dieselbe Zahl theilbar sind, die also auf kleinere Zahlen zurückgeführt werden können:

$2 : 3 : 5 = 1 : \frac{3}{2} : \frac{5}{2} =$ C. G. e. (großer Dreiklang) Fig. V.
$3 : 4 : 5 = 1 : \frac{4}{3} : \frac{5}{3} =$ C. F. A. (Quartsextaccord).
$4 : 5 : 6 = 1 : \frac{5}{4} : \frac{3}{2} =$ C. E. G. (großer Dreiklang).

*) In der Reihe Seite 11 wurde der Ton 0, also ein äußerer Ton durch c bezeichnet. Da aber der mittlere Accord der Grundaccord ist, weil er selbst zwischen den äußeren Theilen die Verbindung herstellt, so konnten wir natürlich ohne Erhöhung oder Erniedrigung der ganzen Reihe nicht zu cdur gelangen.

**) Ueber die Erhöhungen der Molltonleiter siehe Seite 18.

***) 1 : 2 : 3 soll nur kürzere Ausdrucksweise für die Verhältnisse 1 : 2, 1 : 3 und 2 : 3 sein, wie ja auch offenbar bei jedem dreistimmigen Accorde drei Intervalle auf Consonanz und Dissonanz Einfluß haben, z. B. bei c, e, g die drei Intervalle c : e, c : g und e : g.

Die Zahl sieben kommt in unserer Tonleiter nicht vor*), wie man überhaupt, wenn man einfache Beziehungen der Zahlen zu einander bewahren will, die Primzahlen natürlich um so mehr bei Seite schieben muß, je größer die Zahlen werden. Die Zahl 16 kann z. B. zu anderen Zahlen in ganz einfache Verhältnisse treten (8 : 16 = 1 : 2 u. s. w.) nicht aber 13 und 17.

Unter den folgenden Accorden wollen wir noch besonders hervorheben

$5 : 6 : 8 = 1 : {}^6\!/_5 : {}^8\!/_5$ = C. Es. As. (Sextaccord.)
$10 : 12 : 15 = 1 : {}^6\!/_5 : {}^3\!/_2$ = C. Es. G. (kleiner Dreiklang.)
$12 : 15 : 20 = 1 : {}^5\!/_4 : {}^5\!/_3$ = C. E. A. (Sextaccord des kleinen Dreiklangs.)
$10 : 15 : 24 = 1 : {}^3\!/_2 : {}^{12}\!/_5$ = C. G. es. (kleiner Dreiklang.)
$15 : 20 : 24 = 1 : {}^4\!/_3 : {}^8\!/_5$ = C. F. As. (Quartsextaccord des kl. Dreiklanges.)

Es könnte hier scheinen, als wenn manche der ausgelassenen Combinationen einfacher sind, als die angeführten. So scheint z. B. 8 : 9 : 10 einfacher als 10 : 12 : 15. Wenn wir aber Rücksicht nehmen auf die einzelnen Verhältnisse jeder Zusammenstellung, so besteht 8 : 9 : 10 aus 8 : 9, 9 : 10 und 8 : 10, wovon nur das letztere Verhältniß verkleinert werden kann, 10 : 12 : 15 aber aus 10 : 12 = 5 : 6, 10 : 15 = 2 : 3 und 12 : 15 = 4 : 5, so daß also alle drei auf kleinere Zahlen zu bringen sind. Fügen wir daher als Regel hinzu, daß jedes der drei Intervalle, aus denen ein consonirender Accord besteht, eine der Consonanzen (Quint, Quart, große und kleine Sext oder Terz) sein muß.

Aus der obigen Zusammenstellung der einfachsten dreistimmigen Accorde ist ersichtlich, daß die Molldreiklänge im Allgemeinen viel weniger consonirend als die Durdreiklänge sind, und es ist das der Grund, weshalb eine Reihe von Molldreiklängen unmittelbar auf einander folgend einen weniger befriedigenden Eindruck machte. Auch die Umkehrungen der Dreiklänge (Sextaccorde und Quartsextaccorde) machen den Charakter derselben unbestimmter, weil, wie wir gesehen haben, die diatonische Tonleiter wesentlich auf der abwechselnden Aufeinanderfolge von großer und kleiner Terz basirt ist. Um jedoch das Wesen dieser Accorde vollständig kennen zu lernen, wäre es nothwendig, eine Untersuchung über jeden einzelnen in jeder seiner Lagen anzustellen, die Intervalle, aus denen der Accord besteht, einzeln zu prüfen, die Aehnlichkeit derselben unter sich und mit den Tönen, die den Accord bilden, zu beobachten, sowie endlich, wie das in unserer Figur 5 geschehen ist, den Zusammenklang aller drei graphisch darzustellen. Solche Zeichnungen würden für die Kenntniß der Accorde von wesentlichem Nutzen sein, namentlich wenn man die gleichzeitige Berechnung der entsprechenden Zahlenwerthe durch die Gleichungen der einzelnen Intervalle und des ganzen Accordes nicht verabsäumt; es wäre das eine mikroskopische Untersuchung, die den Gesammteindruck der Töne in ihre durch das Gehör nicht zu unterscheidenden einzelnen Bestandtheile, (die Schwingungen) auflöst. So mache ich auf die eigenthümliche Uebereinstimmung des Zusammenklanges von C, G, e mit der Terz e aufmerksam (die stärker ausgezogene Linie ist der punktirten fast immer parallel), eine Erscheinung, die erklärt, warum man im Durdreiklang die Terz in der Regel nicht verdoppeln darf, da sie den Accord leicht überschreit. Ebenso würde zu zeigen sein, daß

*) Chladni stellt in seiner Akustik einen Ton mit der Schwingungszahl $^7\!/_4$ auf, den er i nennt, und nimmt wohl mit Recht an, daß das Wohlklingende im kleinen Septimenaccord in der Klangähnlichkeit von $^7\!/_4$ und $^{16}\!/_9$, von welchen Brüchen der zweite um $^1\!/_{63}$ größer als der erste ist, liege. Wenn er aber sonst noch diesen Ton i in der Musik verwerthen zu können glaubt, so liegt darin ein Widerspruch; denn entweder wird $^7\!/_4$ von $^{16}\!/_9$ nicht unterschieden, und dann ist der Ton i überflüssig und $^7\!/_4$ dient nur zur Erklärung der geringen Dissonanz der kleinen Septime, oder beide werden verschieden empfunden, und dann ist $^7\!/_4$ nicht zu gebrauchen, weil einfache Beziehungen dieser Zahl zu den übrigen Schwingungszahlen nicht herstellig zu machen sind, ohne eine ganze Reihe von neuen Tönen in die Tonleiter aufzunehmen.

im Quartsextaccord die Quart sich besonders geltend macht, was in Verbindung mit dem Umstande, daß derselbe die Umkehr eines Dreiklangs ist, sein Auftreten an gewisse Bedingungen knüpft (Vorbereitung der Quart ꝛc.); ja einige Musiker sind so weit gegangen, die Quart zu den Dissonanzen zu rechnen, was offenbar unrichtig ist, da das Dissonirende derselben im Quartsextaccorde nicht im Wesen der Quart, sondern in ihrer besonderen Verbindung mit den übrigen Tönen des Accordes liegt. — Wir wollen indessen diese Untersuchungen nicht weiter verfolgen, da sie außerhalb der Gränzen sich befinden, die der vorliegenden Abhandlung gesteckt sind, und begnügen uns damit, auf dieselben aufmerksam gemacht zu haben.

Aus dem Umstande, daß wir die Durtonleiter durch eine regelmäßige Abwechselung des Intervalles der großen und kleinen Terz bildeten, folgt, daß in derselben drei große und drei kleine Dreiklänge vorhanden sein müssen. Da aber Anfang und Ende der Reihe durch eine kleine Terz gebildet wurde, so besteht der siebente Accord, der diese äußersten Grenzen verbindet, aus zwei kleinen Terzen, die zusammen eine verminderte Quint, den sogenannten Tritonus ausmachen. Es wird dieser Accord durch die Zahlen $1 : {}^6/_5 : {}^{64}/_{45} = 45 : 54 : 64$ dargestellt und ist also wesentlich dissonirend; — ein Opfer, das wir der Vereinfachung der Reihe brachten:

d, f, a, c, e, g, h, d.
3 4 3 4 3 4 3

Große Dreiklänge:	Kleine Dreiklänge:	Verminderter Dreiklang:
c. e. g.	e. g. h.	h, d, f.
g. h. d.	d. f. a.	
f. a. c.	a. c. e.	

Die Verwandtschaft zweier Accorde unter einander besteht entweder darin, daß beide einen oder mehrere Theile gleich haben, oder in der möglichst großen Aehnlichkeit der ganzen Accorde. Die Verwandtschaft der ersten Art ergiebt sich unmittelbar aus der Entstehung der Tonleiter. In diesem Falle werden die Accorde entweder durch zwei Töne (z. B. a, c, e und e, c, g) oder durch einen Ton (z. B. a, c, e und e, g, h) verbunden. Zwei Accorde, die keinen Ton gemeinschaftlich haben, erhalten ihre Verbindung durch einen dritten, der Theile aus beiden in sich schließt, z. B. d, f, a und c, e, g durch a, c, e oder f, a, c.; — d, f, a u. e, g, h durch a, c, e. —

Die zweite Art der Verwandtschaft besteht wie schon erwähnt in der Aehnlichkeit zweier ganzen Accorde, und es werden in diesem Falle die Schwingungszahlen des zweiten Accordes durch Multiplication aller Glieder des ersten mit einem und demselben möglichst kleinen Verhältniß gefunden. Die Multiplication aller Glieder mit 1 : 2 würde denselben Accord nur in der höhern Octave geben, und wir erhalten daher den nächst verwandten fremden Accord durch Multiplication aller Glieder mit 2 : 3, d. h. am nächsten verwandt mit dem tonischen Dreiklang ist der Dominantendreiklang. Dann folgt durch Multiplication mit 3 : 4 der Unterdominantendreiklang u. s. w.

Legt man die Töne der Cdur-Tonleiter in eine Octav und untersucht die Verbindung der auf einander folgenden Töne mit einander, so findet man diese leicht aus der angegebenen Entstehung der Leiter:

c ist verbunden mit d durch den Ton g (c, e, g u. g, h, d) oder durch f u. a (f, a, c u. d, f, a.)
d mit e durch a (d, f, a u. a, c, e) oder g (c, g, e u. g, h, d) u. s. w.

Eine ähnliche Verbindung läßt sich zwischen allen Tönen der Octave, die auf einander folgen nachweisen, während freilich der Zusammenhang um so leichter faßlich sein wird, je consonirender der Grundton gegen diesen Verbingungston ist. Darum erscheint denn auch die

Aufeinanderfolge von c und d verbundener, als von g nach a, weil die erstere durch die Quint des Grundtones, nämlich durch g, die letztere durch die Secunde d ihre Vermittelung findet. — Rechnen wir zu dieser innigen Verbindung der Töne den Umstand hinzu, daß unsere Durtonleiter aus zwei mit Rücksicht auf die Intervalle ganz gleich gebauten Hälften besteht, so ist ihre Sangbarkeit vollkommen erkärt. Daß diese regelmäßige Theilung die Nachahmung des Motives und die Bildung von Melodien sehr erleichtert braucht nicht erwähnt zu werden.

Wenn wir die Molltonleiter in ihrer einfachsten Gestalt, d. h. ohne Erhöhungen betrachten, so finden wir in derselben ebenfalls drei Dur- und drei Molldreiklänge und einen verminderten Dreiklang, wie das schon daraus folgen muß, daß Cdur und Amoll dieselben Töne enthalten. Der Unterschied von der Durtonart aber ist der, daß in der letzteren die großen Dreiklänge der Grunddreiklang und die mit ihm zunächst verwandten Dreiklänge der Ober- und Unterdominante sind, während in Moll die Hauptdreiklänge der ersten, vierten und fünften Stufe eine kleine Terz, die Nebendreiklänge dagegen eine große Terz enthalten. Da aber der Molldreiklang schon an sich bedeutend dissonirender ist, als der Durdreiklang, so scheint ein Schluß in zwei auf einanderfolgenden Molldreiklängen zu den Unmöglichkeiten zu gehören, (galt doch bei den älteren Tondichtern die Regel, auch die in Moll anfangenden Compositionen in Dur zu schließen) und da die kleine Terz des Grundtones nicht gut aufgegeben werden kann, ohne den Charakter der Molltonart ganz zu verwischen, so muß die kleine Terz des Dominantendreiklanges geopfert werden, für g muß gis eintreten, und die Tonleiter von Amoll wäre demnach:

a, h, c, d, e, f, gis, a.

Gewöhnlich wird die Molltonleiter aufsteigend und absteigend verschieden angegeben; nämlich aufsteigend a, h, c, d, e, fis, gis, a und absteigend a, g, f, e, d, c, h, a. Diese Abweichung hat jedoch darin ihren Grund, daß man den Schritt der übermäßigen Secunde (drei halbe Töne) von f nach gis auszugleichen gesucht hat, um die Aufeinanderfolge der Töne sangbarer zu machen, wie sie in der Molltonleiter sich finden. Da jedoch die Tonleiter nur die zusammen gehörigen Töne enthalten soll, die eine nähere Beziehung zu einander haben, unbekümmert um die Töne in der Reihenfolge, wie sie die Tonleiter giebt, sangbar sind oder nicht, so scheint diese Veränderung durchaus unmotivirt. Die absteigende Tonleiter in der Gestalt a, g, f, e, d, c, h, a war wie wir sahen, wegen der Aufeinanderfolge von zwei Molldreiklängen zu Schlußbildungen nicht geeignet, die aufsteigende a, h, c, d, e, fis, gis, a, würde sich dadurch, daß auch die Unterdominante eine große Terz erhält, der Durtonart zu sehr nähern. Die Molltonleiter in der von uns gewählten Gestalt enthält demnach

2 große Dreiklänge:	2 kleine Dreiklänge:	2 verminderte Dreiklänge:	1 übermäßiger Dreiklang:
e, gis, h	a, c, e	h, d, f	c, e, gis.
f, a, c	d, f, a	gis, h, d	

Man sieht, daß die nothwendige Erhöhung von g nach gis der Consonanz der in Leiter liegenden Accorde nicht eben förderlich gewesen ist, und es ist daher wohl das Schwankende in der Wahl der zur Molltonleiter gehörenden Töne zum größten Theil dem Bestreben zuzuschreiben, jene Consonanz möglichst zu fördern. Ist aber eine reine Molltonart (mit dem kleinen Dreiklang des Grundtones, der Ober- und der Unterdominante) unmöglich, so wird man wohlthun, höchstens die Erhöhung der Terz der Oberdominante zu gestatten.

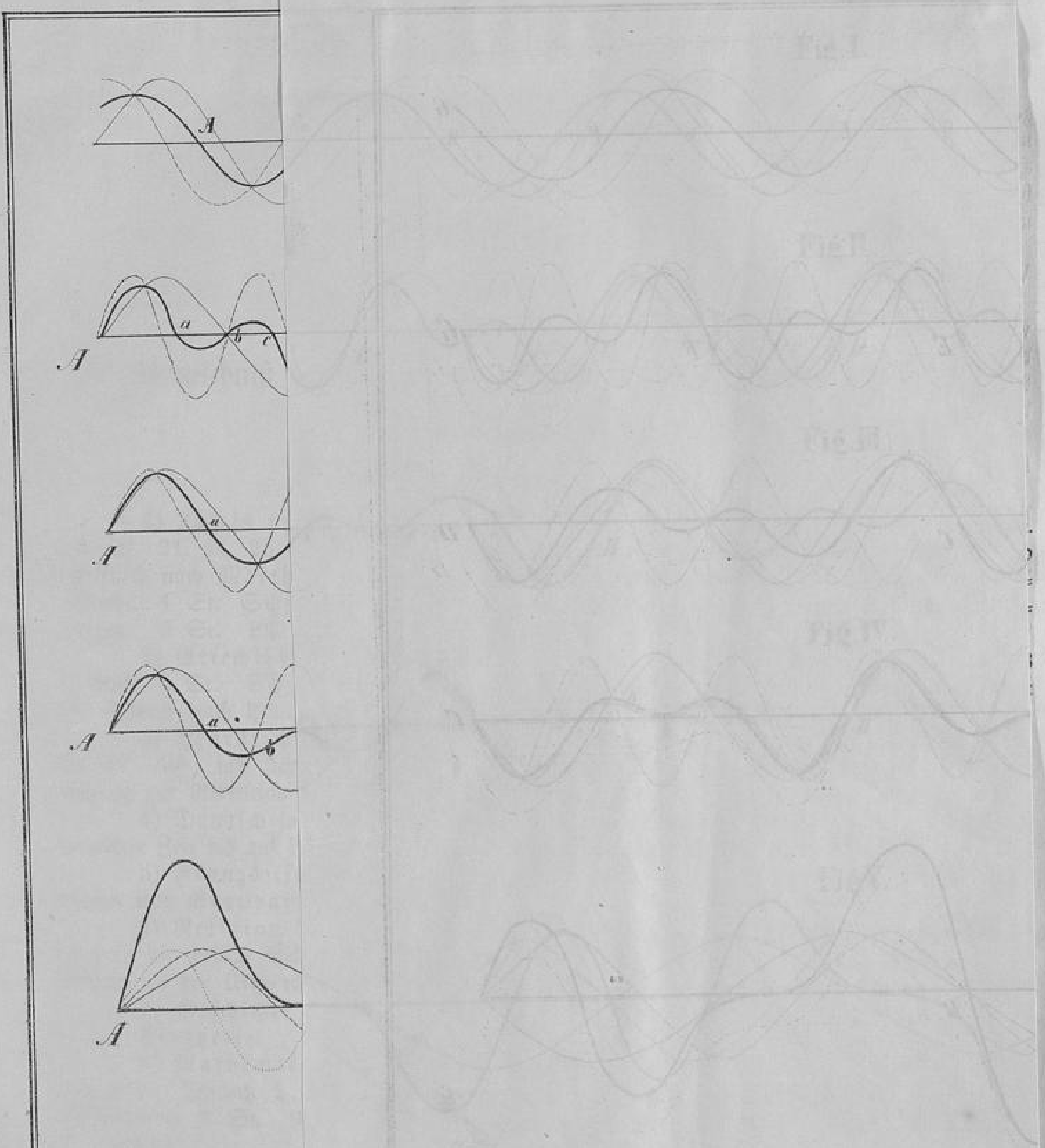

Fig. I: der Ein

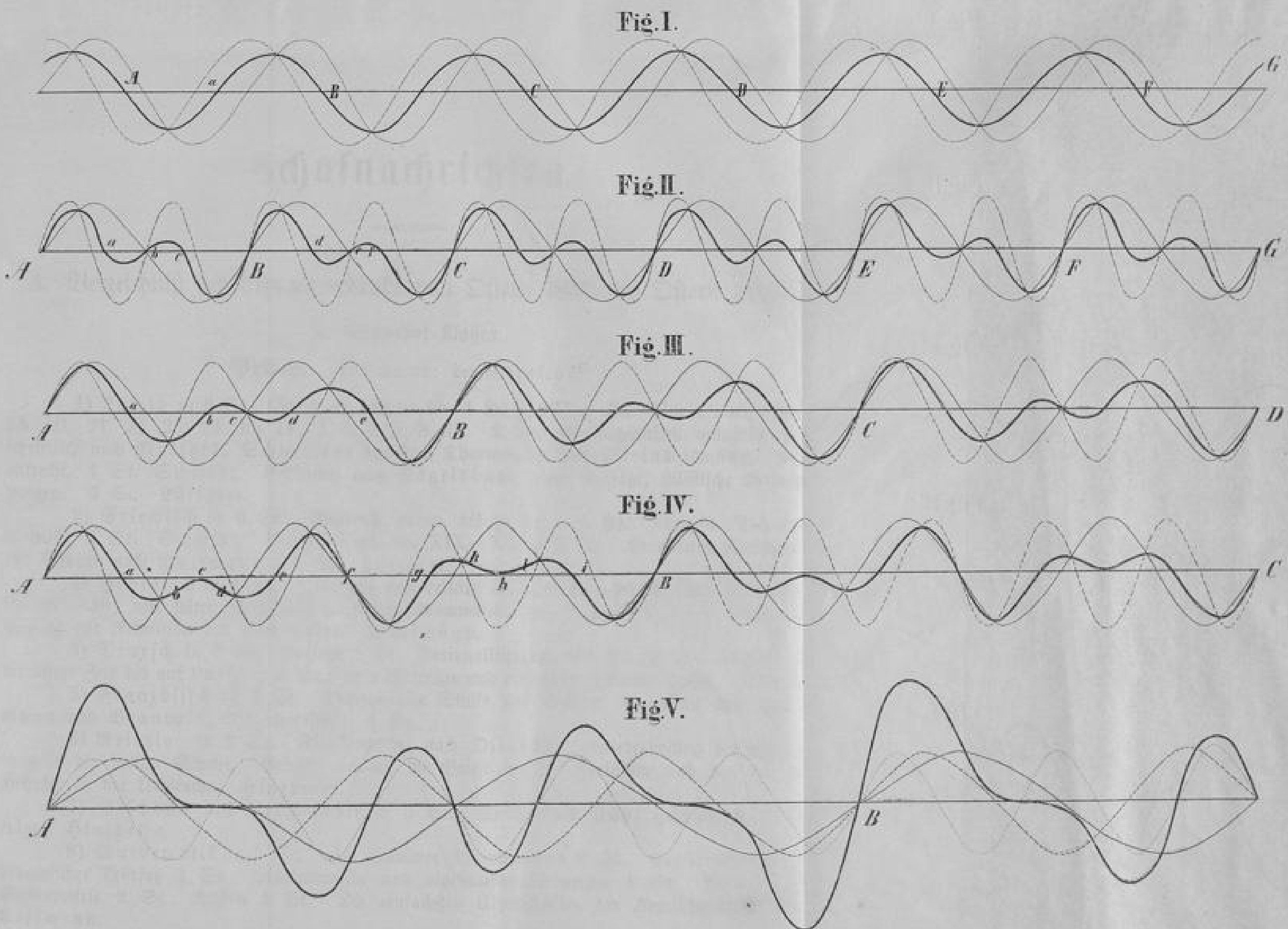

Fig. I: der Einklang. – Fig. II: die Octav. – Fig. III: die Quint. – Fig. IV: die grosse Sext. – Fig. V: der grosse Dreiklang (C. G. e.)