

was beygetragen hat, ohne welche man noch darüber streiten würde, was man unter der kleinsten Wirkung der Natur zu verstehen habe.

D r i t t e s K a p i t e l .

Vom Gleichgewichte eines Systems von Körpern.

Der einfachste Fall des Gleichgewichts mehrerer Körper ist der von zwey materiellen Punkten, die einander mit gleichen und gerade entgegengesetzten Geschwindigkeiten begegnen. Ihre gegenseitige Undurchdringlichkeit, diese Eigenschaft der Materie, vermöge welcher zwey Körper nicht zu gleicher Zeit den nämlichen Raum einnehmen können, vernichtet offenbar ihre Geschwindigkeiten, und bringt sie in den Stand der Ruhe. Wenn aber zwey Körper von ungleichen Massen mit entgegengesetzten Geschwindigkeiten auf einander stoßen, was ist dann das Verhältniß der Geschwindigkeiten zu den Massen im Falle des Gleichgewichts? Um diese Aufgabe aufzulösen, wollen wir uns ein System angränzender in einer geraden Linie liegender,

und mit einer gemeinschaftlichen Geschwindigkeit nach der Richtung dieser geraden Linie getriebener materieller Punkte gedenken; eben so wollen wir ein zweytes System angränzender, in der nämlichen geraden Linie liegender, und mit einer gemeinschaftlichen, aber der vorigen entgegengesetzten, Geschwindigkeit getriebener materieller Punkte gedenken, so, daß diese beyden Systeme, wenn sie auf einander stoßen, sich das Gleichgewicht halten.

Es ist klar, daß, wenn das erste System nur aus einem einzigen materiellen Punkte bestünde, jeder Punkt des zweyten Systems in dem stoßenden Punkte einen der Geschwindigkeit dieses Systems gleichen Theil seiner Geschwindigkeit vernichten würde. Die Geschwindigkeit des stoßenden Punkts muß also im Falle des Gleichgewichts, dem Produkte der Geschwindigkeit des zweyten Systems durch die Zahl seiner Punkte gleich seyn, und man kann für das erste System einen einzigen, mit einer, diesem Producte gleichen Geschwindigkeit getriebenen, Punkt setzen. Auf ähnliche Art kann man für das zweyte System einen materiellen Punkt setzen, der mit einer Geschwindigkeit getrieben wird,

wird, die dem Producte der Geschwindigkeit des ersten Systems durch die Zahl seiner Punkte gleich ist. So erhält man, anstatt zweyer Systeme, zwey Punkte, die sich mit entgegengesetzten Geschwindigkeiten, wovon die eine das Product der Geschwindigkeit des ersten Systems durch die Zahl seiner Punkte, die andere das Product der Geschwindigkeit der Punkte des zweyten Systems durch ihre Anzahl ist, das Gleichgewicht halten werden. Diese Producte müssen also, im Falle des Gleichgewichts, einander gleich seyn.

Die Masse eines Körpers ist die Summe seiner materiellen Punkte. Das Product der Masse in die Geschwindigkeit nennt man die *Gröfse der Bewegung*, und eben das versteht man auch unter der *Kraft eines Körpers*. Zum Gleichgewichte zweyer Körper oder zweyer Systeme von materiellen Punkten, die nach entgegengesetzter Richtung auf einander stossen, wird erfordert, daß die Gröfsen der Bewegung, oder die entgegengesetzten Kräfte einander gleich, und mithin die Geschwindigkeiten den Massen umgekehrt proportionirt seyn müssen.

Zwey materielle Punkte können offenbar nicht anders auf einander wirken, als nach

U

der geraden Linie, die sie verbindet; die Wirkung die der eine auf den andern äussert, theilt ihm eine Gröfse der Bewegung mit; nun kann man sich den zweyten Körper, als durch diese Gröfse, und durch eine andere gleiche und gerade entgegengesetzte sollicitirt vorstellen; die Wirkung des ersten Körpers besteht also darin, diese letztere Gröfse der Bewegung zu vernichten; dazu muß er aber eine gleiche und entgegengesetzte Gröfse der Bewegung anwenden, welche vernichtet werden wird. Man sieht also, daß überhaupt bey der gegenseitigen Wirkung der Körper auf einander, die Gegenwirkung immer der Wirkung gleich und entgegengesetzt ist. Man sieht ferner, daß diese Gleichheit keine besondere Kraft in der Materie voraussetzt, sondern daraus folgt, daß ein Körper durch die Wirkung eines andern keine Bewegung erhalten kann, ohne ihn deren zu berauben, eben so wie ein Gefäß, auf Kosten eines andern vollen, das ihm mittheilt, angefüllt wird.

Die Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung zeigt sich bey allen Wirkungen der Natur. Das Eisen zieht den Magnet an, wie es von ihm angezogen wird; das nämliche

bemerkt man bey den elektrischen Anziehungen und Abstofsungen, bey der Entwicklung der elastischen und selbst bey der thierischen Kräfte; denn, was auch immer das bewegende Princip des Menschen und der Thiere seyn mag, so ist das der beständige Erfolg, daß sie durch die Gegenwirkung der Materie eine Kraft erhalten, die derjenigen, welche sie ihr mittheilen, gleich und entgegengesetzt ist, und daß sie also, in dieser Beziehung, den nämlichen Gesetzen, wie die leblosen Wesen, unterworfen sind.

Das umgekehrte Verhältniß der Geschwindigkeiten mit den Massen, im Falle des Gleichgewichts dient zur Bestimmung des Verhältnisses der Massen bey verschiedenen Körpern. Die der gleichartigen Körper sind ihren Räumen, welche die Geometrie auszumessen lehrt, proportionirt. Aber alle Körper sind nicht gleichartig, und die Unterschiede, welche sowohl in Absicht auf ihre kleinsten Bestandtheile, als auf die Zahl und Größe der Zwischenräume oder Poren, welche diese Theilchen von einander trennen, Statt finden, verursachen sehr große Verschiedenheiten zwischen ihren im nämlichen Raume ein-

geschlossenen Massen. Die Geometrie reicht alsdann nicht zu, das Verhältniß dieser Massen zu bestimmen, und es ist unumgänglich nöthig, sich deswegen an die Mechanik zu wenden.

Wenn man sich zwey Kugeln von verschiedenen Materien gedenkt, und man läßt ihre Durchmesser sich so lange ändern, bis sie, wenn man ihnen gleiche und entgegengesetzte Geschwindigkeiten ertheilt, einander das Gleichgewicht halten, so kann man versichert seyn, daß sie eine gleiche Anzahl materieller Punkte, und mithin gleiche Massen enthalten werden. Man wird also auf solche Art das Verhältniß der Räume dieser Substanzen, bey gleichen Massen, erhalten, und daraus weiter, mit Hülfe der Geometrie das Verhältniß der Massen von jeden zwey andern Räumen eben dieser Substanzen herleiten können. Aber dieses Verfahren würde, wegen der zahlreichen Vergleichen, welche die Bedürfnisse des Handels jeden Augenblick fordern, in der Ausübung sehr beschwerlich seyn. Glücklicherweise bietet uns die Natur in der Schwere der Körper ein sehr einfaches Mittel, ihre Massen zu vergleichen, dar.

Wir haben im vorhergehenden Kapitel gesehen, daß jeder materielle Punkt, an einerley Orte der Erde, vermöge der Wirkung der Schwere bestrebt ist, sich mit einerley Geschwindigkeit zu bewegen. Die Summe dieser Bestrebungen macht das Gleichgewicht eines Körpers aus; folglich sind die Gewichte den Massen proportionirt. Hieraus folgt, daß, wenn zwey an den Enden eines über eine Rolle gehenden Fadens aufgehängte Körper einander das Gleichgewicht halten, und die beyden Theile des Fadens auf beyden Seiten der Rolle gleich sind, auch die Massen dieser Körper gleich groß seyen, weil sie, vermöge der Wirkung der Schwere, bestrebt sind, sich mit gleicher Geschwindigkeit zu bewegen, und eben so auf einander wirken, als ob sie mit gleichen und gerade entgegengesetzten Geschwindigkeiten aneinander stießen. Ferner kann man die beyden Körper mittelst einer Waage, deren Arme und Schalen vollkommen gleich sind, ins Gleichgewicht bringen, und alsdann von der Gleichheit ihrer Massen versichert seyn. Auf solche Art erhält man das Verhältniß der Massen verschiedener Körper mittelst einer genauen und empfindlichen Waage, und einer großen Anzahl kleiner,

einander gleicher, Gewichte, indem man bestimmt, wie vielen dieser Gewichte sie die Waage halten.

Die Dichtigkeit eines Körpers hängt von der Zahl seiner in einem gegebenen Raume eingeschlossenen materiellen Punkte ab, und ist daher dem Verhältnisse der Masse zu dem Volumen proportionirt. Wenn es eine Substanz gäbe, die keine Poren hätte, so würde ihre Dichtigkeit die grösste mögliche seyn, und wenn man mit ihr die Dichtigkeit anderer Körper vergliche, so erhielte man die Grösse der Materie, die diese enthalten. Da wir aber keine solche Substanz kennen, so können wir auch nur relative Dichtigkeiten der Körper erhalten. Diese Dichtigkeiten stehen, bey einerley Volumen, in dem Verhältnisse der Gewichte, weil die Gewichte den Massen proportionirt sind. Nimmt man also die Dichtigkeit irgend einer Substanz, z. B. des destillirten Regenwassers bey der Temperatur des schmelzenden Eises, für die Einheit der Dichtigkeit an, so wird die Dichtigkeit eines Körpers das Verhältniß seines Gewichts, zu dem eines gleichgrossen Raums Wasser seyn. Dieses Verhältniß nennt man die *specifische Schwere*.

Das, was wir so eben gesagt haben, scheint vorauszusetzen, daß die Materie gleichartig sey, und die Körper nur in Absicht auf die Figur und auf die Gröfse ihrer Zwischenräume und ihrer kleinsten Bestandtheile, unterschieden seyen. Es ist indessen möglich, daß auch wesentliche Unterschiede in der Natur dieser Theilchen selbst Statt finden. Diefs ist aber für die Mechanik gleichgültig, da sie die Körper blofs in Hinsicht auf ihre Bewegungen betrachtet. Da kann man also, ohne Gefahr eines Irrthums, die Gleichartigkeit der Materie annehmen, wenn man nur unter gleichen Massen solche versteht, die, wenn sie mit gleichen und entgegengesetzten Geschwindigkeiten getrieben werden, einander das Gleichgewicht halten.

Bey der Theorie des Gleichgewichts und der Bewegung der Körper sieht man nicht auf die Zahl und Gestalt der Poren, von welchen sie durchdrungen sind. Man kann auf den Unterschied ihrer respectiven Dichtigkeiten Rücksicht nehmen, so, daß man annimmt, sie bestehen aus materiellen Punkten, die mehr oder weniger dicht, bey flüssigen Körpern völlig frey, und mit einander durch immaterielle gerade Linien verbunden

seyen, welche bey harten Körpern unbiegsam, bey elastischen und weichen aber biegsam und dehnbar seyen. Es ist klar, daß die Körper, bey diesen Voraussetzungen, die nämlichen Erscheinungen darbieten würden, die sie uns wirklich zeigen.

Die Bedingungen des Gleichgewichts eines Systems von Körpern können immer nach dem Gesetze der Zusammensetzung der Kräfte, das im ersten Kapitel dieses Buchs erklärt worden ist, bestimmt werden. Denn man kann die Kraft, wovon ein jeder materieller Punkt getrieben wird, als in dem Punkte ihrer Richtung angebracht ansehen, in welchem die Richtungen der Kräfte zusammentreffen, die sie aufheben, oder die, wenn man sie mit ihr zusammensetzt, eine mittlere Kraft geben, die, im Falle des Gleichgewichts, durch die festen Punkte des Systems aufgehoben wird. Wir wollen z. B. zwey an den Enden eines unbiegsamen Hebels befestigte materielle Punkte betrachten, und annehmen, diese Punkte werden von Kräften getrieben, deren Richtungen in der Ebene des Hebels liegen. Gedenken wir uns diese Kräfte in dem Punkte vereinigt, wo ihre Richtungen zusammentreffen, so muß, um ein Gleichge-

wicht zu erhalten, die aus ihrer Zusammensetzung entstehende mittlere Kraft, durch den Unterstützungspunkt gehen, welcher sie allein aufheben kann, und, nach dem Gesetze der Zusammensetzung der Kräfte, müssen alsdann die zwey zusammensetzenden Kräfte sich umgekehrt verhalten, wie die von dem Unterstützungspunkte auf ihre Richtungen gefällten Lothe.

Gedenkt man sich in den Endpunkten eines geradlinigten unbiegsamen Hebels, dessen Masse in Vergleichung mit der der Körper für unendlich klein angesehen werden kann, zwey schwere Körper bevestigt, so kann man sich die parallelen Richtungen der Schwere, als in einer unendlichen Entfernung vereinigt, vorstellen; in diesem Falle müssen die Kräfte, von welchen jeder schwere Körper getrieben wird, oder, was eben so viel ist, ihre Gewichte, für den Fall des Gleichgewichts, sich umgekehrt verhalten, wie die von dem Unterstützungspunkte auf die Richtungen dieser Kräfte gefällten Lothe; diese Lothe aber sind den Hebelarmen proportionirt; folglich sind, beym Gleichgewichte, die Gewichte der Körper, den Hebel-

armen, an welchen sie bevestigt sind, umgekehrt proportionirt.

Ein sehr kleines Gewicht kann daher vermittelst des Hebels und der Maschinen, die sich darauf gründen, einem sehr beträchtlichen Gewichte die Waage halten, und man kann auf solche Art eine ungeheure Last mit einer kleinen Kraft heben; aber um dieses zu bewerkstelligen, muß der Hebelarm, an welchem die Kraft angebracht wird, in Vergleichung mit dem, welcher die Last hält, sehr lang seyn, und die Kraft einen großen Raum durchlaufen, um die Last auf eine kleine Höhe zu heben. Alsdann verliert man an Zeit, was man an Kraft gewinnt, und dieß hat durchgängig bey den Maschinen Statt.

Man kann aber oft nach Willkühr über die Zeit verfügen, während man nur eine eingeschränkte Kraft anwenden kann. Unter andern Umständen, wo man sich eine große Geschwindigkeit verschaffen muß, kann man vermittelst des Hebels dazu gelangen, wenn man die Kraft an den kürzern Arm anbringt. Eben in dieser Möglichkeit, die Masse, oder die Geschwindigkeit der zu bewegenden Körper, je nachdem es die Umstände erfordern,

zu vermehren, besteht der Hauptvorthail der Maschinen.

Durch eine in sehr vielen Fällen angestellte aufmerksame Untersuchung der Bedingungen des Gleichgewichts eines Systems von Körpern, und der Verhältnisse jeder Kraft zu der Geschwindigkeit, die der Körper, an welchen sie angebracht ist, annimmt, wenn das Gleichgewicht des Systems aufgehoben zu werden anfängt, ist man auf folgenden Grundsatz gekommen, welcher die Bedingungen des Gleichgewichts eines Systems durch Kräfte getriebener materieller Punkte in der höchsten Allgemeinheit enthält.

Wenn man die Lage des Systems unendlich wenig ändert, auf eine Art, die mit den Bedingungen der Verbindung seiner Theile bestehen kann, so wird jeder materielle Punkt in der Richtung der ihn sollicitirenden Kraft, um eine Gröfse fortrücken, die dem Theile dieser Richtung gleich ist, welcher zwischen der ersten Lage des Punkts, und dem von der zweyten Lage desselben auf diese Richtung gefällten Lothe liegt.

Diefs vorausgesetzt, ist, *im Falle des Gleichgewichts, die Summe der Producte einer jeden Kraft durch die Gröfse, um welche der*

Punkt, an dem sie angebracht ist, in ihrer Richtung fortrückt, gleich Null. Darin besteht der Grundsatz der virtualen Geschwindigkeiten, den man Johann Bernoulli zu danken hat. Um ihn aber anzuwenden, muß man bemerken, daß die eben erwähnten Producte, in Ansehung der Punkte, welche bey der Veränderung der Lage des Systems in einer der Richtung ihrer Kräfte entgegengesetzten Richtung fortrücken, negativ zu nehmen sind; auch muß man sich erinnern, daß die Kraft das Product der Masse eines materiellen Punkts in die Geschwindigkeit ist, welche sie ihm ertheilen würde, wenn er frey wäre.

Gedenkt man sich die Lage eines jeden Punkts des Systems durch drey rechtwinkliche Coordinaten bestimmt, so wird die Summe der Producte einer jeden Kraft durch die Größe, um welche der Punkt, den sie sollicitirt, in ihrer Richtung fortrückt, wenn man das System sich durch einen unendlich kleinen Raum bewegen läßt, durch eine lineare Function der Veränderungen aller Coordinaten dieser Punkte ausgedrückt werden. Diese Veränderungen stehen zu einander in Verhältnissen, die aus der Verbindung der

Theile des Systems hervorgehen. Bringt man daher in der vorigen Summe, die für den Fall des Gleichgewichts gleich Null werden muß, vermittelst der Bedingungen dieser Verbindung die willkürlichen Veränderungen auf die kleinste mögliche Zahl, so wird man, um nach jeder Richtung ein Gleichgewicht zu erhalten, den Coefficienten von jeder der übrig bleibenden Veränderungen besonders gleich Null setzen müssen; dadurch wird man eben so viele Gleichungen erhalten, als dieser willkürlichen Veränderungen seyn werden. Diese Gleichungen, mit denjenigen, welche die Verbindung der Theile des Systems giebt, zusammengenommen, enthalten alle Bedingungen seines Gleichgewichts.

Wir wollen z. B. ein System von schweren Punkten, die auf eine unveränderliche Art mit einander verbunden sind, betrachten, und uns solches als an einem unbeweglichen Punkte bevestigt vorstellen, um welchen es sich nach jeder Richtung ungehindert drehen könne. Wir wollen uns ferner drey durch den festen Punkt gehende und auf einander lothrechte Achsen vorstellen; und setzen, die Lage eines jeden Punkts des Systems

sey durch drey diesen Achsen parallele Coordinaten bestimmt, und die Wirkung seiner Schwere nach den Richtungen dieser Coordinaten zerlegt. Wenn man nun das System um die erste Achse sich unendlich wenig bewegen läßt, so ist klar, daß die Größe, um welche jeder Punkt in der Richtung der mit dieser Achse parallelen Kraft fortrückt, gleich Null ist. Die Größe, um welche er in der Richtung der der zweyten Achse parallelen Kraft fortrückt, ist gleich dem Producte der Winkelbewegung der Rotation des Systems durch die der dritten Achse parallele Coordinate; und die Größe, um welche er in der Richtung der der dritten Achse parallelen Kraft fortrückt, ist gleich dem Producte der Winkelbewegung von der Umdrehung des Systems durch die der zweyten Achse parallele Coordinate. Folglich wird, nach dem obigen Grundsätze, das System um die erste Achse im Gleichgewichte seyn, wenn die Summe der Producte der Masse eines jeden Punkts durch seine der zweyten Achse parallele Kraft, und durch die der dritten Achse parallele Coordinate der Summe der Producte der Masse eines jeden Punkts durch seine der dritten Achse parallele Kraft und durch seine

der zweyten Achse parallele Coordinate gleich ist.

Um das System in allen seinen Lagen um die erste Achse ins Gleichgewicht zu bringen, wird erfordert, daß die vorige Gleichheit Statt habe, wie auch immer die der zweyten und dritten Achse parallelen Kräfte beschaffen seyn mögen; weil sie von der Richtung der Schwere, in Beziehung auf diese Achsen unabhängig seyn muß.

Man muß daher alsdann jede der beyden vorigen Summen besonders gleich Null setzen; und da die partialen Wirkungen des einer Achse parallelen Theils der zerlegten Schwere für alle Punkte des Systems die nämlichen sind, so ist die Summe der Produkte von jedem dieser Punkte durch seine der zweyten oder dritten Achse parallele Coordinate gleich Null. Wenn die nämliche Gleichheit in Ansehung der der ersten Achse parallelen Coordinaten Statt hat, so ist es leicht, einzusehen, daß sie in Ansehung einer jeden andern durch den vesten Punkt gehenden Achse bestehen werde. Daraus folgt, daß, was für eine Lage um diesen Punkt man auch dem Systeme geben mag, es sich um keine Achse werde drehen können; es wird also,

vermöge der Wirkung der Schwere, im Gleichgewichte bleiben. Den merkwürdigen Punkt, der diese Eigenschaft hat, nennt man den *Schwerpunkt* des Systems; er ist derjenige, durch welchen, in allen Lagen des Systems das Resultat aller Bestrebungen der Schwere beständig geht.

Um ihn zu bestimmen, wollen wir seine Lage, und die der Punkte des Systems auf drey unbewegliche auf einander lothrechte Achsen beziehen. Eine jede der Coordinaten dieses Mittelpunkts, multiplicirt durch die ganze Masse des Systems, wird der Summe der Produkte von der Masse eines jeden Punkts durch die ihm zugehörige Coordinate gleich seyn. So ist die Bestimmung des Schwerpunkts, dessen Begriff die Schwere erzeugt hat, von ihr unabhängig. Die Betrachtung dieses Punkts auf ein System von schweren oder nicht schweren, freyen, oder auf was immer für eine Art mit einander verbundenen Körpern angewandt, ist in der Mechanik sehr nützlich.
