mufs, so wird der Grundsatz der virtualen Geschwindigkeiten, was für eine Lage es immer in der ganzen Masse haben mag, die allgemeinen Gleichungen für sein Gleichgewicht geben. Die Bedingungen der Integrabilität dieser Differentialgleichungen werden die Verhältnisse bekannt machen, die zwischen den Kräften, von welchen die Flüssigkeit getrieben wird, Statt finden müssen, wenn ein Gleichgewicht möglich seyn soll; ihre Integration aber wird den Druck geben, den jedes flüssige Theilchen erfährt, und dieser Druck wird, wenn der flüssige Körper elastisch ist, und sich zusammendrücken läfst, den Grad seiner Elasticität und seine Dichtigkeit bestimmen.

Fünftes Kapitel.

Von der Bewegung eines Systems von Körpern.

Wir wollen zuerst die Wirkung zweyer materiellen Punkte von verschiedenen Massen betrachten, die sich auf einerley gerade Linie so bewegen, dafs sie einander begegnen. Man kann unmittelbar vor dem Stofse ihre Geschwindigkeiten als so zerlegt ansehen, daſs sie eine gemeinschaftliche und zwey entgegengesetzte Geschwindigkeiten hätten, und blos vermöge der letzteren einander die Waage hielten. Die den Punkten gemeinschaftliche Geschwindigkeit wird durch ihre gegenseitige Wirkung nicht gestört, nur sie allein muſs also nach dem Stoſse noch bestehen. Um sie zu bestimmen, wollen wir bemerken, daſs die Gröſse der Bewegung zweyer Punkte, vermöge dieser gemeinschaftlichen Geschwindigkeit, sammt der Summe der den aufgehobenen Geschwindigkeiten zugehörigen Gröſsen der Bewegung, die Summe der Gröſsen der Bewegung vor dem Stoſse darstellt, wenn nur die den entgegengesetzten Geschwindigkeiten zugehörigen Gröſsen der Bewegung in entgegengesetzter Bedeutung genommen werden. Aber nach der Bedingung des Gleichgewichts ist die Summe der den aufgehobenen Geschwindigkeiten zugehörigen Gröſsen der Bewegung gleich Null; folglich ist die der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit zugehörige Gröſse der Bewegung derjenigen gleich, die anfänglich in den beyden Punkten vorhanden war, und mithin ist diese Geschwindigkeit der Summe der Gröſsen der

Bewegung, dividirt durch die Summe der Massen, gleich.

Wenn die Punkte vollkommen elastisch sind, so muſs man, um ihre Geschwindigkeit nach dem Stoſse zu haben, die Geschwindigkeit, die sie, wenn sie unelastisch wären, erlangen oder verlieren würden, zu der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit, die sie unter dieser Vosaussetzung annehmen würden, hinzusetzen, oder davon wegnehmen; denn die vollkommene Elasticität verdoppelt diese Wirkungen durch Wiederherstellung der Lage der elastischen Theile, welche der Stoſs zusammendrückt. Man wird also die Geschwindigkeit eines jeden Punkts nach dem Stoſse erhalten, wenn man seine Geschwindigkeit vor dem Stoſse von dem Doppelten dieser gemeinschaftlichen Geschwindigkeit abzieht.

Hieraus kann man leicht schlieſsen, daſs die Summe der Producte einer jeden Masse durch das Quadrat ihrer Geschwindigkeit vor und nach dem Stoſse der beyden Punkte die nämliche ist; und dieſs hat überhaupt bey dem Stoſse vollkommen elastischer Körper Statt, wie viel ihrer seyen, und wie sie immer auf einander wirken mögen.

Der Stoſs zweyer materiellen Punkte ist zwar bloſs eingebildet, aber der Stoſs jeder zwey Körper läſst sich leicht darauf zurückführen, wenn man bemerkt, daſs, wenn diese Körper nach einer durch ihre Schwerpunkte gehenden, und auf ihrer Berührungsfläche lothrechten Linie sich stoſsen, sie so auf einander wirken, als wenn ihre Massen in diesen Punkten vereinigt wären; die Bewegung theilt sich daher ihnen alsdann eben so mit, wie zwey materiellen Punkten, deren Massen diesen Körpern stückweise gleich wären.

Dieſs sind die Gesetze der Mittheilung der Bewegung, welche die Erfahrung bestätigt, und welche aus den beyden im zweyten Kapitel dieses Buchs erklärten Grundgesetzen der Bewegung mathematisch herflieſsen. Mehrere Philosophen haben versucht, sie durch die Betrachtung der Endursachen zu bestimmen. Descartes, der sich überredete, daſs die Gröſse der Bewegung im Weltall immer die nämliche bleiben müsse, zog aus dieser falschen Voraussetzung falsche Gesetze für die Mittheilung der Bewegung, die ein Beyspiel von den Irrthümern sind, denen man sich aussetzt, wenn man die Gesetze der Natur aus den Absichten, die man ihr leihet, zu errathen sucht.

Wenn ein Körper nach einer durch seinen Schwerpunkt gehenden Richtung gestoſsen wird, so bewegen sich alle seine Theile mit einer gleichen Geschwindigkeit; wenn aber diese Richtung den Schwerpunkt seitwärts vorbeygeht, so haben die verschiedenen Theile des Körpers ungleiche Geschwindigkeiten, und aus dieser Ungleichheit der Geschwindigkeiten erfolgt eine Umdrehungsbewegung des Körpers um seinen Schwerpunkt in der nämlichen Zeit, in welcher dieser Punkt mit der Geschwindigkeit fortrückt, die er würde angenommen haben, wenn die Richtung des Stosses durch diesen Punkt gegangen wäre. Dieſs ist der Fall bey der Erde und den Planeten. Um also die doppelte Bewegung der Umdrehung und des Fortrückens der Erde zu erklären, braucht man nur anzunehmen, daſs sie anfänglich einen Stoſs erhalten habe, dessen Richtung ihren Schwerpunkt nahe vorbeygieng, in einer Entfernung, die, bey der Voraussetzung der Gleichartigkeit dieses Planeten, ungefähr der hundert und sechzigste Theil ihres Halbmessers ist. Die Wahrscheinlichkeit, daſs die Planeten, Trabanten und

Kometen ursprünglich nach einer genau durch ihre Schwerpunkte gehenden Richtung geworfen worden seyen, ist unendlich klein; folglich müssen sich alle diese Körper um sich selbst drehen.

Aus einem ähnlichen Grunde muſs die Sonne, die sich um sich selbst dreht, einen Stoſs erhalten haben, der, da er nicht durch ihren Schwerpunkt gieng, sie mit dem Planetensysteme im Weltraume fortführt, wofern nicht ein entgegengesetzter Stoſs diese Bewegung aufgehoben hat, was nicht wahrscheinlich ist.

Ein Stoſs, der einer gleichartigen Kugel nach einer Richtung, die nicht durch ihren Mittelpunkt geht, beygebracht wird, macht, daſs sie sich beständig um den Durchmesser dreht, welcher auf der durch ihren Mittelpunkt und durch die Richtung der eingedrückten Kraft gehenden Ebene lothrecht ist.

Neue Kräfte, welche alle ihre Punkte sollicitiren, und deren Resultat durch ihren Mittelpunkt geht, ändern den Parallelismus ihrer Umdrehungsachse nicht. Auf solche Art bleibt die Achse der Erde bey ihrem Umlaufe um die Sonne, immer sehr nahe sich selbst parallel, ohne daſs man nöthig hätte, eine jährliche Bewegung der Erdpole um die Pole der Ekliptik mit dem *Copernicus* anzunehmen.

Wenn der Körper irgend eine andere Figur hat, so kann seine Umdrehungsachse jeden Augenblick sich ändern. Die Untersuchung dieser Veränderungen, wie auch immer die auf den Körper wirkenden Kräfte beschaffen seyn mögen, ist wegen ihrer Beziehung auf das Vorrücken der Nachtgleichen und das Schwanken des Monds die wichtigste Aufgabe in der Mechanik der vesten Körper. Durch ihre Auflösung ist man auf folgendes sonderbare und sehr nützliche Resultat geführt worden, daſs nämlich in jedem Körper drey auf einander lothrecht stehende Achsen vorhanden sind, um welche er sich gleichförmig drehen kann, wenn er nicht durch fremde Kräfte sollicitirt wird. Diese Achsen hat man daher *Hauptachsen der Umdrehung* genannt.

Ein schwerer Körper oder ein System von schweren Körpern, von was immer für einer Figur, das um eine veste und waagrechte Achse schwingt, stellt ein zusammengesetztes Pendel vor. In der Natur giebt es gar keine andere, und die einfachen Pendeln,

woyon

wovon wir oben gesprochen haben, sind blofs geometrische, zur Vereinfachung der Gegenstände dienliche, Vorstellungsarten. Es ist leicht, die zusammengesetzten Pendeln, deren sämmtlichen Punkte vest an einander anschliefsen, auf solche zu beziehen. Wenn man die Länge des einfachen Pendels, dessen Schwingungen mit denen eines zusammengesetzten von gleicher Dauer sind, mit der ganzen Masse des letztern, und mit der Entfernung seines Schwerpunkts von der Achse des Schwungs multiplicirt, so ist das Product gleich der Summe der Producte von jedem Theilchen des zusammengesetzten Pendels in das Quadrat seiner Entfernung von der nämlichen Achse. Vermittelst dieser von Huygens erfundenen Regel hat man durch Versuche mit zusammengesetzten Pendeln, die Länge des einfachen Pendels, das Secunden schwingt, kennen gelernt.

Wir wollen uns ein Pendel gedenken, das sehr kleine Schwingungen macht, und setzen, dafs in dem Augenblicke, wo es von der lothrechten Linie am weitesten entfernt ist, eine kleine, auf der Ebene seiner Bewegung lothrechte Kraft eingedrückt werde; so wird es um die lothrechte Linie eine Ellipse beschreiben. Um sich seine Bewegung vorzustellen, kann man sich ein eingebildetes Pendel gedenken, welches fortfährt zu schwingen, wie es das wirkliche Pendel, ohne die neue Kraft, die ihm eingedrückt wurde, gethan haben würde, während das letztere Pendel auf beyden Seiten des eingebildeten schwingt, wie wenn dieses unbeweglich lothrecht wäre. Die Bewegung des wirklichen Pendels ist also das Resultat von zwey einfachen Schwingungen, welche zugleich erfolgen, und leicht zu bestimmen sind.

Diese Art, die kleinen Schwingungen der Körper zu betrachten, läſst sich auf jedes System ausdehnen. Wenn man setzt, das System sey durch sehr kleine Stöſse aus dem Zustande des Gleichgewichts gebracht, und man ertheilt ihm sofort neue Stöſse, so wird es in Ansehung der Zustände, die es, vermöge der ersten Stöſse, nach einander angenommen haben würde, eben so schwingen, wie es in Absicht auf seinen Zustand des Gleichgewichts schwingen würde, wenn die neuen Stöſse ihm allein in diesem Zustande eingedrückt worden wären. Sehr kleine Schwingungen eines Systems von Körpern, so zusammeugesetzt sie auch immer seyn mögen, können daher als durch einfache, denen des Pendels völlig ähnliche Schwingungen gebildet angesehen werden. In der That, wenn man sich das System nur wenig aus dem Zustande des Gleichgewichts gebracht gedenkt, so daſs die Kraft, welche jeden Körper treibt, gegen den Punkt gerichtet ist, welchen er in diesem Zustande einnahm, und daſs sie überdieſs seiner Entfernung von diesem Punkt proportionirt ist, so ist klar, daſs dieſs während des Schwungs des Systems Statt haben werde, und daſs in jedem Augenblicke die Geschwindigkeiten der verschiedenen Körper ihren Entfernungen von der Lage des Gleichgewichts proportionirt seyn werden; sie werden daher alle im nämlichen Augenblicke in diese Lage kommen, und auf die nämliche Art schwingen, wie ein einfaches Pendel. Aber der bisher bey dem Systeme angenommene Zustand der Störung des Gleichgewichts ist nicht der einzige. Wenn man einen von den Körpern von seiner Lage des Gleichgewichts entfernt, und die Lagen der andern Körper, welche den vorigen Bedingungen Genüge thun, sucht, so kommt man auf eine Gleichung von einem Grade, welcher der Zahl der Körper des Systems gleich ist, welches eben so viele Schwingungen giebt, als man Körper hat

Wir wollen uns bey dem Systeme die erste dieser Schwingungen gedenken, und alle Körper, nach dem Verhältnisse der auf die zweyte einfache Schwingung sich beziehenden Gröſsen, in Gedanken auf einen Augenblick von ihrer Lage entfernen. Vermöge der Gleichzeitigkeit der Schwingungen wird das System in Ansehung der Zustände, in welche es durch die erste einfache Schwingung nach einander gekommen seyn würde, eben so schwingen, wie es vermöge der zweyten allein um seinen Zustand des Gleichgewichts geschwungen haben würde; seine Bewegung wird also durch die zwey ersten einfachen Schwingungen bestimmt werden. Auf ähnliche Art kann man mit dieser Bewegung die dritte einfache Schwingung verbinden, und wenn man alle diese Schwingungen so mit einander zu verbinden fortfährt, so wird man alle möglichen Bewegungen des Systems auf die allgemeinste Art darstellen.

Hieraus ergiebt sich ein leichtes Mittel, die absolute Beharrlichkeit seines Gleichgewichts kennen zu lernen. Wenn nämlich in allen auf jede einfache Schwingung sich beziehenden Lagen die Kräfte, welche die Körper sollicitiren, bestrebt sind, sie in den Zustand des Gleichgewichts zurückzuführen, so wird dieser Zustand beharrlich seyn; er wird es aber nicht seyn, oder er wird nur eine relative Beharrlichkeit haben, wenn in einer dieser Lagen die Kräfte bestrebt sind, die Körper davon zu entfernen.

Es ist sichtbar, daſs diese Art, sehr kleine Bewegungen eines Systems zu betrachten, sich auch auf flüssige Körper erstreckt, deren Schwingungen das Resultat von gleichzeitigen und oft unzählig vielen einfachen Schwingungen sind.

Ein sichtbares Beyspiel von der Gleichzeitigkeit sehr kleiner Schwingungen hat man an den Wellen. Wenn man einen Punkt der Oberfläche eines stehenden Wassers leicht bewegt, so sieht man kreisförmige Wellen um ihn her sich bilden und erweitern. Bewegt man die Oberfläche in einem andern Punkte, so bilden sich neue Wellen, und vermischen sich mit den ersten; sie legen sich über die durch die ersten Wellen erschütterte Fläche her, wie sie sich über eben diese Fläche im Ruhestande würden verbreitet haben, so daſs man sie in ihrer Mischung vollkommen unterscheidet. Was das Auge in Ansehung der Wellen gewahr nimmt, eben das empfindet das Ohr in Ansehung der Töne, oder der Schwingungen der Luft, die sich gleichzeitig fortpflanzen, ohne sich zu verändern, und sehr unterschiedene Eindrücke zu machen.

Der Grundsatz der Gleichzeitigkeit der einfachen Schwingungen, den man dem Daniel Bernoulli zu danken hat, ist eins von den allgemeinen Resultaten, welche durch die Leichtigkeit, die sie der Einbildungskraft gewähren, die Erscheinungen und ihre auf einander folgenden Veränderungen sich vorzustellen, für sich einnehmen. Man kann ihn leicht aus der analytischen Theorie der kleinen Schwingungen eines Systems ableiten.

Diese hangen von linearen Differentialgleichungen ab, deren vollständige Integrale die Summe der besondern Integrale sind.

Die einfachen Schwingungen legen sich also eben so über einander her, um die Bewegung des Systems zu bilden, wie die besondern Integrale, die sie darstellen, mit einander verbunden werden, um die vollständigen Integrale zu geben. Es ist sehr anziehend auf solche Art in den sinnlichen Erscheinungen der Natur die intellectuellen Wahrheiten der Analysis aufzusuchen. Diese Uebereinstimmung, wovon das Weltsystem uns zahlreiche

Beyspiele aufstellen wird, hat für die Freunde mathematischer Speculationen einen der grössten Reitze.

Es ist natürlich, die Bewegungsgesetze der Körper auf einen allgemeinen Grundsatz zurückzuführen, wie man die Gesetze ihres Gleichgewichts in dem einzigen Grundsatze der virtualen Geschwindigkeiten zusammengefaſst hat. Um dazu zu gelangen, wollen wir die Bewegung eines Systems von Körpern betrachten, die auf einander wirken, ohne durch beschleunigende Kräfte sollicitirt zu werden. Ihre Geschwindigkeiten ändern sich jeden Augenblick; aber man kann jede dieser Geschwindigkeiten für jeden Augenblick als aus derjenigen, welche im folgenden Augenblicke Statt hat, und aus einer andern, welche im Anfange dieses zweyten Augenblicks aufhören muſs, zusammengesetzt betrachten. Wäre diese aufgehobene Geschwindigkeit bekannt, so wäre es leicht nach dem Gesetze der Zerlegung der Kräfte die Geschwindigkeit der Körper im zweyten Augenblicke daraus zu schlieſsen. Nun ist aber klar, daſs, wenn die Körper nur mit den aufgehobenen Geschwindigkeiten getrieben worden wären, sie einander im Gleichgewichte gehalten haben würden. Folglich werden die Gesetze des Gleichgewichts die Verhältnisse der verlornen Geschwindigkeiten geben, und es wird leicht seyn, daraus die übrigbleibenden Geschwindigkeiten und deren Richtungen herzuleiten; man wird also durch die Infinitesimalrechnung die successiven Veränderungen der Bewegung des Systems und seine Lage für jeden Augenblick erhalten.

Es ist klar, daſs wenn die Körper von beschleunigenden Kräften getrieben werden, man immer die nämliche Zerlegung der Geschwindindigkeiten vornehmen kann; aber alsdann muſs zwischen den aufgehobenen Geschwindigkeiten und diesen Kräften ein Gleichgewicht Statt finden.

Diese Art, die Gesetze der Bewegung auf die des Gleichgewichts zurückzuführen, die man hauptsächlich dem D'Alembert zu danken hat, ist allgemein und sehr lichtvoll. Man würde Ursache haben, sich zu wundern, daſs sie den Geometern, die sich vor ihm mit der Dynamik beschäftiget hatten, entgangen war, wenn man es nicht wüſste, daſs die einfachsten Ideen fast immer diejenigen sind, welche sich dem menschlichen Geiste zuletzt darbieten.

Es wäre nun noch übrig, den bisher erläuterten Grundsatz mit dem der virtualen Geschwindigkeiten zu vereinigen, um der Mechanik alle die Vollkommenheit zu ertheilen, deren sie empfänglich scheint. Dieſs hat Lagrange gethan, und durch dieses Mittel hat er die Untersuchung der Bewegung eines jeden Systems von Körpern auf die Integration von Differentialgleichungen gebracht; alsdann ist der Zweck der Mechanik erfüllt, und es ist die Sache der reinen Analysis, die Auflösung der Aufgaben zu Stande zu bringen. Hier folgt die einfachste Art, diese Gleichungen zu bilden.

Wenn man sich drey veste auf einander lothrechte Achsen gedenkt, und man zerlegt für einen Augenblick die Geschwindigkeit von jedem materiellen Punkte eines Systems von Körpern in drey andere, diesen Achsen parallele, so wird man jede partiale Geschwindigkeit während dieses Augenblicks als gleichförmig betrachten können; man wird sich ferner vorstellen können, der Punkt werde, am Ende des Augenblicks, einer dieser Achsen parallel, von drey Geschwindigkeiten getrieben, nämlich von seiner Geschwindigkeit in diesem Augenblicke, von der kleinen Veränderung, die er im folgenden Augenblicke erhielt, und von eben dieser Veränderung in entgegengesetzter Richtung genommen. Die zwey ersten dieser Geschwindigkeiten dauren im folgenden Augenblicke fort, die dritte muſs folglich durch die den Punkt sollicitirenden Kräfte, und durch die Wirkung der andern Punkte des Systems aufgehoben werden. Gedenkt man sich also die augenblicklichen Veränderungen der partialen Geschwindigkeiten von jedem Punkte des Systems an diesem Punkte in entgegengesetzter Richtung angebracht, so muſs das System vermöge aller dieser Veränderungen, und der Kräfte, die es treiben, im Gleichgewichte seyn.

Man wird also nach dem Grundsatze der virtualen Geschwindigkeiten die Gleichungen für dieses Gleichgewicht erhalten, und wenn man diese mit denen für die Verknüpfung der Theile des Systems verbindet, so wird man die Differentialgleichungen für die Bewegung eines jeden seiner Punkte erhalten.

Es ist sichtbar, daſs man auf eben diese Art die Gesetze der Bewegung der flüssigen Körper auf die ihres Gleichgewichts zurückführen kann. In diesem Falle beruhen die Bedingungen in Ansehung der Verbindung der Theile des Systems darauf, daſs das Volumen eines jeden Theilchens des flüssigen Körpers immer das nämliche bleibt, wenn der flüssige Körper incompressibel ist, und daſs es von dem Drukke nach einem gegebenen Gesetze abhängt, wenn der flüssige Körper elastisch und compressibel ist. Die Gleichungen, welche diese Bedingungen, und die Veränderungen der Bewegung des flüssigen Körpers ausdrücken, enthalten die partialen Differenzen der Coordinaten des Theilchens, entweder nach dem Verhältnisse der Zeit, oder nach dem Verhältnisse der ursprünglichen Coordinaten genommen.

Die Integration der Gleichungen dieser Art hat groſse Schwierigkeiten, und man hat noch nicht dazu gelangen können, ausser in einigen besonderen Fällen, die sich auf die Bewegung der schweren flüssigen Körper in Gefäſsen, auf die Theorie des Schalls und auf die Schwingungen des Meers und der Atmosphäre beziehen.

Die Betrachtung der Differentialgleichungen der Bewegung eines Systems von Körpern hat zur Entdeckung mehrerer allgemeinen sehr nützlichen Grundsätze der Mechanik geleitet, welche eine Erweiterung derjenigen sind, die wir im zweyten Kapitel dieses Buchs über die Bewegung eines Punkts beygebracht haben.

Ein materieller Punkt bewegt sich gleichförmig in gerader Linie, wenn er keine Einwirkung fremder Ursachen erfährt. In einem Systeme von Körpern, die auf einander wirken, ohne die Wirkung äuſserer Ursachen zu erfahren, bewegt sich der gemeinschaftliche Schwerpunkt gleichförmig in gerader Linie, und seine Bewegung ist die nämliche, wie wenn alle Körper in diesem Punkte vereinigt angenommen, und alle Kräfte, die sie treiben, unmittelbar in demselben angebracht wären; so daſs die Richtung und Gröſse ihres Resultats beständig die nämlichen bleiben.

Wir haben gesehen, daſs der Radius Vector eines Körpers, der durch eine gegen einen vesten Punkt gerichtete Kraft sollicitirt wird, Flächen beschreibt, die den Zeiten proportionirt sind. Wenn man ein System von Körpern setzt, die auf was immer für eine Art auf einander wirken, und von einer gegen einen vesten Punkt gerichteten Kraft sollicitirt werden, und man zieht von diesem Punkte an jeden derselben einen Radius Vector, den man auf eine unveränderliche durch diesen Punkt gehende Ebene projicirt, so ist die Summe der Producte der Masse eines jeden Körpers in die von dem Entwurfe seines Radius Vectors beschriebene Fläche der Zeit proportionirt. Darin besteht der Grundsatz der *Erhaltung der Flächen.*

Die *lebendige Kraft* eines Systems von Körpern nennt man die Summe der Producte der Masse eines jeden Körpers in das Quadrat seiner Geschwindigkeit. Wenn sich ein Körper auf einer Linie oder Fläche bewegt, ohne eine fremde Einwirkung zu leiden, so ist seine lebendige Kraft immer die nämliche, weil seine Geschwindigkeit beständig ist. Wenn die Körper eines Systems keine andere Wirkungen leiden, als ihre gegenseitigen Züge und Pressungen, entweder unmittelbar, oder vermittelst undehnbarer und unelastischer Stäbe und Fäden, so wird die lebendige Kraft des Systems beständig seyn, selbst in dem Falle, wenn mehrere dieser Körper genöthiget würden, sich in krummen Linien oder Flächen zu bewegen. Dieſs ist der Grundsatz der Erhaltung der lebendigen Kräfte.

Bey der Bewegung eines durch was immer für Kräfte sollicitirten Punkts ist die Veränderung der lebendigen Kraft gleich der doppelten Summe der Producte der Masse des Punkts in jede der beschleunigenden Kräfte, stückweise multiplicirt durch die elementarischen

Gröfsen, um welche der Punkt gegen ihren Ursprung fortrückt. Bey der Bewegung eines jeden Systems ist das Doppelte der Summe aller dieser Producte die Veränderung der lebendigen Kraft des Systems.

Wenn die lebendige Kraft ihr Maximum oder ihr Minimum erreicht, so ist diese Veränderung Null; das System würde also, laut des Grundsatzes der virtualen Geschwindigkeiten, in dieser Lage, vermöge der beschleunigenden Kräfte, wovon es getrieben wird, im Gleichgewichte seyn. Unter allen Lagen also, welche das System nach einander annimmt, ist die, wobey es die gröfste oder kleinste lebendige Kraft hat, auch diejenige, bey welcher es im Gleichgewichte bleiben würde. Dabey ist auch das merkwürdig, dafs, wenn bey dieser Lage die lebendige Kraft beständig ein Maximum ist, das Gleichgewicht beharrlich ist, wie auch immer die Geschwindigkeiten der Körper, wenn sie dazu gelangen, beschaffen seyn mögen; dafs es aber das nicht ist, wenn die lebendige Kraft dabey beständig ein Minimum ist. Diefs folgt offenbar aus dem, was wir oben von den einfachen Schwingungen eines Systems von Körpern gesagt haben.

Endlich haben wir im zweyten Kapitel gesehen, daſs die Summe der Integrale des Products der Masse von jedem Körper eines Systems in seine Geschwindigkeit, und in das Element der Curve, die er beschreibt, ein Minimum ist. Dieſs giebt den Grundsatz von der kleinsten Wirkung, welcher von den Grundsätzen der gleichförmigen Bewegung des Schwerpunkts und der Erhaltung der Flächen und der lebendigen Kräfte darin unterschieden ist, daſs diese Grundsätze wahre Integrale der Differentialgleichungen der Bewegung der Körper sind, da jener nur eine besondere Verbindung eben dieser Gleichungen ist.

Es läſst sich hier noch eine wichtige Bemerkung über die Ausdehnung dieser verschiedenen Grundsätze machen. Der Grundsatz der gleichförmigen Bewegung des Schwerpunkts eines Systems von Körpern, und der Grundsatz der Erhaltung der Flächen, bestehen selbst in dem Falle, wenn durch die gegenseitige Wirkung der Körper plötzliche Veränderungen in ihren Bewegungen entstehen, und dieſs macht diese Grundsätze unter mehreren Umständen sehr nützlich; aber der Grundsatz der Erhaltung der lebendigen Kräfte, und der der kleinsten Wirkung fordern, daſs die Veränderungen der Bewegungen des Systems nach unmerklichen Abstuffungen erfolgen.

Wenn das System durch die gegenseitige Wirkung der Körper, oder durch das Aufstossen von Hindernissen, plötzliche Veränderungen erfährt, so leidet die lebendige Kraft bey jeder dieser Veränderungen eine Verminderung, die der Summe der Producte jeder Masse multiplicirt durch die Summe der Quadrate der Abwechselungen, welche diese Veränderung in ihrer, nach paralleler Richtung mit drey auf einander lothrechten Achsen zerlegten Geschwindigkeit hervorbringt, gleich ist.

Alle diese Grundsätze würden in Ansehung der relativen Bewegung der Körper des Systems, auch dann noch bestehen, wenn es mit einer allgemeinen, und den Brennpunkten der Kräfte, die wir als vest angenommen haben, gemeinschaftlichen Bewegung fortgeführt würde. Auf gleiche Art haben sie bey der relativen Bewegung der Körper auf der Erde Statt. Denn es ist, wie wir schon bemerkt haben, unmöglich, von der absoluten Bewegung eines Systems von Körpern, nach den bloſsen Erscheinungen seiner relativen Bewegung, zu urtheilen.