Vierter Abſchnitt.

Verbeſſerung der gefundenen Elemente einer Cometenbahn.

§. 54.

Die im vorigen Abſchnitt vorgetragene Methode, die Bahn eines Cometen aus drey Beobachtungen zu beſtimmen, lehrt die Elemente derſelben noch nicht genau genug kennen, ſondern dieſe bedürfen nachmals noch immer einer Verbeſſerung und Berichtigung. Theils nemlich iſt das Verfahren ſelbſt nicht ganz genau, da eine Vorausſetzung dabey angenommen iſt, die nicht immer vollkommen mit der Wahrheit zutreffen wird: theils laſſen ſich auch nur Beobachtungen dabey brauchen, die nicht ſehr von einander entfernt ſind, deren unvermeidliche Fehler einen um ſo viel gröſsern Einfluſs auf die Elemente haben, je kleiner die Zwiſchenzeiten ſind.

§. 55.

Wenn man alſo ſehr von einander entfernte Beobachtungen eines Cometen hat, oder, welches gleich viel iſt, wenn der Comet, deſſen Bahn man berechnet, lange geſehn und beobachtet worden iſt, ſo würde man ſich unnöthiger Weiſe damit aufhalten, wenn man blos die obige Rechnung verbeſſern wollte. Man muſs vielmehr dann ſogleich eine Verbeſſerungs-Methode wählen, bey der man von den unter ſich entfernteſten Beobachtungen Gebrauch machen kann. Hierzu werde ich die bequemſten unten vorſchlagen. Iſt hingegen, welches ſehr oft der Fall ist, der Comet nicht lange, z. B. nur zwey bis drey Wochen gesehen worden, so kann man es lediglich bey Verbesserung des im vorigen Abschnitt vorgetragenen Verfahrens bewenden lassen. Diese Verbesserung ist, wie sich gleich zeigen wird, sehr leicht und bequem. Man thut auch sodann wohl, wenn man gleich Beobachtungen bey der ersten Rechnung zum Grunde legt, die nicht zu nahe bey einander sind. Die Zwischenzeit kann ohne Bedenken 12, 14, 16 und mehr Tage betragen, besonders wenn der scheinbare Abstand des Cometen von der Sonne nicht zu klein ist.

§. 56.

Unsere Methode nemlich würde, wie schon oft erinnert ist, eine geometrische Schärfe haben, wenn wirklich, wie dabey angenommen ist, die mittlern *radii vectores* sowohl die Chorde der Erdbahn, als die Chorde der Cometenbahn im Verhältniss der Zwischenzeiten schnitten. Denn so wäre in der That.

$$\varrho''' = M \varrho'$$

Da diess aber sehr selten völlig zutreffen kann, so wird eigentlich

$$\varrho''' = (M + \upsilon)\, \varrho' + h$$

seyn. Jetzt, da man die Cometenbahn schon beyläufig kennt, lassen sich nun die Werthe von υ und h finden.

§. 57.

Fig. 1.

Für die Erdbahn ist nemlich eigentlich:

$$ad : dc = R' \sin (A'' - A') : R''' \sin (A''' - A'')$$

Für die Cometenbahn berechne man sobald man ϱ' aus den Gleichungen nach §. 41. gefunden hat, durch die Formeln des §. 43. Zeit und Abſtand des Periheliums, und hieraus die wahre Anomalie ω zur Zeit der mitlern Beobachtung. Damit ergeben ſich, weil φ und χ ohnedem ſchon bekannt ſind, die Unterſchiede der wahren Anomalien zwiſchen der erſten und zweyten Beobachtung $= \tau$, und zwiſchen der zweyten und dritten Beobachtung $= \sigma$, denn es iſt

$$\tau = \omega - \varphi$$
$$\sigma = \varphi + \chi - \omega = \chi - \tau$$

und ſodann iſt für die Chorde der Cometenbahn

$$AD : DC = r' \sin \tau : r''' \sin \sigma.$$

Damit ſind alſo die wahren Verhältniſſe von $ad : dc$ und von $AD : DC$ bekannt.

§. 58.

Fig. 2.

Wir müſſen nun wieder zu der zweyten Figur zurückkehren. Es ſey demnach adc die Chorde der Erdbahn auf die Ebene projicirt, auf der der mittlere Radius Vector für die Erde ſenkrecht ſteht, aA, dD, cC, die gleichfalls projicirten Geſichtslinien §. 38., ſo iſt

$$CO : AM = \frac{CD}{\sin COD} : \frac{AD}{\sin DMA}$$

$$cO : aM = \frac{cd}{\sin COD} : \frac{ad}{\sin DMA}$$

folglich

$$CO + cO = \delta''' =$$
$$\left(\frac{CD.\,AM}{DA} + \frac{aM.\,cd}{ad}\right) \frac{\sin DMA}{\sin COD.}$$

Setzt

Setzt man nun aM $= f$, so ist, da A$a = \delta'$ ist, AM $= \delta' - f$. Ferner haben wir, wie in §. 38 DMA $= b'' - b'$, COD $= b''' - b''$. Also ist die Formel

$$\delta''' = \frac{\sin(b'' - b')}{\sin(b''' - b'')} \left(\frac{DC}{DA}(\delta' - f) + \frac{dc}{ad} f\right)$$

Man weiss nun, dass die Verhältnisse $\frac{DC}{DA}$ und $\frac{cd}{ad}$ beyde nicht viel von dem Verhältnisse $\frac{t''}{t'}$ verschieden sind. Es sey also

$$\frac{DC}{DA} = \frac{t''}{t'} + p$$

$$\frac{cd}{ad} = \frac{t''}{t'} + q$$

wobey also § 57

$$p = \frac{r''' \sin \sigma}{r' \sin \tau} - \frac{t''}{t'}$$

$$q = \frac{R''' \sin(A''' - A'')}{R' \sin(A'' - A')} - \frac{t''}{t'}$$

so wird

$$\delta''' = \frac{\sin(b'' - b')}{\sin(b''' - b'')} \left(\frac{t''}{t'}\delta' + p\delta' - pf + qf.\right)$$

Da nun §. 38

$$\frac{\sin(b'' - b')\, t''}{\sin(b''' - b'')\, t'} = N$$

so ist

$$\delta''' = N\left(1 + \frac{t'}{t''} p\right)\delta' + \frac{(q-p) f \sin(b''-b')}{\sin(b''' - b'')}$$

Nun ist nach §. 38

$$\varrho' = \frac{\delta' \cos b'}{\sin(A''-\alpha')} \text{ und } \varrho''' = \frac{\delta''' \cos b'''}{\sin(A''-\alpha''')}$$

also

$$\varrho''' = M\left(1+\frac{t'}{t''}\right)\varrho' + \frac{(q-p)\sin(b''-b')\cos b''' f}{\sin(b'''-b'')\sin(A''-\alpha''')}$$

Es ist aber

$$f = \frac{a d \sin b''}{\sin(b''-b')} = \frac{R' \sin(A''-A')\sin b''}{\sin(b''-b')}.$$

Setzt man diesen Ausdruck von f in den zweyten Theil des Werths von ϱ''', so wird derselbe

$$h = \frac{R' \sin(A''-A')\ (q-p)\ \tan b''}{(\tan b''' - \tan b'')\sin(A''-\alpha''')}$$

oder wenn man für tang b'', tang b''', ihre Werthe setzt, nach §. 38.

$$h = \frac{R' \sin(A''-A')\ (q-p)\ \tan\beta''}{\tan\beta''' \sin(A''-\alpha'') - \tan\beta'' \sin(A''-\alpha''')}$$

$$= \frac{R' \sin(A''-A')\ (q-p)\ m}{\tan\beta''' - m \sin(A''-\alpha''')}$$

so dass der Nenner derselbe ist, den wir oben §. 38 für M gebrauchten. Und so heisset die ganze Gleichung

$$\varrho''' = M\left(1+\frac{t'}{t''}p\right)\varrho' + \frac{R' \sin(A''-A')\ (q-p)\ m}{\tan\beta''' - m\sin(A''-\alpha''')}$$

§. 59.

Damit haben wir also die Werthe von υ und h in der Gleichung

$$\varrho''' = (M+\upsilon)\,\varrho' + h.$$

das ist, den Einfluss der kleinen Grössen p, und q, die wir

wir bey der erſten Auflöſung ganz vernachläſsigten, auf den Werth von ϱ''' beſtimmt. Man könnte damit nun die Verbeſſerung der vorigen Rechnungen ſuchen. Allein eine Bemerkung wird dieſe Arbeit noch ſehr abkürzen. Es kann nemlich das ϱ', das uns unſere vorige Rechnung gab nur ſehr wenig von dem wahren, welches wir nun ſuchen, verſchieden ſeyn. Bezeichnet man jenes zum Unterſchiede mit (ϱ), ſo wird man, da h über dem nur klein iſt, ohne allen merklichen Fehler

$$\frac{h\,\varrho'}{(\varrho)} = h$$

in die Gleichung für ϱ''' ſetzen können. Damit iſt alſo

$$\varrho''' = \mathrm{M}\left(1 + \frac{t'}{t''}\,p + \frac{h}{(\varrho)}\right)\varrho'$$

und alſo gerade zu

$$\varrho''' = (\mathrm{M} + v)\,\varrho'$$

wobey

$$v = \frac{\mathrm{M}\,t'}{t''}\,p + \frac{h}{(\varrho)}$$

§. 60.

Um alſo die zwey Gleichungen für r''' und k'' zu verbeſſern darf man nur alle Coefficienten, die M enthalten, mit

$$\frac{\mathrm{M} + v}{\mathrm{M}} = \mathrm{H}$$

und diejenigen, die M^2 enthalten, mit H^2 multipliciren. Die Gleichung für r' bleibt ungeändert. Da man die Logarithmen dieſer Coefficienten aus der vorigen Rechnung vor ſich hat, ſo iſt dieſs Verfahren nichts weniger als beſchwerlich.

§. 61.

Es wird indeſſen wohl gut ſeyn, die zur Beſtimmung von H nöthigen Formeln aus den vorigen §. §. mehrerer Deutlichkeit wegen zu ſammlen, um ſie beſſer überſehen zu können. Sobald man alſo aus der erſten Rechnung den genäherten Werth von $\varrho' = (\varrho)$, die Zeit und den Abſtand des Periheliums, und ω, mithin τ und σ gefunden hat, §. 57., ſo berechne man

$$p = \frac{r''' \sin \sigma}{r' \sin \tau} - \frac{t''}{t'}$$

$$q = \frac{R''' \sin (A''' - A'')}{R' \sin (A'' - A')} - \frac{t''}{t'}$$

und ſodann

$$h = \frac{R' \sin (A'' - A') (q - p)\, m}{\tang \beta''' - m \sin (A'' - \alpha''')}$$

und ſo iſt

$$H = 1 + \frac{t'}{t''}\, p + \frac{h}{(\varrho)\, M.}$$

Da in dem letzten Gliede der Gleichung für H, das h wider mit M dividirt vorkömmt, h und M aber, den Factor t'' abgerechnet, einerley Nenner haben, ſo iſt noch bequemer zur Rechnung

$$\frac{h}{(\varrho)\, M} = \frac{R' \sin (A'' - A') (q - p)\, m\, t'}{(\varrho) [m \sin (A'' - \alpha') - \tang \beta']\, t''}$$

Mit dieſem Werthe von H wird ſodann die Verbeſſerung der Coefficienten vorgenommen. Man wird alſo zwey neue, von den vorigen ſehr wenig verſchiedene Gleichungen für r''' und k'' erhalten, woraus ſich der verbeſſerte Werth von ϱ' um ſo leichter wird finden laſſen, da man aus dem vorher gefundenen Werth von (ϱ) ſchon ſehr nahe die Gränzen kennt, zwiſchen denen er enthalten

halten ſeyn muſs. Zwey Hypotheſen für ϱ', und eine nachmalige leichte Interpolation ſind dazu vollkommen hinreichend.

§. 62.

Um den Gang der Rechnung noch mehr zu erläutern, will ich das Beyſpiel von den Cometen von 1769 aus §. 46. 47. wieder vornehmen. Wir haben ſchon $\omega = 138°\ 19'\ 55''$ in §. 51. gefunden. Nun iſt

$$\varphi = 135°\ 52'\ 24''$$
$$\chi = 4°\ 27'\ 46''$$

alſo

$$\sigma = 2°\ 27'\ 31''$$
$$\tau = 2°\ 0'\ 15''$$

ferner war $r' = 1,02367$, und $r''' = 0,83504$.

Folglich für p.

$\log r' = 0,010160$	$\mathrm{l.}\ r''' = 9,921707$
$\mathrm{l.}\ \sin\tau = 8,543722$	$\mathrm{l.}\ \sin\sigma = 8,632433$
$\mathrm{l.}\ r' \sin\tau = 8,553882.$	$\mathrm{l.}\ r''' \mathrm{f.}\ \sigma\ 8,554140$
	$\mathrm{l.}\ r' \sin\tau\ 8,553882$
	$\log.\ 0,000258$

Zu dieſem Logarithmus gehört die Zahl 1,00060. Da nun in unſerm Fall $\frac{t''}{t'} = 1$, ſo iſt $p = 0,00060$.

Für q haben wir $A'' - A' = 3°\ 53'\ 26''$, und $A''' - A'' = 3°\ 53'\ 49''$, alſo

$\mathrm{l.}\ R' = 0,003132$	$\mathrm{l.}\ R''' = 0,002184$
$\mathrm{l.\ f.}\ (A'' - A') = 8,831555$	$\mathrm{l.\ f.}\ (A''' - A'') = 8,832267$
$\mathrm{l.}\ R'\ \mathrm{f.}\ (A'' - A') = 8,834687$	$\mathrm{l.}\ R'''\ \mathrm{f.}\ (A''' - A'') = 8,834451$
	$\mathrm{l.}\ R'\ \mathrm{f.}\ (A'' - A') = 8,834687$
	$\log.\ 9,999764.$

 Zu

Zu dieſem Logarithmus gehört die Zahl 0,99946, alſo iſt $q = -0,00054$. Um nun $\frac{h}{(\varrho)\,M}$ zu finden, ſo iſt

$$\begin{aligned} q &= -0,00054 \\ p &= +\underline{0,00060} \\ q-p &= -0,00114 \end{aligned}$$

demnach

$$\begin{array}{lr} \log R' \sin (A'' - A') = & 8,834687 \\ \log (q-p) \quad . \quad . & 7,056905 \\ \log m \quad . \quad . & \underline{9,648938} \\ & 5,540530 \\ ^{*)} \log 0,12210 \quad . & 9,086716 \\ \log (\varrho) \quad . \quad . & \underline{9,541829} \\ \log \frac{h}{(\varrho)\,M} = & 6,911985 \end{array}$$

Alſo iſt, da hier $t' = t''$,

$$\frac{h}{(\varrho)\,M} = -0,00082$$

$$p\,\frac{t'}{t''} = +\ 0,00060$$

Folglich

$$H = 1 + p\,\frac{t'}{t''} + \frac{h}{(\varrho)\,M} = 0,99978$$

Alſo iſt H = 0,99978, und Logar. H = 9,999904. Man darf alſo, um die verbeſſerten Coefficienten in den Gleichungen für r''', k'', zu erhalten, von den Logarithmen der Glieder, die M enthalten, nur 96, als das Complement des Logarithmus H zu 1, und von denen die M^2 enthalten, 192 abziehn, um die Logarithmen der

*) 0,12210 iſt nemlich der vorhin §. 46 berechnete Werth des Zählers für $M = m \sin (A'' - \alpha') - \tang \beta'$.

der wahren Werthe für diese Glieder zu finden. Damit findet man also sehr leicht

$$r''' = \sqrt{1{,}01011 - 1{,}21455\,\varrho' + 0{,}90829\,\varrho'^2}$$

$$k'' = \sqrt{0{,}01868 - 0{,}10958\,\varrho' + 0{,}49694\,\varrho'^2}$$

Diese Gleichungen sind indessen hier, da H so nahe = 1 ist, so wenig von den vorigen verschieden, daſs es sich nicht der Mühe lohnt, ϱ' von neuem daraus zu suchen, zumal da die Rechnung ganz mit den §. 46. überein kömmt. Man sieht, wie nahe die Voraussetzung, daſs die Chorden im Verhältniſs der Zwischenzeiten geschnitten worden, für eine Zwischenzeit von acht Tagen zutrifft. Ich erinnere nur noch, daſs man gleich Anfangs den Werth für M, und nochmals die kleinen Bögen, σ, τ, $A'' - A'$, $A''' - A''$, genau genug berechnen muſs, damit nicht aus Nachläſsigkeit in der Rechnung die gesuchte Verbesserung miſslich ausfalle.

§. 63.

Dieſs ist also, wie es in die Augen fällt, eine sehr leichte Methode, die erste Rechnung über die Elemente der Cometenbahn zu verbessern; und man wird alsdenn die Elemente so genau bestimmen, als sie sich nur immer aus drey nicht sehr weit von einander entfernten Beobachtungen finden lassen. Aber durch einander nahe Beobachtungen wird die Bahn eines Cometen nie genau gefunden, theils weil alle Beobachtungen aus mehrern Ursachen immer fehlerhaft sind, und theils auch deswegen, woran man selten zu denken scheint, weil wir die Länge der Sonne noch eben nicht bis zu einzelnen Secunden genau berechnen können, wenigstens vor Herr

de

de Lambre, und Herr von Zach neuern Bemühungen noch weiter zurückblieben. Eine Unzuverläſsigkeit oder ein Fehler von 10″ in der Länge der Sonne kann unter gewiſſen Umſtänden gröſsere Folgen haben, als ein Fehler von einer oder gar mehreren Minuten in der beobachteten Länge und Breite des Cometen. Eine Warnung für den Rechner, den Ort der Sonne bey jeder Beobachtung mit gehöriger Sorgfalt zu ſuchen. Fehler aber in der Länge, oder dem Abſtande der Sonne, oder in der beobachteten Länge und Breite des Cometen haben natürlich einen ſo viel gröſseren Einfluſs auf die Beſtimmungsſtücke der Cometenbahn, je näher die Beobachtungen unter einander ſind, und je kleiner alſo das in der Zwiſchenzeit beſchriebene Stück der Cometenbahn iſt.

§. 64.

Man hat verſchiedene Methoden angegeben, um auch die unter ſich entfernteſten Beobachtungen zur Correction einer ſchon beyläufig bekannten Cometenbahn brauchen zu können. Man kann ſie indeſſen auf drey vorzügliche reduciren: nemlich die Methode des Herrn Lambert, des Herrn de la Place, und des groſsen Newtons. Alle drey wollen wir näher unterſuchen, und mit einander vergleichen.

§. 65.

Lambert ſchlägt vor, die Diſtanzen des Cometen von der Erde in drey Beobachtungen aus der Conſtruction, oder aus einer erſten Rechnung zu nehmen, ihre Unterſchiede von den wahren als Differential-Gröſsen anzuſehen, deren Potenzen man bey der Rechnung weglaſſen

laſſen kann, und aus den beobachteten Zwiſchenzeiten den Betrag dieſer Unterſchiede zu beſtimmen. Es mögen die drey aus der Conſtruction, oder der erſten Rechnung gefundenen Diſtanzen des Cometen von der Erde a, b, c, ſeyn, ſo nimmt er für die wahren Diſtanzen $a + x$, $b + y$, $c + z$ an: drückt dadurch die Abſtände des Cometen von der Sonne, und die Chorden der Cometenbahn zwiſchen der 1ten und 2ten, 2ten und 3ten, 1ten und 3ten Beobachtung aus, und vergleicht dieſe vermittelſt ſeines Theorems mit den beobachteten Zwiſchenzeiten. Da er alle Potenzen von x, y, z weg läſst, ſo erhält er ihren Werth natürlich durch lineariſche Gleichungen. Allein die Rechnung iſt nicht wenig beſchwerlich und weitläuftig, und dieſs, wie ich aus eigener Erfahrung behaupten kann, in einem ungleich gröſsern Grade, als ſie vielleicht auf den erſten Anblick der von Lambert berechneten Beyſpiele ſcheinen dürfte.

§. 66.

Ungleich bequemer iſt es nemlich, von den beyläufig bekannten Elementen zwey zu wählen, dieſe mit drey Beobachtungen zu vergleichen, um zu ſehn, ob ſie mehr oder weniger damit übereinſtimmen: dann nachzurechnen, was kleine Veränderungen in dieſen Elementen bey jener Vergleichung ändern werden. Dadurch wird der Fehler dieſer beyden Elemente bekannt, und daraus laſſen ſich ſo wohl die zum Grunde der Rechnung angenommen, als auch die übrigen Beſtimmungsſtücke der Bahn genau finden, oder verbeſſern.

§. 67.

Herr de la Place wählt hierzu Zeit und Abſtand des Periheliums. Er nimmt dafür drey Hypotheſen an, die

die wenn τ die Zeit der Sonnenähe, π den Abſtand der Sonnennähe, wie ſie die Conſtruction, oder die zu verbeſſernde Rechnung gegeben hatte, und r, s, kleine willkührliche Gröſsen bedeuten, ſich ſo vorſtellen laſſen.

1te Hypotheſe.	2te Hypotheſe.	3te Hypotheſe.
τ	$\tau + r$	τ
π	π	$\pi + s$.

Nun berechnet er für die Zeiten dreyer unter ſich ſo entfernter Beobachtungen, als er nur haben kann, aus jeder der drey Hypotheſen die Unterſchiede der wahren Anomalien, und die Abſtände des Cometen von der Sonne. Aus den drey Abſtänden des Cometen von der Sonne, und den beobachteten geocentriſchen Längen und Breiten findet er durch eine nicht beſchwerliche Rechnung wieder die Unterſchiede der wahren Anomalien. Stimmen die auf dieſe beyden Arten gefundenen Unterſchiede der wahren Anomalien mit einander für eine dieſer Hypotheſen überein, ſo giebt dieſe Zeit und Abſtand des Periheliums richtig an; wo nicht, ſo läſst ſich doch aus dieſen drey Vergleichungen, auf eine ganz ähnliche Art, wie wir es gleich bey der Newtonſchen Methode ſehen werden, die wahre Zeit und der wahre Abſtand des Periheliums finden. Ich halte mich um ſo weniger bey einer weitläuftigern Auseinanderſetzung dieſer Methode auf, da Herr de la Place ſelbſt,*) und nach ihm Herr Pingré ſie ſo umſtändlich erläutert haben. **)

§. 68.

*) *Mem. de l'Acad. Roy. des Sciences de Paris. 1780. p. 13 ſq. Pingré Cométographie Tom. II. p. 368 ſq.*

**) Da die Formeln des Herrn la Place noch in keinem deutſchen Werke erſchienen, und das Werk des Herrn *de la Place, Théorie du mouvement et de la figure elliptique des Planétes. Paris 1784* ſelten iſt, worinn dieſe Methode

noch

§. 68.

So bequem und brauchbar diese Methode auch ist, so glaube ich doch, dass man der Newtonschen, wo man statt Zeit und Abstand des Periheliums, die Länge des Knotens

noch besser entwickelt ist, so glaubte der Herausgeber durch ihre Mittheilung den deutschen Lesern doch einen Gefallen zu erzeigen, vorzüglich da man hierdurch sämmtliche Verbesserungsarten der ersten Elemente einer Cometenbahn beysammen erhält. Diess wird uns zugleich Gelegenheit geben, auf den Gebrauch constanter Logarithmen aufmerksam zu machen, die bey Wiederholung dieser Methode bey mehrern Hypothesen die Rechnung noch abkürzen. Es bedeuten auch hier, wie bey dem Herrn Verfasser, A Länge der Sonne; R Abstand der Erde von der Sonne; α beobachtete Länge des Cometen; β beobachtete Breite des Cometen; C heliocentrisc. Länge und λ heliocentrisc. Breite desselben; so wird man 1) die wahren Anomalien ϕ', ϕ'', ϕ''' durch die bekannte Distanz des Periheliums, und die Zeit des Durchgangs durchs Perihelium aus der hier mit abgedruckten Barkerischen Tafel finden; so wie auch r', r'', r'''. 2) Berechne man 3 Constanten nach folgenden Formeln:

wenn man $\cos\tau = \cos\beta \cos(A - \alpha)$ macht, so ist

$$\begin{aligned}
&\text{Ite Constante} = \log R + \log \sin\tau \\
&\text{IIte} \quad . \quad . \quad = \log \sin\beta - \log \sin\tau \\
&\text{IIIte} \quad . \quad . \quad = \log R + \log \sin(A - \alpha)
\end{aligned}$$

Man sieht, dass diese Constanten von der Distanz des Periheliums und dem Durchgang durchs Perihelium nicht abhängen, also bey allen Veränderungen dieser beyden Stücke immer die nämliche Grösse behalten. 3) Dann ist

$$\begin{aligned}
&\log \sin K = \text{Ite Constante} - \log r. \\
&\text{Winkel } \Sigma = K + \tau \quad (\text{eigentlich } 180^\circ - K - \tau) \\
&\log \sin\lambda = \log \sin\Sigma + \text{IIte Constante} \\
&\log.\ \sin.\ \text{des Winkels am Cometen} = \text{IIIte Const.} - \log(r.\cos.\lambda) \\
&\text{hieraus } C = \alpha \pm \text{diesen Winkel am Cometen}
\end{aligned}$$

4) Der

Knotens und die Neigung der Bahn in den drey Hypothefen zum Grunde legt, eben die Kürze und Gefchmeidigkeit geben kann, und dafs fie fodann wefentliche Vorzüge vor der de la Placifchen hat. Ich nenne fie die Newtonfche: denn es ift nur ein Gedächtnifsfehler des grofsen Eulers, der doch zuverläfsig Newtons Schriften gelefen hatte, und fich gewifs nicht mit fremden Federn zu fchmücken brauchte, wenn er fich die Erfindung derfelben zufchreibt. *) Newton hat fie zu-
erft

4) Der Winkel zwifchen

1ten und 2ten Radius Vector fey		χ'
1 . . 3	. . . .	χ''
2 . . 3	. . . .	χ'''

fo hat man

$$\cos\chi' = \cos(C''-C')\cos\lambda'\cos\lambda'' + \sin\lambda'\sin\lambda''$$
$$\cos\chi'' = \cos(C'''-C')\cos\lambda'\cos\lambda''' + \sin\lambda'\sin\lambda'''$$
$$\cos\chi''' = \cos(C'''-C'')\cos\lambda''\cos\lambda''' + \sin\lambda''\sin\lambda'''$$

wobey zu merken, dafs man die Sinus und Cofinus von λ fchon in den vorigen Formeln gebraucht, und dafs man nur zwey von diefen drey Formeln berechnet. 5) Es fey nun

$$\chi' - (\varphi'' - \varphi') = q$$
$$\chi'' - (\varphi''' - \varphi') = n$$

So mufs, wenn die Annahmen für die Diftanz des Periheliums und den Durchgang durchs Perihelium richtig find, q und n gleich Null feyn. Da diefs felten der Fall ift, fo ändert man erftlich blos die Zeit des Durchgangs durchs Perihelium: und wiederholt die vorige Rechnung dann noch einmal mit veränderter Diftanz des Periheliums. Aus den Vergleichungen der drey fo gefundenen Werthe von q und n, läfst fich durch Interpoliren eine Hypothefe finden, wo beyde Werthe $= 0$ find; welche dann durch eine ähnliche Rechnung zu prüfen ift. *Anmerk. d. Herausgeb.*

*) *Cum igitur hoc defideratum aliquamdiu animo volviffem, fequentem methodum fum affecutus etc. Theoria mot. plan. et com. p. 140.*

erst angegeben, und Gregory ausführlich erläutert. *) Viele neuere Schriftsteller nennen indeſs nur Eulern, ohne Newtons zu erwähnen.

§. 69.

Gewöhnlich hat man diese Methode nur dann brauchen zu müssen geglaubt, wenn man die elliptischen Elemente einer Cometenbahn finden wollte, eine Arbeit, die selten etwas zuverläſsiges giebt, ob gleich, wenn man einmal diese undankbare Arbeit unternehmen will, gerade diese Methode am allerbequemsten dabey angewandt werden kann. Allein auf eine viel kürzere Art dient sie zur Verbesserung der parabolischen Elemente. So hat sie auch Struyk, nur, weil ihm das schöne Lambertsche Theorem noch nicht bekannt war, mit unnöthiger Weitläuftigkeit, und vielen überflüſsigen Rechnungen gebraucht. **) Kürzer habe ich mich ihrer schon vor 17 Jahren bedient, um die Elemente des Cometen von 1779, aus Beobachtungen, die ich fast ohne alle Instrumente angestellt hatte, zu berechnen. ***)

§. 70.

Bey dieser Methode kömmt nun die Aufgabe vor: aus der gegebenen Lage der Cometenbahn gegen die Ecliptik, und der geocentrischen Länge und Breite des Cometen, die heliocentrische Entfernung des Cometen vom

*) *Newton Princip. l. III. p. 42.*

**) *N. Struyk Vervolg van de Beschryving der Staartsterren Amst. 1753 p. 1. sqq.*

***) Astronomisches Jahrbuch, 1782. p. 130 131.

vom Knoten, und den Abſtand des Cometen von der Sonne zu finden. Newton ſetzt die Auflöſung als bekannt voraus: Gregory, Euler und Struyk haben ſie vorgetragen. Herr Lexell hat in einer eigenen Abhandlung, und endlich Herr Profeſſor Nordmark in einem Programm den dazu dienenden Formeln die möglichſte Kürze und Geſchmeidigkeit zu geben geſucht. Und doch ſcheint es mir, daſs man dieſe Aufgabe zum Gebrauch noch bequemer auflöſen könne, als bisher geſchehen iſt. Immer hat hat man ſich nemlich nur der ebenen Trigonometrie dabey bedient: und die Aufgabe gehört offenbar für die ſphäriſche, da es hier auf die Lage zweyer Ebenen gegeneinander ankömmt, die erſte Ebene wird durch den Mittelpunct der Sonne, der Erde, und des Cometen beſtimmt: die andere iſt die durch den Knoten und die Neigung gegebene Ebene der Cometenbahn.

§. 71.

Fig. 3.

Es' ſey demnach EA☊TL die Ecliptik, ☊ der Ort des Knotens, in unſerer Figur des niederſteigenden. J☊N die aus der Sonne geſehene ſcheinbare Cometenbahn, T der Ort der Erde, C der beobachtete geocentriſche Ort des Cometen. Man ziehe durch T und C einen gröſsten Kreis TKCG, ſo iſt K der heliocentriſche Ort des Cometen, ☊K die heliocentriſche Entfernung des Cometen vom ☊, TK die heliocentriſche Entfernung des Cometen von der Erde, KC der Winkel am Cometen, und endlich das Suppplement von TC die geocentriſche Entfernung des Cometen von der Sonne. Man ſieht leicht, daſs man alle dieſe Stücke durch die Auflöſung zweyer ſphäriſcher Dreyecke findet.

1) Im

1) Im rechtwinklichten Triangel ACT ist gegeben TA = dem Unterschiede der geocentrischen Länge des Cometen, und der Länge der Erde, und AC die beobachtete Breite des Cometen. Man suche

$$\text{I. } \cos TC = \cos TA \cos AC$$

und

$$\text{II. } \cot ATC = \cot AC \sin TA$$

2) In dem schiefwinklichten Triangel ☊KT ist gegeben ☊T = dem Unterschiede der Länge des Knotens und der Erde, der Winkel T☊K = der Inclination der Cometenbahn, und der eben gefundene Winkel ☊TK = ATC. Man suche ☊K und TK durch die Formeln

$$\text{III. } \tan \tfrac{1}{2}(☊K + TK) = \frac{\cos \frac{1}{2}(☊TK - T☊K)}{\cos \frac{1}{2}(☊TK + T☊K)} \tan \tfrac{1}{2} ☊T.$$

$$\text{IV. } \tan \tfrac{1}{2}(☊K - TK) = \frac{\sin \frac{1}{2}(☊TK - T☊K)}{\sin \frac{1}{2}(☊TK + T☊K)} \tan \tfrac{1}{2} ☊T.$$

Damit ist dann auch KC = TC — TK bestimmt, und so ist, wenn wir wie sonst, R die Distanz der Erde, r die Distanz des Cometen von der Sonne nennen,

$$\text{V. } r = \frac{R. \sin TC}{\sin KC.}$$

§. 72.

Vergleicht man diese Formeln mit denen, die man bisher gegeben hat, so wird ihre vorzügliche Bequemlichkeit, besonders bey der Anwendung auf die Verbesserung einer Cometenbahn einleuchtend seyn. Euler z. E. braucht in den *Recherches sur la vraie orbite elliptique de la Cométe* 1769, acht Formeln, da wir hier mit fünf ausreichen. Alle acht muss Euler für jede der drey Hypothesen, die er in Ansehung der Länge des Knotens und der Neigung der Bahn angenommen hatte, berechnen: hier bleibt die erste, zweyte, und der Zähler der fünften bey allen drey Hypothesen dieselben: und noch über dem ist der Coefficient von tang $\frac{1}{2}$ ☊ T für zwey Hypothesen gleich. Kurz Euler muss für jede Beobachtung 75, wir brauchen nur 43 Logarithmen hinzuschreiben. Lexell und Nordmark reichen etwa mit 57 oder 60 aus.

§. 73.

Dadurch dass hier die Aufgabe auf die Auflösung zweyer sphärischen Dreyecke gebracht ist, wird es nun auch leicht, statt der drey Hypothesen Differential-Formeln zu gebrauchen, oder allgemein zu berechnen, was kleine Aenderungen in der Länge des Knotens, und der Neigung der Bahn in ☊ K und r für Veränderungen hervorbringen. Allein Versuche haben mich überzeugt, dass der Nutzen für die Rechnung nicht erheblich ist. Man berechnet eben so leicht ☊ K und r nach unsern Formeln für drey Hypothesen, als jene Differential-Formeln. Ich setze sie deswegen auch um so weniger hieher, da sie sich fast ohne Mühe finden lassen.

§. 74.

Hat man also drey Hypothesen für die Länge des Knotens und die Neigung der Bahn angenommen, so berechnet man für jede derselben, und für die 3 Beobachtungen ☊ K $= \xi$, und r. Sind diese gefunden, so muss man die Chorde zwischen der ersten und zweyten, und der ersten und dritten Beobachtung suchen.

Es

Es ist aber:

$$k'' = \sqrt{(r'' - r')^2 + 4\, r'\, r''\, \sin \tfrac{1}{2}\, (\xi'' - \xi')^2}$$

$$k'' = \sqrt{(r''' - r')^2 + 4\, r'\, r'''\, \sin \tfrac{1}{2}\, (\xi''' - \xi')^2}$$

Aus k', k'', und r', r'', r''', findet sich unmittelbar die Zeit, die nach den drey Hypothesen zwischen der ersten und zweyten, und zwischen der ersten und dritten Beobachtung hätte verstreichen sollen. Blos aus der Vergleichung dieser Zeiten mit den beobachteten ergiebt sich die wahre Länge des Knotens, und die wahre Neigung der Bahn: und sodann durch leichte Interpolation der wahre Werth von r', r''', ξ', ξ''', wodurch die übrigen Bestimmungsstücke der Bahn mit leichter Mühe gefunden werden.

§. 75.

Um das ganze Verfahren also vor Augen zu legen, mögen die drey Hypothesen so vorgestellt werden:

	1te Hyp.	2te Hyp.	3te Hyp.
Länge des ☊	☊	☊ $+ p$.	☊
Neigung der Bahn	i	i	$i + q$

wobey p und q von 10, 15, 20 oder gar mehrern Minuten genommen werden dürfen. Für jede dieser Hypothesen, und für drey Beobachtungen berechnet man nach §. 71.

$$\begin{array}{ccc} \xi' & \xi'' & \xi''' \\ r' & r'' & r''' \end{array}$$

und hierauf nach §. 74.

$$k' \qquad k''$$

Damit findet man die Zeit, die nach den drey Hypothesen zwischen der ersten und zweyten, und zwischen der ersten und dritten Beobachtung hätte verstreichen sollen.

1te Hyp.	2te Hyp.	3te Hyp.
τ'	$\tau' + l$	$\tau' + m$
τ''	$\tau'' + o$	$\tau'' + s$

Die beobachteten Zwischenzeiten sind aber t' und t''. Ist nun die wahre Länge des Knotens $=$ ☊ $+ x$, die wahre Neigung der Bahn $= i + y$ so hat man die Gleichungen

$$\frac{xl}{p} + \frac{ym}{q} = t' - \tau'$$

$$\frac{xo}{p} + \frac{ys}{q} = t'' - \tau''$$

und hieraus

$$x = \frac{(t' - \tau')\, sp - (t'' - \tau'')\, mp}{mo - sl}$$

$$y = \frac{(t' - \tau')\, oq - (t'' - \tau'')\, lq}{mo - sl}$$

also die wahre Länge des Knotens, und die wahre Neigung der Bahn. *) Die wahren Werthe von r', r''', ξ', ξ''', wer-

*) Diess sind die Interpolations-Formeln, die auch bey der Methode des Hrn. de la Place (pag. 79 u. 80 in der Note) zu gebrauchen sind. Man bezeichne die Werthe der dortigen q und n für die drey Hypothesen mit q', q'', q'''; n', n'', n''' so hat man

$$y\,(q' - q'') + x\,(q' - q''') = q' \text{ und}$$
$$y\,(n' - n'') + x\,(n' - n''') = n'$$

wo Auflösung und Gebrauch dieser Gleichungen mit denen des §. 75 ganz analog, und y der Factor ist, womit die Aenderung des Abstands der Sonnennähe; x hingegen der Factor, womit die Aenderung der Zeit des Durchgangs durch die Sonnennähe multiplicirt wird; um die wahren Aendewerden ſodann durch Interpolation geſucht, indem für jede beliebige Gröſse, die zum Beyſpiel in den drey Hypotheſen gefunden worden iſt

$$B \qquad B+f \qquad B+g$$

der

Aenderungen dieſer beyden Stücke zu erhalten. Bisweilen wird es aber nöthig, die zweyten Differenzen mitzunehmen, und der Herausgeber hat ſich der vom Hrn. de la Place hierzu gegebenen Formeln mit Vortheil bey mehrern Cometen bedient. Er theilt ſie daher in Beziehung auf Hrn. de la Place Methode mit; ihre Anwendung auf jede andere, kann jedoch keine Schwierigkeit machen. Man berechne nämlich die q und n (p. 80 Note) in folgenden 5 Hypotheſen. 1) Mit den durch die erſte Annäherung gefundenen Elementen. 2) Mit einer geringen Aenderung des Abſtandes der Sonnennähe. 3) Mit der doppelten vorigen Aenderung. 4) Mit Beybehaltung der Diſtanz der Sonnennähe in der 1ſten Hypotheſe, ändere man die Zeit des Durchgangs durchs Perihelium um etwas geringes. 5) Mit der doppelten vorher in der 4ten Hypotheſe gemachten Aenderung. Es ſollen nun q', q'', q''', q'''', q''''' und n', n'', n''', n'''', n''''', die nach den Formeln (*l. c.*) in dieſen fünf Hypotheſen gefundenen Werthe von q und n; x und y die Factoren bedeuten, womit man die angenommenen Aenderungen der vierten und zweyten Hypotheſe multipliciren muſs, um die wahren Aenderungen zu erhalten, ſo finden ſich x und y aus folgenden Gleichungen:

$$o = (4q'' - 3q' - q''')\,y + (q''' - 2q'' + q')\,y^2$$
$$+ (4q'''' - 3q' - q''''')\,x + (q''''' - 2q'''' + q')\,x^2 + 2q'$$
$$o = (4n'' - 3n' - n''')\,y + (n''' - 2n'' + n')\,y^2$$
$$+ (4n'''' - 3n' - n''''')\,x + (n''''' - 2n'''' + n')\,x^2 + 2n'$$

Wir bemerken noch, daſs man zwar dieſe Gleichungen directe durch eliminiren auflöſen kann, aber durch eine beſchwerliche Rechnung dennoch auf eine Gleichung des 4ten Grades geführt wird; daſs es daher ſtets bequemer iſt,

 erſt

der wahre Werth

$$B + \frac{fx}{p} + \frac{gy}{q}$$

ſeyn wird. Es iſt klar, daſs man, alle mögliche Genauigkeit zu erhalten, die Arbeit durch drey neue, minder von einander abweichende Hypotheſen über die Länge des ☊, und die Neigung der Bahn erneuern müſſe, wenn man x und y merklich gröſser als p und q finden ſollte, oder für p und q zu groſse Werthe z. B. von 50, 60, oder gar mehrern Minuten angenommen hätte. Denn eigentlich iſt dieſe Methode nur in ſo weit genau, als man die Veränderungen aller übrigen Gröſsen den Veränderungen der Länge des Knotens, und der Neigung der Bahn proportional ſetzen kann, welches allerdings nur für kleine Werthe von p und q zuläſsig iſt. Dieſe Einſchränkung trift indeſſen die de la Placiſche und die folgende Methode gleichfalls.

§. 76.

Auſſer dieſen beyden Verbeſſerungs-Methoden werde ich nun noch eine angeben, die mir wirklich, wo es blos um die paraboliſchen Elemente zu thun iſt, am bequemſten ſcheint. Und wenn ſie auch in Anſehung der Bequemlichkeit nicht den Vorzug hätte, den ſie wirklich hat, ſo iſt es doch immer gut, mehrere Methoden zur Auswahl zu haben, da ſich die beyden angeführten nicht

immer

erſt genäherte Werthe von x und y mit Hinweglaſſung der quadratiſchen Glieder x^2 und y^2 zu ſuchen, und dann mit dieſen die Quadrate von x und y in obigen Gleichungen zu berechnen und dadurch wegzuſchaffen. Aus den Gleichungen des erſten Grades, die man ſo erhält, läſst ſich dann x und y leicht und ſchärfer finden.

Anmerkung des Herausgebers.

immer brauchen laſſen. Herrn de la Place Methode iſt miſslich, wenn der Winkel am Cometen in einer der drey zum Grunde gelegten Beobachtungen ſehr nahe ein rechter iſt: und Newtons Berechnungsart iſt dann nicht zu gebrauchen, wenn entweder die Neigung der Cometenbahn ſehr klein, oder die Erde in einer der Beobachtungen der Knotenlinie ſehr nahe iſt. Statt der Hypotheſen über den Abſtand und die Zeit der Sonnennähe, oder über die Lage der Bahn gegen die Ecliptik mache man drey Vorausſetzungen über die curtirten Diſtanzen des Cometen von der Sonne in zwey ſo weit von einander entfernten Beobachtungen, als man nur hat. Man berechne dieſe curtirten Diſtanzen nemlich aus der ſchon beyläufig bekannten Bahn,*) da ſie Δ', Δ''', heiſſen mögen, und nehme ſodann an:

	1te Hypoth.	2te Hyp.	3te Hyp.
1te Beob.	Δ'	$\Delta' + m$	Δ'
3te Beob.	Δ'''	Δ'''	$\Delta''' + n$

Man berechne für Δ', und $\Delta' + m$ und der geocentriſchen Beobachtung die heliocentriſche Länge und Breite des Cometen in der erſten Beobachtung: und für Δ''' und $\Delta''' + n$ die heliocentriſche Länge und Breite in der dritten Beobachtung. Dieſe Rechnungen ſind ſehr leicht. Denn es iſt der Winkel an dem auf der Ebene

*) Statt der curtirten Diſtanzen Δ', Δ''', kann man auch mit geringer Veränderung der Rechnung die wahren Diſtanzen r', r''' bey den drey Hypotheſen zum Grunde legen, wenn man etwa die curtirten Diſtanzen aus der ſchon beyläufig bekannten Bahn nicht ſo leicht berechnen könnte, welches beſonders der Fall ſeyn wird, wenn man ſich noch nicht die Mühe gegeben hat, die Länge des ☊ und die Neigung der Bahn zu ſuchen, ſondern blos Zeit und Abſtand der Sonnennähe beſtimmt hat.

der Ecliptik projicirten Ort des Cometen, den ich c nennen will, durch die Gleichung

$$\sin c = \frac{R \sin (A - \alpha)}{\Delta}$$

gegeben, *) und damit findet sich ε, oder die Elongation des Cometen von der Erde

$$\varepsilon = 180^\circ - c - (A - \alpha)$$

Die heliocentrische Breite aber

$$\tang \lambda = \frac{\tang \beta \sin (A - \alpha)}{\sin \varepsilon}$$

Dann sucht man sogleich nach den Formeln des §. 42 für jede der drey Hypothesen die Länge des aufsteigenden Knotens, und die Neigung der Bahn, und da

$$r' = \frac{\Delta'}{\cos \lambda'}$$

$$r''' = \frac{\Delta'''}{\cos \lambda'''}$$

ist, auch die wahren Anomalien in beyden Beobachtungen, den Abstand des Periheliums, und die Zeit vom Perihelio bis zur ersten und dritten Beobachtung. Folglich hat man auch die Zeit, die zwischen diesen beyden Beobachtungen, den drey Hypothesen zu Folge hätte verfliessen sollen. Diese mit der wirklich beobachteten verglichen, giebt die erste Vergleichung. In den drey gefundenen Bahnen addirt man zu der Zeit vom Perihelio bis zur ersten Beobachtung, die beobachtete Zeit von der ersten bis zu einer zweyten von den übrigen beyden hinreichend entfernten Beobachtung, und be-

rech-

*) Es ist bekannt, dass dem Sinus von c zwey Winkel, ein stumpfer und ein spitzer zugehören können. Bey der schon beyläufig bekannten Bahn, wird man nicht leicht zweifelhaft seyn können, welchen man wählen müsse.

rechnet ſodann in jeder der drey Hypotheſen die geocentriſche Länge, oder wenn ſich die Breiten ſtärker ändern, die geocentriſche Breite in dieſer zweyten Beobachtung. Dieſe berechnete Länge oder Breite mit der beobachteten verglichen, giebt die zweyte Gleichung

§. 77.

Dieſs ganze Verfahren läſst ſich demnach alſo vorſtellen:

	1. Hyp.	2. Hyp.	3. Hyp.	WahreBahn
Curtirt. Abſtand in der 1ten Beob.	Δ'	$\Delta' + m$	Δ'	$\Delta' + x$
in der 3ten Beob.	Δ'''	Δ'''	$\Delta''' + n$	$\Delta''' + y$
Zeit zwiſchen der 1ten u. 3ten Beob.	τ	$\tau + p$	$\tau + q$	t'' beob. Zeit
Länge in der 2ten Beobachtung	α	$\alpha + r$	$\alpha + s$	α'' beob. Länge

und ſodann iſt

$$\frac{px}{m} + \frac{qy}{n} = t'' - \tau$$

und

$$\frac{rx}{m} + \frac{sy}{n} = \alpha'' - \alpha$$

woraus ſich auf eben die Art, wie §. 75. der Werth von x und y ergiebt. Iſt nun m und n nicht zu groſs angenommen, und x und y kleiner, oder nicht merklich gröſser, als m und n, ſo laſſen ſich alle Elemente der Cometenbahn durch Interpolation leicht finden.

§. 78.

Drey vollſtändige Beobachtungen ſind im Grunde zu viel, um die Bahn eines Cometen, wenn man ſie als eine Parabel annimmt, zu beſtimmen. Dies will ſagen, wenn die Bahn des Cometen nicht wirklich paraboliſch iſt, oder

wenn

wenn Fehler in den Beobachtungen ſtecken, ſo kann man nur drey Längen und zwey Breiten, oder zwey Längen und drey Breiten durch eine Parabel angeben. Dieſs iſt auch der Grund, warum ich in der eben angegebenen Verbeſſerungsmethode von der mittlern Beobachtung nur die Länge oder auch nur die Breite gebraucht habe. Allein in Lamberts, de la Place's, und der hier auf die Parabel angewendeten Newtonſchen Methode zur Verbeſſerung einer Cometenbahn ſcheint es, daſs man drey vollſtändigen Beobachtungen unter der paraboliſchen Hypotheſe genug thue. Allein dieſs ſcheint auch nur ſo. Iſt nemlich die Bahn eines Cometen von einer Parabel merklich verſchieden, oder ſind die Beobachtungen fehlerhaft, ſo bleibt nothwendig irgend eine in der Natur des Problems liegende Bedingung unerfüllt, indem man drey vollſtändigen geocentriſchen Beobachtungen, und den paraboliſchen Bewegungsgeſetzen genug zu thun glaubt. So wird man nach Lambert §. 65. die drey geocentriſchen Diſtanzen ſo beſtimmen, daſs der Comet nach den paraboliſchen Bewegungsgeſetzen zwiſchen den drey dadurch angegebenen Puncten gerade die beobachteten Zwiſchenzeiten braucht, aber dieſe drey Puncte werden nicht in einer durch den Mittelpunct der Sonne gehenden Ebene liegen. Herr de la Place wird nach §. 67. die Zeit und den Abſtand des Periheliums ſo beſtimmen, daſs die auf beyde Arten berechneten Unterſchiede der wahren Anomalien mit einander übereinſtimmen, allein die aus dieſer gefundenen Zeit und Abſtand des Periheliums, und den drey geocentriſchen Beobachtungen berechneten heliocentriſchen Oerter des Cometen werden nicht in einen gröſsten Kreis der Sphäre fallen. Endlich wird man nach der auf die Pa-

rabel

rabel angewandten Newtonſchen Methode eine Länge des Knotens, und eine Neigung der Bahn finden, wodurch die aus den drey geocentriſchen Beobachtungen berechneten r', r'', r''', und k', k'', genau nach den Bewegungsgeſetzen der Parabel die beobachteten Zwiſchenzeiten geben, allein die dadurch angegebenen Oerter werden nicht in einer und derſelben Parabel liegen. In allen drey Fällen wird man alſo nicht eine, ſondern eigentlich drey Parabeln finden, die mehr oder weniger von einander unterſchieden ſind, je nachdem die Beobachtungen genauer ſind, oder die wirkliche Bahn des Cometen mehr oder weniger von einer Parabel abweicht. Man nimmt und berechnet indeſſen nur diejenige dieſer Parabeln als die wirkliche Bahn, die durch die beyden äuſerſten Puncte geht, oder die der erſten und dritten Beobachtung Genüge thut. Für dieſe drey Parabeln iſt nun bey Herrn de la Place, Zeit und Abſtand des Periheliums, bey Newtons Methode Länge des Knotens und Neigung der Bahn einerley: die übrigen drey Elemente, ſo wie bey Lambert alle fünf, fallen in allen drey Parabeln verſchieden aus.

§. 79.

Die Bedingung, daſs alle Puncte der Cometenbahn in einer durch den Mittelpunct der Sonne gehenden Ebene liegen müſſen, iſt an ſich die weſentlichſte der Cometentheorie. Schon dieſs giebt der hier auf die Parabel angewandten Newtonſchen Verbeſſerungs-Methode der Cometenbahnen den Vorzug vor den übrigen, indem ſie dieſer Hauptbedingung genug thut. Allein auch darinn hat ſie vor denſelben einen groſsen Vorzug, daſs man ſie unmittelbar brauchen kann, die elliptiſchen Beſtimmungs-

ſtücke

ſtücke der Cometenbahn zu finden, wenn es ſich ergeben ſollte, daſs man bey dem Cometen, den man berechnet, mit einer Parabel nicht ausreiche.

§. 80.

Um zu wiſſen, ob dieſs der Fall iſt, ſo berechne man aus den für die beyden äuſerſten Beobachtungen gefundenen paraboliſchen Elementen wieder ξ'' und r'', die man auch aus der Rechnung §. 75. gefunden hat, oder leicht finden kann. Weichen die auf beyde Arten gefundenen Werthe merklich von einander ab, iſt p und q nicht zu groſs angenommen, darf man ſich auf die Genauigkeit der Beobachtungen verlaſſen, und ſind dieſe weit genug von einander entfernt, ſo kann man dann verſuchen, ſtatt der Parabel die elliptiſche Bahn zu beſtimmen. Ich habe nicht gefunden, daſs ſich hiebey die Eulerſchen Methoden merklich abkürzen lieſsen, die er in den beyden oft angeführten Werken gegeben hat. Statt der Chorden k', k'', muſs man ſobald man ξ', ξ'', ξ''', r', r'', r''', gefunden hat, ſogleich den Parameter der Ellipſe für jede der drey Hypotheſen durch die Formel

$$b = \frac{\sin(\xi'' - \xi') + \sin(\xi''' - \xi'') - \sin(\xi''' - \xi')}{\frac{\sin(\xi''' - \xi'')}{r'} + \frac{\sin(\xi'' - \xi')}{r'''} - \frac{\sin(\xi''' - \xi')}{r''}}$$

beſtimmen, welche Formel viel bequemer iſt, als diejenige, die Euler in der *theoria mot. plan. et com.* angiebt, aber im weſentlichen mit derjenigen übereinkömmt, die in den *Recherches ſur l'orbite de la Cométe* 1769 enthalten iſt. Aus dem gefundenen Parameter wird leicht die wahre Anomalie in der erſten Beobachtung, der Abſtand des Periheliums, und ſodann die Zeiten vom

Peri-

Perihelium, mithin auch die Zeiten zwischen den Beobachtungen berechnet. Hierbey ziehe ich nun die Formeln in der *Theoria*, denen in den *Recherches* vor. Durch Vergleichung der berechneten Zwischenzeiten mit den beobachteten, bestimmt man auf eben die Art, wie bey der Parabel, die Verbesserung der Länge des Knotens, und der Inclination, und den wahren Werth der elliptischen Elemente durch Interpolation.

§. 81.

Selten oder nie wird man in den Fall kommen, die elliptische Bahn eines Cometen um irgend eines erheblichen Nutzens oder Vortheils willen berechnen zu müssen. Das Stück der Cometenbahn, das der Sonne am nächsten liegt, läss sich fast immer durch die parabolische Hypothese so genau bestimmen, dass man den Cometen künftig wieder erkennen, und seinen gegenwärtigen Lauf, Abstand von Erde und Sonne u. s. w. scharf genug darstellen, voraussagen, und beurtheilen kann. Und diess ist, dünkt mich, der ganze Zweck einer Cometenberechnung, da die Bestimmung der elliptischen Bahn doch nie die Umlaufszeit mit einiger Sicherheit kennen lehrt, *) indem die Abweichungen der parabolischen Hypo-

*) Der Comet von 1770 scheint eine grosse und berühmte Ausnahme zu machen. Ohne darüber entscheiden zu wollen, darf man doch bemerken 1) dass die Beobachtungen vor dem Perihelium deswegen fehlerhafter seyn können, weil der schweiflose Comet einen sehr grossen scheinbaren Durchmesser hatte, und es wohl nicht leicht ist, immer genau den Schwerpunct dieser Dunstmasse als den eigentlichen Gegenstand der Beobachtung zu unterscheiden. 2) Dass die Newtonsche, oder Eulersche Methode, wodurch Herr Lexell

Hypothefe von der wahren Bahn fich zu fehr mit den Fehlern der Beobachtungen vermengen. Diefe Fehler find gewifs in manchen Fällen weit gröfser, als man fich vorftellen follte, woran gröfstentheils Licht und Geftalt des Cometen, und Unvollkommenheiten unferer Fixfternverzeichniffe Schuld find.

§. 82.

Bey Berechnung der elliptifchen Elemente erfordert Auswahl und Behandlung der Beobachtungen die gröfste Schärfe und Sorgfalt. Es mufs auf Parallaxe, Aberration, und Nutation gehörige Rückficht genommen werden. Vielleicht wäre es gut, für eine der wahren elliptifchen Bahn fchon nahe kommende Parabel alle Beobachtungen mit der gröfsten Genauigkeit zu berechnen. Die Unterfchiede der Beobachtungen von der Rechnung müffen in fo fern fie blos der elliptifchen Figur der Bahn zugehören, eine einförmige und regelmäfsige Zu- und Abnahme zeigen. Sprünge und Unregelmäfsigkeiten zeigen Fehler der Beobachtung oder Rechnung an: denn auch bey diefer dürfen hier einzelne Secunden nicht vernachläfsiget werden. So wird man ziemlich im Stande feyn, wenn man anders zahlreiche Beobachtungen vor fich hat, diefe von ihren Fehlern zu befreyen; und dann läfst fich etwas über die Ellipfe verfuchen, befonders wenn der Comet in beyden Aeften feiner Bahn, vor und nach der Sonnennähe gefehen worden ift.

Lexell die Ellipfe, und die Umlaufszeit diefes Cometen beftimmte, gerade in diefen Fall etwas mifslich anzuwenden war, da die Bahn eine fo geringe Neigung gegen die Ecliptik hat. Ich läugne indeffen nicht dafs diefer paradoxe Comet eine von der Parabel fehr abweichende Ellipfe befchrieben hat, da fo grobe Beobachtungen, wie die Lambertfchen (Beyträge 3ter Theil. p. 318) fchon die Unzulänglichkeit der parabolifchen Hypothefe zeigten, und felbft die nach dem Perihelium angeftellten Beobachtungen fich nicht in einer Parabel darftellen liefsen. Sonderbar ift der Irrthum eines grofsen Geometers und Analyften, des Herrn du Sejour, der durch mehrere berechnete Parabeln drey vollftändigen Beobachtungen diefes Cometen völlig genug gethan zu haben glaubte. *S- Du Séjour traité analytique des mouvemens apparens des corps céleftes. Tom. II. Chap. 15. p. 613. fq.*