Zweyter Abſchnitt.

Ueber einige Gleichungen des erſten und zweyten Grades, die man zur Beſtimmung der Cometenbahnen vorgeſchlagen hat.

§. 20.

Die nicht völlig wahren Voraufetzungen §. 11, worauf ſich die directen und indirecten Auflöſungen des Cometenproblems gründen, führen geometriſch betrachtet weiter, als man in den bisher hergezählten Methoden gegangen iſt. Wenn man annimmt, das Stück der Cometenbahn, das zwiſchen drey Beobachtungen von dem Cometen beſchrieben worden, ſey eine gerade gleichförmig durchlaufene Linie, ſo laſſen ſich die Diſtanzen des Cometen von der Erde durch Gleichungen des erſten Grades finden. Die Vorausſetzung, daſs die Chorde vom mittlern Radius Vector im Verhältniſs der Zeiten geſchnitten werde, führt zu Gleichungen des zweyten Grades, eben dieſe Diſtanzen zu beſtimmen. Dieſe Gleichungen verdienen um ſo mehr eine nähere Unterſuchung, da ſie theils nicht blos von ihren erſten Erfindern, ſondern auch von andern Gelehrten als ſo brauchbar und vorzüglich anempfohlen werden, was ſie doch nicht verdienen: theils von andern unrichtig beurtheilt ſind, und man aus ihrer Verwerflichkeit Schlüſſe gezogen hat, die ſich nicht daraus folgern laſſen.

§. 21.

Das Problem, durch drey gegebene gerade Linien eine vierte zu ziehen, die von ihnen im gegebenen Verhältniſs geſchnitten wird, iſt eine unbeſtimmte Aufgabe. Man weiſs, daſs alle Tangenten derjenigen Parabel dieſer Forderung genug thun, von der die drey gegebenen geraden Linien gleichfalls Tangenten ſind, und die durch eine einzige auf vorgeſchriebene Art gezogene gerade Linie, folglich durch vier Tangenten völlig gegeben iſt. Aber unbeſtimmt bleibt die Aufgabe nur, wenn die gegebenen drey geraden Linien in einer Ebene liegen. Liegen ſie nicht in einer Ebene, ſo giebt es überhaupt für jeden angenomnen Punct auf einer dieſer geraden Linien, nur eine einzige gerade Linie, die auch von den übrigen beyden geſchnitten wird. Kömmt nun die Bedingung hinzu, daſs ſie im gegebenen Verhältniſs geſchnitten werden ſoll, ſo iſt die Lage des Puncts, wodurch ſie gezogen werden muſs, völlig und zwar durch eine Gleichung des erſten Grades gegeben. Bouguer nahm alſo an, der Comet habe während dreyer nicht weit von einander entfernter Beobachtungen eine gerade Linie gleichförmig durchlaufen: dieſe gerade Linie muſste von den drey durch die Beobachtungen angegebenen, nicht in einer Ebene liegenden Geſichtslinien im Verhältniſs der Zwiſchenzeiten geſchnitten werden: und ſo glaubte er durch dieſe Aufgabe die Diſtanzen des Cometen von der Erde, mithin die ganze Laufbahn, ja ſelbſt die Natur derſelben beſtimmen zu können.*)

§. 22.

*) Nach dieſer Bouguerſchen Vorausſetzung, und der obigen Bezeichnung hätte man nemlich die drey Gleichungen

$(x'-x'')$

§. 22.

Allein es kömmt noch ein Fall vor, wo die Aufgabe, wenn gleich die Linien nicht in einer Ebene liegen, wieder unbeſtimmt wird. Immer nemlich bleibt es wahr, daſs ſodann durch jeden angenomnen Punct auf einer dieſer Linien nie mehr als eine einzige gerade Linie*) gezogen werden kann, die auch von den übrigen geſchnitten wird. Aber es giebt einen Fall, wo die durch jeden beliebigen Punct auf ſolche Art gezogene gerade Linien alle in einerley Verhältniſs geſchnitten werden. Dieſer Fall tritt dann ein, wenn die drey gegebenen geraden Linien, aſtronomiſch zu reden, verlängert in einen gröſsten Kreis der Sphäre treffen: oder geometriſch, wenn zwey Linien, die man durch einen beliebigen Punct auf einer dieſer gegebenen Linien mit den übrigen beyden parallel zieht, mit dieſer gegebenen geraden Linie in einer Ebene ſind. Dieſs geſchieht nun immer, wenn nur

$$(x'-x'') : (x''-x''') = t' : t''$$
$$(y'-y'') : (y''-y''') = t' : t''$$
$$(z'-z'') : (z''-z''') = t' : t''$$

woraus ϱ', ϱ'', ϱ''', blos durch lineariſche Gleichungen gefunden werden können, und da die hieraus folgenden Werthe von ϱ' und ϱ''' von der paraboliſchen Hypotheſe ganz unabhängig ſind, ſo könnte nun aus ϱ', ϱ''' und der beobachteten Zwiſchenzeit, nicht allein die Lage und Abmeſſung, ſondern auch die Art des Kegelſchnitts, den der Comet beſchrieben hat, beſtimmt werden, wenn man anders die ſo gefundenen Werthe von ϱ', und ϱ''', als richtig annehmen will.

*) Sind die drey gegebenen geraden Linien nicht in einer Ebene, aber alle drey einander parallel, ſo läſst ſich gar keine gerade Linie ziehn, die von allen dreyen geſchnitten wird.

zwey gerade Linien in dem nemlichen Verhältniſs von den drey gegebenen geraden Linien geſchnitten werden. Wäre alſo auch das Stück der Erdbahn zwiſchen den drey Beobachtungen eine gerade gleichförmig durchlaufene Linie, ſo würde die Bouguerſche Aufgabe unbeſtimmt werden: denn ſodann würde ſowohl die gerade Linie, die die Erde beſchrieben, als die gerade Linie, die der Comet durchlaufen hat, in dem nemlichen Verhältniſs von den Geſichtslinien geſchnitten. Wenn Bouguer alſo die Cometenbahn als geradlinigt und gleichförmig durchlaufen vorausſetzt, ſo konnte er doch die Diſtanzen des Cometen von der Erde nur in ſo fern durch ſeine Aufgabe beſtimmen, als er die Erdbahn zugleich wirklich als krumm und ungleichförmig durchlaufen beybehielt; oder vielmehr, dieſe Diſtanzen wurden bloſs durch die Krümmung, und ungleiche Bewegung der Erde beſtimmt.*) Dieſs geht nun durchaus nicht an: denn wenn die Krümmung der Erdbahn alles beſtimmen ſoll, ſo darf die gewöhnlich eben ſo groſse, oft noch gröſsere Krümmung der

*) Entwickelt man nehmlich die in der Anmerkung zu §. 20. gegebenen drey Gleichungen, und erinnert ſich, es ſey, wenn die Erde auch eine gerade Linie mit gleichförmiger Geſchwindigkeit durchlaufen hat,

$$(R' \cos A' - R'' \cos A'') : (R'' \cos A'' - R''' \cos A''') = t' : t''.$$
$$(R' \sin A' - R'' \sin A'') : (R'' \sin A'' - R''' \sin A''') = t' : t''.$$

ſo werden die drey Gleichungen

$$(\rho' \cos \alpha' - \rho'' \cos \alpha'') : (\rho'' \cos \alpha'' - \rho''' \cos \alpha''') = t' : t''.$$
$$(\rho' \sin \alpha' - \rho'' \sin \alpha'') : (\rho'' \sin \alpha'' - \rho''' \sin \alpha''') = t' : t''.$$
$$(\rho' \tang \beta' - \rho'' \tang \beta'') ; (\rho'' \tang \beta'' - \rho''' \tang \beta''') = t' : t''.$$

woraus ſich, wie man leicht überſieht, nur das Verhältniſs von ρ', ρ'', ρ''', zu einander, nicht ihr Werth beſtimmen läſst.

der Cometenbahn nicht aus der Acht gelaſſen werden, und ſo wird man einen ſonſt nicht gleich deutlichen Ausdruck Lamberts verſtehen lernen, wenn er ſagt, Bouguer habe eben durch den kleinen *Sinus Verſus d b* Fig. 1. die Diſtanz des Cometen von der Erde finden wollen. Auch wird man ſich nun nicht wundern, daſs Hr. de la Grange*) gefunden hat, Bouguers Aufgabe ſey auch noch dann nicht anzuwenden, wenn man die Zwiſchenzeiten der Beobachtungen unendlich klein ſetzt: denn wenn hier gleich das Stück der Cometenbahn unendlich wenig von einer geraden gleichförmig durchlaufenen Linie abweicht, ſo iſt auch das Stück der Erdbahn wieder unendlich nahe eine gerade gleichförmig durchlaufene Linie, und ſo ſind das, wodurch die Auflöſung eigentlich beſtimmt, und das, was bey der Auflöſung als unendlich klein vernachläſſiget wird, Gröſsen von einerley Ordnung. Der Schluſs dieſes groſsen Geometers, daſs es durchaus nicht erlaubt ſey, ein Stück der Cometenbahn auch nur zur Näherung als geradlinigt anzunehmen, wenn man drey Beobachtungen gebraucht, erhält dadurch ſeine eingeſchränktere Bedeutung: denn wenn man ihn, wie Hr. Pingré, allgemein nimmt, ſo ſehe ich nicht, wie z. B. Hr. Boscovichs Conſtruction ein der Wahrheit ſo nahe kommendes Reſultat geben könnte, von der ſich übrigens leicht zeigen läſst, daſs ſie bey unendlich kleinen Zwiſchenzeiten völlig genau iſt.**) — Und ſo wird

*) *Mem. de l'Acad. de Berlin Année 1778. p. 134. 135.*

**) Boscovich nemlich ſetzt nur die Krümmung des kleinen Stücks der Bahn gegen die Länge dieſes Stücks gerechnet, und den kleinen Unterſchied der Geſchwindigkeit gegen die ganze Bewegung = 0, und dieſs geht allerdings an.

es nun auch begreiflich, wie Bouguer felbft, bey Anwendung feiner Methode auf den Cometen von 1729, noch fo glücklich war. Denn da gerade zufälliger Weife diefer Comet fo weit von der Sonne entfernt bleibt, fo ift ein Bogen der Erdbahn vielfach krümmer, als ein in derfelben Zeit befchriebener Bogen der Cometenbahn: und fo konnte hier die Krümmung bey diefer aus der Acht gelaffen, und doch die Diftanz des Cometen von der Erde durch die Krümmung jener ziemlich nahe beftimmt werden. Bouguers Methode giebt alfo nur dann etwas der Wahrheit nahe kommendes, wenn der Comet vielfach weiter von der Sonne entfernt ift, als die Erde, und alfo fehr grofse Bögen der Erdbahn, und fehr kleine Bögen der Cometenbahn in denfelben Zeiten befchrieben werden. In allen übrigen Fällen ift fie völlig unbrauchbar.

§. 23.

Aber man darf nicht die Krümmung und Ungleichheit der Bewegung des Cometen, gegen die der Bewegung der Erde mit Bouguer als unendlich klein anfehen. Herrn de la Grange Betrachtung über den Krümmungskreis gehört alfo wirklich hier gar nicht her. Eben fo wenig fcheint mir des Herrn de la Place Einwurf gegen die Boscovichfche Methode wichtig zu feyn, wenn er fagt, man könne dadurch zuweilen einen Cometen rückläufig finden, der wirklich rechtläufig fey, und fo auch umgekehrt. Denn da Boscovichs Methode auf eine Gleichung des 6ten Grades führt oder beruhet, die mehrere reelle Wurzeln haben kann, und nothwendig zwey haben mufs, fo kann man in der Rechnung leicht auf die unrechte Wurzel treffen. Eine Eigenfchaft des Problems, kein Fehler der Methode, den Herr de la Place auch nur durch eine überflüfsige Gleichung vermeidet, die er die Verficherungs-Gleichung nennt.

§. 23.

Ein ganz ähnliches Urtheil, und aus ganz ähnlichen Gründen wird eine andere in der Cometentheorie berühmt gewordene Aufgabe, uns abnöthigen, diejenige nemlich: wenn vier gerade Linien gegeben ſind, eine fünfte zuziehen, die von ihnen im gegebenen Verhältniſs geſchnitten wird. Wreen, Newton, Gregory, Caſſini, und Lambert haben Auflöſungen dieſer Aufgabe gegeben, und man hat allgemein vorgeſchlagen, zur Näherung die Bahn eines Cometen zwiſchen vier nicht weit von einander entfernten Beobachtungen als geradlinigt und gleichförmig durchlaufen anzunehmen, und ſo aus vier beobachteten Längen *) die curtirten Diſtanzen des Cometen von der Erde mittelſt dieſer Aufgabe zu beſtimmen. Es muſs auffallen, daſs man immer nur bey dem Vorſchlage geblieben iſt, und daſs niemand dieſen

*) Wenn die vier gegebenen geraden Linien nicht in einer Ebene liegen, ſo iſt die Lage einer fünften, die von allen vieren geſchnitten werden ſoll, an ſich beſtimmt, ohne auf die Verhältniſſe der Abſchnitte zu ſehen. Man könnte alſo blos mit der Vorausſetzung, daſs das Stück der Cometenbahn zwiſchen den 4 Beobachtungen gerade ſey, ausreichen, ohne auch die gleichförmige Geſchwindigkeit anzunehmen, wenn man die Breiten mit in Betrachtung ziehen wollte. Die Lage dieſer fünften geraden Linie wird indeſs nicht durch eine lineariſche, ſondern durch eine Gleichung des 8ten Grades, und eine ziemlich verwickelte Formel gefunden werden. Auch würden bey dieſer Aufgabe ähnliche Einſchränkungen, wie bey der Bouguerſchen ſtatt finden, ob man gleich ſonſt viel weiter damit reichen könnte. Denn die Geſchwindigkeit des Cometen iſt gerade dann am ungleichförmigſten, wenn ſeine Bewegung ſich am mehrſten der geraden Linie nähert, und umgekehrt.

diesen Vorschlag, wenigstens nicht mit Glück, befolgt hat. Selbst Cassini, der seine ganze Cometentheorie darauf gründete, hat nie wirklichen Gebrauch davon gemacht. Die Methode, wodurch er die Distanz des Cometen von 1729 so glücklich bestimmte, ist von dieser, nur vielleicht nicht wesentlich, verschieden, ob sich gleich gerade bey diesem Cometen die Wreensche Aufgabe aus eben den Gründen mit Erfolg hätte anwenden lassen, warum hier Bouguers Methode ein der Wahrheit so nahe kommendes Resultat gab. Bey dem Cometen von 1742 hat Cassini sie versucht: er beklagt sich aber, dass sie gar zu genaue Beobachtungen erfordere, und deswegen nichts befriedigendes gegeben habe. An der Genauigkeit der Beobachtungen lag es nun wohl so eigentlich nicht. Das wahre ist nemlich, dass diese Aufgabe zur Bestimmung der Distanz des Cometen von der Erde eben so wenig brauchbar ist, als die Bouguersche. Sobald man nemlich voraussetzt, auch die Erde habe während der vier Beobachtungen eine gerade Linie gleichförmig durchlaufen, so wird die Aufgabe unbestimmt: und so soll auch hier die Krümmung der Erdbahn die Distanzen bestimmen, während man die Krümmung der Cometenbahn nicht in Betrachtung zieht. Diess geht nun schlechterdings nicht an, und es kann selbst bey unendlich kleinen Zwischenzeiten und den schärfsten Beobachtungen diese Methode nichts der Wahrheit nahe kommendes geben, wenn der Comet nicht vielfach weiter von der Sonne entfernt ist, als die Erde. So würde sie z. B. beym Uranus, ehe die Bemerkung, dass er ein Planet sey, ein leichteres Mittel darbot, seine Distanz zu bestimmen, mit Nutzen anzuwenden gewesen seyn. Den Beweis, dass die Aufgabe unbestimmt wird,

sobald

ſobald man vorausſetzt, auch die Erde habe während der vier Beobachtungen eine gerade Linie gleichförmig durchlaufen, übergehe ich der Kürze wegen, ob er ſich gleich auf mehrere Arten führen läſst, und bemerke nur, daſs die vier Geſichtslinien, das Stück der Erdbahn, und das Stück der Cometenbahn, unter dieſen Vorausſetzungen Tangenten einer und derſelben Parabel werden, von welcher auch jede andere Tangente in dem nähmlichen Verhältniſs durch die Geſichtslinien geſchnitten wird. Dieſe unter den angeführten Umſtänden eintretende Unbeſtimmtheit der Aufgabe ſcheint übrigens ſelbſt dem Scharfſinne des berühmten Lambert, der ſich doch viel mit derſelben beſchäftiget hat, entgangen zu ſeyn: denn ſein Vorſchlag, wodurch wie er glaubte, das miſsliche bey dieſer Aufgabe gröſstentheils gehoben werden könnte, macht ſie eben ganz indeterminirt und alſo unbrauchbar. *)

§. 24.

Die Gleichungen des erſten Grades, die die Geometrie darzubieten ſcheint, die Diſtanz des Cometen von der Erde unter Vorausſetzung ſeiner geradlinigten und gleichförmigen Bewegung zu beſtimmen, ſind demnach nicht brauchbar, weil hier die Diſtanz derſelben durch Gröſsen eben der Ordnung gefunden werden muſs, die man durch jene Vorausſetzung vernachläſsiget.

§. 25.

*) Aſtronomiſches Jahrbuch 1779 p. 168 ſqq. Daſs Herr Boscovich ſchon vor langer Zeit die Unbrauchbarkeit der Bouguerſchen, und der in dem jetzigen § abgehandelten Methode zur Beſtimmung der Diſtanzen des Cometen von der Erde erwieſen hat, weiſs ich bloſs aus Hrn. de la Lande *Aſtronomie 3me Edit. Tome III. p. 232 233.* Da ich Herrn Boscovich Schriften nie geleſen habe, ſo kann ich nicht ſagen, ob mein Beweis mit dem ſeinigen gleich iſt.

§. 25.

Wenn man annimmt, die Chorden der Cometenbahn und der Erdbahn zwiſchen den Oertern derſelben in der erſten und dritten Beobachtung werden von den mittlern *radiis vectoribus* im Verhältniſs der Zeiten geſchnitten, ſo läſst ſich das Verhältniſs der wahren oder curtirten Diſtanzen des Cometen von der Erde in der erſten und dritten Beobachtung beſtimmen. Wir werden dieſs im folgenden Abſchnitt näher ſehen. Nun läſst ſich wieder mit der dritten Beobachtung eine vierte und fünfte verbinden, und ſo wird man das Verhältniſs der Diſtanzen in der 1ten 3ten und 5ten Beobachtung angeben können. Man braucht aber nur das Verhältniſs dreyer Diſtanzen des Cometen von der Erde zu wiſſen, um die Diſtanzen ſelbſt blos aus der Bedingung zu finden, daſs die drey Oerter des Cometen in einer und derſelben Ebene, die durch den Mittelpunct der Sonne geht, liegen.

§. 26.

Fig. 4.

Um dieſs zu zeigen, darf man nur überhaupt eine Gleichung zwiſchen x, y, z, und der Länge des Knotens und der Neigung der Bahn des Cometen ſuchen. Es ſey Fig. 4. S. der Mittelpunct der Sonne, S ♈ eine Linie nach dem Punct der Frühlings-Nachtgleiche, S ☊ die Knotenlinie. Ferner ſey S A $= x$, A B $= y$, über B ſtehe der Comet ſenkrecht in C, ſo daſs B C $= z$. Fället man nun aus B auf S ☊ die Linie B D ſenkrecht, ſo iſt B D C $=$ der Neigung der Bahn. Es ſey nun ☊ S ♈, oder die Länge des ☊ $= h$, C D B, oder die Neigung der Bahn $= i$, ſo iſt

$$AE = x \tang h$$

alſo

alſo

$$BE = y - x \tan h$$

ferner

$$BD = BE \cos h = y \cos h - x \sin h$$

und

$$BC = z = BD \tan i$$

$$= y \cos h \tan i - x \sin h \tan i$$

Für drey Beobachtungen wird man alſo drey Gleichungen von der Form $z = y \cos h \tan i - x \sin h \tan i$ haben. Jede enthält, wenn die Verhältniſſe der curtirten Diſtanzen gegeben ſind, nur drey unbekannte Gröſſen *) ϱ, h und i, die ſich alſo daraus beſtimmen laſſen.

§. 27.

Es ſey alſo $\varrho'' = M\varrho'$, $\varrho''' = N\varrho'$, ſo haben wir $z' = \varrho' \tan\beta'$, $z'' = M\varrho' \tan\beta''$, und $z''' = N\varrho' \tan\beta'''$ und damit laſſen ſich die drey Gleichungen ſo ausdrücken

$$\frac{\varrho'}{\cos h \tan i} = \frac{y' - x' \tan h}{\tan \beta'}$$

$$\frac{\varrho'}{\cos h \tan i} = \frac{y'' - x'' \tan h}{M \tan \beta''}$$

$$\frac{\varrho'}{\cos h \tan i} = \frac{y''' - x''' \tan h}{N \tan \beta'''}$$

Folglich iſt

$$(y' - x' \tan h) M \tan\beta'' = (y'' - x'' \tan h) \tan\beta'$$

und

$$(y' - x' \tan h) N \tan\beta''' = (y''' - x''' \tan h) \tan\beta'.$$

Setzt

*) x, y, z, iſt nemlich durch ϱ gegeben. S. §. 17.

Setzt man nun in diefe Gleichungen die Werthe von x', x'', x''', y', y'', y''', fo erhält man zwey Gleichungen, die nur die beyden unbekannten Gröfsen, ϱ' und tang h enthalten. Jede derfelben kann alfo nach Gefallen, und zwar durch eine Gleichung des 2ten Grades gefunden werden. Beftimmt man h, fo hat die Auflöfung die gröfste Aehnlichkeit mit derjenigen, die Herr Profeffor Hennert gegeben hat: fucht man aber ϱ', fo verfällt man auf Formeln, die denen ganz analog find, die Herr du Sejour gefunden hat, und die er als fo brauchbar rühmt.

§. 28.

Ich will mich hier nur bey der letzten aufhalten, und den Werth von ϱ' fuchen. Man fchaffe alfo aus den beyden Gleichungen tang h weg, fo ift

$$\frac{y'' \tan\beta' - M y' \tan\beta''}{x'' \tan\beta' - M x' \tan\beta''} =$$

$$\frac{y''' \tan\beta' - N y' \tan\beta'''}{x''' \tan\beta' - N x' \tan\beta'''}$$

Folglich

$$\tan\beta' (y'' x''' - y''' x'') + M \tan\beta'' (y''' x' - y' x''')$$
$$+ N \tan\beta''' (x'' y' - x' y'') = 0.$$

welches eine Gleichung des zweyten Grades ift. Nun haben wir §. 7.

$$\begin{aligned}
x' &= \varrho' \cos\alpha' - R' \cos A' \\
x'' &= M \varrho' \cos\alpha'' - R'' \cos A'' \\
x''' &= N \varrho' \cos\alpha''' - R''' \cos A''' \\
y' &= \varrho' \sin\alpha' - R' \sin A' \\
y'' &= M \varrho' \sin\alpha'' - R'' \sin A'' \\
y''' &= N \varrho' \sin\alpha''' - R''' \sin A'''
\end{aligned}$$

Setzt

Setzt man diese sechs Werthe in die Gleichung, so findet man nach einigen leichten Zusammenziehungen und wenn man der Kürze wegen annimmt

$$
\begin{aligned}
P = M & \operatorname{tang} \beta'' R' R''' \sin (A''' - A') \\
& - \operatorname{tang} \beta' R' R''' \sin (A''' - A'') \\
& - N \operatorname{tang} \beta''' R' R''' \sin (A'' - A')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q = & M \operatorname{tang} \beta'' \Big(R''' \sin (A''' - \alpha') + N R' \sin (\alpha''' - A') \Big) \\
& - \operatorname{tang} \beta' \Big(M R''' \sin (A''' - \alpha'') + N R'' \sin (\alpha''' - A'') \Big) \\
& - N \operatorname{tang} \beta''' \Big(R'' \sin (A'' - \alpha') + M R' \sin (\alpha'' - A') \Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S = M N \Big(& \operatorname{tang} \beta'' \sin (\alpha''' - \alpha') - \operatorname{tang} \beta' \sin (\alpha''' - \alpha'') \\
& - \operatorname{tang} \beta''' \sin (\alpha'' - \alpha') \Big)
\end{aligned}
$$

die quadratische Gleichung

$$S \varrho'^2 - Q \varrho' + P = 0$$

woraus sich denn sogleich

$$\varrho' = \frac{Q}{2S} \pm \sqrt{\left(\frac{Q^2}{4S^2} - \frac{P}{S} \right)}$$

oder

$$\varrho' = \frac{Q \pm \sqrt{(Q^2 - 4SP)}}{2S}$$

ergiebt. Diess ist im Grunde mit der Formel des Herrn du Sejour übereinstimmend: nur dünket mich ist der Weg, auf den hier die quadratische Gleichung für ϱ' gefunden worden ist, viel leichter und kürzer, als derjenige, den jener grosse Analyste gewählt hat. So wird sich auch eine quadratische Gleichung für tang h aus den §. 27. angegebenen Gleichungen viel bequemer finden lassen, als es Herr Hennert vorgetragen hat.

§. 29.

Herr Pingré hat ſowohl die Methode des Herrn du Sejour, als die des Herrn Hennert in der Rechnung verſucht, allein beym Gebrauche ſehr mangelhafte Reſultate gefunden. Die Coefficienten S, Q, P wurden immer ſehr klein, und deswegen hatten die geringſten Fehler der Beobachtungen immer einen ungemein groſſen Einfluſs auf den Werth der unbekannten Gröſse: einen ſo groſsen Einfluſs, daſs er deswegen Hrn. Hennerts Auflöſung für ganz unbrauchbar erklärt. Und was von Hrn. Hennerts Auflöſung gilt, läſst ſich auch auf die des Hrn. du Sejour anwenden: denn beyde ſind Folgen aus denſelben Gleichungen.

§. 30.

Es wird wohl der Mühe werth ſeyn, dieſs etwas näher zu unterſuchen, um über die Brauchbarkeit dieſer Methoden richtig urtheilen zu können. Es iſt einleuchtend, daſs die Auflöſung eine geometriſche Schärfe haben würde, wenn 1) die Beobachtungen völlig genau, und 2) die Verhältniſſe der Diſtanzen, M und N, richtig beſtimmt wären. Letzteres iſt nicht der Fall, weil eine nicht ganz richtige Hypotheſe dabey zum Grunde liegt: und völlig richtige Beobachtungen gehören unter die frommen Wünſche. Nun hängt aber der Werth von ϱ' in des Hrn. du Sejour Formeln lediglich von der ſcheinbaren Krümmung der Cometenbahn, oder von der Abweichung der ſcheinbaren Cometenbahn von einem gröſsten Kreiſe ab. Liegen nemlich die drey beobachteten Oerter des Cometen in einem gröſsten Kreiſe der Sphäre, ſo iſt der Coefficient von ϱ'^2, oder $S = 0$. Dieſs läſst ſich ſo überſehn. Es iſt nemlich

$$S = NM \left(\text{tang}\,\beta'' \sin(\alpha''' - \alpha') - \text{tang}\,\beta' \sin(\alpha''' - \alpha'') \right.$$
$$\left. - \text{tang}\,\beta''' \sin(\alpha'' - \alpha') \right)$$

nun wird

$$\text{tang}\,\beta'' \sin(\alpha''' - \alpha') - \text{tang}\,\beta' \sin(\alpha''' - \alpha'')$$
$$- \text{tang}\,\beta''' \sin(\alpha'' - \alpha') = 0$$

wenn die drey Oerter in einem gröſsten Kreiſe liegen. Denn geſetzt, der Abſtand des Cometen der Länge nach gerechnet, von dem Puncte, wo dieſer gröſste Kreis die Ecliptik ſchneidet, ſey in der erſten Beobachtung $= \varphi$, und die Neigung dieſes gröſsten Kreiſes gegen die Ecliptik $= \mu$, ſo iſt

$$\text{tang}\,\beta' = \text{tang}\,\mu \sin\varphi$$
$$\text{tang}\,\beta'' = \text{tang}\,\mu \sin(\varphi + \alpha'' - \alpha')$$
$$\text{tang}\,\beta''' = \text{tang}\,\mu \sin(\varphi + \alpha''' - \alpha')$$

ſetzet man dieſe Werthe in die obige Gleichung, und dividirt mit tang μ, ſo hat man

$$\sin(\varphi + \alpha'' - \alpha') \sin(\alpha''' - \alpha') - \sin\varphi \sin(\alpha''' - \alpha'')$$
$$- \sin(\varphi + \alpha''' - \alpha') \sin(\alpha'' - \alpha')$$

welches offenbar $= 0$ iſt.

Herr du Sejour ſucht die quadratiſche Gleichung nicht für ϱ', oder die curtirte Diſtanz, ſondern für den wirklichen Abſtand, den er Δ' nennt. Allein ſein Coefficient von Δ'^2 iſt ebenfalls $= 0$, ſobald die drey Oerter des Cometen in einem gröſsten Kreiſe liegen. Er heiſst nemlich, in unſere Buchſtaben überſetzt.

$$\sin\beta' \cos\beta'' \cos\beta''' \sin(\alpha'' - \alpha''') + \sin\beta'' \cos\beta'$$
$$\cos\beta''' \sin(\alpha''' - \alpha') + \sin\beta''' \cos\beta' \cos\beta'' \sin(\alpha' - \alpha'')$$

wo man nur mit $\cos\beta' \cos\beta'' \cos\beta'''$ dividiren darf, um unſer S zu haben.

§. 31.

Es würde ſich nun auch zeigen laſſen, daſs die übrigen beyden Coefficienten für dieſen Fall, der im Grunde mit der Vorausſetzung der geradlinigten und gleichförmigen Bewegung übereinkömmt, verſchwinden müſſen. Allein man kann jetzt ſchon hinreichend über die Brauchbarkeit dieſer Methode urtheilen. Da nemlich drey einander nahe Beobachtungen eines Cometen immer auch ſehr nahe in einem gröſsten Kreiſe liegen, ſo müſſen die Coefficienten S, P, und Q, die lediglich von der Krümmung der ſcheinbaren Cometenbahn abhängen, immer ſehr klein ſeyn: und dieſer ihr kleiner Werth kann durch die unvermeidlichen Fehler der Beobachtung gänzlich verändert werden. Man nehme noch hinzu, daſs M und N, oder die Verhältniſſe der curtirten Abſtände nicht geometriſch genau ſind, und ſo iſt dieſe Methode bey drey unter ſich ſehr nahen Beobachtungen ſchlechterdings nicht zu gebrauchen, und wird gewöhnlich ein von der Wahrheit ungemein abweichendes Reſultat geben. Wenn man indeſſen mehrere auf einander folgende, unter ſich nahe und genaue Beobachtungen hat, daſs die erſte, mittlere und letzte Beobachtung ſchon ziemlich entfernt von einander ſind, für die man M und N aus den zwiſchenliegenden beſtimmen kann, ſo wird man freylich auf etwas von der Wahrheit nicht ganz entferntes kommen können.*) Nur wird ſodann die Rechnung nicht wenig weit-

*) Und zwar um ſo mehr, je ſtärker die ſcheinbare Cometenbahn von einem gröſsten Kreiſe abweicht. Dieſe Abweichung iſt aber um ſo viel gröſser, je ungleicher die Abſtände des Cometen und der Erde von der Sonne ſind, beſonders wenn ſich der Comet zugleich weit von der

weitläuftig, und der Erfolg doch immer zu unsicher bleiben, als daſs man nicht die bequemeren und zuverläſsigern Approximations-Methoden dieſen Gleichungen des zweiten Grades vorziehen ſollte.

§. 32.

Es ſcheint nicht, daſs Herrn du Sejour, oder Hrn. Hennert dieſe natürliche Urſache der wenigen Brauchbarkeit ihrer Methoden aufgefallen wäre. Erſterer iſt indeſſen wenigſtens practiſch davon überzeugt worden, indem er in ſeinem neuern Werke ſtatt dieſer eine andere angiebt, die ich hier aber nicht umſtändlich aus einander zu ſetzen brauche, da ich bey aller Achtung, die ich für dieſen berühmten, nun verewigten, Gelehrten hege, dreiſt behaupten kann, daſs ſie nur eine ſehr mühſame, weitläuftige und wenig genaue Approximations-Methode iſt.*) — Genug, daſs weder Gleichungen des erſten

der Quadratur befindet, oder weder der Oppoſition noch der Conjunction ſehr nahe iſt.

*) Durch eine ſehr ſinnreiche Analyſe ſucht Herr du Sejour das Verhältniſs der Diſtanzen in den drey Beobachtungen, zwar genauer, als es nach § 25 geſchieht, aber auch ſo, daſs in dieſen Verhältniſſen ein von der noch unbekannten Diſtanz von der Sonne abhängender Factor vorkömmt, ſie alſo erſt durch wiederhohlte Näherung genau gefunden werden können. So bringt er die Diſtanzen auf eine unbekannte Gröſse zurück, beſtimmt daraus die Länge der Chorde, und vergleicht dieſe auf Newtons nicht ganz ſcharfe Art mit der Zeit. Dieſe Methode erfordert ſehr mühſame vorbereitende Rechnungen, iſt nur auf Cometen anwendbar, von denen man eine ganze Folge genauer Beobachtungen hat, und giebt doch nach einer lang-

erſten, noch des zweyten Grades, worauf man zur Beſtimmung einer Cometenbahn verfallen iſt, mit wirklichem Nutzen in der Ausübung angewendet werden können.

Dritter Abſchnitt.

Kurze und leichte Methode, die genäherten Beſtimmungsſtücke einer Cometenbahn zu finden.

§. 33.

Aus dem vorigen iſt es alſo erwieſen, daſs, wenn man nicht mit de la Caille durch unzählliche Verſuche eine Cometenbahn nach und nach, faſt möchte ich ſagen, errathen will, nothwendig eine nicht ganz wahre, nur der Wahrheit nahe kommende Vorausſetzung angenommen werden müſſe, die dieſs gar zu verwickelte Problem zur erſten genäherten Auflöſung mehr vereinfacht. Mit Hr. Boscovich das Stück der Cometenbahn zwiſchen den Beobachtungen als geradlinigt und mit gleichförmiger Geſchwindigkeit durchlaufen anzunehmen, iſt etwas zu gewagt, und giebt in den mehreſten Fällen eine noch zu ſehr von der Wahrheit abweichende Beſtimmung. Denn hier macht man nicht eine, ſondern zwey falſche Hypothe-

weiligen Arbeit, nur ein genähertes Reſultat. S. *Du Sejour Traité analytique des mouvemens apparens des corps céleſtes. Tom. II.*