## Zweytes Kapitel.

### *Von der Bewegung eines materiellen Punkts.*

Ein in Ruhe befindlicher Punkt kann sich selbst keine Bewegung geben, weil in ihm kein Grund liegt, sich vielmehr nach der einen als nach einer andern Richtung zu bewegen. Wenn er durch eine Kraft getrieben, und sofort sich selbst überlassen wird, so bewegt er sich, wofern er keinen Widerstand findet, beständig auf eine gleichförmige Art, das heiſst so, daſs für jeden Augenblick seine Kraft, und die Richtung seiner Bewegung die nämlichen sind. Dieſs Bestreben der Materie, in ihrem Zustande der Ruhe oder der Bewegung zu beharren, hat man *Trägheit* genannt. Und dieſs ist das erste Bewegungsgesetz der Körper.

Die geradlinigte Richtung der Bewegung folgt offenbar daraus, daſs kein Grund vorhanden ist, warum der Punkt vielmehr zur Rechten als zur Linken von seiner anfänglichen Richtung abweichen sollte; aber die Gleichförmigkeit seiner Bewegung ist nicht von gleicher Evidenz. Da die Natur der bewegenden Kraft unbekannt ist, so ist es unmöglich, a priori zu wissen, ob diese Kraft sich ohne Aufhören erhalten müsse.

In der That, da ein Körper unfähig ist, sich selbst eine Bewegung zu geben, so scheint er eben so unfähig zu seyn, die erhaltene zu verändern, so daſs also das Gesetz der Trägheit wenigstens das natürlichste und einfachste ist, das man sich denken kann. Es ist überdieſs durch die Erfahrung bestätiget; denn wir bemerken auf der Erde, daſs die Bewegungen in eben dem Maaſse länger fortdauern, als die Hindernisse, die sich ihnen widersetzen, vermindert werden, und dieſs veranlaſst uns zu glauben, daſs sie, ohne diese Hindernisse, beständig fortdauern würden. Aber besonders merkwürdig ist die Trägheit der Materie bey den himmlischen Bewegungen, welche seit einer groſsen Zahl von Jahrhunderten keine merkliche Veränderung erlitten haben. Wir werden also die Trägheit als ein Naturgesetz betrachten, und wo wir bey der Bewegung eines Körpers eine Veränderung bemerken werden, annehmen, daſs solche der Wirkung einer äussern Ursache zuzuschreiben sey.

Bey der gleichförmigen Bewegung sind die durchloffenen Räume den Zeiten proportionirt. Aber die zu Beschreibung eines bestimmten Raums angewandten Zeiten, sind, nach der Gröfse der bewegenden Kraft, mehr oder weniger lang. Diese Unterschiede haben den Begriff von Geschwindigkeit erzeugt, welcher, bey der gleichförmigen Bewegung, das Verhältnifs des Raums zu der auf dessen Zurücklegung verwandten Zeit ist. Um nicht ungleichartige Gröfsen, dergleichen Raum und Zeit sind, mit einander zu vergleichen, nimmt man einen Zeittheil, z. B. die Secunde, für die Einheit der Zeit, und wählt dazu eine Einheit des Raums, z. B. den Fufs, alsdann sind Raum und Zeit abstrakte Zahlen, welche ausdrücken, wie viele Einheiten ihrer Art sie enthalten, und man kann sie daher mit einander vergleichen. So wird also die Geschwindigkeit das Verhältnifs zweyer abstracten Zahlen, und ihre Einheit ist die Geschwindigkeit eines Körpers, welcher einen Fufs in einer Secunde durchläuft. Wenn man auf solche Art, den Raum, die Zeit und die Geschwindigkeit auf abstracte Zahlen bringt, so sieht man, dafs der Raum dem Produkte aus der Geschwindigkeit durch die

Zeit, und mithin die Zeit dem Quotienten aus dem durch die Geschwindigkeit dividirten Raume gleich ist.

Da die Kraft nur durch den Raum bekannt ist, welchen sie den Körper in einer bestimmten Zeit zurückzulegen treibt, so ist es natürlich, diesen Raum für ihr Maaſs anzunehmen. Dieſs setzt aber voraus, daſs mehrere nach einerley Richtung wirkende Kräfte, während einer Zeiteinheit, einen Raum zu durchlaufen treiben werden, welcher der Summe der Räume gleich ist, die jede von ihnen besonders würde zu durchlaufen getrieben haben, oder, was auf eben das hinausläuft, daſs die Kraft der Geschwindigkeit proportionirt ist.

Allein dieses können wir, aus Mangel an Kenntniſs von der Natur der bewegenden Kraft, nicht a priori wissen, und müssen daher auch noch über diesen Gegenstand die Erforschung zu Rathe ziehen. Denn alles, was nicht eine nothwendige Folge aus den wenigen Bestimmungen ist, die uns über die Natur der Dinge gegeben sind, ist für uns bloſs ein Resultat der Beobachtung.

Die Kraft kann durch eine unendliche Menge von Funktionen der Geschwindigkeit, welche

welche nichts widersprechendes enthalten, ausgedrückt werden. Es liegt aber nichts dergleichen in der Voraussetzung, dafs sie dem Quadrate der Geschwindigkeit proportionirt sey. Bey dieser Voraussetzung ist es leicht, die Bewegung eines durch jede beliebige Zahl von Kräften, deren Geschwindigkeiten bekannt sind, getriebenen Punkts zu bestimmen. Denn wenn man auf den Richtungen dieser Kräfte, von dem Punkte an, da sie zusammentreffen, gerade Linien nimmt, um ihre Geschwindigkeiten darzustellen, und man nimmt ferner auf den nämlichen Richtungen, und von dem nämlichen Punkte an, andere gerade Linien, die sich zusammen verhalten, wie die Quadrate der erstern, so können diese Linien die Kräfte selbst vorstellen. Setzt man sie sofort auf die oben beschriebene Art zusammen, so erhält man die Richtung ihres Resultats, so, dafs die Linie, die diese ausdrückt, zu dem Quadrate der zugehörigen Geschwindigkeit sich verhalten wird, wie die Linie, welche eine der zusammensetzenden Kräfte vorstellt, zu dem Quadrate ihrer Geschwindigkeit. Man sieht hieraus, wie man die Bewegung eines Punkts bestimmen kann, welches auch immer, unter allen mathematisch möglichen Functionen, die Function der Geschwindigkeit seyn mag, die die Kraft ausdrückt. Wir wollen nun untersuchen, welches die in der Natur wirklich Statt habende sey.

Man bemerkt auf der Erde, daſs ein durch eine Kraft getriebener Körper sich auf einerley Art bewegt, wie auch immer der Winkel beschaffen seyn mag, den die Richtung dieser Kraft mit der Richtung der dem Körper und dem mit ihm zusammengehörigen Theile der Erdoberfläche gemeinschaftlichen Bewegung einschlieſst. Eben dieſs ist der Fall bey einem Schiffe, dessen Bewegung gleichförmig ist; ein beweglicher Körper, der der Wirkung einer Feder, der Schwere oder jeder andern Kraft ausgesetzt wird, bewegt sich in Beziehung auf die Theile des Schiffs, auf einerley Art, wie auch immer die Geschwindigkeit des Schiffs und seine Richtung beschaffen seyn mag. Man kann daher den Satz, daſs, wenn man in einem Systeme von Körpern, die mit einer gemeinschaftlichen Bewegung fortgeführt werden, einem derselben irgend eine Kraft eindrückt, seine relative oder scheinbare Bewegung die nämliche seyn werde, wie auch immer die allgemeine Bewegung des Systems, und der Winkel, den ihre Richtung mit der der eingedrückten Kraft macht, beschaffen seyn mögen, als ein allgemeines Bewegungsgesetz der Erdkörper aufstellen.

Setzt man dieses Gesetz als genau voraus, so folgt daraus die Proportionalität der Kraft mit der Geschwindigkeit. Denn wenn man sich zwey Körper gedenkt, die sich auf einerley geraden Linie mit gleichen Geschwindigkeiten bewegen, so daſs, wenn einem von ihnen eine Kraft eingedrückt wird, die sich mit der erstern vereinigt, seine Geschwindigkeit in Ansehung des andern Körpers die nämliche ist, wie wenn die beyden Körper anfänglich in Ruhe gewesen wären, so ist offenbar, daſs alsdann der von dem Körper, vermöge seiner anfänglichen und der ihm zugesetzten Kraft, durchloffene Raum der Summe der Räume gleich ist, durch welche jede derselben besonders ihn in der nämlichen Zeit würde geführt haben. Dieſs setzt aber voraus, daſs die Kraft der Geschwindigkeit proportionirt sey.

Umgekehrt, wenn die Kraft der Geschwindigkeit proportionirt ist, so sind die relativen Bewegungen eines Systems von Körpern, die von bewegenden Kräften getrieben werden, die nämlichen, wie auch immer ihre gemeinschaftliche Bewegung beschaffen seyn mag. Denn wenn diese Bewegung in drey andere, eben so vielen unbeweglichen Achsen parallele zerlegt wird, so vermehrt sie bloſs die partialen Geschwindigkeiten jedes Körpers, in paralleler Richtung mit diesen Achsen, um einerley Göſse; und da die relative Geschwindigkeit bloſs von dem Unterschiede dieser partialen Geschwindigkeiten abhängt, so ist sie die nämliche, wie auch immer die allen Körpern gemeinschaftliche Bewegung beschaffen seyn mag. Daher ist es alsdann unmöglich, von der absoluten Bewegung eines Systems, wovon man selbst einen Theil ausmacht, nach den Erscheinungen, die man in demselben bemerkt, zu urtheilen. Und eben dieses ist das Merkmal dieses Gesetzes, vor dessen Kenntniſs man das wahre Weltsystem nicht kennen lernen konnte, wegen der Schwierigkeit, die relativen Bewegungen geworfener Körper über der Oberfläche der Erde, bey einer doppelten Bewegung der letztern, nämlich der Umdrehung um sich selbst und dem Umlaufe um die Sonne sich vorzustellen.

Aber wegen der äussersten Kleinheit auch der beträchtlichsten Bewegungen, die wir den Körpern ertheilen können, in Vergleichung mit der Bewegung, die sie mit der Erde fortführt, braucht es, um die Erscheinungen eines Systems von Körpern von der Richtung dieser Bewegung unabhängig zu machen, nichts weiter, als daſs ein kleiner Zuwachs der Kraft, von welcher die Erde getrieben wird, zu der ihm zugehörigen Zunahme ihrer Geschwindigkeit in dem Verhältnisse eben dieser Grössen stehe. Unsere Erfahrungen beweisen also nur die Realität dieser Proportion, welche, wenn sie Statt hätte, wie auch immer die Geschwindigkeit der Erde beschaffen seyn möchte, das Gesetz der der Kraft proportionirten Geschwindigkeit geben würde. Sie würde dieses Gesetz auch dann noch geben, wenn die Function der Geschwindigkeit, welche die Kraft ausdrückt, nur aus einem einzigen Gliede bestünde. Man müſste also, wenn die Geschwindigkeit nicht der Kraft proportionirt wäre, annehmen, daſs in der Natur die Function der Geschwindigkeit, welche die Kraft ausdrückt, aus mehrern Gliedern bestehe, was nicht wahrscheinlich ist. Man müſste ferner voraussetzen, daſs die Geschwindigkeit der Erde genau diejenige sey, die der vorigen Proportion gemäſs ist, was gegen alle Wahrscheinlichkeit ist. Ausserdem ist die Geschwindigkeit der Erde zu verschiedenen Jahrszeiten verschieden; sie ist im Winter ungefähr um ein Dreyſsigstel gröſser, als im Sommer, diese Veränderung ist noch beträchtlicher, wenn, wie es alles anzuzeigen scheint, das Sonnensystem im Weltraume in Bewegung ist. Denn je nachdem dieſs Fortrücken mit der Bewegung der Erde nach einerley oder nach entgegengesetzter Richtung erfolgt, müssen im Verlaufe des Jahrs groſse Veränderungen in der absoluten Bewegung der Erde daraus entstehen; welches die erwähnte Proportion, und das Verhältniſs der eingedrückten Kraft zu der daraus entstehenden relativen Geschwindigkeit ändern müſste, wenn diese Proportion und dieses Verhältniſs nicht von der Bewegung der Erde unabhängig wäre. Indessen lassen die genauesten Versuche dabey keine merkliche Veränderung gewahrnehmen.

Alle himmlischen Erscheinungen verstärken diese Beweise. Die Geschwindigkeit des Lichts, wie sie durch die Verfinsterungen der Jupiterstrabanten bestimmt wird, verbindet sich mit der Erde genau so, wie bey dem Gesetze der Proportionalität der Kraft mit der Geschwindigkeit und alle nach diesem Gesetze berechneten Bewegungen des Sonnensystems stimmen vollkommen mit den Beobachtungen überein.

Hier sind also zwey Bewegungsgesetze, nämlich das Gesetz der Trägheit, und das der Proportionalität der Kraft mit der Geschwindigkeit, die durch die Beobachtung gegeben sind. Sie sind die natürlichsten und einfachsten, die man sich denken kann, und ohne Zweifel fliefsen sie aus der Natur der Materie selbst her; da aber diese Natur unbekannt ist, so sind diese Gesetze für uns blofs beobaachtete Thatsachen, übrigens die einzigen, welche die Mechanik von der Erfahrung entlehnt.

Da die Geschwindigkeit der Kraft proportionirt ist, so kann von diesen zwey Gröfsen jede durch die andere dargestellt werden; man wird also, nach dem Vorhergehenden, die Geschwindigkeit eines zur Bewegung getriebenen Punkts durch eine Zahl von Kräften, deren Richtungen und Geschwindigkeiten man kennt, erhalten.

Wenn der Punkt durch stetig wirkende Kräfte getrieben wird, so wird er mit eine stets veränderlichen Bewegung eine Curve beschreiben, deren Natur von den Kräften, die ihn durch dieselbige führen, abhängt. Um sie zu bestimmen, mufs man die Curve in ihren Elementen betrachten, sehen, wie diese aus einander entstehen, und von dem Gesetze des Wachsthums der Coordinaten auf ihren endlichen Ausdruck zurückgehen. Hier wird die Infinitesimalrechnung unentbehrlich, und man erfährt es, wie nützlich es sey, diefs wichtige Werkzeug des menschlichen Geistes zu vervollkommnen.

Wir haben an der Schwere ein tägliches Beyspiel von einer Kraft, die ununterbrochen zu wirken scheint. In der That wissen wir zwar nicht, ob nicht ihre auf einander folgenden Wirkungen durch Zeittheile getrennt sind, deren Dauer unmerklich ist; da aber bey dieser Voraussetzung die Erscheinungen sehr nahe die nämlichen sind, wie bey der einer stetigen Wirkung, so haben die Geometer die letztere, als die bequemere und einfachere, angenommen. Wir wollen nun die Gesetze dieser Erscheinungen entwickeln.

Die Schwere scheint auf gleiche Art im Zustande der Ruhe, wie in dem der Bewegung auf die Körper zu wirken. Im ersten

Augenblicke erhält ein ihrer Wirkung überlassener Körper einen unendlich kleinen Grad der Geschwindigkeit; im zweyten Augenblicke kommt zu dem vorigen ein neuer Grad von Geschwindigkeit hinzu, und so fort in den übrigen, so daſs die Geschwindigkeit im Verhältnisse der Zeiten wächst.

Gedenkt man sich ein rechtwinklichtes Dreyeck, dessen eine Seite die Zeit vorstellt, und mit ihr wächst, so wird die andere Seite die Geschwindigkeit vorstellen können. Da das Element der Fläche des Dreyecks dem Produkte aus dem Elemente der Zeit durch die Geschwindigkeit gleich ist, so wird es das Element des Raums vorstellen, durch welchen die Schwere den Körper führt; dieser ganze Raum wird also durch die ganze Fläche des Dreyecks dargestellt werden, die, indem sie, wie das Quadrat von einer ihrer Seiten wächst, uns zeigt, daſs bey der durch die Wirkung der Schwere beschleunigten Bewegung die Geschwindigkeiten wachsen, wie die Zeiten, und die Höhen, von welchen der Körper fällt, nachdem er den Zustand der Ruhe verläſst, wie die Quadrate der Zeiten, oder der Geschwindigkeiten. Wenn man daher den Raum, durch welchen ein Körper in der ersten Secunde fällt, durch die Einheit ausdrückt, so wird er in zwey Secunden durch vier, in drey Secunden durch neun Einheiten, und so weiter, fallen, so daſs er in jeder Secunde Räume beschreiben wird, die wie die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 etc. etc. wachsen.

Der Raum, den ein Körper, vermöge der am Ende seines Falls erlangten Geschwindigkeit, in einer, der Dauer des Falls gleichen Zeit beschreiben würde, würde das Produkt dieser Zeit durch seine Geschwindigkeit seyn; dieſs Produkt aber ist das Doppelte von der Fläche des Dreyecks; folglich würde ein sich gleichförmig bewegender Körper, vermöge seiner erlangten Geschwindigkeit in einer der Dauer seines Falls gleichen Zeit, den doppelten Raum von dem, welchen er durchloffen hat, zurücklegen.

Das Verhältniſs der erlangten Geschwindigkeit zu der Zeit ist für einerley beschleunigende Kraft beständig; es wächst, oder nimmt ab, je nachdem solche mehr oder weniger groſs sind, und kann also dienen, sie auszudrücken. Da das Doppelte des durchloffenen Raums das Produkt aus der Zeit durch die Geschwindigkeit ist, so ist die beschleunigende Kraft diesem doppelten Raume, dividirt durch das Quadrat der Zeit, gleich. Es ist aber auch dem Quadrate der Geschwindigkeit, dividirt durch diesen doppelten Raum, gleich. Diese drey verschiedene Arten, die beschleunigenden Kräfte auszudrücken, sind unter verschiedenen Umständen nützlich; sie geben nicht die absoluten Werthe dieser Kräfte, sondern blos ihre Verhältnisse, sowohl unter einander, als mit einer von ihnen, die für die Einheit angenommen worden; und in der Mechanik hat man blos diese Verhältnisse nöthig.

Auf einer schiefen Ebene läſst sich die Wirkung der Schwere in zwey andere zerlegen; wovon die eine auf der Ebene lothrecht ist, und durch ihren Widerstand aufgehoben wird, die andere aber der Ebene parallel ist, und sich zur ursprünglichen Schwere verhält, wie die Höhe der Ebene zu ihrer Länge. Die Bewegung wird daher auf den schiefen Ebenen gleichförmig beschleunigt; aber die Geschwindigkeiten und die durchloffenen Räume verhalten sich zu den Geschwindigkeiten und zu den in der nämlichen Zeit durchloffenen Räumen, bey der lothrechten Bewegung, wie die Höhe der Ebene zu ihrer Länge.

Daraus folgt, daſs alle Chorden eines Kreises, die einen Endpunkt mit dem lothrechten Durchmesser desselben gemein haben, durch die Wirkung der Schwere in der nämlichen Zeit, wie dieser Durchmesser, zurückgelegt werden.

Ein nach einer geraden Linie geworfener Körper entfernt sich von dieser ohne Aufhören, und beschreibt eine gegen den Horizont zu hohle Curve, von welcher diese gerade Linie die erste Tangente ist. Seine Bewegung, durch Lothe auf diese gerade Linie bezogen, ist gleichförmig; aber sie wird nach diesen Lothen, den eben erläuterten Gesetzen gemäſs, beschleunigt. Fällt man daher, von jedem Punkte der Curve, Lothe auf die erste Tangente, so werden sie den Quadraten der zugehörigen Theile dieser Tangente proportionirt seyn; und diese Eigenschaft ist ein Merkmal der Parabel.

Wenn die Kraft des Wurfs nach der lothrechten Linie selbst gerichtet ist, so verwandelt sich die Parabel in diese; die Formeln für die parabolische Bewegung geben also diejenigen für die beschleunigte oder verminderte lothrechte Bewegung.

Diefs sind die von Galilei entdeckten Gesetze des Falls schwerer Körper. Heutzutage scheint es uns, als ob es leicht gewesen wäre; dazu zu gelangen. Da sie aber den Nachforschungen der Philosophen, ungeachtet der Erscheinungen, die sie ohne Aufhören wieder hervorbringen, entgangen waren, so war ein seltener Geist dazu erforderlich, sie aus diesen Erscheinungen herauszufinden.

Wir haben im ersten Buche gesehen, dafs ein schwerer Punkt an dem einen Ende einer nicht schweren geraden Linie, deren anderes Ende bevestiget ist, aufgehängt, das einfache Pendel abgiebt. Wird dieses Pendel von der lothrechten Linie entfernt, so strebt es, vermöge seiner Schwere, wieder in dieselbige zurückzukommen, und diefs Bestreben ist jener Entfernung, wenn sie nicht beträchtlich ist, sehr nahe proportionirt. Wir wollen uns nun zwey Pendeln von gleicher Länge gedenken, die im nämlichen Augenblicke und mit sehr kleinen Geschwindigkeiten, von der lothrechten Richtung ausgehen. Im ersten Augenblicke werden sie Bogen beschreiben, die diesen Geschwindigkeiten proportionirt sind. Im Anfange eines zweyten, dem ersten gleichen, Augenblicks werden diese Geschwindigkeiten im Verhältnisse der beschriebenen Bogen und der anfänglichen Geschwindigkeiten vermindert werden; die in diesem Augenblicke beschriebenen Bogen werden daher noch diesen Geschwindigkeiten proportionirt seyn. Eben so wird es sich mit den im dritten, im vierten und den weiter folgenden Augenblicken beschriebenen Bogen verhalten. Folglich werden in jedem Augenblicke die Geschwindigkeiten und die Bogen von der Verticallinie an genommen, den anfänglichen Geschwindigkeiten proportionirt seyn, und daher die Pendeln im nämlichen Augenblicke in Ruhe kommen. Hierauf werden sie mit einer, nach den nämlichen Gesetzen, nach welchen ihre Geschwindigkeit vermindert worden war, beschleunigten Bewegung wieder zu der Verticallinie zurückgehen, und werden im nämlichen Augenblicke und mit ihrer anfänglichen Geschwindigkeit bey derselben eintreffen. Nun werden sie auf der andern Seite der Verticallinie auf die nämliche Art eine Schwingung machen, und diese Schwingungen würden sie ins Unendliche fortsetzen, wenn sie dabey keinen Widerstand fänden. Es ist offenbar, daſs die Gröſse ihrer Schwingungen ihrer anfänglichen Geschwindigkeit proportionirt ist, aber die Dauer dieser Schwingungen ist immer die nämliche, und folglich von ihrer Gröſse unabhängig. Da die Kraft, welche das Pendel beschleuniget, nicht genau in dem Verhältnisse des von der Verticallinie an beschriebenen Bogens steht, so findet dieser Isochronismus in Ansehung der kleinen Schwingungen eines schweren Körpers, der sich in einem Kreise bewegt, nur beynahe Statt. Er ist völlig genau bey der Curve, auf welcher der der Tangente parallele Theil der zerlegten Schwere dem von dem niedrigsten Punkte an gerechneten Bogen proportionirt ist, welches unmittelbar ihre Differentialgleichung giebt. Huygens, dem man die Anwendung des Pendels auf die Uhren zu danken hat, lieſs sich angelegen seyn, diese Curve, und die Art, ein Pendel durch sie zu führen, kennen zu lernen. Er fand, daſs es eine lothrecht stehende Cykloide ist, so daſs ihr Scheitelpunkt die niedrigste Stelle einnimmt, und daſs man, um einen an dem Ende eines undehnbaren Fadens aufgehängten Körper durch sie zu führen, nur dessen anderes Ende in dem gemeinschaftlichen Anfangspunkte zweyer Cykloiden zu bevestigen braucht, die derjenigen, welche man von ihm beschrieben haben will, gleich, und nach entgegengesetzter Richtung lothrecht gestellt sind, so daſs der Faden, bey seinen Schwingungen, sich wechselsweise um einen Theil von jeder dieser Curven wickelt. So sinnreich auch diese Untersuchungen sind, so hat doch die Erfahrung dem kreisförmigen Pendel, wegen seiner viel gröſseren Einfachheit, und in der Anwendung zureichenden Genauigkeit, den Vorzug gegeben. Aber die Theorie der Evoluten, wozu sie die Veranlassung gegeben haben, ist durch ihre Anwendungen auf das Weltsystem sehr wichtig geworden.

Die Zeit der sehr kleinen Schwingungen eines kreisförmigen Pendels verhält sich zu der Zeit, die ein schwerer Körper brauchen würde von einer, der doppelten Länge des Pendels gleichen Höhe zu fallen, wie die halbe Peripherie zum Durchmesser. Folglich verhält sich die Zeit des Falls eines Körpers längst einem kleinen, durch einen lothrechten Durchmesser begränzten Kreisbogen, zur Zeit des Falls längst diesem Durchmesser,

ser, oder, was eben so viel ist, durch die Chorde des Bogens, wie der vierte Theil der Peripherie zum Durchmesser; die gerade Linie zwischen zwey gegebenen Punkten ist daher nicht die Linie des schnellsten Falls vom einen zum andern. Die Untersuchung dieser Linie hat die Forschbegierde der Geometer gereitzt, und sie haben gefunden, daſs es eine Cykloide ist, die zum Anfangspunkte den höchsten Punkt hat.

Die Länge des einfachen Pendels, das Secunden schwingt, verhält sich zur doppelten Höhe, von welcher die Körper, vermöge der Schwere, in der ersten Secunde fallen, wie das Quadrat des Durchmessers zum Quadrate der Peripherie. Wir haben in dem ersten Buche gesehen, daſs sehr genaue Versuche die Länge des Secundenpendels zu Paris 2,28386 Fuſs groſs gegeben haben. Daraus folgt, daſs die Schwere daselbst die Körper in der ersten Secunde durch 11,2704 Fuſs treibt. Dieser Uebergang der Schwingungsbewegung, deren Dauer man mit grosser Genauigkeit beobachten kann, zur geradlinigten Bewegung der schweren Körper ist eine sinnreiche Bemerkung, die man auch Huygens zu danken hat.

Die Zeiten der Schwingungen von Pendeln, deren Längen unterschieden sind, die aber von der nämlichen Schwere getrieben werden, verhalten sich bey sehr kleinen Schwingungen, wie die Quadratwurzeln aus diesen Längen. Wenn die Pendeln einerley Länge haben, aber von verschiedenen Schweren getrieben werden, so verhalten sich die Schwingungszeiten umgekehrt, wie die Quadratwurzeln aus den Schweren.

Vermittelst dieser Lehrsätze hat man die Veränderung der Schwere an der Erdfläche und auf dem Gipfel der Berge bestimmt. Eben so haben die Beobachtungen des Pendels gelehrt, daſs die Schwere weder von der Oberfläche, noch von der Gestalt der Körper abhängt, sondern daſs sie die innersten Theile durchdringt, und ihnen in gleichen Zeiten gleiche Geschwindigkeiten einzudrücken strebt. Um sich davon zu versichern, lieſs Newton eine groſse Zahl Körper von einerley Gewichte, aber von verschiedener Gestalt und Materie schwingen, die er, um einerley Widerstand der Luft zu erhalten, in einerley Gefäſs brachte. So groſs auch die Genauigkeit war, womit er bey diesen Versuchen zu Werke gieng, so konnte er doch zwischen den Schwingungszeiten dieser Körper keinen merklichen Unterschied finden. Daraus folgt, daſs, ohne den Widerstand, den sie leiden, ihre durch die Wirkung der Schwere erlangte Geschwindigkeit in gleicher Zeit gleich groſs seyn würde.

An der Kreisbewegung haben wir auch noch ein Beyspiel einer stetig wirkenden Kraft.

Da die Bewegung der Materie, wenn sie sich selbst überlassen wird, gleichförmig und gerädlinigt ist, so ist klar, daſs ein in einem Kreise sich bewegender Körper ohne Aufhören strebt, sich vom Mittelpunkte nach der Richtung der Tangente zu entfernen. Sein dahin gerichtetes Bestreben nennt man die *Centrifugalkraft*, hingegen die ganze, nach einem Mittelpunkte gerichtete Kraft, wird die *Centripetalkraft* oder *Centralkraft* genannt. Bey der Kreisbewegung ist die Centripetalkraft der Centrifugalkraft gleich und gerade entgegengesetzt; sie ist ohne Aufhören bestrebt, die Körper von der Peripherie nach dem Mittelpunkte zu führen, und in einem sehr kleinen Zeittheile läſst sich ihre Wirkung durch den Quersinus des beschriebenen kleinen Bogens messen.

Vermittelst dieses Resultats kann man die von der Umdrehung der Erde herrührende Centrifugalkraft mit der Schwere vergleichen.

Am Aequator beschreiben die Körper, vermöge dieser Umdrehung, in jeder Zeitsecunde einen Bogen von $40'',1095$ der Peripherie des Erdäquators. Da der Halbmesser dieses Aequators sehr nahe 19634778 Fuſs groſs ist, so ist der Quersinus dieses Bogens 0,0389704 Fuſs.

Die Schwere macht, daſs die Körper am Aequator in einer Secunde durch 11,23585 Fuſs fallen; folglich verhält sich am Aequator die zur Zurückhaltung der Körper an der Erdfläche nöthige Centralkraft, und mithin die von ihrer Umdrehung herrührende Centrifugalkraft, zu der Schwere, wie 1 zu 288,3.

Die Centrifugalkraft vermindert die Schwere, und die Körper fallen am Aequator nur vermöge des Unterschieds dieser beyden Kräfte.

Nennt man daher die ganze Erscheinung, wie sie ohne diese Verminderung Statt haben würde, Schwere (gravité), so ist die Centrifugalkraft am Aequator sehr nahe $\frac{1}{289}$ der Schwere.

Wäre die Umdrehung der Erde siebzehnmal schneller, so würde der in einer Secunde beschriebene Bogen siebzehnmal, und sein Quersinus 289 mal gröſser seyn. Alsdann wäre die Centrifugalkraft der Schwere gleich und die Körper würden am Aequator aufhören, gegen die Erde schwer zu seyn.

Ueberhaupt ist der Ausdruck einer beständigen beschleunigenden Kraft, welche immer nach einerley Richtung wirkt, dem doppelten Raume, durch welchen sie die Körper führt, durch das Quadrat der Zeit dividirt, gleich. Jede beschleunigende Kraft kann in einem sehr kurzen Zeittheile als beständig, und nach einerley Richtung wirhend angesehen werden. Ferner ist der Raum, durch welchen die Centralkraft bey der Kreisbewegung die Körper führt, und der Quersinus des beschriebenen kleinen Bogens, und dessen Sinus dem Quadrate des Bogens, durch den Durchmesser dividirt, sehr nahe gleich; der Ausdruck dieser Kraft ist daher das Quadrat des beschriebenen Bogens, dividirt durch das Quadrat der Zeit, und durch den Halbmesser des Kreises. Der Bogen, dividirt durch die Zeit, ist die Geschwindigkeit des Körpers; die Centripetalkraft und die Centrifugalkraft sind daher dem Quadrate der Geschwindigkeit, durch den Halbmesser dividirt, gleich.

Vergleichen wir dieses Resultat mit dem vorhin gefundenen, nach welchem die Schwere dem Quadrate der erlangten Geschwindigkeit, dividirt durch das Doppelte des durchloffenen Raums, gleich ist, so sehen wir, daſs die Centrifugalkraft der Schwere gleich ist, wenn die Geschwindigkeit des bewegten Körpers einerley ist mit der, welche ein schwerer Körper durch den Fall von einer dem halben Radius des beschriebenen Kreisbogens gleichen Höhe erlangen würde.

Die Geschwindigkeiten mehrerer in kreisförmiger Bewegung befindlichen Körper verhalten sich zusammen, wie die Peripherien die sie beschreiben, dividirt durch ihre Umlaufszeiten; die Peripherien aber verhalten sich wie Halbmesser; folglich verhalten sich auch die Quadrate der Geschwindigkeiten wie die Quadrate der Halbmesser, dividirt durch die Quadrate dieser Zeiten; und mithin verhalten sich die Centrifugalkräfte wie die Halbmesser der Peripherien, dividirt durch die Quadrate der Umlaufszeiten. Daraus folgt, daſs unter verschiedenen Erdparallelen die von der Umdrehung der Erde herrührende Centrifugalkraft den Halbmessern dieser Parallele proportionirt ist.

Diese schönen von Huygens entdeckten Lehrsätze haben Newton auf die allgemeine Theorie der Bewegung in krummen Linien und auf das Gesetz der allgemeinen Schwere geführt.

Ein Körper, der eine Curve beschreibt, ist bestrebt, sich nach der Richtung der Tangente von ihr zu entfernen. Nun kann man sich immer einen Kreis gedenken, der durch zwey angränzende Elemente der Curve geht, und den man den *Krümmungskreis* (*cercle osculateur*) nennt. In zwey auf einander folgenden Augenblicken bewegt sich der Körper in der Peripherie dieses Kreises, seine Centrifugalkraft ist daher dem Quadrate seiner Geschwindigkeit, dividirt durch den Krümmungshalbmesser, gleich; aber die Lage und Gröſse dieses Kreises ändern sich beständig.

Wenn die Curve, vermöge einer nach einem vesten Punkte gerichteten Kraft, beschrieben wird, so kann man diese Kraft in zwey zerlegen, wovon die eine mit dem Krümmungshalbmesser, die andere mit dem

Elemente der Curve gleiche Richtung hat. Die erste hält der Centrifugalkraft das Gleichgewicht, die andere vermehrt oder vermindert die Geschwindigkeit der Körper. Diese Geschwindigkeit ist daher stets veränderlich; aber sie ist immer so beschaffen, dafs *die durch den Radius Vector um den Ursprung der Kraft beschriebenen Flächen den Zeiten proportionirt sind.* Umgekehrt, *wenn die durch den Radius Vector um einen vesten Punkt beschriebenen Flächen wie die Zeiten wachsen, so ist die Kraft, welche den Körper treibt, beständig gegen diesen Punkt gerichtet.*

Diese Sätze, die der Theorie des Weltsystems zur Grundlage dienen, lassen sich leicht auf folgende Art beweisen.

Von der beschleunigenden Kraft kann man annehmen, dafs sie nur im Anfange eines jeden Zeittheils wirke, während dessen die Bewegung des Körpers gleichförmig ist; alsdann beschreibt der Radius Vector ein kleines Dreyeck. Wenn die Kraft im folgenden Augenblicke zu wirken aufhörte, so würde der Radius Vector in diesem neuen Augenblicke ein neues, dem vorigen gleiches, Dreyeck beschreiben. Denn weil diese beyden Dreyecke ihre gemeinschaftliche Spitze in dem vesten Punkte, von welchem aus die Kraft wirkt, und ihre Grundlinien in der nämlichen geraden Linie hätten, so würden sie gleich seyn, da sie mit der nämlichen Geschwindigkeit, in Zeittheilen, die, nach der Voraussetung gleich sind, beschrieben wären. Aber im Anfange des neuen Zeittheils vereinigt sich die beschleunigende Kraft mit der Tangentialkraft des Körpers, und führt ihn durch die Diagonale des Parallelogramms, dessen Seiten diese Kräfte vorstellen. Das Dreyeck, welches der Radius Vector vermöge dieser vereinigten Kraft beschreibt, ist demjenigen gleich, das er ohne die Wirkung der beschleunigenden Kraft beschrieben haben würde; denn diese beyden Dreyecke haben zur gemeinschaftlichen Grundlinie den Radius Vector von dem Ende des ersten Zeittheils, und ihre Spitzen liegen in einer Parallele von dieser Grundlinie. Die durch den Radius Vector beschriebene Fläche ist also in zwey auf einander folgenden gleichen Zeittheilen gleich, und mithin wächst der durch diesen Radius beschriebene Sector wie die Zahl dieser Zeittheile, oder wie die Zeit. Es ist klar, daſs dieſs nur in so weit Statt hat, als die beschleunigende Kraft gegen einen vesten Punkt gerichtet ist; sonst würden die vorhin betrachteten Dreyecke nicht einerley Höhe und Grundlinie haben; folglich beweiſst die Proportionalität der Flächen mit den Zeiten, daſs die beschleunigende Kraft beständig gegen den Anfangspunkt des Radius Vectors gerichtet ist.

Wenn man sich in diesem Falle einen sehr kleinen Sector gedenkt, der in einem sehr kleinen Zeittheile beschrieben worden, und man zieht von dem einen Ende dieses Sectors eine Tangente an die Curve, und verlängert den von dem Anfangspunkte der Kraft an das andere Ende des Sectors gezogenen Radius Vector bis an diese Tangente, so wird der zwischen der Curve und der Tangente eingeschlossene Theil dieses Radius offenbar der vermöge der Centralkraft beschriebene Raum seyn. Dividirt man das Doppelte dieses Raums durch das Quadrat der Zeit, so erhält man den Ausdruck der Kraft. Nun ist der Sector der Zeit proportionirt. Die Centralkraft verhält sich also wie der zwischen der Curve und der Tangente eingeschlossene Theil des Radius Vectors, dividirt durch das Quadrat des Sectors.

Genau genommen ist zwar die Centralkraft in den verschiedenen Punkten der Curve diesem Quotienten nicht proportionirt; sie ist es aber um so viel näher, je kleiner die Sectoren sind, so daſs sie der Gränze dieser Quotienten völlig genau proportionirt ist. Die Differentialrechnung giebt diese Gränze durch eine Function des Radius Vectors, wenn die Natur der Curve bekannt ist, und alsdann hat man die Function der Entfernung, welcher die Centralkraft proportionirt ist.

Wenn das Gesetz der Kraft gegeben ist, so hat die Untersuchung der Curve, durch welche sie ihn führt, mehr Schwierigkeiten. Wie aber auch immer die Kräfte beschaffen seyn mögen, von welchen ein Körper getrieben wird, so wird man die elementarischen Veränderungen seiner Bewegung auf folgende Art leicht bestimmen können. Wir wollen uns drey unbewegliche und auf einander lothrechte Achsen gedenken, so wird die Lage des Körpers für jeden Augenblick durch drey diesen Achsen parallele Coordinaten bestimmt werden. Zerlegt man nun jede der Kräfte, die auf den Punkt wirken, in drey andere, eben diesen Achsen parallele, so wird das

Produkt des Resultats aus allen, einer von den Coordinaten parallelen, Kräften durch das Element der Zeit, während dessen sie wirkt, die Zunahme der Geschwindigkeit des Körpers in paralleler Richtung mit dieser Coordinate ausdrücken. Nun kann diese Geschwindigkeit, während dieses Elements, als gleichförmig, und dem Elemente der Coordinate, durch das Element der Zeit dividirt, gleich, angesehen werden; die elementarische Veränderung dieses Quotienten ist daher dem vorigen Produkte gleich. Die Betrachtung der zwey andern Coordinaten giebt zwey ähnliche Ausdrücke; und so wird die Bestimmung der Bewegung des Körpers eine Untersuchung der bloſsen Analysis, wobey es auf die Integration dieser Differentialgleichungen ankommt.

Diese Integration ist leicht, wenn die Kraft gegen einen vesten Punkt gerichtet ist, oft aber macht die Natur der Kräfte sie unmöglich. Indessen führt die Betrachtung der Differentialgleichungen auf einige merkwürdige Sätze der Mechanik, dergleichen der folgende ist. *Die elementarische Veränderung des Quadrats der Geschwindigkeit eines der Wirkung von beschleunigenden Kräften aus-*

*gesetzten Körpers ist gleich der doppelten Summe des Produkts von jeder Kraft durch den kleinen Raum, um welchen der Körper in einem Augenblicke nach der Richtung dieser Kraft fortrückt.* Es ist leicht daraus zu schliefsen, dafs die von einem schweren Körper längst einer krummen Linie oder Fläche erlangte Geschwindigkeit die nämliche ist, als wenn er von der nämlichen Höhe in lothrechter Richtung gefallen wäre.

Mehrere Philosophen, veranlafst durch die zur Bewunderung hinreifsende Ordnung, welche in der Natur herrscht, und die Fruchtbarkeit ihrer Mittel in Hervorbringung der Erscheinungen, sind auf den Gedanken gerathen, sie gelange immer auf den einfachsten Wegen zu ihrem Ziele. Diese Vorstellungsart dehnten sie auf die Mechanik aus, und suchten die Oekonomie, die die Natur bey der Anwendung der Kräfte zum Zwecke gehabt hätte. Nach verschiedenen fruchtlofsen Versuchen fanden sie endlich, dafs ein Körper, unter allen krummen Linien, die er von einem Punkte zum andern durchlaufen kann, immer diejenige wählt, bey welcher das Integral des Produkts seiner Masse durch seine Geschwindigkeit und durch das Element der Curve ein

Minimum ist. Da also die Geschwindigkeit eines Körpers, der sich auf einer krummen Oberfläche bewegt, und durch keine Kraft sollicitirt wird, beständig ist, so gelangt er durch die kürzeste Linie von einem Punkte zum andern. Das vorerwähnte Integral hat man die *Wirkung* des Körpers, und den Inbegriff ähnlicher, auf jeden Körper eines Systems sich beziehender Integrale, die Wirkung des Systems genannt. Die Oekonomie der Natur besteht also, nach diesen Philosophen, darin, dafs sie diese Wirkung spart, so, dafs sie die kleinste mögliche ist. Diefs ist es, was *das Gesetz der kleinsten Wirkung ausmacht.*

Dieser Grundsatz ist in der That nichts anders als ein sonderbares Resultat der ursprünglichen Gesetze der Bewegung, welche, wie wir gesehen haben, die natürlichsten und einfachsten sind, die man sich denken kann, und daher aus dem Wesen der Materie selbst herzufliefsen scheinen. Alle mathematisch möglichen Gesetze würden ähnliche Resultate darbieten. Man mufs ihn daher nicht zu einer Endursache erheben; und er hat so wenig den Bewegungsgesetzen ihre Entstehung gegeben, dafs er nicht einmal zu ihrer Entdeckung etwas beygetragen hat, ohne welche man noch darüber streiten würde, was man unter der kleinsten Wirkung der Natur zu verstehen habe.

---

## Drittes Kapitel.

### *Vom Gleichgewichte eines Systems von Körpern.*

Der einfachste Fall des Gleichgewichts mehrerer Körper ist der von zwey materiellen Punkten, die einander mit gleichen und gerade entgegensetzten Geschwindigkeiten begegnen. Ihre gegenseitige Undurchdringlichkeit, diese Eigenschaft der Materie, vermöge welcher zwey Körper nicht zu gleicher Zeit den nämlichen Raum einnehmen können, vernichtet offenbar ihre Geschwindigkeiten, und bringt sie in den Stand der Ruhe. Wenn aber zwey Körper von ungleichen Massen mit entgegengesetzten Geschwindigkeiten auf einander stofsen, was ist dann das Verhältnifs der Geschwindigkeiten zu den Massen im Falle des Gleichgewichts? Um diese Aufgabe aufzulösen, wollen wir uns ein System angränzender in einer geraden Linie liegender,