Allgemeine Darstellung der Methode die geographische Lage eines Orts durch astronomische Beobachtungen zu bestimmen.

§. 1.

Es seyen P und p die beyden Pole der Erdkugel, O irgend ein Ort auf der Oberfläche der Erde, AQ der Aequator. Man lege durch die beyden Pole und durch O einen Kreis POAp, so heiſst man den Bogen AO, welcher den Winkel miſst, den die Verticallinie CO des Orts O mit der Ebene des Aequators macht, die *Breite* des Orts O; sie ist *nördlich* oder *südlich* je nachdem der Ort O vom Aequator an gerechnet gegen den Nordpol P oder Südpol p der Erde hin liegt. Fig. 1.

Ein anderer Ort auf der Erde seye o, ein Kreis durch ihn und durch die beyden Pole Poap. ao ist seine Breite. Wäre nun der Winkel APa, den die beyden Halbkreise durch O und o miteinander machen, und die Breite ao bekannt, so würde dadurch die Lage des Orts o gegen O bestimmt. Der

Win-

Winkel APa wird durch den Bogen des Aequators Aa gemessen. Man nimmt einen gewissen Punct A auf dem Aequator zum Anfangspunct an, von welchem die Bogen, wie Aa von Abend gegen Morgen gerechnet werden, alsdann heiſst Aa die Länge des Orts o. Die Halbkreise POAp und Poap heissen Mittagskreise. Länge und Breite zusammen bestimmen also die *geographische Lage* eines Orts.

Anmerkung. Der Mittagskreis durch den Punct A, von welchem an die Längen gerechnet werden, wird der *erste* Mittagskreis genannt, und gewöhnlich 20 Grade von der Pariser königlichen Sternwarte gegen Abend gesezt, so daſs hienach die Länge der Pariser Sternwarte = 20 Gr. ist. Mehreres hievon findet man in Hrn. Hofrath Kästners angew. Mathematik. Geograph. 31.

§. 2.

Man gedenke sich die Axe der Erde Pp bis an die scheinbare Himmelskugel verlängert. Einer Ebene, welche die Erdkugel in dem Punct O berührt, Durchschnitt mit der Ebene durch jenen Punct, den Mittelpunct und Pol der Erde O, C und P seye OT, so ist OT des Orts O Mittagslinie. Man ziehe nach dem Punct, wo die verlängerte Axe der Erde die Himmelskugel trift eine gerade Linie $O\pi$, so hat man $OTC = \pi OT + O\pi T$, ferner macht sowohl der Winkel OTC als der Winkel ACO mit dem Winkel OCT einen rechten Winkel, folglich ist $OTC = ACO = \pi OT + O\pi T$. Aber wegen der sehr grossen

sen Entfernung der Fixsterne ist $O\pi T = o$, folglich $ACO = \pi OT$, oder die Breite eines Orts ist seiner *Polhöhe* gleich.

§. 3.

Nun seyen P und p die beyden Pole der Himmelskugel, Z der Punct, wo die verlängerte Verticallinie eines Orts auf der Erde die Himmelskugel trift, so ist ein Kreis durch P, Z und p der Mittagskreis, PO die Polhöhe, $HA = PZ =$ der Aequatorshöhe und beyder Summe $= 90^\circ$. Eines Sterns Abweichung seye Am, so wird er während seines täglichen scheinbaren Umlaufs zweymal in den Mittagskreis kommen, das eine mal über, das andere mal unter dem Pol, und wenn sein Abstand vom Pol Pn kleiner ist als die Breite PO, so wird man seine kleinste Höhe in n und gröste *) in m messen können. Daraus findet sich $2PO = Om + On$; folglich wäre die Breite gleich der halben Summe der grösten und kleinsten Höhe des Sterns **). Wenn die Polhöhe grösser ist als 45°, so kann man eines Sterns kleinste Höhe noch beobachten, wenn Fig. 2.

*) Wenn in der Folge von der Mittagshöhe eines Sterns die Rede ist, so wird darunter immer seine *gröste* Mittagshöhe verstanden, ausser es werde ausdrüklich das Gegentheil erinnert.

**) Beyder Höhen halber Unterschied ist des Sterns Abstand vom Pol. Hieraus erhellet, wie man die Abweichung eines Sterns bestimmen kann, ohne die Breite zu wissen. Die Abweichungen anderer Sterne lassen sich alsdann blos durch Unterschiede der Höhen bestimmen.

wenn auch seine Polardistanz grösser wäre als die Aequatorshöhe PZ. In diesem Fall würde die kleinste Höhe in dem nordlichen Theil des Meridians ZO, die gröste in dem südlichen ZH genommen. Da wäre also die Polhöhe

$$= \frac{180^\circ - Hs + Ot}{2} = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(Hs - ot).$$

§. 4.

Man hat Verzeichnisse von Fixsternen in welchen ihre Abweichungen, wie Am angegeben sind. Daraus findet man $Pm = 90^\circ - Am$. Folglich kann man aus *einer* Mittagshöhe eines Sterns On die Breite finden; man hat nehmlich für die Höhe unter dem Pol $OP = On + Pn$, und für eine Höhe über dem Pol $OP = Om - Pm$, oder die Breite ist = Höhe des Sterns $\pm$ Polardistanz des Sterns. Wird die Höhe des Sterns in dem südlichen Theil des Meridians genommen, so hat man $HA = Hs - As$ oder $= Hu + Au$, oder die Aequatorshöhe ist für einen Stern von nördlicher Abweichung = dem Unterschied, für einen südlichen = der Summe der beobachteten Höhe und der Abweichung. Für eine südliche Polhöhe oder Breite fände sich, wie man leicht aus der Figur sehen kann, die Aequatorshöhe = der Höhe des Sterns $\pm$ Abweichung, wo das obere Zeichen bey nördlicher das untere bey südlicher Abweichung gebraucht wird. Wenn man eines Sterns Höhe kennt, so weiſs man auch seinen Abstand vom Scheitel oder Zenith, weil beyder Summe $= 90^\circ$; ferner ist $AZ = 90^\circ - AH =$ der

Breite,

Breite, folglich läſst sich auch die Breite durch Zenithdistanz und Abweichung eines Sterns ausdrüken. Es ist nehmlich $AZ = As + Zs = Zu - Au$, oder Breite = Abstand vom Zenith $\pm$ Abweichung + für nördliche — für südliche Abweichung. Die verschiedenen hier vorkommenden Fälle hat Herr von Zach in folgendende Tafel *) gebracht:

Anmerkung. Die Methode (§. 3.) die Polhöhe durch die gröste und kleinste Höhe der Circumpolarsterne, welche nie untergehen, zu bestimmen, ist immer die sicherste. Allein man kann nicht zu allen Jahrszeiten Gebrauch davon machen, weil der Stern eine seiner Mittagshöhen bey Tage erreichen kann, da er nur durch sehr gute Fernröhren sichtbar ist. Ein reisender Beobachter, der die Breite eines Orts in einem Tage oder vielleicht in einigen Stunden beſtimmen will, hat noch andere Methoden nöthig, wovon unten wird gehandelt werden.

1) Abstand vom Scheitel nördlich.			2) Abſtand vom Scheitel südlich.		
1) Abw. nördich		2) Abw. südlich	1) Abw. nördl.	2) Abw. südlich.	
im I. Fall ist		im II. Fall	im III. Fall	im IV. Fall	
ihr Unterschied		ihre Summe	ihre Summe	ihr Unterschied	
die gesuchte Breite und zwar			Die gesuchte Breite und zwar		
nördlich	südlich	südlich.	nördlich.	nördlich	südlich
wenn die Abweich. grösser ist als der Abstand vom Scheitel.	wenn der Abst. vom Scheitel grösser ist als die Abweich.			wenn der Abst. vom Scheitel grösser ist als die Abweich.	wenn die Abweich. grösser ist als Abst. vom Scheitel.

Wenn die Höhe eines Sterns *unter* dem Pol beobachtet wird, so hat man $AZ = An - Zn =$

180°

*) Canzler und Meisnerische Quartalschrift III. Jahrgang Vtes Heft S. 41.

$180^{\circ} - Am - Zn$. In diesem Fall wäre also die Polhöhe = der Ergänzung der Summe der Abweichung und des Abstands vom Scheitel zu 180°.

§. 5.

Es seyen P und p die Pole, O' und o' zwey Oerter auf der Erde. Man ziehe die Halbmesser CO und CO' und an O und O' die Tangenten OT, O'T'. Man beobachte in O
Fig. 3. die Mittagshöhe eines Sterns Tos. Zieht man durch O', O'S' mit OS parallel, so wird T'O'S die Höhe desselben Sterns in O' seyn. Nun ist $Tos = Opq + pqO$, aber $opq = T'ps = T'o's'$ und $pqO = O'CO$ folglich ist $OCO' = TOS - T'O'S'$. Mifst man also in O' die Mittagshöhe desselben Sterns, so ist der Unterschied der Höhen in O und O' = dem Unterschied der Breiten beider Oerter, und zwar liegt derjenige Ort unter einer geringern Breite, an welchem die Höhe eines gegen Norden culminirenden Sterns kleiner gefunden wird. Das Gegentheil findet bey einem gegen Süden culminirenden Stern statt. Da findet man also den Unterschied der Breiten aus dem Unterschied der Höhen, und braucht weder Abweichung des Sterns noch seine absolute Höhen zu wissen. Die Breite des Orts O' ist gegeben, wenn man die des Orts O kennt und umgekehrt.

§. 6

Wir haben oben (§. 1.) gesehen, dafs zur Bestimmung der geographischen Lage eines Orts

Orts ausser seiner Breite auch seine *Länge* erfordert wird. Die sicherste Methode sie ohne wirkliche Ausmessungen auf der Erde zu bestimmen, gründet sich auf die tägliche Umdrehung der Erde um ihre Axe. Wenn ein Stern durch die Ebene des Meridians Poap des Orts o Fig. 1 geht oder culminirt, so wird eben dieser Stern von dem Meridian des Orts O noch um den Winkel APa abstehen, folglich eine gewisse Zeit verfliesen, bis er durch den Mittagskreis des Orts O geht. Diese Zeit ist so gros als die Zeit welche die Erde gebrauchte sich um den Winkel Apa zu drehen. Wäre diese Zeit sammt der Zeit der Umdrehung der Erde um ihre Axe gegeben, so könnte man, da die Umdrehung der Erde um ihre Axe gleichförmig ist, den Längenunterschied der Oerter O und o leicht finden. Man hätte die Proportion: Die Zeit der Umdrehung der Erde um ihre Axe verhält sich zu der Zeit welche die Erde gebrauchte sich um den Winkel Apa zu drehen, wie 360 Grade zu dem Längenunterschied beyder Oerter.

§. 7.

Wenn man also wüſste um wie viel früher der Stern durch den Mittagskreis des Orts o gieng als durch den Mittagskreis des Orts O, so könnte man auch den Längenunterschied beyder Oerter finden. Man wird aber dieses bestimmen können, wenn in O und o die Zeiten einer gewissen Erscheinung, die sich für beyde Beobachter in O und o in *einem absoluten Augenblik* ereignet, nach gleichförmig und mit gleicher Geschwindigkeit gehenden Uhren bemerkt, und überdieſs die Zeiten beobachtet werden, da ein gewisser Stern durch die Meridiane der Oerter o und O gieng. Der Beobachter in O zähle $M^{St.}$ der in o $m^{St.}$ in dem Augenblik einer gewissen Erscheinung. Ferner culminire der Stern in O als die daselbst befindliche Uhr M' Stunden zeigte und in o da die Uhr in o m' Stunden zeigte, so sind von dem Augenblik der Erscheinung bis zu der Culmination des Sterns an dem Ort O verflossen $M' - M^{St.}$ und bis zu der Zeit der Culmination desselben Sterns in o, $m' - m$ St. Folglich gieng der Stern früher durch den Meridian des Orts o als durch den Meridian von O, $M' - M - (m' - m)$ St. Fände sich $m' - m > M' - M$, so läge der Ort O dem Ort o gegen Morgen. Verfliesen nun von einer Culmination des Sterns bis zu der nächstfolgenden 24 St., so hat man die Längendifferenz beyder Oerter $= \frac{360}{24} (M' - M - (m' - m)) = 15 (M' - M - (m' - m))$ Graden.

§. 8.

Gewöhnlich giebt man die Zeit einer Beobachtung nach wahrer Sonnenzeit an, wo die Stunden von dem Augenblik an gezählet werden, da der Mittelpunct der Sonne culminirt. Geben nun zwey Beobachter den Augenblik einer und derselben Erscheinung jeder nach wahrer Zeit seines Orts an, so zeigt der Unterschied beyder Zeiten, welcher der *Mittagsunterschied* heiſst, um wie viel die Sonne früher an dem einen Ort culminirte als an an dem andern. Da ferner 24 Stunden von einer Culmination der Sonne bis zu der nächstfolgenden verfliesen, so hat sich die Erde in dieser Zwischenzeit in Beziehung auf die Sonne einmal um ihre Axe umgedreht. Daher giebt ebenfalls eine Stunde Meridiandifferenz in wahrer Sonnenzeit 15 Grade Unterschied in der Länge. Man mag also die Zeit der Beobachtungen nach Sternzeit oder nach wahrer Sonnenzeit angeben, so findet man immer aus dem Mittagsunterschied zweyer Oerter ihren Längenunterschied, wenn man 15° auf eine Stunde rechnet. Dasselbe gilt, wie man leicht siehet, auch von mittlerer Zeit.

§. 9.

Es lässt sich also die Bestimmung der Länge auf folgende Aufgabe bringen. Man weiſs, wie viel Uhr es an einem gewissen Ort ist, man solle bestimmen, wie viel Uhr es in demselben Augenblick an einem andern Ort ist, dessen Länge man kennt. Dazu könnte man ein gemeinschaftliches Zeichen oder Signal gebrauchen, das man den beyden an den Oertern, deren Längenunterschied man bestimmen will, befindlichen Beobachtern zugleich geben könnte. Dieses gehet aber nur in kleinen Entfernungen an. Man wählte daher zu dieser Absicht gewisse Himmelsbegebenheiten, die sich theils *würklich*, theils nur *scheinbar* ereignen. Zu den ersten gehören Anfang und Ende der Mondsfinsternisse, Ein- und Austritte der Mondsfleken in und aus dem Schatten der Erde, Ein- und Austritte der Jupiterstrabanten in und aus dem Schatten ihres Hauptplaneten. Zu den leztern gehören Sonnenfinsternisse, Bedeckungen der Fixsterne und Planeten vom Mond, Vorübergänge der Venus und des Mercurs vor der Sonnenscheibe, Bedeckungen der Fixsterne von Planeten. Diese Erscheinungen hängen von dem Ort des Beobachters auf der Erde ab, und ereignen sich für Beobachter an verschiedenen Oertern der Erde nicht in *einem* Augenblick. Man muſs sie daher auf den Mittelpunct der Erde reduciren, wenn man daraus die Meridiandifferenz herleiten will. Endlich kann man vermittelst einer guten tragbaren Uhr, die indem sie von einem Ort zu dem andern gebracht wird, ihren Gang nicht ändert, die Meridiandifferenz sehr genau bestimmen. Denn hat man diese nach der Zeit eines gewissen Orts gestellt oder ihre Abweichung davon beobachtet, so läſst sich vermittelst derselben an jedem Ort, dessen Zeit man weiſs, die im Anfang dieses § erwähnte Aufgabe unmittelbar auflösen.

§. 10.

Aus dem bisher gesagten erhellet, daſs man zweyerley Arten von Instrumenten nöthig habe, um die geographische Lage der Oerter durch astronomische Beobachtungen zu bestimmen, nehmlich Instrumenten zu *Höhenmessungen* und zu *Zeitmessungen.* Um ferner die zur Bestimmung des Mittagsunterschieds der Oerter dienende Himmelsbegebenheiten beobachten zu können, gebraucht

man

man *Fernröhren* oder *Telescope*, weil man mit unbewafnetem Auge nicht so genau beobachten, ja einige der oben §. 9. erwähnten Erscheinungen nicht einmal würde bemerken können. Die Breite kann man zwar ohne eine Uhr dabey zu gebrauchen, bestimmen, wenn man darauf Achtung gibt, wenn ein Stern seine gröste oder kleinste Höhe erreicht. Allein man wird die Breite, wie wir in der Folge sehen werden, genauer bestimmen können, wenn man vermittelst einer Uhr genau die Zeit des Durchgangs durch den Mittagskreis angeben kann.

Beschreibung der zur geographischen Ortsbestimmung erforderlichen Instrumente.

§. 11.

Auf einer Ebene ABC Fig. 6. Taf. II. seye ein Kreisbogen AB beschrieben, und in Grade, Minuten u. s. w. eingetheilt. Um den Mittelpunct dieses Kreisbogens seye ein Lineal CF in der Ebene ABC beweglich. Man bringe einen Halbmesser desselbigen in die verticale Lage CA, welches man durch einen von dem Mittelpunct C herabhängenden mit einem Gewicht beschwerten Faden (Bleyfaden, Loth,) CP bewerkstelligen kann. Macht man AB $= 90^\circ$ und zieht BD, so ist BD horizontal, und eines Gegenstands G Höhe ist gleich dem Winkel DCG, sein Abstand vom Zenith $=$ ECG. Hat man nun ein Mittel, das Lineal CF in die Richtung CG zu bringen, so wird man den

Win-

Winkel DCG messen können. Denn wenn GF eine gerade Linie ist, so ist ACF = ECG = dem Abstand des Gegenstands G vom Scheitel, und BCF = DCG = seiner Höhe, und die Winkel ACF oder BCF gibt der eingetheilte Gradbogen AB an. Anstatt ein bewegliches Lineal CF anzubringen, kann man auch den ganzen Quadranten ABC Fig. 7 bewegen, und einen seiner Halbmesser CA in die Richtung des Lichtstrahls CG bringen, so gibt ein von dem Mittelpunct C herabhangendes Loth den Abstand vom Scheitel ACF und Höhe BCF an. Wenn nicht die Bewegung des ganzen Werkzeugs, die um seinen Schwerpunct H geschiehet, mit einigen Unbequemlichkeiten verbunden wäre, so scheint leztere Art von Quadranten, die bey den Franzosen gebräuchlich ist, Vorzüge vor der ersten *englischen* zu haben, weil bey dieser sowohl in der Richtung des Halbmessers AC als in der Bemerkung des Puncts, welchen das Lineal CF anzeigt, Fehler begangen werden können, da man bey der französischen Art nur nachsehen darf, wo der Bleyfaden CP hintrift. Endlich kann man dem Quadranten auch die Lage DCE Fig. 6 geben. Diese Art wurde von ältern Astronomen gebraucht; jezo zieht man die englische Einrichtung des Quadranten den andern vor. Das Lineal CF heiſst die *Alhidade.*

§. 12.

Wegen der grosen Entfernung der Himmelskörper ist es gleichgültig, ob man CF oder

oder eine damit parallele Linie fh nach dem Stern richtet, dessen Höhe man messen will. Ebenso kann bey dem Quadranten Fig. 7 ac die Stelle der Linie AC vertreten. Weil man bey dem Quadranten Fig. 6 den Bleyfaden nicht wohl am Mittelpunct C anbringen kann, so verlängert man den Halbmesser BC nach c und den Gradbogen BA nach a, hängt das Loth in c auf und läſst es auf einen von AC um Aa=Cc abstehenden Punct fallen, so ist auch AC vertical. Auch siehet man leicht, daſs ac Fig. 7 oder fh Fig. 6 auch auſserhalb der Ebene des Quadranten liegen können, wenn nur diese Linien jener Ebene parallel sind. Um die Linie fh in die Richtung der Linie gh bringen zu können, wurde bey h senkrecht auf der Ebene des Instruments ein feiner Faden und auf diesen und fh senkrecht ein zweyter Faden ausgespannt, der also der Ebene des Quadranten parallel war. Bey f wurde senkrecht auf fh eine Platte angebracht, die eine kleine von der Ebene des Quadranten eben so weit abstehende Oefnung hatte, als der Durchschnitt der beyden Fäden bey h von einander abstund. Eine durch jene Oefnung und den Durchschnitt beyder Fäden gezogene gerade Linie heist die *Absehenslinie* oder *Visirlinie* (linea collimationis) und ein mit dieser Vorrichtung versehenes Lineal ein *Diopterlineal*, dergleichen man noch an den gewöhnlichen Feldmessers-Instrumenten findet.

§. 13.

Statt der Diopterlineale gebraucht man jezo Fernröhren, vermittelst welcher man weit genauer als mit dem blosen Auge beobachten kann. Die erste Nachricht von der Anbringung der Fernröhren an die Alhidade findet man bey Morin (Scientia longitudinum 1634.). Huygens brachte zuerst die Fäden im gemeinschaftlichen Brennpunct der beyden Gläser des astron. Fernrohrs an, ohne welche eine mit einem Fernrohr versehene Alhidade keinen Vorzug vor einem gewöhnlichen Diopterlineal haben kann. Auzout und Picard brachten im Jahr 1667 die Fernröhre an den Quadranten statt der Diopter an, lezterer beobachtete im October 1667 Sonnenhöhen mit einem Quadranten von 9 Fuſs 7 Zollen, und einem Sextanten von 6 Fuſs im Halbmesser, an welchen Gläser die Stelle der Pinnacidien vertraten. Die Art, wie Fernröhren zu dieser Absicht gebraucht werden, wird aus folgendem erhellen. Die Linse B mache von dem Gegenstand Aa das Bild $\alpha\beta$, so daſs der Punct A in α, a in β abgebildet wird. Zieht man die Hauptstrahlen Aα, aβ, so schneiden sie sich sehr nahe in *einem* Punct, welcher der *Mittelpunct der Linse* oder *Mittelpunct der Brechung* heiſst, und immer in der geraden Linie Ee liegt, welche die Mittelpuncte E und e der die Linse auf beyden Seiten begränzenden Kugelflächen verbindet. Ist nun an der Stelle des Bilds $\alpha\beta$ ein Fadenkreuz und bey D eine convexe Linse angebracht, deren Brennpunct in α fällt, so hat man

man ein astronomisches Fernrohr, und ein Punct eines Gegenstands, der von dem Durchschnittspunct der beyden Fäden bedekt wird, befindet sich mit dem Gegenstand, dem Mittelpunct der Brechung des Objectivglases und jenem Durchschnittspunct in einer geraden Linie. Man wird also die Linie, welche den Mittelpunct der Brechung des Objectivs und den Durchschnitt des Fadenkreuzes miteinander verbindet, und auch die *Absehenslinie* heiſst, desto genauer in die Lage des Lichtstrahls CA bringen können, je feiner die Fäden sind, und je besser die Fernröhre ist.

§. 14.

Ausführliche Beschreibungen und Abbildungen der astronomischen Quadranten findet man in den Schriften, die von der Figur der Erde handeln, in Smiths Lehrbegrif der Optic, la Lande's Astronomie, Lowiz Beschreibung eines Quadranten (enthält auch Anleitungen zur Verfertigung und Eintheilung derselbigen), Amman's Quadrans astronomicus novus, The Method of constructing Mural Quadrants by Mr. John Bird, London MDCCLXVIII. The Method of dividing Astronomical Instruments by John Bird hat Herr Hofrath Kästner ins Deutsche übersezt, und in die zweyte *Sammlung seiner astronomischen Abhandlungen* eingerükt. Olaus Römer zog ganze Kreise den Quadranten vor, so wie gegenwärtig *Ramsden* in London, der wegen seiner vortreflichen astronomischen Werkzeuge bekannt ist.

Be-

Beschreibung eines hölzernen Quadranten.

§. 15.

Die 9te und 10te Figur Taf. III stellen diesen Quadranten perspectivisch vor. Er ist aus vier Parallelepipedis von 2 Zollen Breite und $1\frac{1}{2}$ Z. Dike AC, DE, FG, HF und aus dem Gradbogen AB ebenfalls von 1 Z. Breite und $1\frac{1}{2}$ Dike so zusammengesezt, daſs die Oberflächen der erstern mit der Ebene des Gradbogens *eine* Ebene machen. Die Fernröhre KL bestehet aus einem holen Parallelepipedo, an welchem zwey gleich dike Platten tu und rs befestigt sind, wovon die erstere zum Vernier die zweyte zur Befestigung eines stählernen conischen Zapfens dient, der sich in einer ähnlichen Vertiefung eines Stüks Messing dreht, welches an dem Mittelpunct des Quadranten fest sizt. Auf der Sckraubzwinge op sizt die Noniusplatte tu auf, und man kann sie an verschiedenen Stellen des Gradbogens befestigen um die Fernröhre KL in ihre gehörige Lage zu bringen. Der ganze Quadrant ist vermittelst zweyer Schrauben kk, ll, an die Axe MN befestigt. Das Loch für die Schraube l ist länglicht, und mit einer Platte bedekt; daher kann man dem Quadranten eine kleine Bewegung um den Mittelpunct k geben. Diese wird durch zwey einander gegenüberstehende Schrauben bewerkstelligt, wovon die eine bey q zu sehen ist, und deren Muttern sich in den beyden an der Axe MN befestigten Baken m und n befinden. Wenn man nehmlich die Schraube q etwas zurük-

zurükschraubt, so kann man mit der gegenüberstehenden das Stük FG an erstere Schraube wieder andrüken und umgekehrt. Man siehet diese Vorrichtung in der 19 Fig. Taf. II, von einer andern Seite.

§. 16.

Der Quadrant ist unter einem gegen Mittag liegenden Fenster aufgestellt. Das Fenstergesimse oder die Fensterbank OQq trägt einen Würfel fg, der durch vier Schrauben, wovon man drey cde in der Figur siehet, nach allen Richtungen ein wenig hin und her geschoben werden kann, und oben eine conische Spize von Stahl hat, die in eine conische Vertiefung eines in der Axe MN befestigten Stüks von Messing oder Horn paſst. Oben bey M ist eine ähnliche conische Vertiefung für die conische Spize der Schraube hi. Diese hat ihre Mutter in dem Querbalken RS, der durch zwey Schrauben R und S an der Wand befestigt wird. Die Spize unten bey fg und die oben bey i müssen sich in einer Verticallinie befinden, daher hat der Querbalken RS ein vorspringendes Stük $\varepsilon\zeta$. Die Regel TU dient zur Befestigung des Quadranten in einer Verticalebene, und läſst sich, wenn man die Schraube T löst, in dem Stük TU, das sich um seine verticale Axe drehen und durch die Schraube V befestigt werden kann, hin und her schieben. Das Stük β ist an dem Gradbogen befestigt, hat einen cylindrischen Zapfen, der sich vermittelst der Schraube δ in einer länglichten Oefnung der

Regel TU verschieben läſst, und oben eine Schraube γ hat. Da man den Quadranten, wie man in der 10ten Figur siehet, nicht mehr viel weiter aus der Mittagsebene rüken kann, so ist in dem Querbalken RS ein anderes Loch W für den Zapfen des Stüks TV, um die Regel auf die andere Seite zu bringen.

§. 17.

Gewöhnlich gibt man den Quadranten ein eigenes Gestell mit drey oder vier Füſsen, dergleichen auch bey einigen Feldmesserswerkzeugen gebraucht werden. Ich wählte die im vorhergehenden § beschriebene Einrichtung aus folgenden Gründen. In einem gewöhnlichen Zimmer kann man den Quadranten mit seinem Gestelle nicht wohl so nahe an das Fenster bringen, daſs man etwas grose Höhen noch damit messen kann; bey der hier beschriebenen Einrichtung kommt die Hälfte des Quadranten auſserhalb des Gebäudes so daſs man bis zu dem Zenith hin sehen kann. Der Quadrant hat eine sehr sanfte Bewegung um die Axe MN, um ihn in verschiedene Verticalkreise zu bringen, welches bey Stativen nicht leicht zu erhalten ist. Endlich haben Stative noch die Unbequemlichkeit, daſs man sie nur auf einem sehr festen Boden gebrauchen kann. Wenn der Boden im Hin- und Hergehen etwas nachgibt, so verrükt sich der Quadrant immer wieder, wenn man den Bleyfaden gestellt hat, und nun zu der Fernröhre zurükkehrt um die Höhe zu messen. Ich seze freylich voraus, man

habe

habe von einem gegen Mittag gelegenen Zimmer eine etwas freye Aussicht. Allein man wird in einem Zimmer, das auch gegen 45° von dem Mittag abwiche, noch die Mittagshöhe messen können; nur fiele alsdann die Bequemlichkeit weg, mit dem Quadranten correspondirende Höhen nehmen zu können, ohne genöthigt zu seyn, ihn an einer andern Stelle aufzurichten.

§. 18.

Ich komme nun auf die ausführlichere Beschreibung der einzelnen Theile dieses Quadranten. Der Bogen AB ist aus zwey gleichen Stüken zusammengesetzt wie man im Profil bey ** siehet, wo das Zwischenstük ab zur Verbindung dient. Es wurde zu dem Quadranten trokenes Birnbaumholz gebraucht, und die beyden Stüke des Gradbogens wurden so aus dem Holz herausgehauen, daſs die Längenfasern des Holzes der Chorde parallel lagen, welche man sich an die beyden Endpuncte des Stüks AF, das etwas über 45° faſst, gezogen vorstellen kann. Die beyden Stüke AC, DE sind, wie man bey Fig. II siehet, zusammengefügt, und ebenso liegen die Stüke FG, HI bey X übereinander. Bey F, H, D, G, I, A endigen sie sich in Zapfen, durch welche alle bisher erwähnte Theile des Quadranten so miteinander verbunden werden, daſs alle Flächen, welche der Fernröhre KL zugekehrt sind, in einer Ebene liegen. Um den Gradbogen zu untersuchen, und alle Puncte desselbigen in eine Ebene zu bringen, bediente ich mich einer genauen Sezwage, vermittelst welcher ich zwey Halbmesser des Quadranten AC, DE in eine horizontale Lage brachte. Nun untersuchte ich, ob auch die übrige Puncte des Gradbogens in einer horizontalen Ebene lagen, welches Statt haben müfste, wenn der Gradbogen AB richtig gearbeitet wäre. Man konnte die Erhöhungen und Vertiefungen leicht entdeken, und so lange nachhelfen, bis der Bleyfaden der Sezwage bey ihrem Umdrehen um den Mittelpunct des Gradbogens nicht mehr von seinem Punct abwich. Der ganze Quadrant wurde nun mit Zinfolie oder Staniol überzogen, um die Feuchtigkeit abzuhalten, den ebenen Theil des Gradbogens ausgenommen, auf welchen die Abtheilungen kommen, der mit feinem Papier oder Pergamen überzogen wird.

§. 19.

Die Vorrichtung an dem Mittelpunct zeigt die 12te Figur in ihrer natürlichen Gröfse. rs ist die an der Fernröhre befestigte Platte, welche mit 3 Schrauben M, N, auf eine stählerne Scheibe AB aufgeschraubt ist, die einen aus zwey abgekürzten Regeln bestehenden stählernen wohl polirten Zapfen CD hat. Dieser dreht in dem Stük Messing EFG, welches oben eine runde Platte EF hat, die in das Stük AC Fig. 9 eingesenkt und mit Schrauben op befestigt wird. Unten ist eine ähnliche Platte HI, die zugleich eine Schraubenmutter für eine an dem Stük G befindliche Schraube ist, und durch einen Schlüssel, der in die Löcher mn paſst, angezogen wird. Das Ende des Zapfens CD ist vierekigt, und geht durch eine messingene Platte k, auf welche die Schraube L drükt, um den Zapfen in seiner Höhlung zu halten. Zwischen den Platten AB und EF muſs ein kleiner Zwischenraum bleiben, um die Reibung zu vermeiden. P Fig. 18 stellt einen messingenen doppelten Kegel vor, der genau in die Höhlung des Stüks EFG paſst, und durch einen Schlüssel Q der in die Löcher ab paſst, in jener Höhlung umgedreht werden kann. Auf demselben ist der Punct c bemerkt, wo die gemeinschaftliche Axe beyder Kegel die Grundfläche ab trift. Der Gebrauch davon wird unten gezeigt werden.

§. 20.

Auf dem Gradbogen AB liegt die Fernröhre KL auf, und wird durch eine Feder von dünnem Messingblech θ beständig gegen denselben ein wenig angedrükt. Für diese Feder ist bey λ ein Einschnitt in die Säule MN gemacht, wenn die Fernröhre an die Stelle G Fig. 9 kommt. Die Röhre KL ist ein aus vier Bretchen von 3 Lin. Dike zusammengeseztes holes rechtwinklichtes Parallelepipedum. Die Seitenflächen sind 20 Zolle lang und 2 Zolle breit. Die Weite der innern Hölung ef Fig. 13 beträgt 1 Z. 6 Lin. Rechtwinklicht auf die Seitenflächen stehet in einer Tiefe von 3 Lin. in der Röhre ein 6 Linien dikes genau darein passendes Parallelepipedum von Holz A mit einem runden Loch von 1 Zoll im Durchmesser. Auf diesem liegt die vierekigte Fassung des Objectivglases B auf, welche aber die Hölung efgh nicht ganz ausfüllen darf, damit man dem Objectiv noch eine kleine Bewegung vermittelst der vier Schrauben abcd geben kann. In das andere Ende der Röhre KL paſst genau die Röhre von Pappe v und V Fig. 14, welche bey C ihre Blendung hat, auf der eine messingene Platte de mit einer runden Oefnung von 7 Lin. im Durchmesser liegt. Diese trägt zwey in dem Mittelpunct der kreisförmigen Oefnung sich rechtwinklicht durchschneidende Fäden, welche mit Wachs oder kleinen Schrauben befestigt werden. In diese Röhre schiebt sich die Ocularröhre W mit der Linse B von 1 Zoll. 6 Lin. Brennweite. Die Brennweite des Objectivs ist 20 Zolle, folglich die Vergrösserung $13\frac{1}{3}$. Auf die Röhre KL paſst der Dekel yz Fig. 9, welcher eine runde Oefnung von 7 Lin. hat, und die Bedekung des Objectivglases abgibt, zugleich aber auch mit einer unter einem Winkel von 45° gegen die Axe der Fernröhre geneigten Platte x versehen ist, die in der Mitte eine elliptische Oefnung hat, deren kleinere Axe 7 Lin. beträgt, und sich zu der grösern senkrecht auf die gemeinschaftliche Durchschnittslinie der Ebene x und der Ebene des Dekels stehenden Axe wie $1 : \sqrt{2}$ verhält. Sie dient zur Beleuchtung des Fadenkreuzes, wenn man bey Nacht Sterne beobachtet. Um der Fernröhre eine sanfte Bewegung zu geben, bringt man zwischen die Vernierplatte Fig. 9 und die Schraubzwinge p den Keil * so daſs

ab

ab auf om Fig. 9 zu liegen kommt, und die Vernierplatte u auf cd * aufsizt, alsdann kann man durch Hin- und Herschieben des Keils die Fernröhre ein wenig höher oder tiefer stellen.

§. 21.

Die 15te Figur zeigt die Vorrichtung, wodurch die Säule MN vertical gestellt wird. Innerhalb der Rahme AB liegt der Würfel fg, welcher durch die vier Schrauben cdeh hin- und hergeschoben und befestigt werden kann. Durch die Löcher iklm gehen vier Schrauben, vermittelst welcher diese Vorrichtung auf die Fensterbank OQq Fig. 9 aufgeschraubt wird. Die Richtung des Quadranten geschiehet nach einem Bleyfaden CP, der über zwey kurze über die Oberfläche des Quadranten gleich viel hervorragende messingene Cylinder herabhängt. Der eine befindet sich bey C, der andere α bey B. Auf der Grundfläche dieser Cylinder befinden sich feine Puncte, auf welche der Bleyfaden treffen mufs. Zu der Aufhängung des Fadens kann man sich der Figur 16 gezeichneten Vorrichtung bedienen, wo a der messingene Cylinder, cd ein Träger ist, welcher die Nadel b aufnimmt, deren Spize auf den auf der Grundfläche des Cylinders a gemachten feinen Punct trift, und den Faden ef trägt. Vorzüglicher ist die Fig. 17. vorgestellte Art, den Faden aufzuhängen. In dem auf den Quadranten aufgeschraubten Stück de dreht sich die Schraube bc, in welche bey b eine Kerbe eingedreht ist, um den

Faden ef aufzunehmen. Durch Umdrehung der Schraube bc kann man also den Faden so lange verschieben, bis er genau auf die Puncte der Cylinder a Fig. 17 (bey C Fig. 9) und α Fig. 9 trift.

Eintheilung des Quadranten.

§. 22.

Wer die Eintheilungen auf den Quadranten machen will, muſs mit einem Stangenzirkel von $1\frac{1}{2}$ Fuſs und einem Uhrmacher- oder Federzirkel versehen seyn. Eine vorzüglich gute Einrichtung eines Stangenzirkels beschreibt Herr von Zach in dem 1 Supplementenband zu den Berl. astr. Jahrbüchern S. 189 u. f. nach welcher Herr Secret. Schröder in Gotha dieses Instrument in groser Volkommenheit verfertigt. Es wird nur noch eine Reisfeder erfordert, die man anstatt einer Spize anschrauben kann. Will man nun die Eintheilungen auf den Quadranten machen, so nimmt man die Fernröhre weg, und bringt an die Stelle des Zapfens CD Fig. 12 den gedoppelten Kegel P Fig. 18; seine Grundfläche ab muſs alsdann mit der Oberfläche der Platte EF und des ganzen Quadranten in einer Ebene liegen. Nun muſs die gröste Sorgfalt darauf verwendet werden, genau seinen Mittelpunct c zu bezeichnen. Zu diesem Ende bringt man die eine Spize des Stangenzirkels in einen beliebigen Punct des Gradbogens, die andere so genau in den Mittelpunct des Cen-

Centralzapfens P als es vermittelst des blosen Augenmaſses geschehen kann, und beschreibt auf der Oberfläche desselben einen kleinen Bogen. Nun dreht man vermittelst des Schlüssels Q den Zapfen ein wenig um seine Axe, und beschreibt aus demselben Punct und mit derselben Oefnung des Zirkels einen zweyten Bogen auf der Oberfläche desselben. Dieses sezt man so lange fort, bis die ganze Oberfläche mit Kreisbögen überzogen ist, und die Gestalt Fig. 20 bekömmt. In der Mitte wird sich eine kleine runde Stelle zeigen, auf welcher sich kein Bogen befindet, und die, wenn man sehr nahe den Mittelpunct getroffen hat, so klein ist, daſs man sie nur mit einem Vergrösserungsglas erkennen kann. In der Mitte dieser Stelle kann man nun vermittelst einer feinen stählernen Spize den Mittelpunct bezeichnen. Hätte man gleich anfangs mit der Spize des Stangenzirkels den Mittelpunct getroffen, so würden sich alle Bögen in *einem* Punct durchschnitten haben, welcher nicht mehr leicht würde zu erkennen gewesen seyn, wenn so viele Bogen wären gezogen worden. Daher ist es besser, anfangs nach jeder Viertelswendung des Zapfens einen Bogen zu beschreiben, so daſs man nur vier derselben bekommt, und vermittelst eines Vergrösserungsglases zu untersuchen, ob sich alle in einem Punct schneiden, welches der Mittelpunct wäre. Ist dieses nicht, so wird man ein kleines Vierek finden, in dessen Mittelpunct sich der Mittelpunct des Centralzapfens befindet, und welches dazu dienen wird, das oben gesagte desto leichter zu bewerkstelligen. Nachdem man den Mittelpunct bezeichnet hat, schleift man die gezogenen Kreisbögen weg. Man kann nun auf die Centralplatte EF einen feinen Faden mit Wachs aufkleben, der durch den Mittelpunct des Centralzapfens geht. Ist dieser gut bezeichnet, so muſs er von dem Faden beständig bissecirt werden, wenn man den Zapfen dreht.

§. 23.

Nun beschreibt man aus dem Mittelpunct des Centralzapfens einen Kreisbogen a b c d Fig. 19 Taf. II, der von dem äuſsern Rande des Kreisbogens ungefähr 2 Lin. absteht. Den Halbmesser trägt man von a nach c, so ist der Bogen $ac = 60°$; a c wird halbirt in b, so hat man $bc = 30°$, dieser Bogen von c nach d getragen bestimmt der 90sten Grad. Werden die Bögen a b, b c, c d noch einmal halbirt, so ist der Quadrant von 15 zu 15 Graden abgetheilt. Nun müſste man jeden dieser Bögen in 3 und weiter in 5 gleiche Theile theilen. Weil man dieses nicht so leicht und so genau als blose Halbirungen bewerkstelligen kann, so theilte man den Quadranten durch fortgesezte Halbirungen in 96 gleiche Theile, welches geschiehet, wenn man den Bogen von 15 Graden viermal nacheinander halbirt. Graham hat diese Eintheilung zuerst 1725 an einem eisernen Quadranten angebracht. Der Markscheidercompaſs enthält, wie Herr Hofrath Kästner bemert *), eine ähnliche Eintheilung

*) Astron. Abhandlungen II Sammlung. S. 160. Anleitung zur Markscheidekunst §. 284.

lung. Jeden dieser 96 Theile habe ich wieder in 4 gleiche Theile abgetheilt, und die Halbirungen, welche auf die erste Halbirung des Bogens von 15° folgten, vermittelst des Federzirkels bewerkstelligt. Hier betragen also $\frac{16}{96}$ Theile 15 Grade, folglich ist $\frac{1}{96} = 56' \, 15''$. Hienach läſst sich eine Tafel berechnen, vermittelst welcher man diese Eintheilungen in Grade, Minuten und Secunden verwandeln kann. Siehe Taf. I.

§. 24.

Wenn man nach einem genau eingetheilten Maſsstab den Halbmesser eines auf dem Quadranten beschriebenen Kreisbogens miſst, so kann man daraus die Chorde von 16° Graden berechnen. Würde diese auf den Quadranten aufgetragen, so lieſse er sich durch fortgesezte Halbirungen in einzelne Grade und ferner von 15 zu 15 Minuten eintheilen. Man sieht leicht, daſs der Maſsstab sehr genau muſs eingetheilt seyn, weil davon die Genauigkeit der Eintheilungen des Quadranten selbst abhängt. Ich habe mir die Mühe einen eigenen Maſstsab zu verfertigen durch folgendes Hülfsmittel zu ersparen gesucht. Den Halbmesser aC theilte ich in 16 gleiche Theile, welches durch fortgesezte Halbirungen geschehen kann. Mit dem Halbmesser Ce $= \frac{15}{16}$ des Halbmessers aC beschrieb ich einen zweyten Kreisbogen e, und trug auf denselben die Chorde von $\frac{4}{96}$ des Bogens abcd, so hatte ich sehr nahe auf dem Bogen e einen Bogen von vier Graden. Denn es seyen AD, BE

Fig.

Fig. 21 Taf. II, zwey concentrische Bogen, deren Chorden AD, BE gleich sind, so verhält sich

$$\sin \tfrac{1}{2} ACD : \sin \tfrac{1}{2} dBCE = BC : AC$$

Hier ist $ACD = \frac{4 \cdot 90}{96}$ Graden $= 3^\circ\, 45'$ und $BC : AC = 15 : 16$, folglich

$$\sin \tfrac{1}{2} BCE = \tfrac{16}{15} \sin \tfrac{1}{2} (3^\circ\, 45')$$

$$\begin{aligned} \text{Nun ist} \quad \text{Lg}\ 16 &= 1{,}2041200 \\ \text{Lg} \sin (1^\circ 52' 30'') &= \underline{8{,}5148011} \\ &\ 9{,}7189211 \\ \text{Lg}\ 15 &= \underline{1{,}1760913} \\ \text{Lg} \sin \tfrac{1}{2} BCE &= 8{,}5428298 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} BCE &= 2^\circ\, 0'\, 0'',176 \\ BCE &= 4\ \ 0\ \ 0,\ \ 35 \end{aligned}$$

Wird dieser Bogen zweymal nacheinander halbirt, so hat man den Bogen von einem Grad bis auf 0, 08 Secunden genau. Nun sezte ich diesen Bogen von 1° zu dem Bogen von 15° hinzu, so erhielt ich einen Bogen von 16 Graden, welcher durch Halbirungen von 15 zu 15 Minuten eingetheilt wurde. Ebenso verfuhr ich mit den übrigen Sechstheilen des Quadranten.

§. 25.

Ich hatte also jezt auf dem Quadranten zwey Bogen abcd und ev, wovon der erste in 4.96 Theile der zweyte in 4.90 Theile abgetheilt war. In der 22ten Figur, welche einen Theil des Gradbogens sammt dem Vernier in seiner natürlichen Gröse vorstellt, sind diese Bogen

Bogen ab und k; ihre Halbmesser $=17$ Z. 9 Lin und $=16$ Z. $7\frac{1}{2}$ Lin. Nun wurden noch 4 andere Bogen cd, e, hi und fg mit den Halbmessern 17 Z. 3 Lin; 17 Z. $1\frac{1}{2}$ Lin. 16 Z. 6 Lin. und 16 Z. 2 Lin. gezogen, zwischen welche die Abtheilungen kommen sollten. Die Theilstriche zog ich nach Birds Methode vermittelst des Stangenzirkels *). Ich zog an den Bogen e Fig. 22, tv Fig. 19 eine Tangente tb, welche ich so weit verlängerte bis sie den Bogen abcd durchschnitt in b. Mit dem Halbmesser bt wurden nun zwischen den Bogen e und cd Fig. 22 die Theilstriche gezogen, für ganze Grade bis an den Bogen ab. Die Richtigkeit dieses Verfahrens erhellet aus folgendem. Es seyen AD, ad Fig. 23 zwey aus dem Mittelpunct C beschriebene Bogen. Der Winkel $ACB = BCD$. Man ziehe mit einerley Halbmesser aus den Mittelpuncten A, B, D kleine Bogen, welche den Bogen a, b, d durchschneiden, und an diese Durchschnitspuncte die Halbmesser Ca, Cb, Cd; so sind die Dreyeke AaC, BbC, DdC einander gleich, weil ihre Seiten einander gleich sind, folglich sind auch die Winkel ACa, BCb, Dcd einander gleich. Nun ist $bCa = BCb - BCa$ und $ACB = ACa - BCa$, folglich $BCA = bCa$ und aus demselben Grunde $BCD = bCd$. Auf ähnliche Art wurden die Theilstriche durch die Puncte des Bogens k Fig. 22. zwischen den Bogen k, hi und fg gezogen, ver-

*) Kästners astron. Abhandlungen II Samml. S. 197.

vermittelst eines Halbmessers, der durch eine an den Bogen k gezogene und den Bogen e schneidende Tangente bestimmt wurde *).

§. 26.

Nun komme ich auf die Eintheilung des Vernier, den man Fig. 22 in seiner natürlichen Gröse und bey E im Durchschnitt siehet. Der Anfangspunct des Vernier wird durch eine gerade Linie bestimmt, welche man durch den Mittelpunct des Quadranten mit der Absehenslinie parallel ziehet. (§. 12.) Ich werde in der Folge zeigen, wie man die Axe der Fernröhre den Seitenflächen des Parallelepipedums KL Fig. 9 parallel machen kann; alsdann darf man nur mit der Seitenfläche, welche auf der Ebene des Quadranten senkrecht ist, eine Parallele Linie durch den Mittelpunct der Umdrehungsaxe der Fernröhre, welchen man nach der Methode §. 22 auf der Platte rs Fig. 9 bezeichnet hat, ziehen, welche den Anfangspunct n Fig. 22 bestimmt. Nun gibt man den Spizen des Stangenzirkels einen so grosen Abstand voneinander als der Halbmesser war, mit welchem die Theilstriche des Bogens e Fig. 22 beschrieben wurden, befestigt die Fernröhre auf dem Gradbogen mit einer Schraubzwinge, sezt die eine in den Punct n des Vernier, und beschreibt

*) Da der Gradbogen AB Fig. 9 u. 10 mehr als 90 Grade fassen kann, so werden sowohl über den neunzigsten Grad als auch über den Nullpunct hinaus noch einige Grade aufgetragen. Der Gebrauch dieses Theils des Gradbogens wird unten §. 40 u. f. vorkommen.

schreibt mit der andern einen kleinen Bogen, welcher den Bogen ab scheidet. Hierauf nimmt man funfzehn Theile der Eintheilungen auf, ab, trägt diesen Bogen von dem oben erwähnten Durchschnittspunct an auf den Kreisbogen ab, und theilt ihn in 16 gleiche Theile, so wird jeder dieser Theile $\frac{15}{16}$ von $\frac{1}{4.96}$ oder $\frac{1}{384}$ des Quadranten betragen und durch den Vernier jedes $\frac{1}{96}$ des Quadranten in $4.16 = 64$ gleiche Theile getheilt werden. Die Theilstriche auf der Vernierplatte werden nun auf dieselbe Art, wie die Theilstriche des Bogens cd und mit demselben Halbmesser beschrieben. Was die Geschichte und Theorie des Vernier betrift, so findet man beydes in Herrn Hofrath Kästners astronomischen Abhandlungen, II Samml. S. 142 u. f. S. 180. Der hier gebrauchte Vernier ist von der zweyten Art S. 150 VII. Hätte man ihn nach der ersten Art einrichten wollen, so hätte man 17 Theile des Bogens (ab) in 16 gleiche Theile abtheilen, und die Zahlen von der Rechten gegen die Linke auf die Vernierplatte no schreiben müssen (S. 148, I Samml.).

Anmerkung. Wenn man 14 Theile des Gradbogens auf die Vernierplatte trägt und diesen Bogen in 15 gleiche Theile theilt, so theilt der Vernier einen Grad der 96 Theilung in 60 gleiche Theile. Alsdann kann man dieselbe Tafel, vermittelst welcher die Grade der 96 Theilung in gewöhnliche Grade verwandelt werden, auch zur Verwandlung der Unterabtheilungen gebrauchen. 16 Grade der 96 Th. geben 15 gew. Grade; 16 Min. geben 15 Min. Eine Minute gibt 56″ 15‴. Dasselbe würde man erhalten, wenn

wenn 16 Theile des Gradbogens in 15 gleiche auf der Vernierplatte getheilt würden. Allein bey dieser Art den Quadranten einzutheilen geht der Vortheil, welchen man durch die 96 Theilung erhalten will, alle Eintheilungen durch fortgesetztes Halbiren machen zu können, verlohren, weil bey der Eintheilung der Vernierplatte die Theilung in 3 und 5 gleiche Theile vorkömmt.

§. 27.

Die Eintheilung des Vernier für den Bogen k wird auf folgende Art gemacht. Man bringt den Anfangspunct n des Vernier n m an einem Theilstrich, der mit einem Theilstrich des Bogens k in *einem* Halbmesser liegt. Da $\frac{16}{96} = \frac{15}{90}$ so sind folgende Bogen der Eintheilung in Grade und der in 96 Theile einander gleich:

Grade	15	30	45	60	75	90
96 Theile	16	32	48	64	80	96

*)

Man bezeichnet nun den Anfangspunct t des Vernier tu, welcher auf einen Theilstrich treffen muſs, der zu einem auf dem Bogen e gehört. Soll der Vernier Minuten angeben, so muſs man 14 Viertelsgrade in 15 gleiche Theile theilen. Um hier die Theilung in 3 und 5 zu vermeiden, suche man einen Bogen von 3° 44′ zu bekommen, so wird man durch Halbirungen die Eintheilung des Vernier machen können; denn jede Abtheilung des Vernier muſs 14 Minuten betragen, folglich machen 16 Theile des Vernier 3° 44′. Um diesen

*) Kästners astron. Abhandlungen II Samml. S. 211.

sen Bogen zu bekommen, sezte ich die eine Spize des Stangenzirkels in Puncte des Bogens k, welche um 3° 30′ voneinander abstunden, und machte mit der andern Spize kleine Durchschnitte in dem Bogen ab, so hatte ich auf ab zwischen diesen beyden Durchschnitten einen Bogen von 3° 30′ (§. 25. Fig. 23.). Die Chorde dieses Bogens trug ich auf den Bogen k, welche daselbst sehr nahe zu 3° 44′ gehört. Denn da sich die Halbmesser der Bogen ab und k wie 16:15 verhalten, so läſst sich der Winkel, den man auf dem Bogen k bekommt, nach §. 24. berechnen. Es ist

$$\begin{aligned} \text{Lg } 16 &= 1,2041200 \\ \text{Lg sin } (1^\circ 45') &= \underline{8,4848479} \\ & 9,6889679 \\ \text{Lg } 15 &= \underline{1,1760913} \\ & 8,5128766 \end{aligned}$$

gehört zu 1° 52′ 0″, 14

Folglich ist dieser Bogen nur um 0″,28 zu gros. Beschreibt man nun aus den Endpuncten dieses Bogens mit einerley Halbmesser Kreisbogen durch den Bogen e, so hat man auch auf e einen Bogen von 3° 44′. Dieser wird durch Halbirungen in 16 gleiche Theile getheilt, wodurch die Puncte bestimmt werden, aus welchen man mit demselben Halbmesser, mit welchem die Theilstriche des Bogens k gezogen wurden, die Theilstriche auf dem Vernier tu zieht, nachdem man die Vernierplatte in eine solche Lage gegen jene Puncte gebracht hat, daſs der aus dem ersten

Theilungspunct gezogene Bogen auf den Anfangspunct t des Vernier trift.

§. 28.

Sollen die Anfangspuncte der Abtheilungen auf den Bogen e und k oder der Eintheilungen in 96 und 90 auf *einen* Halbmesser fallen, so muſs man den Anfangspunct e Fig. 19 nicht durch den Anfangspunct a bestimmen, weil leztere Puncte nur dazu dienen, die Theilstriche auf den Bogen tv zu ziehen, sondern durch den ersten Theilstrich auf dem Bogen tv. Daher kann man erst alsdann mit der Eintheilung des Bogens e den Anfang machen, wenn man die Theilstriche auf tv schon gezogen hat. Uebrigens ist diese Uebereinstimmung nicht nothwendig, wenn man den Anfangspunct des Vernier tu nach §. 27. bestimmt; die Anfangspuncte des Vernier und der beyden Gradbogen stünden alsdann um gleiche Winkel von einander ab. Die Puncte auf den messingenen Cylindern $\alpha\,\beta$ Fig. 19 müssen in einer mit dem Halbmesser durch den 90ten Grad k Fig. 22 oder den 96 e parallel gezogenen Linie liegen. Dieses läſst sich am leichtesten so bewerkstelligen. Man stellt den Quadranten vertical auf, so daſs ein aus dem Mittelpunct C herabhängender Bleyfaden auf den 90sten Grad trift. Nun hängt man das Loth auf die Schraube γ, und bringt den Faden genau auf den Punct auf dem Cylinder β, so bezeichnet der Faden bey α die Stelle des unterm Cylinders. Diesen sezt man aber etwas auſserhalb der Ver-

Verticallinie $\beta\alpha$, so daſs der Punct α nicht auf den Mittelpunct seiner Grundfläche sondern excentrisch fällt. Hat man also diesen Punct nicht genau getroffen, so kann man ihn durch Umdrehung des Cylinders um seine Axe in die gehörige Lage bringen, weil hier auf den Abstand beyder Puncte α und β voneinander nichts ankommt. Uebrigens ist zu bemerken, daſs man den Fehler, welcher aus der schiefen Lage der Linien Cd und $\beta\alpha$ (Fig. 19) gegeneinander bey den Höhenmessen entstehen kann, zugleich mit dem, welcher von der schiefen Lage der Absehenslinie gegen den an den Anfangspunct des Vernier gezogenen Halbmesser entsteht, leicht entdecken und bey dem Höhenmessen in Rechnung bringen kann, wie nun bald wird gezeigt werden.

Berichtigung des Quadranten.

§. 29.

Aus der allgemeinen Beschreibung des Quadranten (§. 11. 12. und 13.) erhellet, daſs zu genauen Höhenmessungen folgendes erfordert werde.

1) Der Gradbogen muſs in *einer* Ebene liegen.
2) Die Alhidade muſs sich um den Mittelpunct drehen, aus welchem die Bogen für die Eintheilungen beschrieben sind.
3) Die Abtheilungen selbst müssen richtig seyn.

4) Die Absehenslinie muſs mit der Ebene des Quadranten und mit dem aus dem Mittelpunct des Quadranten an den Anfangspunct des Vernier gezogenen Halbmesser parallel seyn.
5) Der Halbmesser für den 90sten Grad muſs mit der Linie, welche die beyden Puncte mit einander verbindet, über welche der Bleyfaden herabhängt, parallel seyn.
6) Die Ebene des Quadranten muſs vertical stehen.
7) Die Axe, um welche sich der Quadrant nach dem Azimuth herum bewegt, muſs vertical stehen, wenn der Quadrant, einmal in eine Verticalebene gebracht, beständig vertical stehen soll, indem man ihn in eine andere Verticalebene bringt.

Nun muſs man untersuchen, ob der Quadrant diese Eigenschaften habe, die Fehler, welche man bey dieser Untersuchung entdekt, verbessern oder genau bestimmen, um sie bey den Beobachtungen in Rechnung bringen zu können. Man heiſst dieses den Quadranten *berichtigen.*

§. 30.

Wie man die Ebene des Gradbogens prüft, habe ich oben (§. 18.) gezeigt. Diese Berichtigung läſst sich vermittelst einer Libelle (Niveau à bulle d'air) bequemer und genauer als mit der Sezwage bewerkstelligen, und geschiehet auf dieselbige Art. Doch glaube ich, daſs zu dieser Berichtigung eine Sezwage mit einem

nem feinen Faden, der auf einen feinen in einem Stift von Messing gemachten Punct fallen muſs, hinlänglich genau ist. Um diesen Punct in seine gehörige Lage zu bringen, bediene ich mich ebenfalls der (§. 28.) beschriebenen Methode, nach welcher ich den Punct auf dem Cylinder α Fig. 19 in seine gehörige Lage brachte. Ich seze die Sezwage auf die Linie auf, die ich in eine horizontale Lage bringen will, erhöhe oder erniedrige sie, bis der Bleyfaden auf seinen Punct trift. Nun wende ich die Sezwage um; stehet der Bleyfaden richtig auf seinem Punct, so liegt die Linie horizontal, und die Sezwage ist zugleich richtig. Wo nicht, so bringt man durch Umdrehung des messingenen Stifts oder Cylinders, den Punct, welcher excentrisch darauf gemacht ist, um die Hälfte seines Abstands von dem Bleyfaden demselben näher, die andere Hälfte verbessert man vermittelst Erhöhung oder Erniedrigung der Linie, welche man horizontal stellen will. Man wiederholt nun dieselbige Operation so lange, bis der Faden bey dem Umwenden der Sezwage auf seinem Punct bleibt *).

§. 31.

Wenn man die in dem 22. §. beschriebene Methode den Mittelpunct des Quadranten zu bestimmen genau befolgt, so kann man die 2te Bedingung (§. 29.) erfüllen. Man muſs aber allen Fleiſs darauf verwenden, den Fehler

* Kästners Markscheidekunst, S. 40. u. 24.

ler, welcher aus der Excentricität des Quadranten entsteht, zu vermeiden, weil er leicht sehr beträchtliche Fehler in dem Winkelmessen hervorbringen und nicht leicht so bestimmt werden kann, daſs man bey jeder Beobachtung ihn in Rechnung bringen könnte. Wie man ihn berechnen könnte, wenn man die dazu erforderlichen Bestimmungsstüke hätte, und diese vielleicht könnten gefunden werden, wird folgende Untersuchung lehren. Es seye in Fig. 24 c der Mittelpunct des Bogens o m, C der Punct, um welchen sich die Alhidade dreht. o der Anfangspunct der Grade. Man habe bey Messung eines Winkels die Alhidade aus der Lage C o in die Lage C m gebracht, so ist der wahre Winkel o C m. Allein die Alhidade gibt auf dem Gradbogen den Winkel o c m an, weil o m das Mas des Winkels o c m ist. Nun ist c d C äuſserer Winkel der Dreyeke c d m und C d o. Folglich ist

$$cdC = coC + oCm = cmC + ocm$$

$$\text{also } oCm = ocm + cmC - coC$$

In dem Dreyek c o C verhält

$$cC : \sin coC = co : \sin cCo$$

und in dem Dreyek Cmc

$$cC : \sin cmC = co : \sin cCm$$
$$= co : \sin(cCo - oCm)$$

Weil die Winkel c o C und c m C klein sind, so kann man statt der sinus die Bogen selbst sezen. Heiſst nun $\frac{Cc}{co}$ oder die Excentricität e in Theilen des Halbmessers, der Winkel c C o ψ, der Winkel o c m α und der Winkel o C m x, so hat man

x =

$$x = \alpha + e \sin(\psi - x) - e \sin\psi$$

oder ohne merklichen Fehler, weil x und α wenig von einander verschieden sind

$$x = \alpha + e \sin(\psi - \alpha) - e \sin\psi$$

folglich wenn y die Verbesserung des gemessenen Winkels ist

$$y = e \sin(\psi - \alpha) - e \sin\psi$$

Da nur der erste Theil des Werths von y veränderlich ist, so wird y am grösten, wenn $\psi - \alpha = -90^\circ$ oder $\alpha = 90^\circ + \psi$ wird, alsdann ist $y = -e(1 + \sin\psi)$, nimmt man nun auch ψ veränderlich, so ist der gröste Fehler, welchen die Excentricität verursachen kann, $= 2e$. Bey Quadranten kann α nicht viel über 90° betragen, für diese ist also der gröste Fehler der Excentricität $= e$ oder in Secunden $= 206265.e$, weil der Bogen, welcher dem Halbmesser gleich ist 206265 Secunden enthält. Wenn also e nur $\frac{1}{20000}$ des Halbmessers beträgt, ist der Fehler welcher bey dem Winkelmessen entstehen kann, schon 10,3 Secunden.

§. 32.

Wenn man für zwey Puncte eines Winkelmessers die von der Excentricität herrührende Fehler kennt, so kann man daraus sowohl die Excentricität e als auch den Winkel ψ bestimmen, welchen eine durch den Mittelpunct des Gradbogens und den Umdrehungspunct der Alhidade gezogene gerade Linie mit dem an den Nullpunct des Gradbogens gezogenen Halbmesser einschliesst. Es seyen nehmlich die bekannten Fehler m und n, die dazu gehörigen Winkel α und β, so hat man man folgende zwey Gleichungen (§. 31.).

$$m = e\sin(\psi - \alpha) - e\sin\psi$$
$$n = e\sin(\psi - \beta) - e\sin\psi$$

also $e = \dfrac{m}{\sin(\psi-\alpha)-\sin\psi} = \dfrac{n}{\sin(\psi-\beta)-\sin\psi}$

daher

$$(m(1-\mathrm{Cos}\,\beta)-n(1-\mathrm{Cos}\,\alpha))\,\mathrm{Tang}\,\psi = m\sin\beta - n\sin\alpha$$

oder

$$2\,(m\sin\tfrac{1}{2}\beta^2 - n\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2)\,\mathrm{Tang}\,\psi = m\sin\beta - n\sin\alpha$$

und $\mathrm{Tang}\,\psi = \dfrac{m\sin\beta - n\sin\alpha}{2\,(m\sin\frac{1}{2}\beta^2 - n\sin\frac{1}{2}\alpha^2)}$

hieraus läſst sich ψ finden; folglich auch e aus der Formel

$$e = \frac{m}{\sin(\psi-\alpha)-\sin\psi}.$$

Ob sich die Alhidade um einen andern Punct als um den Mittelpunct des Gradbogens drehe, kann man finden, wenn man untersucht, ob die Vernierplatte immer gleichweit von den auf dem Quadranten gezogenen Kreisbogen absteht. Wenn man diese Abstände miſst, so läſst sich aus ihrem Unterschied die Excentricität auf folgende Art berechnen.

In dem Dreyek cCm ist $(cm)^2 = (Cm)^2 + (Cc)^2 + 2\,Cc \,.\, Cm\,\mathrm{Cos}\,cCm$

also $(cm)^2 - (Cm)^2 = Cc\,(Cc + 2\,Cm\,\mathrm{Cos}\,cCm)$

und $cm - Cm = \dfrac{Cc\,(Cc + 2\,Cm\,\mathrm{Cos}\,cCm)}{cm + Cm}$

nun ist $cCm = cCo - oCm$ oder beynahe $= cCo - ocm = \psi - \alpha$, cm beynahe $= Cm$, folg-

folglich $cm - Cm = \frac{e(e + 2\,Cos(\psi - \alpha)).\,Cm}{2}$

oder $\frac{cm - Cm}{Cm} = \frac{e}{2}(e + 1\,Cos(\psi - \alpha))$

Nun seyen drey gemessene Abstände der Vernierplatte in Theilen des Halbmessers ausgedrükt a, b und c, die dazu gehörigen Bogen α, β und γ, so hat man die zwey Gleichungen

$$\text{I. } a - b = \frac{e}{2}(e + 2\cos(\psi - \alpha))$$
$$- \frac{e}{2}(e + 2\cos(\psi - \beta))$$
$$= e\cos(\psi - \alpha) - e\cos(\psi - \beta)$$
$$\text{II. } a - c = e\cos(\psi - \alpha) - e\cos(\psi - \gamma)$$

und hieraus tang ψ

$$= \frac{(a-b)\cos\gamma - (a-c)\cos\beta + (b-c)\cos\alpha,}{(a-c)\sin\beta - (a-b)\sin\gamma - (b-c)\sin\alpha}$$

und endlich e wenn man den Werth von ψ in die Formel I oder II sezt.

§. 33.

Was die Prüfung der Abtheilungen betrift, so muſs man mit der Untersuchung des Bogens von 90 Graden den Anfang machen, und alsdann nach und nach immer zu den kleinern Bogen übergehen. Wenn man den Quadranten vertical aufstellt, so kann man vermittelst eines über den Mittelpunct des Quadranten herabhängenden Loths den Halbmesser des neunzigsten Grades vertical stellen; alsdann muſs der Halbmesser an dem Nullpunct horizontal seyn. Hätte man nun ein Mittel die horizontale Lage dieses Halbmessers zu untersuchen, so könnte man den Bogen von neunzig Graden prüfen. Dieses wird man auf folgende Art bewerkstelligen können. ABCD Fig. 25 Taf. IV ist ein hölzernes Kreuz. Auf dem verticalen Theil cD sind zwey Cylinder e und f von Messing mit feinen Puncten, über welche der Bleyfaden ep herabhängt. Auf dem untern Cylinder f ist der Punct excentrisch, damit man ihn durch Umdrehung des Cylinders etwas verrüken kann. Bey g und h sind zwey Oefnungen, deren Mittelpuncte so weit voneinander abstehen, als der Mittelpunct des Quadranten von dem Nullpunct des Gradbogens. In jeder Oefnung ist ein feiner Faden horizontal ausgespannt. Vermittelst der Platten iklm, davon man zwey bey E im Profil siehet, kann man das Kreuz an den Halbmesser F Fig. 19 des Quadranten anschieben, und durch Umdrehung der Schrauben no so stellen, daſs die Fäden gh genau auf den Mittelpunct und auf den Nullpunct treffen. Man stellt den Halbmesser des neunzigsten Grades vertical, und stellt den Punct f so, daſs der Bleyfaden ep genau über die Puncte e und f herabhängt. Wäre man nun versichert, daſs die gerade Linie durch e und f die durch g und h rechtwinklicht durchschnitte, so wäre der Bogen von 90° richtig. Dieses kann man aber finden, wenn man das Kreuz umkehrt, und den Faden g nach F, den h nach A bringt, den Bleyfaden bey d befestigt und über f herabhängen läſst. Trift der Bleyfaden wieder auf den Punct e, so ist der

Bo-

Bogen von 90° richtig, wo nicht, so ist die Abweichung des Perpendikels von der geraden Linie durch e und f dem gedoppelten Fehler des Bogens von 90° gleich.

§. 34.

Nun untersucht man den Bogen von 60 Graden, indem man mit dem Stangenzirkel den Halbmesser des Bogens nimmt, und ihn mit seiner Chorde vergleicht. Man untersucht ebenfalls, ob dieBogen von 0—15, 15—30, 30—45, u. s. w. einander gleich sind, indem man mit dem Stangenzirkel den Abstand des Anfangspuncts von dem 15ten Grad oder die Chorde von 15 Graden faſst, und sie auf die übrige Bogen trägt. Der Vernier dient ebenfalls zu der Untersuchung der Eintheilungen. Denn der Bogen des Vernier muſs beständig 14 Theile auf dem in gewöhnliche Grade eingetheilten Bogen und 15 Theile auf dem Bogen der 96 Theilung fassen. Mehrere Methoden, die Fehler der Eintheilungen zu entdeken und zu bestimmen, werden unten bey der Anleitung zu dem Gebrauch des Quadranten vorkommen. Andere Methoden muſs ich hier übergehen, weil der dazu erforderliche Apparat kostbarer ist als der Quadrant selbst den ich hier beschrieben habe.

§. 35.

Um die Absehenslinie der Ebene des Quadranten dem aus seinem Mittelpunct an den Anfangspunct des Vernier gezogenen Halb-

Halbmesser parallel zu machen, verfährt man auf folgende Art. Man nimmt die Fernröhre von dem Quadranten ab, und legt sie auf ein Brett, das nicht länger seyn darf, als der Abstand der nächsten Ränder der Platten r s und t u Fig. 9 Taf. III., damit man die Fernröhre auf jede ihrer Seitenflächen auflegen kann. Man bringt dieses Brett sammt der Fernröhre in eine solche Lage, daſs ein kenntlicher Punct eines entfernten Gegenstandes von dem Fadenkreuz getroffen wird, und stellt die Ocularröhre ω so, daſs man die Fäden deutlich siehet. Sieht man zugleich mit den Fäden den entfernten Gegenstand nicht deutlich, so muſs das Fadenkreuz durch Verschiebung der Röhre V Fig. 14 dem Objectivglas näher gebracht oder davon hinweggerükt werden, denn in diesem Fall befindet sich das Fadenkreuz nicht an der Stelle des Bilds, welches das Objectivglas von dem entfernten Gegenstand macht. Wenn man da das Auge auf die Seite bewegt, so erscheint der Durchschnitt der Fäden an einem andern Gegenstand, und der Gegenstand selbst, der vorher von dem Fadenkreuz bedekt wurde, scheint sich zu bewegen, und zwar nach einer Seite, die der Seite nach welchem das Auge geht entgegengesezt ist, wenn sich der Durchschnitt des Fadenkreuzes näher bey dem Objectiv befindet als desselben Brennpunct; aber nach einerley Seite mit dem Auge, wenn der Durchschnitt von dem Objective weiter entfernt ist, als desselben Brenn-

punct

punct *). Dieses dient zu unterscheiden, nach welcher Seite man das Fadenkreuz bewegen muſs. Da man wegen der kleinen Oefnung der Röhre W bey A das Auge nicht so weit aus des Fernrohrs Axe bringen kann, das man sicher unterscheiden könnte, ob das Bild des Gegenstandes und der Durchschnitt der Kreuzfäden ihre Lage gegeneinander ändern, so nahm Herr Hofrath Kästner das Ocular mit dem ihm eignen Behältnisse weg, und brauchte statt desselben ein breites erhabenes Glas **). Ich habe bey meiner Fernröhre eine solche Einrichtung gemacht, daſs man das Stük A, welches die Augenöfnung hat, ganz aus der Röhre W herausnehmen kann. Man macht nun an die Röhre v Fig. 14 ein Zeichen, um sie, wenn sie verrükt wird, jedesmal wieder in ihre gehörige Lage bringen zu können.

§. 36.

Man dreht nun die Röhre v so um ihre Axe, daſs der eine Faden der Ebene des Bretts parallel, folglich der andere vertical darauf wird, welches man daran erkennen kann, wenn man durch Bewegung der Fernröhre in der Ebene des Bretts den Punct des entfernten Gegenstands an andere Stellen des Parallelfadens bringt. Man legt die Fernröhre auf die entgegenstehende Seitenfläche und bringt erwähnten Punct wieder in das Sehefeld. Trift der horizontale oder der Ebene des Brets parallele

*) Kästners astron. Abhandl. II. Samml. S. 244. u. f.
**) Astr. Abhandlungen. II. Samml. S. 247. u. f.

rallele Faden wieder den vorigen Punct, so ist von dieser Seite keine Veränderung vorzunehmen, wo nicht, so bewege man das Objectiv vermittelst der Schrauben abcd Fig. 13 Taf. III aufwärts, wenn der Punct unter dem Horizontalfaden, niederwärts, wenn er über demselben liegt, bis man ihn in die Mitte zwischen seiner anfänglichen Lage und den Faden gebracht hat, die andere Hälfte verbessere man durch Erhöhung oder Erniedrigung des Bretts, und bringe den Horizontalfaden wieder auf seinen Punct. Hat man dieses gut getroffen, so wird der Faden wieder auf den Punct treffen, wenn man die Fernröhre in ihre erste Lage bringt. Findet sich dieses nicht, so muſs man die Lage des Objectivs und des Bretts noch ein wenig ändern, biſs in beyden Lagen der Fernröhre der Faden auf denselben Punct fällt. Ebenso verfahre man mit den beyden andern Seiten, so wird die Absehenslinie den Seitenflächen der Fernröhre parallel. Diese Art die Absehenslinie zu berichtigen kommt mit der Berichtigung der *Probierfernröhre* (lunette d'epreuve) überein. Smiths Lehrbegriff der Optic. III. B. 4. Cap. la Lande Astronomie, troisieme édition. 2503. Nun sind die Platten rs und tu Fig. 9 gleich dik, folglich ist die Absehenslinie der Ebene des Quadranten parallel. Wollte man auch noch untersuchen, ob diese Platten gleich dik sind, so dürfte man nur die Fernröhre an dem Quadranten anbringen, den Verticalfaden nach einem Gegenstand richten, und hierauf den Quadranten vermittelst der Schrauben T und γ

fest

fest stellen. Wird nun die Fernröhre abgenommen und die gegenüberstehende Seite KL auf die Ebene des Quadranten gebracht, so muſs, wenn man die Fernröhre in eine solche Neigung bringt, daſs man den Gegenstand wieder siehet, der Verticalfaden auf denselben Punct treffen. Die Linie von dem Mittelpunct des Quadranten an den Anfangspunct des Vernier hat man einer Seitenfläche parallel gemacht (§. 26.) folglich ist der an den Anfangspunct des Vernier gezogene Halbmesser auch der Absehenslinie parallel.

§. 37.

Um die Umdrehungsaxe MN des Quadranten vertical zu stellen (caler le quart-de-cercle) verfährt man so. Man nimmt die Vorrichtung TU weg, damit man den Quadranten ganz um seine Axe MN umdrehen kann, und bringt seine Ebene in die Richtung der Schrauben ce oder der Ebene des Fensters parallel. Man stellt die Fernröhre vermittelst der Schraubzwinge po und des Keils * auf den Nullpunct, und sezt darauf eine Libelle oder Wasserwage, deren Luftblase man durch Erhebung oder Erniedrigung der Fernröhre vermittelst des Keils * genau zwischen ihre Zeichen bringt*). Man gibt dem Quadranten eine halbe Umdrehung um seine Axe, und siehet nun

*) Man hat dergleichen Libellen, an welchen zwey längst der Röhre hin bewegliche Zeiger angebracht sind, welche dazu dienen, die Stelle der Luftblase zu bezeichnen.

nun wieder nach der Luftblase. Hat diese ihre Stelle nicht verändert, so ist die Umdrehungsaxe senkrecht auf die Durchschnittslinie der Ebene, in welcher der Quadrant steht, mit der Ebene des Horizonts. Hat sich aber die Luftblase von ihrer Stelle wegbewegt, so verbessert man die Hälfte des Fehlers durch Erhöhung oder Erniedrigung der Fernröhre, die andere Hälfte durch Verschiebung des Würfels fg indem man diejenige der beyden Schrauben c und e zurükschraubt, welche auf der Seite liegt, nach welcher die Luftblase sich bewegen soll, und mit der entgegengesezten so lange nachschraubt, bis die Luftblase zwischen ihren Zeichen steht. Bringt man den Quadranten wieder in seine erste Lage, so muſs die Luftblase auch wieder an ihre vorige Stelle kommen, wenn die Berichtigung gut gemacht ist; im entgegengesezten Fall muſs man das ganze Verfahren wiederholen. Eben so berichtigt man die Axe MN nach einer auf der ersten senkrechten Richtung vermittelst der Schrauben d und h Fig. 9 und 15. Ist dieses geschehen, so wird die Luftblase ihre Stelle nicht verlassen, wenn man den Quadranten um seine Axe dreht, kleine Veränderungen ausgenommen, welche aus der Verbindung der Schwere mit der durch die Bewegung des Quadranten um seine Axe hervorgebrachten Schwungkraft entstehen, aber sogleich wegfallen, wenn der Quadrant in Ruhe kommt.

§. 38.

§. 38.

Nun hängt man den Bleyfaden CP an, der aus feinem Silberdrat und einer angehängten durchlöcherten Büchse P besteht. in welche man Schrot oder Hagel von Bley bringen kann. Man hängt dieses Gewicht in ein Glas mit Wasser $\odot\alpha\beta$, welches von dem Träger $\gamma\delta\varepsilon$ getragen wird, den man vermittelst der Schraube ϑ bey π Fig. 10 anschraubt. Wenn man diesen Faden über den messingenen Zapfen oben bey C herunterhangen läſst, so muſs er den untern kaum berühren; wenn dieses nicht geschieht, kann man nach Beschaffenheit der Umstände bey k oder l Fig. 9 und 10 einen sehr platten Keil von Holz zwischen die Säule MN und das Stük FG bringen, nachdem man die Schraube k oder l etwas losgemacht hat, und sie hierauf wieder anziehen. Alsdann bringt man den Bleyfaden vermittelst der Schraube bc Fig. 17, γ Fig. 19, und durch Bewegung des Quadranten um die Schraube kk Fig. 9 und 10 vermittelst der Schrauben qq Fig. 9 10 und 19 genau auf die Puncte der Cylinder α und β, ſo ist die Linie $\alpha\beta$ mit der Umdrehungsaxe des Quadranten MN parallel, weil beyde vertical sind, und der Bleyfaden wird immer auf seine Puncte treffen, wenn man den Quadranten in verschiedene Verticalebenen bringt. Man sieht leicht, daſs man die Axe MN ebenso, wie §. 37. gezeigt wurde, auch vermittelst des Bleyfadens vertical stellen könnte, nur ist die Berichtigung vermittelst des Bleyfadens etwas beschwerlicher, weil er bey dem Umdrehen des Quadranten um seine

Axe sich öfters an den Cylinder α anlegt oder sich zuweit davon entfernt, wenn die Umdrehungsaxe MN der Ebene des Quadranten noch nicht parallel ist, und man daher genöthigt ist, 2 Fehlern zugleich abzuhelfen. Wer sich aber die §. 37. beschriebene Methode gut bekannt gemacht hat, wird vermittelst des Bleyfadens die Umdrehungsaxe leicht berichtigen können.

§. 39.

Da nun die Absehenslinie der Fernröhre mit den Seitenflächen derselben und dem an den Anfangspunct des Vernier gezogenen Halbmesser parallel ist, die Linie $\alpha\beta$ Fig. 19 vertical und senkrecht auf den Halbmesser an den Nullpunct des Quadranten, so muſs die auf der Ebene des Quadranten senkrechte Seitenfläche der Fernröhre horizontal seyn, wenn man den Nullpunct des Vernier auf 0 stellt. Die horizontale Lage dieser Seitenfläche kann man vermittelst einer Libelle untersuchen. Man sezt dieselbige oben auf die Seitenfläche der Fernröhre, und bemerkt die Stelle, welche die Luftblase einnimmt, wendet hierauf die Libelle um, und siehet nach, ob die Luftblase noch an ihrer ersten Stelle sich befindet, in welchem Fall die Fläche horizontal ist. Steht aber die Luftblase an einem andern Ort, so muſs man die Hälfte entweder durch Correctionsschrauben an der Libelle oder durch Verschiebung der Zeichen, welche die Stelle der Luftblase angeben, die andere durch Erhöhung oder Erniedrigung

der

der Fernröhre verbessern. Ist man von dem Parallelismus der Absehenslinie und der Seitenflächen der Fernröhre versichert, so kann man auf diese Art die Absehenslinie horizontal stellen, die Höhe, welche alsdann der Vernier angibt, ist der *Collimationsfehler* des Quadranten; gibt er statt der Höhe Tiefe unter dem Horizont an, so muſs dieses zu allen beobachteten Höhen hinzugethan werden, im ersten Fall wird der Collimationsfehler abgezogen. Man sieht leicht, daſs man nur alsdann durch das Verfahren §. 36. die Absehenslinie der Fernröhre mit ihren Seitenflächen parallel machen könne, wenn die Röhre KL wirklich ein Parallelepipedum ist. Man kann vermittelst einer Libelle auf folgende Art den Parallelismus der Seitenflächen prüfen. Man legt die Fernröhre auf ein Brett, und macht ihre obere Seitenfläche vermittelst der Libelle, durch Erhöhung oder Erniedrigung des Bretts auf der einen Seite, horizontal, wendet nun die Fernröhre um, so daſs das Objectiv dahin gekehrt wird, wo vorher das Ocular war, und untersucht, ob die obere Seitenfläche noch horizontal ist; findet sich dieses, so ist die obere Seitenfläche mit derjenigen auf welcher die Fernröhre liegt parallel, wo nicht, so macht alsdann die obere Seitenfläche mit der Ebene des Horizonts einen Winkel x, der zweymal so groſs ist, als der Neigungswinkel der beyden einander gegenüberstehenden Seitenflächen. Nun wird durch die Berichtigung §. 46. die Absehenslinie in eine solche Lage gebracht, daſs ihre

Winkel mit zwey einander gegenüberstehenden Seitenflächen gleich sind, folglich ist der Winkel der Absehenslinie mit einer jener Seitenflächen der vierte Theil des Winkels x.

§. 40.

Den Collimationsfehler des Quadranten kann man noch sicherer auf folgende Art bestimmen. Man messe mit dem Quadranten die Höhe eines entfernten nahe am Horizont befindlichen Gegenstandes E Fig. 26 Taf. IV. Hierauf kehre man den Quadranten um, (welches leicht geschehen kann, wenn man die Schraube h Fig. 9 zurükschraubt, den Quadranten sammt der Säule MN herausnimmt, und den Theil der Säule M nun nach N bringt,) und bringe ihn so wohl in die Verticalebene des Gegenstands E als auch vermittelst des Bleyfadens in seine gehörige verticale Lage. Man messe wieder die Höhe des Gegenstands E, welche der Vernier auf der andern Seite des Nullpuncts in e angeben wird. Zieht man durch den Mittelpunct des Quadranten c die gerade Linie ef mit CE parallel, so hat man $Ccf = cCE$, folglich wenn oC auf Cc oder die Verticallinie senkrecht gezogen wird $oCD = ocf = ocd$, wenn d die Stelle bezeichnet, auf welcher der Anfangspunct oder Index des Vernier bey der ersten Lage des Quadranten lag. Der Winkel fce ist dem Winkel EcF oder CEc gleich. Dieser läfst sich leicht berechnen, wenn man den Abstand des Puncts E und Cc weifs. Da man den Punct E nahe am Horizont und in der Ferne nimmt, so sind die Winkel ECc und CcE wenig von 90° ver-

verschieden, daher $CEc = \frac{Cc}{CE}$ 206265 Secunden *). Zieht man diesen Winkel von dem Winkel oce ab, so bleibt der Winkel ocf übrig. Findet sich dieser eben so groſs als der Winkel ocd oder oCD, so ist der Collimationsfehler $= 0$; Ist ocd $>$ ocf, so ist der halbe Unterschied beyder Winkel dem Collimationsfehler gleich, welcher von den Höhen abgezogen werden muſs. Findet sich ocd $<$ ocf, so muſs man den halben Unterschied addiren.

Wenn die Entfernung des Gegenstands gröſser ist als 206265. Cc, so beträgt der Winkel CEc weniger als eine Secunde. Da liegt also der *wahre* Anfangspunct in der Mitte zwischen den Puncten d und e. Auch kann man sich die Berechnung des Winkels CEc ersparen, wenn man den Mittelpunct des Quadranten immer in einerley Höhe erhält oder in einer verticalen Linie zwey Zeichen E und F in der Entfernung Cc voneinander anbringt, und die Höhe des ersten in der gewöhnlichen Lage des Quadranten, die Höhe von F mit umgekehrten Quadranten beobachtet.

§. 41.

Bey dem hier beschriebenen Quadranten ist $Cc = 20$ Zollen $= 1\frac{2}{3}$ Fuſs; wenn man also ohne einen Fehler von einer Secunde zu begehen, die Linien CE, cE als parallel solle anse-

*) Kästners astron. Abhandl. II Samml. S. 59. u. f.

ansehen können, so müſste CE gröſser seyn als $\frac{5.206265}{3}$ oder als 343775 Fuſs, das ist > 15 geogr. Meilen. Man wird also nicht wohl einen so weit entfernten Gegenstand nehmen können, daſs man die Linien CE und cE als parallel ansehen kann. Ich gebrauchte zu der Berichtigung zwey in einer Verticallinie übereinander angebrachte Zeichen E und F, deren Abstand von einander = Cc = 20 Zollen war. Die Höhe des Zeichens E fand ich $= 0^\circ\, 52'\, 30''$ und nach der 96 Theilung $= 0\ 3\ 11,5$ welches $0^\circ\, 52'\, 17'',7$ beträgt. Nach der Umkehrung fand ich auf der andern Seite des Nullpuncts die Höhe von $F = 0^\circ\, 5'\, 30''$ und nach der 96 Theilung $= 0\ \ 0\ 6,7 = 0^\circ\, 5'\, 53'',3$ **). Folglich ist der Collimationsfehler

$$= \frac{0^\circ\, 52'\, 30'' - 0^\circ\, 5'\, 30''}{2} = 23'\, 30'' \text{ und}$$

$$= \frac{0^\circ\, 52'\, 17'',7 - 0^\circ\, 5'\, 53'',3}{2} = 23'\, 12'',2 \text{ aus}$$

der 96 Theilung, welcher von den beobachteten Höhen abgezogen werden muſs.

Bey einem andern Versuch fand ich die Höhe des Puncts $E = 45'\, 0'',0$; nach der 96 Theilung $= 3\ 3,0 = 0^\circ\, 44'\, 49'',4$. Mit umgekehrtem Quadranten die Höhe von $F = 2'\, 0''$; nach

*) Wenn man Winkel auf der andern Seite des Nullpuncts nimmt, so muſs man die Minuten von dem Ende des Vernier an zählen, weil auch die Grade nach der andern Seite hin gelesen werden. Der Index des Vernier aber gibt in beyden Fällen die Viertelsgrade.

nach der 96 Theilung $= 0\ 0\ 2,0 = 0^\circ\ 1'\ 45'',4$ beyde noch auf *derselben Seite des Nullpuncts.* Hier wird also der Collimationsfehler

$$= \frac{45'\ 0'' + 2'\ 0''}{2} = 23'\ 30'' \text{ und}$$

$$= \frac{44'\ 49'',4 + 1'\ 45'',4}{2} = 23'\ 17'',4.$$ Es gab also die 90 Theilung die Höhen um $15''$ im Mittel gröser an als die 96 Theilung. Die Ursache, warum dieser Quadrant die Höhen um so viel zu gros angab, rührt daher, weil ich den Anfangspunct des Vernier nicht nach §. 26. bestimmte, sondern ihn willkührlich annahm. Man siehet leicht, daſs dieses keinen Einfluſs auf Genauigkeit der Beobachtungen hat. Man heiſst diese Art den Quadranten zu berichtigen die Berichtigung durch *Umkehrung* (renversement).

§. 42.

Eine andere Art den Collimationsfehler zu bestimmen ist die Berichtigung durch Umwendung (retournement). Man gebraucht dazu Sterne deren Abstand vom Zenith nicht gröſser seyn darf, als der Bogen, der auf dem Quadranten noch üder den neunzigsten Grad hinaus gegen B hin liegt. Eines solchen Sterns Abstand vom Zenith wird mit dem Quadranten so genommen, daſs der eingetheilte Rand bey der einen Beobachtung gegen Morgen, bey der andern gegen Abend gekehrt wird Fig. 27 Taf. IV. Der Bogen ed ist des Sterns gedoppelter Abstand vom Zenith;

nith; folglich muſs der neunzigste Grad zwischen den Puncten e und d in der Mitte liegen. Wenn die Fernröhre die Lage CD gegen den Gradbogen hat, so gibt der Vernier die Höhe an, woraus man die Zenithdistanz findet. Auf der andern Seite des Nullpuncts findet man geradezu Abstand vom Zenith. Sind die Zenithdistanzen auf beyden Seiten gleich, so gibt der Quadrant dieselben und folglich auch die Höhen richtig an. Sind sie ungleich, so ist ihr halber Unterschied der Collimationsfehler des Quadranten, welcher zu den beobachteten Höhen hinzugethan oder davon abgezogen werden muſs, je nachdem man den Bogen 90 D gröſser oder kleiner als den 90 e findet. Wenn man nun den Collimationsfehler durch Umkehrung und durch Umwendung bestimmt, und dadurch sowohl den Nullpunct als auch den neunzigsten Grad berichtigt hat, so hat man zugleich eine Probe für den Bogen von 90 Graden. Denn wenn dieser genau 90 Grade hält, so muſs der durch Umkehrung gefundene Collimationsfehler dem durch Umwendung gefundenen gleich seyn *).

§. 43.

Ehe man den Quadranten gebraucht, muſs man noch folgende Theile untersuchen. Der Zapfen

*) Wenn die Fäden in dem Brennpunct des Objectivs nicht sehr fein sind, so muſs man bey der Messung der Höhen immer *denselben* Rand der Fäden mit dem Punct dessen Höhe man messen will in Berührung bringen, welches auch bey der Berichtigung des Quadranten zu beobachten ist; alsdann hat die Dike der Fäden auf die Beobachtungen keinen Einfluſs.

Zapfen CD Fig. 12 darf keinen Spielraum haben, findet man welchen, so muſs man die Schraube L etwas anziehen; auch muſs man dem Zapfen und der Platte k ein wenig Fett geben. Man muſs ebenfalls die Axe MN Fig. 9 so zwischen die Spitzen bey i und fg bringen, daſs sie eine sanfte nicht wankende Bewegung hat, welches durch die Schraube h bewerkstelligt werden kann. Das Loth muſs man vor jeder Beobachtung untersuchen, besonders wenn der Quadrant in einem hölzernen Gebäude aufgestellt ist. Um es gegen den Wind zu sichern, kann man ein leichtes Gehäuse aus Pappe, das den Puncten α und β gegenüber ein Paar Gläser hat, anbringen.

Hadley's Spiegeloctant.

§. 44.

Der Quadrant und andere ähnliche Instrumente zu Höhenmessungen, die man gewöhnlich in der Astronomie gebraucht, müssen auf festen Gestellen ruhen, wenn man damit beobachten will. Da dieses zur See nicht angehet, so sind zu Anstellung astronomischer Beobachtungen auf derselben verschiedene Werkzeuge ausgedacht worden. Unter diesen zeichnet sich vorzüglich der nach seinem Erfinder *Johann Hadley* so genannte *Hadleysche Spiegeloctant* oder *Spiegelsextant* aus. Er bekommt den ersten Nahmen wenn er ein Zirkelausschnitt von 45, den zweyten wenn er einer von 60 Graden ist. Hadley legte die erste Beschreibung von seinem

nem Oetanten im Maj 1731 der königl. Societät in London, vor *) deren Vicepraesident er war, und erklärte die Grundsäze, auf welche er gebaut ist. Sein erster Octant war von Holz, er liefs nachher einen zweyten von Messing machen **), mit welchen Versuche zur See angestellt wurden, welche die Brauchbarkeit dieses Instruments an den Tang legten. Demungeachtet verflossen wenigstens zwanzig Jahre, bis dieses vortrefliche Werkzeug in Gebrauch kam.

Einige Jahre nachher, nehmlich im Jahr 1742 wurde unter den hinterlassenen Papieren Hadley's eine Handschrift *Newtons* gefunden, welche eine Zeichnung und Beschreibung von einem Instrument enthielt, das nicht sehr von dem ersten Instrument Hadley's verschieden war. Seine vorzüglichsten Eigenschaften und Gebrauch zur See waren ebenfalls angezeigt. «Daher,» sagt *Ludlam* ***), «scheint es, dafs »in der That *Newton* der erste Erfinder von die- »senReflexionsquadranten war, ob es gleich vor »1742 niemanden als vielleicht dem D. Hadley »bekannt war, welcher noch nichts davon ge- »wufst zu haben scheint, als er seinen Octan- »tanten der königlicheu Societät bekannt »machte. Hadley's grofse Geschiklichkeit und »besondere Fertigkeit in der Optic (wovon »man viele Beweise in den philos. Trans. fin- »det) lassen keinen Zweifel statt finden, dafs »er

*) Philos. Trans. Nr. 420.
**) Philosoph. Trans. N. 425.
**) Directions for the use of Hadley's Quadrant. London 1790.

»er gleichfalls der erste Erfinder war, und »dem zu folge hat dieses Instrument immer »seinen Nahmen getragen.

§. 45.

In der Folge lernte man immer mehr die Vorzüge kennen, welche der Hadleysche Sextant vor andern zu Anstellung astronomischer Beobachtungen auf der See bestimmten Instrumenten hatte. Die besten Künstler in London bemühten sich daher ihn vollkommener zu machen. *Ramsden*, welchem man die grose Vollkommenheit dieser Werkzeuge, mit welcher sie jezt verfertigt werden, meistens zu verdanken hat, fand bey genauerer Untersuchung, daſs dieses Instrument nicht solid genug war in seinen wesentlichen Theilen, die Alhidade war einer zu starken Reibung unterworfen, so daſs man öfters das Ende derselben um einige Minuten fortbewegen konnte, ohne daſs der an dem Umdrehungspunct angebrachte Spiegel seine Lage änderte, auch waren die Eintheilungen nicht fein genug. Hieraus schloſs Ramsden, daſs *de la Caille* Recht hatte, wenn er den Fehler, den man bey Messung der Abstände des Monds von der Sonne und von Fixsternen begehen könne, auf 5 Minuten sezte. Er brachte im Jahr 1763 eine Maschine zu Stand, vermittelst welcher er dergleichen Instrumente in kurzer Zeit und mit einer groſsen Genauigkeit eintheilen konnte. Dieser Maschine bediente er sich bis gegen das Jahr 1773, da seine zweyte noch vollkommenere Theilungsmaschine fertig wurde, vermittelst welcher alle englischen Künstler ihre Sextanten eintheilen lassen. Ramsden bekam von der Commission wegen der Länge eine Belohnung von 300 Pf. Sterling, und 315 Pf. St. für seine Maschine, nachdem er sich anheischig gemacht hatte, alle Sextanten für 3 Schillinge einzutheilen. Für die Eintheilung eines Sextanten mit einem Vernier der 30 Sec. angibt, bekommt er 6 Schillinge. Andere Verbesserungen, welche Ramsden an den Sextanten anbrachte, werden unten nach der Beschreibung desselben vorkommen.

Anmerkung. Die Beschreibung von Ramsdens zweyter Theilmaschine kam in London 1777 heraus unter dem Titel: Description of an Engine for dividing mathematical Instruments, by Mr. Jesse Ramsden &c. London 1777. Allein die meisten Exemplare giengen in einem Brande verloren. La Lande hat davon eine französische Uebersezung veranstaltet, welche in Paris 1790 heraus kam: Description d'une machine pour diviser les instruments de mathématiques, par M. Ramsden &c. traduite de l'anglois; augmentée de la discription dune Machine à diviser les lignes droites, et de la notice de divers ouvrages de Mr. Ramsden. Die erste perspectivische Zeichnung der Maschine ausgenommen hat la Lande alle Figuren um die Hälfte verkleinern lassen. Bey der Vergleichung dieser Uebersezung mit dem englischen Original, welches H. Hofrath Lichtenberg mir mitzutheilen die Güte hatte, fand ich, daſs die Figuren in dem Verhältniſs von 9 : 5 verkleinert sind. La Lande hat hie und da vergessen, den Text darnach zu ändern. So sagt er zum Beysp. pag. 29 La Fig. 9 represente cette machine de *toute sa grandeur*, da sie doch nur in ihrer halben natürlichen Gröſse vorgestellt ist. Was pag. 23 und 24 von den Worten: Il arrive souvent &c. bis d'attention en divisant steht, findet sich nicht in dem Original, und stünde schiklicher erst nach der Beschrei-

schrei-

schreibung des ganzen Chassis, weil man diese erst muſs gelesen haben, um jenes zu verstehen. In das Deutsche übersezt findet man diese Beschreibung in H. I. G. Geislers Schrift über die Bemühungen der Gelehrten und Künstler mathematische und astron. Instrumente einzutheilen. Dresden 1792.

§. 45.

Man suchte nun den Sextanten auch zu Beobachtungen auf dem festen Lande einzurichten. Der Seefahrer findet seinen Horizont in der weiten See, zu Land muſs man sich einen durch *Kunst* zu verschaffen wissen. Von den verschiedenen zu dieser Absicht erfundenen Werkzeugen oder *künstlichen Horizonten* werde ich in der Folge reden. *Brander* in Augsburg gab dem Hadleyschen Octanten eine solche Einrichtung, daſs man damit auch Höhenwinkel zu Land messen konnte. Allein die *wesentlichsten* Vorzüge eines Hadleyschen Winkelmessers vor andern giengen bey dieser Einrichtung verlohren. Es wurde daher auch der Hadleysche Sextant in Deutschland wenig oder gar nicht gebraucht, bis *Herr von Zach* und *Herr Graf Brühl* dieses vortrefliche Instrument auch in Deutschland bekannt machten, und Mittel erfanden, es zu Beobachtungen auf dem Lande sicher gebrauchen zu können.

§. 47.

Ehe ich zu der Beschreibung des Spiegelsextanten komme, muſs ich noch einige catoptrische Säze vorausschiken. *Wenn auf einen ebenen Spiegel* AB Fig. 4 *ein Lichtstrahl*

FG

FG *auffällt, so wird dieser nach* C *so zurükgeworfen, daſs der einfallende und zurükgeworfene Strahl* FG *und* GC *in einer auf der Ebene des Spiegels senkrechten Ebene liegen, und auf beyden Seiten gleiche Winkel* AGF, BGC *mit der Ebene des Spiegels machen* *). Fällt man auf den Punct des Spiegels, wo der Strahl auffällt ein Perpendikel pG, so folgt aus dem vorhergehenden, daſs der Winkel pGF = Winkel pGC.

Man lasse den Lichtstrahl GH auf einen zweyten Spiegel CD auffallen, dessen Ebene senkrecht seye auf der Ebene die auf dem ersten Spiegel AB senkrecht steht, so wird der Strahl GH nach I so zurükgeworfen, daſs GHC = IHD. Ferner liegt der von dem zweyten Spiegel zurükgeworfene Strahl HI in der auf ihn senkrechten Ebene, folglich sind FG und HI in *einer* Ebene. Man verlängere die Durchschnittslinien beyder Spiegel mit der auf denselben senkrechten Ebene AB und CD nach E, bis sie einander schneiden, so ist der Winkel HEG der Neigungswinkel beyder Spiegel. Wird FG und HI verlängert, bis beyde Linien einander schneiden in I, so ist FIH der Winkel, welchen der auf den ersten Spiegel AB fallende Lichtstrahl mit der Richtung HI macht, nach welcher er von dem zweyten Spiegel CD zurükgeworfen wird. Nun ist FGH ein äuſserer Winkel des Dreyeks GHI, AGH einäuſserer Winkel des Dreyeks HEG, folglich FGH = GHI + GIH und AGH = HEG + GHE aber

*) Kästners angew. Mathematik II. Th. I. Abth. Catoptrik 9, 10, 11, 12.

aber $AGF = EGH$

folglich $\left.\begin{matrix} AGH - AGF \\ FGH \end{matrix}\right\} = HEG + GHE - EGH$

daher $GHI + GIH = HEG + GHE - EGH$

also $GIH = HEG + GHE - GHI - EGH$

$= HEG + IHE - EGH$

$= HEG + GHC - EGH$

aber $HEG = GHC - EGH$ weil GHC ein äußerer Winkel des Dreyeks HEG, folglich ist

$$GIH = 2 HEG$$

Wenn also zween ebene Spiegel auf einer Ebene senkrecht stehen, und auf einen derselben ein in jener Ebene liegender Lichtstrahl so auffällt, daſs er auf die Oberfläche des zweyten Spiegels zurükgeworfen wird, so macht der Lichtstrahl nach seiner zweyten Zurükwerfung mit seiner ersten Richtung, nach welcher er auf den ersten Spiegel auffiel, einen Winkel, der so groſs ist, als der gedoppelte Neigungswinkel beyder Spiegel. Auch liegen der einfallende und der von dem zweyten Spiegel zurükgeworfene Lichtstrahl in der Ebene, die auf beyde Spiegel senkrecht steht.

§. 37.

Wenn der einfallende Lichtstrahl mit dem durch gedoppelte Reflexion zurükgnworfenen parallel wird, so sind die Ebenen beyder Spiegel ebenfalls miteinander parallel. Denn es seyen AB und CD Fig. 5 die beyden Spiegel, FG, GH, HI der Weg des Lichtstrahls, so ist unter

unter dieser Voraussezung $FGH = GHI$. Ferner $AGF = BGH$ und $GHC = IHD$; folglich $AGF = \frac{1}{2}(180^\circ - FGH)$ und $DHI = \frac{1}{2}(180^\circ - GHI) = \frac{1}{2}(180^\circ - FGH)$, also $AGF = DHI$ und AB mit CD parallel. Wird also der Spiegel AB Fig. 4 um den Punct G von B gegen I hin gedreht, so rüken die Puncte E und I immer weiter hinaus, und wenn beyde Spiegel parallel sind, so schneiden die Linien CE, AE und ebenso auch FI, HI einander nimmer; wird der Spiegel AB noch weiter gedreht, so fällt der Durchschnittspunct E auf die andere Seite desjenigen Theils des Lichtstrahls, der zwischen beyden Spiegeln liegt HG, und ebenso auch der Punct I. *Folglich liegen beyde Puncte* E *und* I *immer auf einerley Seite von GH.*

§. 49.

Wenn man beyde Spiegel zugleich so bewegt, daſs die darauf senkrecht stehende Ebene ihre Lage nicht ändert, so wird der zurükgeworfene Strahl HI *immer in seiner Lage bleiben*, weil der Winkel, den er mit dem einfallenden Strahl FG macht, allein von dem Neigungswinkel beyder Spiegel abhängt. So wird man also einen gewissen Gegenstand F jener Bewegung ungeachtet in I immer nach der Richtung HI sehen. Dieses wird sich auch so zeigen lassen. Der Strahl, der vorher unter dem Winkel A GF auf den Spiegel AB auffiel, falle nun in g unter einem gröſsern Winkel A g f auf, so wird er nach g h und von da aus nach h I zurükgeworfen. GH und gh wer-

werden einander schneiden in n, weil ngE > nGE. Verlängert man FG, fg, so schneiden sie sich aus gleichem Grunde in m. Nun ist nGg = mGg und ngG = mgG, folglich Gng = Gmg Ebenso läſst sich zeigen, daſs Hnh = Hkh, folglich Gng = Gmg = Hnh = Hkh = lkL. fih ist der Winkel, welchen der auffallende Lichtstrahl fg mit dem zweymal zurükgeworfenen hi macht; als äuſserer Winkel des Dreyeks kiq ist er = ikq + iqk = Iqm + Imq. Aber auch FIH = Iqm + Imq, folglich fih = FIH. Stellt man sich nun vor die Veränderung der Lage des Lichtstrahls FG gegen den Spiegel AB seye durch eine gemeinschaftliche Bewegung beyder Spiegel bewirkt worden, so seht man leicht, daſs durch die Bewegung beyder Spiegel die Lage des zurükgeworfenen Strahls nicht könne geändert werden.

§. 50.

In der auf beyde Spiegel AB und CD Fig. 6 Taf. 1. senkrechten Ebene seyen zwey Gegenstände O und F. Der Spiegel CD seye nur bis auf die Hälfte mit Zinfolie belegt, und befinde sich zwischen dem Auge des Beobachters in I und dem Gegenstand O. Man mache den Winkel DHI = dem Winkel CHG und ziehe von O nach dem Punct G, wo die Linie HG den Spiegel AB trift, eine gerade Linie. Man bringe den Spiegel AB in eine solche Lage, daſs seine Durchschnittslinie AB mit der auf demselben senkrechten Ebene die Durchschnittslinie CD des kleinen Spiegels auf derselben Seite von GH, auf welcher O liegt unter einem Winkel durchschneide, der die Hälfte des Winkels IOG ist, so wird der von O nach G ausgehende Lichtstrahl OG in die Richtung GH und ferner in die Lage HI gebracht werden, die mit der Lage des geradezu von O durch den unbelegten Theil des Spiegels CD nach dem Auge des Beobachters I kommenden Lichtstrahls OI zusammenfällt. So wird man den Gegenstand O sowohl geradezu als auch durch doppelte Zurükwerfung nach einerley Richtung sehen. (§. 48.) Nun drehe man den groſsen Spiegel AB um eine in dem Punct G auf der Ebene durch F, O und G senkrechte Axe und bringe ihn in die Lage (ab) so daſs die Verlängerung von (ab) die Verlängerung von CD unterhalb der Linie HG, weil I unterhalb derselben liegt, schneide unter einem Winkel der halb so groſs ist als der Winkel OIF, so wird man beyde Gegenstände O und F nach der Richtung HI sehen, ersteren gerade zu durch den unbelegten Theil des Spiegels CD, lezteren durch doppelte Zurükwerfung (§. 48). Der Winkel FGO, welchen die Gegenstände O und F an der Umdrehungsaxe des groſsen Spiegels machen ist gleich der Summe der Winkel GIO und GOI. Gedenkt man sich ab und AB verlängert bis sie die Verlängerung von CD schneiden, so entsteht ein Dreyek, an welchem AGa ein äusserer Winkel ist, dem die Winkel entgegenstehen, welche der Spiegel in den Lagen AB und ab mit dem Spiegel CD machte. Die Hälfte des ersten ist dem Winkel GOI die des zweyten dem Winkel GIO gleich; beyder Summe $=$ AGa. Folglich ist FGO $=$ 2 AGa.

§. 51.

§. 51.

Der Spiegel AB seye auf einem Lineal befestigt, das man um den Punct G so dreheu kann, daſs jener Spiegel immer senkrecht bleibt auf der Ebene die das Lineal beschreibt. Das Ende des Lineals gehe über einem eingetheilten Gradbogen, und auf der Linie HI stehe eine Platte cd senkrecht mit einer kleinen Oefnung, die so weit von der Ebene des Gradbogens abstehe, als die Linie auf dem kleinen Spiegel CD, welche den unbelegten Theil desselben vor dem belegten trennt.

Will man nun den Winkel OGF messen, so bringe man den Mittelpunct des Gradbogens in den Punct G, und wende das ganze Instrument so lange, bis man durch die Oefnung der Platte cd und den unbelegten Theil des Spiegels CD den Gegenstand O erblikt. Hierauf drehe man das Lineal auf welchem der Spiegel AB sizt oder die Alhidade, bis man den Gegenstand O durch gedoppelte Reflexion in dem belegten Theil des kleinen Spiegels CD siehet. (Wenn bey O ein Stab ausgestekt ist, so wird man den obern Theil desselben durch den unbelegten Theil des Spiegels, den untern in dem belegten Theil sehen können.) Nun wird es leicht seyn, durch die Bewegung des groſsen Spiegels AB die beyden Theile des Gegenstands O, die man gerade zu und durch gedoppelte Zurükwerfung siehet, so übereinander zu bringen, daſs der Gegenstand nicht mehr gebrochen erscheint. Man bemerke den Punct des Gradbogens auf welchen die Alhidade zeigt.

Nun bewege man den groſsen Spiegel so lange bis man auch den Gegenstand F durch doppelte Zurükwerfung in dem Spiegel CD siehet, und beyde Gegenstände F und O zusammenſallen. Man wird nun vermittelst des Gradbogens den Winkel messen können, um welchen der Spiegel von seiner ersten Lage, da man O sowohl gerade zu als durch doppelte Zurükwerfung in dem kleinen Spiegel CD sahe, bis zu derjenigen Lage, da man den Gegenstand F mit dem Gegenstand O zusammenfallen sahe, gedreht wurde. Dieser Winkel doppelt genommen ist alsdann so groſs als der Winkel OGF (§. 50.).

§. 52.

Um die Winkel genauer messen zu können, bringt man eine Fernröhre an, deren Axe in der Linie HI Fig. 6 liegt. Die eine Hälfte des Objectivs ist dem unbelegten Theil des Spiegels CD, die andere Hälfte dem belegten Theil zugekehrt. Ein halbes Objectiv macht so gut ein Bild von einem gewissen Gegenstand, als ein ganzes, nur nicht so helle. Vermittelst einer Fernröhre wird man also die Gegenstände O und F zugleich sehen können, wenn man den groſsen Spiegel AB so dreht, daſs der Strahl FG so nahe in die Lage HI kommt, daſs der Winkel, den er mit HI macht, kleiner ist als das Sehefeld der Fernröhre. Da wird man also beyde Bilder O und F zur Bedekung bringen können, und sie werden einander auch noch bedeken, wenn man gleich das ganze Instrument in der Ebene der bey-

beyden Gegenstände bewegt (§. 49.). Mit einem solchen Werkzeug kann man also Winkel messen, ohne ein Gestell dafür nöthig zu haben; mit freyer Hand kann man das Instrument immer so halten, daſs man den Gegenstand im Sehefeld der Fernröhre behält.

§. 53.

Zu den Sextanten werden gewöhnlich *gläserne* Spiegel gebraucht, weil metallene durch die Seeluft bald ihre Politur verlieren würden. Bey diesen Spiegeln leiden die Strahlen auſser der Zurükwerfung auch eine zweymahlige Brechung, auch werden einige von den auffallenden Strahlen von der ersten unbelegten Fläche des Spiegels zurükgeworfen. Es ist also zu untersuchen, ob diese Umstände einen Einfluſs auf die Winkelmessung haben.

Ich nehme einen gläsernen Spiegel an, dessen beyde Oberflächen genau eben und einander parallel sind. Ein Durchschnitt dieses Spiegels senkrecht auf seine Ebene seye ABCD Fig. 28 Taf. V, E in Gegenstand, den man von M aus in dem Spiegel siehet. Von E falle din Lichtstrahl EF auf den Spiegel, welcher nach I so gebrochen wird, daſs sich der Sinus des Neigungswinkels PFE zu dem Sinus des Brechungswinkels PFH verhält wie m:n wenn m:n das Brechungsverhältniſs aus Luft in Glas ist. Zieht man also BH mit dem Einfallsloth PF parallel, und macht FH:FE = m:n oder = 3:2, und verlängert FH nach I, so wird FI der Weg des Lichtstrahls im Glase seyn. Von I wird der Strahl nach k hin so zurükgeworfen, dafs dIF=dIK, wenn dI senkrecht auf CD in dem Punct i steht. Da nun die Winkel bey K und F gleich sind, so wird der Strahl KI bey seinem Ausgang in die Luft um einen eben so grofsen Winkel von dem Einfallsloth hinweggebrochen, als derjenige war, um welchen er bey seinem Eintritt in das Glas gegen das Einfallsloth hin gebrochen wurde. Folglich werden die Verlängerungen von FE und MK einander in c so schneiden, dafs der Durchschnittspunt in dem Perpendikel dI liegt. Zieht man also durch c eine Linie ab mit CD parallel, so ist der Winkel DCE = dem Winkel acM, und der Lichtstrahl kommt so in das Auge in M, als ob er von einer Spiegelebene ab ohne Brechung wäre zurükgeworfen worden, welche die Linie dI in dem Punct c rechtwinklicht durchschnitte.

Anmerkung. Ludlam sezt das Verhältnifs von Ic:cd = 1:2, wenn das Brechungsverkältnifs wie 2:3 ist. Dieser Fehler rührt daher, dafs er das Verhältnifs von BE:BH dem Verhältnifs des Sinus des Brechungswinkels zu dem Sinus des Einfallswinkels gleich sezt, anstatt das Verhältnifs von FE:FH zu nehmen. Directions for the use of Hadley's Quadrant. pag. 83 n. 43 und pag. 84 Cor. 2. Daher gibt er die Vorschrift den grofsen Spiegel des Sextanten so auf die Alhidade zu sezen, dafs der Mittelpunct um welchen sich die Alhidade dreht $\frac{1}{3}$ der Dike des Glases von der hintern Fläche des Spiegels absteht. p. 84 n. 47. Dieselbe Vorschrift gibt Borda. Description et usage du cercle de reflexion. p. 15.

§. 54.

Man mache BE=BN und ziehe MN, so siehet das Auge in M den Gegenstand E wegen

gen der Zurükwerfung von der fordern Fläche des Spiegels AB nach der Richtung MN *), durch Zurükwerfung von der hintern Fläche nach der Richtung MO. Folglich siehet man in M zwey Bilder von dem Gegenstand E, die um den Winkel NMO von einander abstehen. Dieser Winkel wird desto kleiner, je grösser der Abstand des Gegenstandes E von dem Spiegel ist. Denn es ist $BE = BN$ und $bE = bO$ folglich $NO = 2Bb = 2cd$. Für einerley Einfallswinkel ist also NO eine beständige Grösse, und der Winkel NMO wird desto kleiner werden, je grösser MN wird, welches mit der Entfernung des Gegenstands E wächst.

§. 55.

Die Lage des Puncts c, in welchem der einfallende Strahl EF und zurükgeworfene KM einander schneiden, kann auf folgende Art bestimmt werden. Da die Dreyeke dFI und BFH; dFc und BFE einander ähnlich sind, so hat man $cF : FI = FE : FH = n : m$ (§. 53.) in dem bey d rechtwinklichten Dreyek dIF verhält sich $FI : dI = 1 : \cos dIF$ folglich verhält sich

$$\begin{aligned} CF : dI &= n : m \cos dIF \\ &= n : m \cos PFH \end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned} CF : cd &= 1 : \cos dcF \\ &= 1 : \cos PFE \end{aligned}$$

also $\overline{dI : cd = m \cos PFH : n \cos PFE}$

aber $\sin PFH = \frac{n}{m} \sin PFE$

folg-

*) Kästners angew. Mathem. II. Th. I. Abth. Catoptrik 20.

$$\text{folglich } \cos PFH = \sqrt{(1 - \frac{n^2}{m^2} \sin PFE^2)}$$

$$= \frac{1}{m} \sqrt{(m^2 - n^2 + n^2 \cos PFE^2)}$$

daher

$$dI : cd = \sqrt{(m^2 - n^2 + n^2 \cos PFE^2)} : n \cos PFE$$

$$= m \sqrt{(1 + \frac{m^2 - n^2}{m^2} (\operatorname{tang} PFE)^2)} : n$$

sezt man $m = 3, n = 2$, so hat man

$$dI : cd = 3 \sqrt{(1 + \frac{5}{9} \operatorname{tang} PFE^2)} : 2$$

Folglich ist das Verhältniſs von $dI : cd$ nicht $=$ dem beständigen Verhältniſs $= 3 : 2$, sondern nähert sich demselbigen desto mehr, je kleiner der Winkel PFE ist.

§. 56.

Nun läſst sich auch leicht der Winkel NMO bestimmen, um welchen die von den beyden Spiegelflächen gemachten Bilder des Gegenstands E von einander abzustehen scheinen. In dem Dreyek NMO hat man $NO = 2cd$, und $NOM = PFE$, folglich verhält sich

$$2cd : \sin NMO = MN : \sin PFE$$

aber

$$2dI : 2cd = \sqrt{(m^2 - n^2 + n^2 \cos PFE^2)} : n \cos PFE \; (\text{§. } 55)$$

folglich

$$2dI : \sin NMO = MN \sqrt{(m^2 - n^2 + n^2 \cos PFE^2)} : n \sin PFE \cos PFE$$

Kürze halber seze man

$$dI = a, NMO = y, MN = \delta, PFE = x$$

so hat man

$$\sin y = \frac{2an \sin x \cos x}{\delta \sqrt{(m^2 - n^2 + n^2 \cos x^2)}}$$

$$= \frac{an \sin 2x}{\delta \sqrt{\left(\frac{2m^2 - n^2}{2} + \frac{n^2}{2} \cos 2x\right)}}$$

$$= \frac{an}{\delta \sqrt{\left(\frac{2m^2 - n^2}{2}\right)}} \times \frac{\sin 2x}{\sqrt{(1 + \frac{n^2}{2m^2 - n^2} \cos 2x)}}$$

§. 57.

Der Winkel y wird $= 0$ wenn $x = 0$ oder $= 90^\circ$; zwischen diese beyden Werthe von y fällt ein *Gröstes.* Um es zu bestimmen, differentiire man obige Gleichung für y, indem man y und x als veränderlich betrachtet, so findet sich

$$dy \cos y = \frac{an\, dx}{\delta \sqrt{\left(\frac{2m^2 - n^2}{2}\right)}} \times$$

$$\frac{2(1 + \frac{n^2}{2m^2 - n^2} \cos 2x) \cos 2x + \frac{n^2}{2m^2 - n^2} \sin 2x^2}{(1 + \frac{n^2}{2m^2 - n^2} \cos 2x)^{\frac{3}{2}}}$$

folg-

folglich $\frac{dy}{dx} = \frac{an}{\delta \sqrt{\left(\frac{2m^2-n^2}{2}\right)}} \times$

$$\frac{\frac{n^2}{2m^2-n^2} \cos 2x^2 + 2\cos 2x + \frac{n^2}{2m^2-n^2}}{\cos y\left(1 + \frac{n^2}{2m^2-n^2} \cos 2x\right)^{\frac{3}{2}}}$$

dieses kann nur alsdann verschwinden, wenn

$$\frac{n^2}{2m^2-n^2} \cos 2x^2 + 2\cos 2x + \frac{n^2}{2m^2-n^2} = 0$$

folglich $\cos 2x = \frac{n^2 - 2m^2 \pm \sqrt{(m^2-n^2)}}{n^2}$;

wenn y ein Gröstes ist. Sezt man

$m=3$, $n=2$, so wird $\cos 2x = \frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$

daher ist der mögliche Werth von $\cos 2x = -0{,}1458972$ und x oder $PFE = 49^\circ\, 11'\, 40''$

§. 58.

Oben (§. 24.) hatten wir

$$\sin y = \frac{an}{\delta \sqrt{\left(\frac{2m^2-n^2}{2}\right)}} \times \frac{\sin 2x}{\sqrt{\left(1 + \frac{n^2}{2m^2-n^2}\right)\cos 2x}}$$

daher für $n=2$, $m=3$,

$$\sin y = \frac{2a \sin 2x}{\delta \sqrt{(7 + 2\cos 2x)}} = \frac{2a}{\delta \sqrt{7}} \cdot \frac{\sin 2x}{\sqrt{(1 + \frac{2}{7}\cos 2x)}}.$$

Man seze $\frac{2}{7}\cos 2x = \cos Q$ so wird

$$\sin y = \frac{2a}{\delta\sqrt{14}} \cdot \frac{\sin 2x}{\cos \frac{1}{2} Q}.$$

Für

Für das Maximum seze man
$x = 49^\circ\, 11'\, 40''$, so wird der gröste Werth von
$\sin y = 0,7639 \cdot \frac{a}{\delta}$ und wenn man die Dike des
Glases oder $a = 0,0125$ Fuſs sezt
$\sin y_{\prime} = \frac{0,0095487}{\delta}$. Es ist aber der Sinus
von 1 Secunde
$= 0,000004848$, folglich kann y keine Sekunde betragen wenn
$\frac{0,0095487}{\delta} < 0,000004848$ oder wenn

$$\delta > \frac{0,0095487}{0,000004848} \text{ Fuſs} > 1969,6 \text{ Fuſs}$$

Wenn also die Dike des Spiegels $= 0,0125$ Fuſs und der Abstand des Gegenstands, den man in dem Spiegel betrachtet, 1970 Fuſs ist, so ist der gröste scheinbare Abstand beyder Bilder schon kleiner als eine Secunde. Für einen Gegenstand in unendlicher Entfernung fallen beyde Bilder zusammen.

Das von I nach K zurükgeworfene Licht wird zum Theil von der fordern Oberfläche AB des Spiegels wieder auf die hintere Fläche CD, und von da aus aufs neue nach AB zurükgeworfen und daselbst der Strahl bey seinem Ausgange in die Luft gebrochen. Daher gibt es von einem Gegenstand E unzählich viele Bilder, die immer schwächer und schwächer werden, und sämmtlich in einer auf der Ebene des Spiegels verticalen und durch den Ort des Gegenstandes und des Auges gehenden

den Ebene liegen. Gewöhnlich ist das dritte Bild schon sehr schwach, so daſs man es nur alsdann bemerken kann, wenn man sehr helle Gegenstände in dem Spiegel betrachtet. Für unendlich entfernte Gegenstände fallen alle diese Bilder zusammen, weil in diesem Fall alle auf den Spiegel auffallende Lichtstrahlen parallel sind, in dem Glase um gleiche Winkel gebrochen werden und daher wieder mit einander parallel zurükgeworfen werden.

Beschreibung eines Spiegelsextanten.

§. 22.

Auf der V. Tafel Fig. 29 siehet man eine perspectivische Zeichnung des ganzen Spiegelsextanten. Der Gradbogen GH bestehet mit den Halbmessern EI, EL der Mittelpunctsplatte m und den Verbindungsstüken MN, OK, Op, Oq aus *einem* durchaus 4 Lin. diken Stük Messing. Die Alhidade EF dreht sich vermittelst eines daran befestigten conischen Zapfens von Stahl in einer ähnlichen conischen Hölung, die sich in einem Stük Glokenmetall befindet, das durch Schrauben mit der Mittelpunctsplatte verbunden ist. Gegen dem Mittelpunct E endigt sich die Alhidade in eine runde Platte, auf welcher der groſse Spiegel AB senkrecht befestigt ist, gegen dem anderen Ende F hin wird sie wieder breiter, und endigt sich in das Stük xy welches den Vernier trägt. Der Alhidadenhalter VW hängt mit der Alhidade durch das Stück kl zusammen, welches in einer Vertiefung der Verniernierplatte Fxy liegt; es wird durch zwey Kreisbogen begränzt, die aus dem Mittelpunct des Sextanten E beschrieben werden. Durch die Micrometerschraube KF kann man der Alhidade eine sanfte Bewegung geben, da sich dann das Stük kl in der Vertiefung der Platte Fxy leicht hin und her schiebt. Durch die Schraube Ww wird der Alhidadenhalter zugleich mit der Alhidade festgestellt und losgemacht. Die Abtheilungen sind auf dem schief gearbeiteten Rande Hrst und also auf der Zone eines Kegels angebracht so wie die auf der Vernierplatte xy, Beyde sind Fig. 31 im Profil in ihrer wahren Gröſse vorgestellt, und mit denselben Buchstaben bezeichnet. Auf der Alhidade sizt eine Röhre h welche den Stift α Fig. 30 aufnimmt, und dazu dient das Vergröſserungsglas $\delta\varepsilon$ über dem Vernier xy zu halten. Dem groſsen Spiegel AB gegenüber steht der kleine Spiegel CD, welcher vermittelst zweyer Zapfen zwischen zweyen Baken befestigt ist, wovon man hier nur einen g siehet, und um jene Zapfen als um eine der Ebenen des Sextanten parallele Axe vermittelst der Schraube ef ein wenig gedreht werden kann. Dem kleinen Spiegel gegenüber ist an dem Körper des Sextanten eine Röhre Q angebracht, in deren Hölung genau ein messingenes Parallelepipedum paſst, das mit dem Ring R aus einem Stük besteht, in welchen die Fernröhre TU eingeschraubt wird, und vermittelst der Schraube S nach einer auf der Ebene des Sextanten senkrechten Richtung auf und nieder bewegt werden kann.

Durch

Durch Umdrehung der Schraube S kann man also die Fernröhre TU der Ebene des Sextanten näher bringen oder davon entfernen, so dafs ihre Axe jener Ebene beständig parallel bleibt. Die Säule $\alpha\beta$ trägt drey gefärbte Gläser von verschiedener Dunkelheit, welche sich um die Axe β so drehen lassen, dafs man ihre Mittelpuncte hinter dem kleinen Spiegel in die Verlängerung der Axe der Fernröhre TU bringen kann. a b, c, d sind drey andere ähnliche Gläser, welche man zwischen den grossen und kleinen Spiegel bringen kann, wie dieses an dem mittlern a b gezeigt ist. P ist der Handgrif, an welchem der Sextant gehalten wird.

§. 60.

Die Vorrichtung an dem Mittelpunct ist Fig. 32 in ihrer natürlichen Gröfse und im Profil vorgestellt. In die Mittelpunctsplatte m n ist das Stük Glokenmetall t u v eingelassen und mit drey Schrauben, wovon man zwey bey x und y siehet, darauf befestigt. In diesem Stük dreht sich der aus zweyen abgekürzten Kegeln zusammengesezte stählerne Zapfen qrs, auf dessen Axe senkrecht eine messingene Scheibe mit einem kurzen cylindrischen Zapfen k l aufgenietet und gelöthet ist. Vermittelst dieser Platte, welche in die Alhidade E F eingelassen, und durch drey Schrauben o p daran befestigt ist, wird der stählerne Zapfen q s r mit der Alhidade fest verbunden. Das Ende dieses Zapfens r ist vierekigt und geht in eine kleine messingene Platte, welche durch

durch eine Schraube w angedrükt wird, um den Zapfen genau in seiner Hölung zu halten. Der dikere Kegel des Centralzapfens s macht, dafs er sich nicht einzwingen und keine starke Reibung entstehen kann. Endlich wird noch das hervorragende Stük des Mittelpunctszapfens durch eine Röhre $\alpha\beta\gamma$ bedekt, welche durch drey Schrauben $\delta\varepsilon$ an die Mittelpunctsplatte m n angeschraubt wird und zugleich dem Sextanten zu einem Fufse dient; zwey andere befinden sich bey I und L Fig. 29, wovon der eine bey μ ein wenig sichtbar ist. Wird der Handgrif P sammt dem Stük QS weggenommen, so sizt der Sextant auf jenen dreyen Füfsen auf, wenn er horizontal hingelegt wird. AB ist der grofse Spiegel, welcher in seinem Gehäuse auf dreyen unter den Platten hi, gf, de befindlichen kurzen Stiften aufliegt, und durch die Schrauben a b und c an jene Stifte angedrükt wird. Der Spiegel selbst ist so auf die Alhidade gesezt, dafs der Mittelpunct des Sextanten die Dike der Gläser halbirt. Die Durchschnittslinie des Spiegels mit der Ebene der runden Platte E der Alhidade, auf welcher er senkrecht steht, geht mitten durch die Alhidade an den Punct 10 des Vernier x y.

§. 61.

Den kleinen Spiegel CD siehet man Fig. 33. Er wird durch drey Schrauben a b c auf ähnliche Art wie der grose in seiner Fassung befestigt. Der Theil b c e f ist mit Zinfolie belegt, der übrige Theil e f a unbelegt und auch die Fassung durchbrochen. g und h sind die beyde beyden Zapfen um welche er sich drehen kann. Der Theil ik geht in eine vierekigte Vertiefung in dem Körper des Sextanten hinein, welche so weit ist, daſs noch einiger Spielraum übrig bleibt. Die Vorrichtung, wodurch der Spiegel um die Axe g h gedreht wird, zeigt die 34. Figur in ihrer natürlichen Gröſse. l g ist einer von den beyden Baken, zwischen welchen der Spiegel vermittelst der Zapfen g und h Fig. 33 aufgehängt ist. Jeder wird durch zwey Schrauben eine l und eine andere, welche durch den Körper des Sextanten von unten herauf in die Gegend von g geht auf den Sextanten fest aufgeschraubt. In der Richtung der Schraube d e ist in den Sextanten ein cylindrisches Loch von $2\frac{1}{4}$ Lin. im Durchmesser gebohrt, in welchem hinten eine stählerne schraubenförmig gewundene Feder m liegt, wodurch das Stük i k beständig gegen die Schraube d e angedrükt wird. Der Cylinder d f, in welchem sich die Schraubenmutter für die Schraube d e befindet, bestehet mit der messingenen rechtwinklicht gebogenen Platte a b aus einem Stük, und ist bey f etwas aufgeschlizt, um ihn vermittelst der Schraube f zusammendrüken und dadurch die Schraube d e fest stellen zu können. Die rechtwinklichte Platte ist auf den Sextanten vermittelst sechs Schrauben, davon viere in dem verticalen Theil (an) sind, aufgeschraubt, und verschlieſst unten das oben erwähnte vierekigte und auf der Seite das runde in den Sextanten gemachte Loch. Die Schraube e wird vermittelst eines Schlüssels, der den

vier-

vierekigten Zapfen e aufnimmt, umgedreht, nachdem man zuvor die Schraube f etwas losgeschraubt hat.

§. 62.

Der schiefe Theil des Gradbogens Hrst so wie die Vernierplatte, ist mit einer $\frac{1}{3}$ Lin. diken silbernen Platte überzogen, worauf die Abtheilungen sind. Dieser silberne Limbus ist mit funfzehen versenkten silbernen Schrauben aufgeschraubt, deren Köpfe nach dem Aufschrauben abgefeilt und polirt sind, so daſs man sie kaum erkennen kann, wozu auch noch die Verschiedenheit der Farbe, welche der Limbus und die Schrauben haben, etwas beyträgt. Die silbernen Gradbogen haben einen gedoppelten Vorzug vor den messingenen. Für das erste nehmen sich die schwarzen sehr feinen Theilstriche auf dem weisen Grunde sehr gut aus, fürs zweyte lauft das Silber nicht so leicht an wie Messing, welches bey lezterem nicht verhütet werden kann, da man den Gradbogen nicht wie die übrigen Theile desSextanten mitFirniſs überziehen darf. Der Bogen von 60 Graden ist in 120 gleiche Theile, welche hier für ganze Grade gelten, (§. 51.) eingetheilt; jeder von diesen Theilen wieder in 3 gleiche Theile, welche folglich auf diesem Instrument zwanzig Minuten betragen. Von diesen leztern Theilen sind 39 auf die Vernierplatte xy getragen, und in 40 gleiche Theile getheilt. Folglich ist eine jede Abtheilung auf dem Vernier um $\frac{1}{40}$ kleiner als eine Abtheilung auf dem Limbus. Da aber diese 20 Min. beträgt, so ist der Ueberschuſs einer Abtheilung auf dem Limbus über eine auf dem Vernier $\frac{1}{2}$ Minute oder 30 Secunden. Wenn also Z. B. der siebente Theilstrich des Vernier auf einen Theilstrich des Gradbogens trift, so steht der Anfangspunct des Vernier von dem nächstvorhergehenden Theilstrich des Limbus 7. 30 Secunden oder 3 Min. 30 Secunden ab. Um dieses Zählen zu erleichtern sind auf dem Vernier die Zahlen 0 10 20 aufgestochen. Der Anfangspunct oder Index des Vernier fällt mit dem Anfangspunct des Gradbogens zusammen, wenn die Alhidade den Radius NL bedekt; auch hat der Spiegel CD eine solche Lage, daſs er alsdann mit dem groſsen Spiegel AB parallel ist. So gibt die Alhidade unmittelbar den *gedoppelten Neigungswinkel der beyden Spiegel* an. In den Alhidadenhalter kann man die übersilberte Platte x einsteken, welche die Abtheilungen beleuchtet, die man durch das Vergröſserungsglas Fig. 30 betrachtet.

§. 63.

Der Träger der Fernröhre RQS Fig. 29 ist Fig. 35 Taf. IV besonders vorgestellt. Die Röhre Qq hat eine auf ihre Axe senkrechte Platte bc, welche man bey $\beta\gamma$ im Durchschnitt senkrecht auf bc, bey T im Grundriſs siehet. Auf der untern Fläche von q Fig. 29 sind zwey Stüke Messing angeschraubt, zwischen welche die Platte bc so hineingeschoben wird, daſs die Röhre Qq senkrecht auf der Ebene des Sextanten steht. Von g bis h ist eine vierekigte Hölung, in welche genau das Parallelepipedum lf paſst, das oben den

Ring

Ring R trägt. In diesem Parallelepipedo befindet sich eine Schraubenmutter für die stählerne Schraube B, welche gedoppelte Gänge hat, um eine geschwindere Bewegung hervorzubringen, so dafs jede Umdrehung der Schraube 1 Lin. Bewegung macht. Der cylindrische Theil der Schraube B pafst in die Oeffnung e, der darüber befindliche Absaz m sizt bey h auf, und an den vierkantigen Theil d wird die Scheibe S angestekt, welche durch eine Schraube s angedrükt wird. Dieses verstattet der Schraube AB blos eine Bewegung um ihre Axe, daher wird die Stange lf durch Umdrehung jener Schraube auf und nieder bewegt. Bey ki ist in die Kante des Parallelepipedums ein Einschnitt gemacht, in welchen eine kleine in der Röhre Qq befindliche Schraube a hineingeht, und folglich der Stange Spielraum auf die Weite ki einschränkt, wodurch das gänzliche Herausschrauben der Schraube AB aus ihrer in fg befindlichen Mutter verhindert wird.

§. 64.

Um einem Künstler noch genauere Anweisung zur Verfertigung eines solchen Sextanten zu geben, theile ich hier die Abmessungen aller Theile desselben nach dem Londner Fufs mit.

Körper des Sextanten.

	Z.	Lin.
Halbmesser bis zu dem Anfang des schiefen Randes - - - - -	5	0

Breite

	Z.	Lin.
Breite des ebenen Theils des Grandbogens (G t Fig. 29) - - -	0	2
Halbmesser bis zu dem Ende des schiefen Randes - - - -	5	3
Durchmesser der Mittelpunctsplatte -	1	6
Durchmesser der Scheibe o Fig. 29 -	0	6
Breite des Stüks OK bey O - -	0	5
— — — — am Ende, so wie der Halbmesser		
E I, E L an ihren Enden I und L -	0	3
Breite der Streben O p O q - -	0	3
Breite des Stüks MN - - -	0	4
Dike des ganzen Sextanten durchaus	0	4

Vorrichtung am Mittelpunct.

Durchmesser der Scheibe von Glokenmetall tu Fig. 32 - - -	0	11,5
Dike - - - - - - - - - -	0	1,7
Aeuſsere Dike desjenigen Theils des daran befindlichen Cylinders z v, welcher nicht in der Centralplatte stekt - - - - - -	0	4
Aeussere Dike des übrigen Theils jenes Cylinders - - - -	0	3
Seine Länge von der untern Fläche der Centralplatte an - - -	0	9

Alhidade.

Durchmesser ihrer runden Platte -	1	6
Breite an der Platte - - -	0	5
— bey F - - - - - - -	0	3,7
Länge der Vernierplatte - - -	0	11.
Dike der ganzen Alhidade und der Vernierplatte - - - -	0	1,5

Grös-

	Z.	Lin.
Gröfsere Grundfläche des abgekürzten Kegels s an dem Mittelpunctszapfen - -	0	3,2
kleinere Grundfläche - - -	0	2,0
Durchmesser des Mittelpunctszapfens am Ende r - - - -	0	1,8

Micrometerschraube.

Dike des cylindrischen Theils der Micrometerschraube - - -	0	1,5
— — mit Schraubengängen versehenen Theils - - - - -	0	1,3
Länge der ganzen Schraube - -	1	8
Dike der Platten aus welchen der Alhidadenhalter V W Fig. 29 besteht - - - - - - -	0	1,5

Der grofse Spiegel.

Länge des grofsen Spiegels - -	1	3
Höhe desselben - - - - -	1	0

Der Spiegel ist so aufgestellt, dafs der Mittelpunct des Sextanten in die Mitte der Dike des Glases fällt. Er macht mit dem Index des Vernier einen Winkel von 3 Gr. von F gegen I Fig. 29.

Der kleine Spiegel.

	Z.	Lin.
Breite des kleinen Spiegels - -	0	7
Höhe — — — - - - - - -	0	10
Höhe des messingenen Stüks b c i Fig. 33 - - - - - - -	0	3
Länge des Zapfens i k - - -	0	4

	Z.	Lin.
Breite — — — - - - -	o	2,7
Dike — — — - - - - -	o	1.
Höhe der Belegung des Spiegels -	o	5
Abstand der Mitte des kleinen Spiegels von dem Mittelpunct des Sextanten - - - - - -	2	11

Ein auf seine Mitte gefälltes Perpendikel halbirt den Winkel, welchen eine aus dem Mittelpunct des Sextanten an den Mittelpunct des kleinen Spiegels gezogene Linie mit der Verlängerung der Axe der Fernröhre macht. Dieser Winkel beträgt 30 Grade.

Gefärbte Gläser.

	Z.	Lin.
Durchmesser der gefärbten Gläser -	o	8

Das erste Glas y ist grün und so helle, daſs man noch Sterne der ersten und zweyten Gröſse dadurch sehen kann.

Das zweyte oder mittlere ebenfalls grün und ein wenig dunkler.

Das dritte braun und so dunkel, daſs man die Sonne dadurch betrachten kann ohne sehr geblendet zu werden.

Durch alle drey Gläser siehet man die Sonne noch deutlich und in einer gelblichten Farbe.

Die Fernröhre.

	Z.	Lin.
Das Objectiv achromatisch; seine Brennweite - - - - - -	6	o
Oefnung des Objectivs - - - -	o	7,5
Brennweite des Collectivglases -	o	7,0

Durch-

	Z.	Lin.
Durchmesser — — - - -	0	5,5
es ist planconvex und die Convexe Seite gegen das Objectiv gekehrt.		
Brennweite des Oculars - - -	0	4,5
Durchmesser — — - - -	0	2,0

planconvex und die ebene Fläche gegen das Auge gekehrt; welches ganz nahe daran gehalten wird. In seinem Brennpunct ist die Blendung mit einer Oefnung von 3,2 Lin. in welcher zwey Paare feiner von dem Mittelpunct 0,6 Lin. abstehender Silberfäden senkrecht auf einander ausgespannt sind. Der Abstand des Collectivglases von den Fäden beträgt 2 Lin. und die Fäden selbst befinden sich zwischen dem Ocular und Collectivglas.

Eine zweyte Ocularröhre zu schwächerer Vergrösserung hat folgende Abmessungen.

	Z.	Lin.
Brennweite des Collectivglases -	0	12,5
Durchmesser — — - - -	0	6
Durchmesser der Blendung - -	0	3,2
In dieser Oefnung sind zwey einander parallele von dem Mittelpunct 0,6 Lin. abstehende Silberfäden ausgespannt.		
Abstand des Collectivglases von den Fäden - - - - -	0	5.
Brennweite des Oculars - -	0	7,7
Durchmesser — — - - - -	0	2,5

Noch gehört zu dem Sextanten eine Röhre, welche man statt der Fernröhre aufschrauben kann. Sie ist $3\frac{1}{3}$ Zolle lang, hat gegen dem kleinen Spiegel hin eine Blendung von

4 Lin. Oefnung, gegen dem Auge eine von 1,2 Lin und ist innen geschwärzt. Man gebraucht sie, wenn man ohne Fernröhre Winkel messen will.

Berichtigung des Spiegelsextanten.

§. 65.

Untersuchung, ob der grofse Spiegel auf der Ebene des Sextanten senkrecht stehe.

Hiezu gebraucht man die Fig. 36 Taf. IV gezeichnete Dioptern. A und B sind zwey rechtwinklicht gebogene Messingplatten. Erstere hat eine sehr kleine Oefnung a, der andern Verticalseite ist durchbrochen, und mit ihrer Grundfläche parallel ein feiner Silberfaden b c ausgespannt, so dafs, wenn beyde Stüke auf einer Ebene mit ihren verticalen Seiten zusammengefügt werden, der Faden b c die Oefnung a genau in der Mitte durchschneidet. Will man nun die Lage des grofsen Spiegels untersuchen, so legt man den Sextanten horizontal, nachdem man die Handhabe P und das Stük OS Fig. 29 weggenommen hat, und sezt das Stük A so auf den Gradbogen des Sextanten, dafs der Fufs b gegen den grofsen Spiegel gekehrt ist. Nun hält man das Auge ganz nahe an die Oefnung a, siehet durch dieselbe nach dem grofsen Spiegel, und dreht ihn vermittelst der Alhidade, bis man das Bild von A darin siehet. Hierauf sezt man das Stük B ganz nahe bey der runden Platte der Alhidade auf den Sextanten auf. Geht der Faden

Faden bc genau durch die Mitte des Bildes, welches der Spiegel von der Oefnung a macht, so steht der grofse Spiegel auf der Ebene des Sextanten senkrecht. Denn die Oefnung, durch welche man siehet, ihr Bild und der Faden vor dem Spiegel liegen hier in einer geraden Linie, welche daher auf dem Spiegel senkrecht ist; diese Linie ist aber auch wegen der gleichen Entfernungen der Oefnung der Platte a und des Fadens bc von der Ebene des Sextanten derselben parallel. Folglich steht in diesem Fall der grofse Spiegel auf der Ebene des Sextanten senkrecht. Findet sich dieses nicht, so mufs man dadurch diesem Fehler abzuhelfen suchen, dafs man nach Beschaffenheit der Umstände den unter der Platte hi Fig. 32 oder die unter den Platten de, gf befindlichen Stifte, auf welchen der Spiegel aufliegt, verkürzt. Man sieht leicht, dafs das erstere geschehen mufs, wenn das Bild der Oefnung der Platte A über dem Faden bc erscheint, das leztere, wenn jenes Bild unter dem Faden liegt.

§. 66.

Den kleinen Spiegel auf die Ebene des Sextanten senkrecht zu stellen.

Man richtet die Fernröhre TU nach einem deutlichen Punct, und bewegt die Alhidade des grofsen Spiegels, bis man denselben Punct durch gedoppelte Reflexion in das Sehefeld bekommt; beyden Bildern kann man einerley Helligkeit geben, wenn man die Fernöhre vermittelst der Schraube S der Ebene des Sextanten näher bringt, oder sie davon entfernt, weil alsdann das Objectiv mehr oder weniger Strahlen von dem durch gedoppelte Reflexion gesehenen Gegenstand bekommt.

Kann man nun beyde Bilder durch Bewegung der Alhidade genau zur Bedekung bringen, so steht der kleine Spiegel auf der Ebene des Sextanten senkrecht. Geht aber das eine Bild über oder unter dem andern hinweg, so mufs man den kleinen Spiegel vermittelst der Schraube ef so stellen, bis beyde Bilder durch Bewegung der Alhidade zur Bedekung gebracht werden können. Am besten läfst sich diese Berichtigung vermittelst heller Sterne machen. Fallen beyde Bilder, welche das Objectiv von dem Stern so wohl durch directe als durch zweymal reflectirte Strahlen macht zusammen, so sind beyde Spiegel einander parallel (§. 48.). Da man nun den grofsen Spiegel schon senkrecht auf die Ebene des Sextanten gestellt hat (§. 65.), so ist auch der kleine Spiegel auf jener Ebene senkrecht.

§. 67.

Die Lage der Axe der Fernröhre gegen die Ebene des Sextanten zu berichtigen.

Man lege den Sextanten horizontal und bringe die Fäden in der Fernröhre oder das eine Paar derselben in eine der Ebene des Sextanten parallele Lage. Man stelle die Diopter B Fig. 36 neben dem kleinen Spiegel, die Diopter A neben der Fernröhre so auf die

Ebene des Sextanten, daſs eine durch ihre Mitte gezogene gerade Linie ungefähr der Axe der Fernröhre parallel ist. Man bringe durch Erhöhung oder Erniedrigung der einen Seite des Sextanten den Faden der Diopter B auf einen entfernten deutlichen Punt. Siehet man diesen zwischen den beyden horizontalen Fäden der Fernröhre in der Mitte, so hat die Axe derselben ihre gehörige der Ebene des Sextanten parallele Lage.

An dem hier beschriebenen Sextanten ist keine Vorrichtung angebracht, die Fernröhre der Ebene desselben parallel zu stellen, wenn man ihre Lage fehlerhaft gefunden hätte. Man kann aber leicht eine solche Vorrichtung auf folgende Art anbringen. dcef Fig. 37 Taf. IV stellt den Ring im Profil vor in welchen die Fernröhre eingeschraubt wird. ab ist der Ring welcher mit dem Parallelepipedo lf Fig. 35 aus einem Stük besteht, und so weit ist, daſs der Ring dcef noch einigen Spielraum darinnen hat. Gegen die beyden Endpuncte des verticalen oder auf der Ebene des Sextanten senkrechten Durchmessers des Rings sind Löcher für die beyden Schrauben d und f welche ihre Muttern in dem Ring ab haben. Auf beyden Seiten des horizontalen Durchmessers befinden sich zwey stumpfe Spizen g, welche auf dem Ring ab aufsizen. Hier kann man also vermittelst der Schrauben d und f dem Ring cdef eine kleine Bewegung um den der Ebene des Sextanten parallelen Durchmesser geben, und folglich die Axe der Fernröhre derselben Ebene parallel stellen.

Ge-

Wenn der Gegenstand, den man zu dieser Berichtigung wählt, nicht nahe liegt, so kann man auch die Dioptern bey I und L Fig. 29 aufstellen. Vermittelst einer Probirfernröhre (§. 36.) ließe sich diese Berichtigung noch schärfer machen, es wird sich aber unten zeigen, daß eine kleine Neigung der Fernröhre gegen die Ebene des Instruments keinen merklichen Fehler verursacht, auch wird ebendaselbst noch eine Methode diesen Fehler zu entdeken vorkommen. Man sehe §. 85.

§. 68.

Den Fehler des Index zu bestimmen.

Wenn man das directe und reflectirte Bild eines entfernten Gegenstandes, z. B. eines Sterns zur Bedekung bringt, so muß der Anfangspunct oder Index des Vernier mit dem Nullpunct des Gradbogens zusammenfallen. Findet sich dieses nicht, so ist der Winkel, welchen die Alhidade angibt, der Fehler des Index. Weil dieser Fehler bald auf diese bald auf jene Seite des Nullpuncts fallen kann, so befinden sich auf dem Gradbogen noch einige Grade jenseits des Nullpuncts um ihn bestimmen zu können. Die Engländer nennen diesen Theil des Gradbogens *the excedent limb* oder *the arch of excess.* Dieselbige Berichtigung kann man vermittelst der Sonne machen, in welchem Fall man die gefärbten Gläser y und z Fig. 29 vorschiebt. Gibt die Alhidade den Fehler auf dem Gradbogen disseits des Nullpuncts, so muß er von allen beobachobachteten Winkeln abgezogen, wenn er aber auf die andere Seite des Nullpuncts fällt dazu addirt werden *).

Weil man die beyden Sonnenbilder viel schärfer zur Berührung als zur Bedekung bringen kann, so kann man auch den Fehler des Index schärfer auf folgende Art bestimmen. Man mißt den Durchmesser der Sonne auf beyden Seiten des Nullpuncts, indem man die beyden Sonnenbilder zur Berührung bringt, sie alsdann durch Bewegung der Alhidade vermittelst der Micrometerschraube KF Fig. 29 übereinander gehen macht und sie ferner auch auf der andern Seite zur Berührung bringt. Findet sich der Durchmesser der Sonne auf beyden Seiten gleich gros, so ist der Fehler des Index $= 0$; sind aber beyde Angaben von einander verschieden, so zieht man den kleinern Durchmesser von dem größern ab. Die Hälfte ist der gesuchte Fehler des Index, welcher additiv oder subtractiv ist, je nachdem man den Durchmesser der Sonne disseits des Nullpuncts kleiner oder größer findet als jenseits.

Beyspiel. d. 11. März 1794 fand ich den Durchmesser der Sonne vermittelst eines 10 zolligen Sextanten diesseits des Nullpuncts $= 22'$

*) An den meisten Sextanten findet sich eine Vorrichtung den kleinen Spiegel zu drehen, wodurch man den Collimationsfehler verbessern kann. Wenn man aber gleich eine solche Vorrichtung hat, so ist es doch nicht rathsam, diese Correctionsschrauben oft zu berühren, weil dadurch leicht das ganze Instrument wandelbar werden kann.

$= 22' 45''$
jenseits $= 41\ 45$
Unterschied $= 19\ 00$
Hälfte $= 9\ 30$

Folglich war der Fehler des Index $= 9' 30''$, und zwar additiv. Die halbe Summe von beyden $\frac{64' 30''}{2.} = 32' 15''$ ist der Durchmesser der Sonne.

§. 69.

Untersuchung der gefärbten Gläser.

Wenn die gefärbten Gläser etwas prismatisch sind, so werden die auf sie auffallende Lichtstrahlen mit den ausgehenden nicht mehr parallel. Hat man also den Collimationsfehler vermittelst der Sonne bestimmt, so wird dieser vermittelst des Monds oder eines andern sehr weit entfernten Gegenstandes, wo man die gefärbten Gläser zurüklegt, anders gefunden werden, als ihn die Beobachtungen an der Sonne angaben.

Am leichtesten und genauesten ließe sich dieser Fehler der gefärbten Gläser entdeken und bestimmen, wenn man die Gläser in ihren Fassungen um ihre Mittelpuncte drehen könnte. Denn wenn man den Fehler des Index bestimmt hat, und alsdann die Gläser um 180 Grade dreht. so wird der von den gefärbten Gläsern herrührende Fehler auf die andere Seite fallen, und der Fehler des Index um eben so viel größer oder kleiner herauskommen, als er Anfangs zu klein oder zu groß ge-

gefunden wurde. Man fände also den Fehler der gefärbten Gläser sogleich aus der halben Differenz beyder Angaben. In den meisten Fällen kann man aber diesem Fehler begegnen. Wenn man z. B. eine Sonnenhöhe messen will, so darf man nur vermittelst derselben gefärbten Gläser den Fehler des Index bestimmen, vermittelst welcher man die Sonnenhöhe mißt, so hat der Fehler der gefärbten Gläser keinen Einfluß auf die beobachtete Höhe, weil er einerley Gröſse so wohl bey der Bestimmung des Fehlers des Index als bey Messung der Höhe behält, indem diese Gläser gegen die durch sie gehende Strahlen ihre Lagen nicht ändern.

Man könnte statt dieser gefärbten Gläser nur eines vor dem Ocular der Fernröhre anbringen, wenn es nicht Fälle gäbe, wo Winkel zwischen der Sonne und einem andern Gegenstand, z. B. des Monds, eines Puncts auf der Erde, müssen gemessen werden. In diesem Fall darf man nur die von der Sonne herkommenden Strahlen durch die gefärbten Gläser gehen lassen, und muß daher die Gläser y oder z vorschieben, je nachdem man nach der Sonne geradezu siehet, oder ihr Bild durch gedoppelte Reflexion in das Sehefeld bringt. Und in eben diesen Fällen muß man sich auf den Parallelismus der beyden Flächen der gefärbten Gläser verlassen können.

§. 70.

Wenn man die Gläser in ihren Fassungen nicht umdrehen kann, so muß man ihre Fehler

ler auf folgende Art zu bestimmen suchen. Vermittelst des Monds suche man den Fehler des Index ohne alle gefärbte Gläser, alsdann suche man denselben, nachdem man das hellste grüne Glas bey y, und hernach bey z vorgeschoben hat, so bekommt man den Fehler der Gläser bey y und z. Ebenso verfahre man mit den andern beyden dunkelern grünen Gläsern. Wenn man nun den Fehler jedes einzelnen Glases auf diese Art gefunden hat; so suche man den Collimationsfehler, indem man die dunkelen braunen und die hellsten grünen Gläser gebraucht, vermittelst der Sonne. Dieser Fehler mit dem verglichen, den man ohne die gefärbten Gläser vermittelst des Monds gefunden hat, gibt den Fehler der beyden Gläser zusammen. Da man aber den Fehler für die grünen Gläser schon kennt, so kann man auch den Fehler der dunkeln Gläser bestimmen. Den beyden Bildern muſs man jedesmal durch Bewegung der Fernröhre vermittelst der Schraube S gleiche Helligkeit zu geben suchen. *Borda* hat an seinem Reflexionskreis die gefärbten Gläser so angebracht, daſs man sie umkehren und nach der im Anfang des 96. §. gezeigten Methode berichtigen kann *). Die Gläser werden vermittelst vierekigter Zapfen in Fassungen eingestekt, welche auf dem Körper des Instruments aufgeschraubt sind.

Be-

*) Description et usage du cercle de reflexion pag. 17 et 23.

Beschreibung des künstlichen Horizonts.

§. 71.

Wenn man mit dem Sextanten zu Land Höhen messen will, so mufs man dazu einen *künstlichen Horizont* haben, der die Stelle des natürlichen vertritt, welchen der Seefahrer in der weiten See findet. Die künstlichen Horizonte, welche man zu Beobachtungen auf dem festen Lande vorgeschlagen hat, beruhen auf folgendem. AB Fig. 38 Taf. IV seye die Ebene eines Planspiegels, der genau horizontal gelegt ist. Von der Sonne oder einem andern sehr entfernten Gegenstand falle ein Lichtstrahl SC auf den Spiegel. Dieser wird nach E so zurükgeworfen, dafs der Winkel SCA = ECB, folglich ist, weil ACs = ECB, der Winkel SCs welchen der einfallende Strahl mit der Verlängerung des zurükgeworfenen macht, so grofs, als die gedoppelte Höhe des Puncts S über dem Horizont. Zieht man von einem willkührlichen Punct E der Linie CE eine gerade Linie Eσ mit dem einfallenden Strahl CS parallel, so wird diese Linie, wenn die Entfernung des Gegenstands S von C sehr grofs ist in Vergleichung mit CE, ebenfalls den Gegenstand S treffen. Dieses ist wirklich bey der Sonne der Fall, und man darf nur mit dem Sextanten den Winkel messen, welchen der geradezu von der Sonne kommende Lichtstrahl σE mit dem von dem Spiegel AB zurükgeworfenen macht, so hat man σEs = SCs = der gedoppelten Höhe.

§. 72.

Es kommt also nur darauf an, eine ebene und genau horizontale Spiegelfläche zu erhalten. Was sich zu dieser Absicht zuerst darbietet ist die Oberfläche eines flüssigen Körpers. Wird ein flüssiger Körper in ein Gefäſs gegossen, und gegen den Wind oder andere Erschütterungen gesichert, so nimmt seine Oberfläche von selbst eine horizontale Lage an, und gibt zugleich wie bekannt ist einen Spiegel. Der flüssige Körper, welcher gewöhnlich zu den künstlichen Horizonten gebraucht wird, ist Wasser oder Queksilber. Lezteres ist dem Wasser vorzuziehen, weil es einen bessern Spiegel macht, und seine wellenförmigen Bewegungen früher aufhören, wenn es ist erschüttert worden, als bey dem Wasser.

Zu dem hier beschriebenen Sextanten gehört folgender Apparat für einen Queksilberhorizont. Erstlich ein aus Mahoganyholz verfertigtes Gefäſs in der Gestalt eines Parallelepipedums 4 Zolle lang, 3 Zolle breit und $4\frac{1}{2}$ Lin. tief. In dieses wird das Queksilber durch einen papiernen Trichter gegossen. Zweytens ein Dach mit Plangläsern, welches über das mit Queksilber gefüllte Gefäſs gestellt wird, um es gegen den Wind zu beschüzen. Dieses Dach ist ein dreyseitiges Prisma, dessen Grundflächen rechtwinklichte und gleichschenklichte Dreyeke sind. Die Länge der Hypotenuse dieser Dreyeke ist 6 Z. 10 Lin., die Länge eines jeden Cathetus

4 Z. 11 Lin. Höhe der Prisma 4 Z. 4 Lin. Dieses sind die Abmessungen für die äufseren Seiten. Für die innere Höhlung sind die Abmessungen der genannten drey Dinge: 5 Z. 11 Lin.; 4 Z. 2 Lin.; 3 Z. 11 Lin. Die beyden einander rechtwinklicht schneidenden kleineren Seitenflächen haben Oefnungen von 3 Z. 5 Lin. Länge und 2 Z. 10 Lin. Breite, welche durch Plangläser verschlossen sind, die dritte Seitenfläche ist ganz offen. Dieses Dach wird über das Gefäfs mit Queksilber, dessen längere Seite man nach dem Augenmaas in die Verticalebene gebracht hat, in welcher man einen Winkel messen will, welches bey der Sonne durch den Schatten des Gefäfses geschehen kann, so gestellt, dafs der rechte Winkel gegen den Scheitelpunct gekehrt ist, die beyden Grundflächen aber mit der Verticalebene parallel sind, in welcher ein Winkel solle gemessen werden, wie man Fig. 38 Taf. IV siehet, wo die Linien ac, cb die beyden mit Plangläsern versehene Seitenflächen vorstellen.

§. 73.

Man sieht leicht, dafs die beyden Flächen der Gläser sehr genau eben und einander parallel seyn müssen, wenn die auffallenden Strahlen mit den ausgehenden parallel werden sollen, welches bey diesem künstlichen Horizont erfordert wird. Diese Gläser kann man leicht prüfen, wenn man eine Fernröhre mit einem Fadenkreuz nach einem deutlichen Gegenstand richtet, das Fadenkreuz genau auf einen gewissen Punct bringt, und nachsieht, ob das Fadenkreuz noch auf diesen Punct trift, wenn man das Planglas vor das Objectiv hält. Dieses kann leicht geschehen, weil das Dach so eingerichtet ist, daſs man es auseinander legen kann. Es sind nehmlich die beyden einander rechtwinklicht durchschneidenden Seitenflächen an ihrer gemeinschaftlichen Durchschnittslinie durch Leder mit einander verbunden; ebenso hängt jedes der beyden Dreyeke mit einer jener Seitenflächen durch einen Streifen Leder zusammen. Daher kann man auch das ganze Dach so zusammenlegen, daſs es sammt dem Gefäſs für das Queksilber in ein Kistchen von 5 Z. 4 Lin. Länge 5 Z. Breite und 2 Z. Höhe geht. Wenn man das Dach so einrichtete, daſs man die Gläser umkehren könnte, so fielen nach dem Umkehren die Fehler auf die entgegengesezte Seite. Wird also eine Höhe in beyden Lagen der Gläser gemessen, so ist das arithmetische Mittel oder die halbe Summe beyder Angaben die *verbesserte* Höhe, der halbe Unterschied aber der Fehler der Gläser.

§. 74.

Mit dem bisher beschriebenen künstlichen Horizont kann man nur bey Windstillen oder schwachem Wind beobachten, und manche Beobachtung wird durch das Vorbeygehen eines Menschen, wenn dieses auch in einer Entfernung von 30 Schritten geschiehet, verdorben, weil die dadurch hervorgebrachte Erschütterung das Queksilber in Bewegung sezt. Daſs die durch einen vorüberfahrenden Wagen her-

hervorgebrachte Erschütterung der Erde noch auf eine weit gröſsere Entfernung in dem Queksilber des künstlichen Horizonts eine wellenförmige Bewegung, und daher ein verzerrtes Bild machen müſse, wird man aus dem vorhergehenden leicht abnehmen können. Diesem Fehler kann man einigermaſsen dadurch abhelfen, daſs man ein Planglas, dessen beyde Seitenflächen einander genau parallel seyn müſsen, so auf das Queksilber auflegt und darauf schwimmen läſst, daſs zwischen dem Glas und dem Queksilber keine Luftblase bleibt. Das Auflegen des Glases muſs mit vieler Sorgſalt und auf folgende Art geschehen. Nachdem man reines Queksilber durch einen papiernen Trichter in das Gefäſs gegossen hat, legt man darauf ein Stük sehr feines Papier und auf dieses das vorher rein abgewischte Glas. Nun drükt man mit der linken Hand das Glas ganz gelinde auf das Queksilber an, und zieht mit der rechten Hand das Papier darunter hinweg, so erhält man einen schönen schwimmenden gläsernen Spiegel. Herr *von Zach* hat mit H. Inspector *Köhler* in Dresden Untersuchungen über diese auf Queksilber schwimmende Spiegel angestellt, und gefunden, daſs sie mancherley Veränderungen unterworfen sind. Es wurde das Fadenkreuz in der Fernröhre eines beweglichen Quadranten nach dem in dem Spiegel gesehenen Bild eines deutlichen Objects gerichtet, hierauf das Glas weggenommen, und von neuem aufgelegt. Das Fadenkreuz sollte nun, da indessen die Fernröhre unverrükt geblieben war, wieder auf den vorigen Punct treffen; allein es fanden sich sehr merkliche Unterschiede. Wenn die beyden Flächen des Glases einander nicht genau parallel sind, so werden nicht allein die Strahlen gebrochen, sondern es senkt sich das Glas auch nicht überall gleich tief ein. Allein bey einem vollkommenen Parallelismus der beyden Flächen können doch noch sehr merkliche Fehler von der ungleichen Dichtigkeit des Glases und von kleinen Luftblasen herkommen, welche aller Sorgfallt ungeachtet noch öfters zwischen dem Glas und dem Queksilber übrig bleiben, und lezteres auf der Seite, auf welcher die Luftblase liegt, erheben. Ich habe gefunden, daſs diese Luftblasen fest an dem Glas hängen bleiben, wenn man es gleich auf dem Queksilber bewegt. Man kann daher vermittelst eines solchen künstlichen Horizonts die wahren Höhen finden, wenn man zwey Beobachtungen macht, indem man das Glas um 180° dreht und das Mittel aus beyden nimmt, weil sich in diesem Fall die Fehler gegeneinander aufheben. Wenn man auf diese Art die Mittagshöhe der Sonne miſst, so muſs man der in der Zwischenzeit der Beobachtungen geschehenen Veränderung der Höhe der Sonne Rechnung tragen, wie im folgenden wird gezeigt werden.

§. 75.

Wenn man einen Planspiegel vermittelst einer Libelle genau horizontal stellte, so hätte man ebenfalls einen künstlichen Horizont, den

den man noch überdies so unterstützen könnte, daſs er durch die Bewegung der Luft nicht leicht aus seiner Lage gebracht würde. Hierauf gründet sich der vom Herrn Grafen v. *Brühl* und Herrn v. *Zach* ausgedachte künstliche Horizont, wovon man die erste Nachricht in Herrn Bode's atsronomischem Jahrbuch für 1788 S. 147. und eine vom Herrn von Zach gegebene ausführlichere Beschreibung in der Canzler- und Meisnerischen Quartalschrift für ältere Literatur und neuere Lectüre findet. Die Stelle des Spiegels vertritt eine auf der einen Seite matt geschliffene runde Platte von dunkelrothem oder blauem Glas. Diese liegt in der hölzernen Faſsung Fig. 39 Taf. IV in einer eingedrehten Vertieſung auf 3 halbkugelförmigen eine Linie hohen Unterlagen cd so, daſs ihre Oberfläche noch etwas über den Rand der Fassung hervorragt. Durch den vorstehenden Rand AB gehen drey hölzerne Schrauben, von denen man zwey bey a und b siehet. Zu diesem Horizont gehört eine genaue Libelle Fig. 40 mit drey Spizen deren eine zur Berichtigung der Libelle dient. Leztere siehet man in der Figur bey g, die beyden anderen sind bey h und i. An der prismatischen dreyseitigen Stange ef lassen sich zwey Zeiger cd hin und herschieben, um die Stelle der Luftblase ab zu bezeichnen. Will man nun den Horizont berichtigen, so sezt man die Libelle mit ihren drey Spizen auf die Glasplatte nach der Richtung zweyer Schrauben ab Fig. 39., bringt vermittelst jener Schrauben die Luftblase in die Mitte der Glas-

 röhre,

röhre, und bezeichnet genau ihre Stelle mit den Zeigern c d Fig. 40. Hierauf wendet man die Libelle um; kommt die Luftblase wieder genau zwischen beyde Zeiger, so ist die Libelle berichtigt, und zugleich der Halbmesser der Glasplatte, über welchem die Libelle steht, horizontal, wo nicht, so verbessert man die eine Hälfte des Fehlers vermittelst der Schrauben a b Fig. 39, die andere Hälfte vermittelst der Schraube g Fig. 40. Bey dem Umwenden der Libelle muſs die Luftblase wieder zwischen ihre Zeichen kommen, und im entgegengesezten Fall die Operation wiederholt werden. Nun bringt man auch den Halbmesser, welcher auf ersterem senkrecht ist, in eine horizontale Lage, so ist die ganze Glasplatte horizontal.

§. 76.

Statt des hölzernen Tellers, auf welchen die Glasplatte gelegt wird, bedient sich jezo Herr von Zach eines von cararischem Marmor oder von Porcellainerde (sogenanntem Biscuit); leztere sind wohlfeiler und leichter. Die Libellen sind sehr empfindlich und geben bey $\frac{1}{2}$ Minute Erhöhung einen Ausschlag von einer Linie *). Es gibt welche, die gar keine Fassung haben und blos aus der mit Weingeist gefüllten an beyden Enden zugeschmolzenen Röhre bestehen. Diese ist ihrer Länge nach 3 Linien breit matt abgeschliffen; mit dieser schmalen mattgeschliffenen Fläche wird das Niveau oder die Libelle unmittelbar auf das Planglas gelegt, und auf diese Art der künst-

*) Was die Verfertigung einer guten Libelle betrift, sehe man H. Hofr. Mayers pract. Geometrie II. Th. §. 153

künstliche Horizont vermittelst der Stellschrauben des Tellers nivellirt. Ein solches Niveau muſs beym Mattschleifen schon adjustirt werden. Die Stelle der Luftblase wird durch Eintheilungen, die mit Fluſsspatsäure auf die obere convexe Fläche der Röhre eingeäzt sind, bezeichnet. Diese Abtheilungen sind deswegen nothwendig, weil die Länge der Luftblase sich nach der verschiedenen Temperatur ändert. Ich sahe bey Herrn von Zach eine solche Libelle; sie hat vor der erstern den Vorzug, daſs sie keiner Berichtigung vor jeder Beobachtung bedarf: Allein die untere mattgeschliffene Seite der Glasröhre so wie die Glasplatte des künstlichen Horizonts müssen auf das sorgfältigste gereinigt werden, weil das geringste Stäubchen merkliche Fehler bey Nivellirung des künstlichen Horizonts hervorbringen kann. Aus diesem Grunde hält Herr von Zach die oben beschriebene Libelle für sicherer. Bey dem Gebrauch der Libellen hat man sehr darauf zu sehen, daſs nicht ein Theil der Glasröhre in dem Schatten bleibt, während der andere den Sonnenstrahlen ausgesezt ist. Es entsteht in diesem Fall eine ungleiche Ausdehnung der Röhre, welche immer wieder neue Berichtigungen derselben nothwendig macht. Ich habe gefunden, daſs, wenn man die Hand sehr nahe an die Glasröhre bringt, doch ohne sie zu berühren, die Luftblase sich nach der Seite hin bewegt, auf welcher die Röhre durch die Hand erwärmt, folglich erweitert wird. Hält man über eine den Sonnenstralen ausgesezte

Libelle einen Körper, wodurch die Hälfte der Glasröhre beschattet wird, so bewegt sich die Luftblase augenbliklich gegen den von der Sonne beschienenen Theil hin. Hieraus lassen sich die Veränderungen erklären, die man an Libellen, welche an Quadranten angebracht waren, bemerkt hat *).

§. 77.

Es gibt noch eine andere Art von künstlichem Horizont, welcher eigentlich das gewöhnliche cirkelrunde Niveau ist. Es bestehet aus einem cylindrischen messingenen Gefäſs von ungefähr 3 Zollen im Durchmesser und $1\frac{1}{2}$ Z. Höhe. An dem Boden dieses Gefässes befinden sich drey messingene Stellschrauben. Dieses Gefäſs wird mit Weingeist angefüllt und mit einem gläsernen Dekel verschlossen. Durch eine in dem Boden des Gefässes angebrachte Öfnung kann man ein Paar Tropfen Weingeist herauslassen, da alsdann an dem Glasdekel eine kleine Luftblase entsteht, worauf die Öfnung des Bodens verschlossen wird. Bey dem Gebrauch wird das Gefäſs so gestellt, daſs die Luftblase in der Mitte des Dekels steht, wo sich ein Zeichen befindet. Die Oberfläche des Glases stellt alsdann den horizontalen Spiegel vor. Ich habe noch keine Versuche mit dieser Art künstlicher Horizonte gemacht. Herr von Zach sezt an ihnen aus, daſs sie sehr schwehr in eine horizontale Lage zu bringen seyen und dieselbige alle Augenblike ändern, so wie die mes-

*) la Lande Astronomie 2399. troisieme édition.

messingene Schrauben und die übrigen metallenen Theile des Werkzeugs durch die Sonne erhizt werden. Aus diesem Grunde hat auch Herr von Zach bey seinem künstlichen Horizont den Gebrauch der Metalle ganz vermieden.

Höhenmessung vermittelst des Spiegelsextanten.

§. 78.

Man hält den Sextanten an seiner Handhabe P Fig. 29. mit der rechten Hand, die linke Hand bringt man an den Alhidadenhalter VW, um die Alhidade bewegen und zugleich den Sextanten unterstüzen zu können, und richtet die Fernröhre nach dem Bild des Gegenstands, dessen Höhe man messen will, welches man in dem künstlichen Horizont siehet. Man bewegt nun den Sextanten um die Axe der Fernröhre, bis er ungefähr in eine Verticalebene kommt, macht den Alhidadenhalter los und bewegt die Alhidade bis man auch das Bild in dem Sehefeld hat welches durch die geradezu von dem Gegenstand auf den grofsen Spiegel fallende Stralen gemacht wird. Nun stellt man die Alhidade fest, und bringt die beyden Bilder vermittelst der Micrometerschraube zur Bedekung und zwar in der Mitte des Sehefeldes oder zwischen den beyden Fäden, welche der Ebene des Sextanten parallel sind, so gibt die Alhidade die gedoppelte Höhe des Gegenstands, nachdem man

man zuvor den Fehler des Index in Rechnung gebracht hat.

Wenn man eine Sonnenhöhe messen will, so muſs man vorher die gefärbten Gläser vorschieben; zwey auf jeder Seite blenden die Sonne schon genug. Ich lasse gewöhnlich die mitlern weg. Hier ist es ebenfalls sehr vortheilhaft, die beyden Sonnenbilder nicht zur Bedekkung sondern zur Berührung zu bringen. Man bekommt alsdann die Höhe des obern oder des untern Sonnenrandes je nachdem das Bild, welches von den auf den groſsen Spiegel auffallenden Strahlen gemacht wird, über oder unter demjenigen sich befindet, das man in dem künstlichen Horizont geradezu durch die Fernröhre betrachtet, welches man leicht findet, wenn man sich hiezu eine Figur zeichnet und sich erinnert, daſs die Fernröhre des Sextanten astronomisch ist *).

§. 79.

Aus der Theorie des Sextanten erhellet, daſs, wenn man die Bilder einmal zur Berührung gebracht hat, sie sich auch noch berühren, wenn man den Sextanten so bewegt, daſs seine Ebene immer in der Ebene der beyden Gegenstände, zwischen welchen man Winkel miſst, und des Auges, also hier in einer

*) Wenn man beyde Bilder durch einerley Gläser blendet, so lassen sie sich nicht leicht von einander unterscheiden. Man darf aber nur die Hand vor den groſsen Spiegel halten, so wird das davon herkomkommende Bild verschwinden.

einer Verticalebene bleibt *). Bewegt man hingegen den Sextanten um die Axe der Fernröhre, so beschreibt das reflectirte Bild (welches die auf den grofsen Spiegel auffallende Strahlen machen) einen Kreisbogen, und ein auf den grofsen Spiegel auffallender Lichtstral einen Kegel, dessen Spize an dem Mittelpunct des grofsen Spiegels ligt. Die Sonnenbilder also, welche einander bey einer verticalen Lage der Ebene des Sextanten berührten, werden bey dieser Bewegung auseinander gehen. Bey Höhenmessungen ist es daher am sichersten, dem Sextanten, indem man die Bilder zur Berührung bringen will, eine solche kleine Bewegung um seine Axe zu geben, man kann alsdann sehr leicht sehen, ob die beyden Bilder einander berühren, übereinander gehen oder gar nicht zur Berührung kommen. Wenn man auch die Axe der Fernröhre aus der Verticalebene der Sonne bringt, so erscheint das durch die von dem Horizont herkommende Stralen gemachte Bild gegen dem Rande des Sehefelds hin, und der gemessene Winkel wird etwas fehlerhaft, wie in der Folge wird gezeigt werden.

Wer in der Behandlung solcher Instrumente noch nicht geübt ist, wird die beyden Bilder nicht leicht in das Sehefeld bringen, zumal wenn man sich der stärkern Vergrösserung bedient. Wenn man seine Polhöhe nur

*) Für sehr nahe Gegenstände ist dieses nur alsdann wahr, wenn die Bewegung um die gemeinschaftliche Durchschnitts-Linie der beyden Spiegelebenen als um eine Axe geschieht.

nur bis auf funfzehen Minuten kennt, so kann man die Mittagshöhe der Sonne mit Zuziehung ihrer Abweichung bis auf so viel Minuten berechnen. Man stellt alsdann die Alhidade auf das gedoppelte dieser Höhe, so wird man, nachdem man die Fernröhre nach dem Sonnenbild in dem künstlichen Horizont gerichtet hat, durch Bewegung des ganzen Sextanten um die Axe der Fernröhre das andere Bild leicht in das Sehefeld bekommen. Zur ersten Übung könnte man sich der blosen Röhre (am Ende §. 64.) bedienen, wo die Bilder noch leichter können gefunden werden.

§. 80.

Zu mehrerer Bequemlichkeit könnte man sich ein kleines Stativ für den Sextanten machen lassen. Ludlam gibt Beschreibungen und Abbildungen von solchen Stativen in seinen Directions for the use of Hadley's Quadrant und in seinen astronomical observations pag. 62. Auf die Rükseite des Sextanten wird eine Axe parallel mit der Axe der Fernröhre angeschraubt. An einer verticalstehenden Axe läſst sich ein anderes Stük um eine horizontale Axe drehen, an welchem die Zapfenlager für die erste am Sextanten befestigte Axe angebracht sind. Durch diese Vorrichtung kann man also den Sextanten in die erforderliche Lage bringen; zu seiner Befestigung in dieser Lage sind Schrauben angebracht. Bey dem Gebrauch der grösern Sextanten möchte ein solches Stativ bequem seyn, weil das Halten des Instruments mit

freyen

freyer Hand etwas ermüdend ist. Ich habe bey einem kleinen vierzolligen Sextanten ein Stativ gebrauchen wollen, aber das Halten in freyer Hand bequemer gefunden. Über dem Aufstellen des Sextanten geht viele Zeit verlohren, ein in der freyen Behandlung des Sextanten etwas geübter Beobachter kann indessen schon mehrere Höhen genommen haben.

Verbesserung der Höhen wegen der Stralenbrechung und Parallaxe.

§. 81.

Es ist bekannt, daſs die Lichtstralen eine Brechung leiden, wenn sie aus einem dünneren Mittel schief in ein dichteres übergehen, und daſs aus diesem Grunde ein von einem Himmelskörper durch die gegen die Erde hin immer dichter werdende Atmosphäre zu dem Auge des Beobachters kommender Lichtstrahl immer mehr von seiner ersten Richtung abgelenkt wird, so daſs er eine gegen den Mittelpunct der Erde hole krumme Linie beschreibt, die in der Ebene eines Verticalkreises ligt. Die Richtung, nach welcher der Beobachter den Stern sieht, ist also die Richtung der Tangente der krummen Linie an der Stelle, wo sich das Auge des Beobachters befindet. Eine gerade von dem Auge des Beobachters an den Stern gezogene Linie wird die Sehne jenes Bogens der krummen Linie seyn, und der Stern wird also dem Beobachter höher erscheinen, als er wirklich ist. Der Winkel zwischen jener Tangente der krummen Linie

und

und ihrer Sehne heiſst die *astronomische Stralenbrechung*, welche nicht nur von der Gröse des Winkels, unter welchem der Lichtstrahl auf die Atmosphäre auffält, sondern auch von dem verschiedenen Zustand der Atmosphäre abhängt. Die für einen gewissen Stand des *Barometers* und *Thermometers* berechnete Stralenbrechung heiſst die *mitlere*, welche nach der von den meisten Astronomen angenommenen *Bradleyschen* *) Regel für die Barometerhöhe von 29,6 engl. oder 27,775 par. Zollen, und für 50° des *Fahrenheitischen* oder 8° des 80 theiligen Queksilberthermometers so gefunden wird: Es seye der scheinbare Abstand des Sterns vom Scheitel $= z$, die Stralenbrechung $= \varrho$, so ist

$$\sin(z - 5{,}9807\,\varrho) = 0{,}9983487 \sin z \text{ **)}$$

Nach dieser Formel ist die dritte Tafel berechnet, vermittelst welcher die mitlere Stralenbrechung für alle Höhen kann gefunden werden.

Um aus der mittlern Stralenbrechung die *wahre* zu finden, gab T. *Mayer* im Jahr 1753 folgende mit allgemeinem Beyfall aufgenommene Regel an: *Die mittlere Stralenbrechung für*

*) Diese gründet sich auf das von *Simpson* (Mathematical Diſſert.) entdekte Gesez der krummlinigten Bahn des Lichts, daſs sich die Stralenbrechungen in verschiedenen Höhen wie die Tangenten der um $\frac{11}{4}$ der Brechungen verminderten Zenithdistanzen verhalten. Statt $\frac{11}{4}$ nahm *Bradley* 1760 seinen Beobachtungen gemäſs 3, und die mittlere Stralenbrechung für 45° scheinb. Höhe $= 57''$ an.

**) De Zach tabulae motunm Solis. pag. 104.

für 28 Zoll Barometerhöhe und 10 Grad Wärme verändert sich bey 15 Lin. Veränderung des Barometers und bey 10 Grad Veränderung des reaumurschen Thermometers um den 22sten Theil ihrer Grösse. Borda *) nahm ebenfalls diese Regel an, sezte aber den zu der Bradleyschen mitlern Stralenbrechung gehörigen Stand des Barometers = 28 paris. Z. 3 Lin. und den Stand des 80 theiligen Queksilberthermometers = + 12° Hienach berechnete er eine Tafel **), welche Hr. *von Zach* genauer von neuem berechnet hat ***), und hier die IVte Tafel ist.

Tob. *Mayer* gab zu der Berechnung der wahren Stralenbrechung folgende Formel an ****), in welcher δ = dem scheinbaren Abstand vom Zenith, b = der Barometerhöhe in pariser Zollen ausgedrükt, t = der Anzahl Grade des Reaumurschen Thermometers über dem Gefrierpunct (die unter dem Gefrierpunct negativ):

$$\text{Refract.} = \frac{70,''71.\ b \sin\delta}{\sqrt{(1 + 0,0046.\ t)^3}} \times$$

$$\left[\sqrt{\left(1 + \frac{(16,5 \cos\delta)^2}{1 + 0,0046.\ t}\right)} - \frac{16,5 \cos\delta}{(1 + 0,0046.\ t)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

oder, wenn $\text{Tang}\ \omega = \frac{(1 + 0,0046.\ t)^{\frac{1}{2}}}{16,5 \cos\delta}$

Refr.

*) Description et usage du cercle de Reflexion pag. 81.
**) p. 2. Tab. II.
***) Tabulae motuum Solis p. 111.
****) Tab. mot. Solis et Lunae. Londini MDCCLXX pag. 64.

$$\text{Refr.} = \frac{70,''71 \text{ b. sin } \delta \text{ Tang } \frac{1}{2} \omega}{(1 + 0,0046.\ t)^{\frac{3}{2}}}$$

Hiebey ist noch zu bemerken, daſs Mayer an seinem Queksilberthermometer den Raum zwischen dem Siedpunct und Gefrierpunct nicht in 80 sondern in $82\frac{1}{2}$ gleiche Theile theilte, wie man an dem auf der Göttingischen Sternwarte befindlichen von Mayer 1755 verfertigten Thermometer siehet. Daſs Mayer diese Thermometerscale in seiner Formel vorausseze, scheint mir aus folgender Ursache nicht unwahrscheinlich zu seyn. Der Coefficient $\frac{1}{1 + 0,0046.\ t}$ drükt wie Mayer selbst (Tab. mot. ☉ et ☽ pag. 65. Schol. II.) bemerkt, die Dichtigkeit der Luft aus. Sezt man $t = 82,5$, so wird die Dichtigkeit der Luft $= \frac{1}{1,3795} = \frac{1000}{1379\frac{1}{2}}$, die für den Gefrierpunct $= 1$ gesezt. Nach der auf den Mayerschen Thermometer befindlichen *Scala expansionum aeris* verhalten sich die Räume, welche ein gewisses Volumen von Luft bey dem *Gefrierpunct* und *Siedpunct* (212 Fahrenheit, $82\frac{1}{2}$ nach Mayer) einnimmt wie 1000 : 1380, folglich ist die Dichtigkeit der Luft für 212° Fahrenh. ($82^{\circ}\frac{1}{2}$ nach Mayer, 80° nach dem 80theiligen Queksilberthermometer) $= \frac{1000}{1380}$, welches sehr nahe mit der aus der Mayerschen Formel hergeleiteten Dichtigkeit der Luft zutrift. Für die gewöhnlichen Grade des 80 theiligen Queksilberthermomemometers wäre der Coefficient von t $= 0{,}00475$, wenn die Dichtigkeit der Luft nach Mayer für den Gefrierpunct $= 1$, und für den Siedpunct $= \frac{1}{1{,}380}$ gesezt wird.

Je kleiner die Höhen sind, desto grösser wird die Stralenbrechung, und zu gleicher Zeit auch der Einfluſs der verschiedenen Modificationen der Atmosphäre auf dieselbige, weswegen auch die Gröse der Stralenbrechung selbst für kleine Höhen nicht mehr mit der gehörigen Genauigkeit bestimmt werden kann, und kleine Höhen bey astronomischen Beobachtungen so viel als möglich ist vermieden werden. Weil für kleine Höhen die Stralenbrechungen gros und ihre Unterschiede ungleich sind, so räth Mayer die Stralenbrechung unmittelbar nach obiger Formel zu berechnen, anstatt sie durch Interpolation aus den Tafeln zu nehmen.

Wird die Stralenbrechung von der beobachteten Höhe abgezogen oder zu der beobachteten Zenithdistanz addirt, so erhält man die wahre Höhe, wenn das Gestirn, dessen Höhe man genommen hat, so weit entfernt ist, daſs man Linien nach demselben aus dem Mittelpunct der Erde und dem Punct ihrer Oberfläche, wo sich der Beobachter befindet, gezogen als *parallel* ansehen kann. Ist dieses nicht verstattet, so muſs noch folgende Reduction der beobachteten Höhe vorgenommen werden.

§. 82.

Es seye C. Fig. 52. Taf. VI. der Mittelpunct der Erde, O ein Punct auf ihrer Oberfläche, so trift der verlängerte Halbmesser der Erde an den Punct O das Zenith Z, und ein durch das Zenith und den Mittelpunct der Erde C gelegter Kreis Hhsz ist ein Verticalkreis. In demselben befinde sich ein Himmelskörper S, so ist die Höhe dieses Puncts über dem Horizont Oh des Orts O = hOS, seine Höhe aus dem Mittelpunct der Erde betrachtet = HCS > hOS, und beyder Unterschied = OSC = der *Parallaxe der Höhe*, welche eine der Stralenbrechung entgegengesezte Wirkung hervorbringt, ihn aber ebenfalls nicht aus dem Verticalkreis rükt. Nun verhält sich in dem geradlinigten Dreyek OCS,

$$CS : CO = \sin COS : \sin OSC$$
$$= \sin ZOS : \sin OSC$$

in dem bey O rechtwinklichten Dreyek COh verhält sich

$$\left.\begin{array}{l} Ch : CO \\ CS : CO \end{array}\right\} = \sin.\,tot. : \sin ChO$$

folglich $\sin.\,tot. : \sin ChO = \sin ZOS : \sin OSC$

Der Winkel ChO heiſst die *Horizontalparallaxe* (π), ZOS ist der scheinbare Abstand vom Scheitel oder das Complement der scheinbaren Höhe h, folglich ist, wenn die Höhenparallaxe = q gesezt wird

$$\sin q = \sin \pi \cos h'$$

oder, wenn der Winkel π klein ist

$$q = \pi \cos h'$$

Diese

Diese Formel sezt die scheinbare Höhe schon als bekannt voraus; ist aber der Winkel π sehr klein, wie dieses bey der Sonne der Fall ist, so kann man statt der scheinbaren Höhe die wahre h sezen. Bey dem Mond geht diese Näherung nicht mehr an, man muſs daher den zuerst gefundenen Werth von q von der wahren Höhe h abziehen, um vermittelst dieser beynahe gefundenen scheinbaren Höhe die Parallaxe genauer zu bestimmen. Geradezu kann die Höhenparallaxe so gefunden werden; Es ist $h' = h - q$, also

$$\sin q = \sin\pi \cos(h - q)$$
$$= \sin\pi (\cos h \cos q + \sin h \sin q)$$

daher $\tan q = \sin\pi \cos h + \sin\pi \sin h \tan q$

folglich $\tan q = \dfrac{\sin\pi \cos h}{1 - \sin\pi \sin h}$

Die V^{te} Tafel gibt für verschiedene Höhen und für jeden Monat die Höhenparallaxe der Sonne an, wenn die mittlere Horizontalparalaxe $= 8'',5$ gesezt wird. Für die in der Tafel nicht befindlichen Höhen findet man die Höhenparallaxe leicht durch Interpolation, welche zu der schon wegen der Stralenbrechung verbesserten Höhe addirt, oder von der Zenithdistanz abgezogen die wahre Höhe oder Zenithdistanz gibt.

Untersuchungen über die Fehler eines Spiegelsextanten.

§. 83.

Um von der Genauigkeit, mit welcher man vermittelst eines Spiegelsextanten Winkel

kel messen kann, urtheilen zu können, muſs man untersuchen, welchen Einfluſs gewisse Fehler, die zum Theil in dem Bau des Sextanten liegen, zum Theil bey den Berichtigungen desselben begangen werden können, auf die Beobachtungen haben. Diese Untersuchungen werden zugleich dazu dienen, noch einige andere als die bisher gezeigten Prüfungen des Sextanten anzustellen. Zuerst will ich *den Fehler untersuchen, welcher daher entsteht, wenn die Axe der Fernröhre gegen die Ebene des Sextanten geneigt ist.* Um diese Untersuchung einfacher zu machen, schike ich folgenden Lehnsaz voraus. Wenn auf einen Punct k Fig. 41 der Spiegelebene HI zween Lichtstrahlen Gk, gk auffallen, durch diese Strahlen eine Ebene AC, und durch ihre Durchschnittslinie AB mit der Ebene des Spiegels HI auf der andern Seite des Einfallsloths Ek eine zweyte Ebene AD so gelegt wird, daſs diese Ebenen AD und AC auf beyden Seiten gleiche Winkel mit dem Einfallsloth machen, so liegen beyde zurükgeworfene Strahlen in der Ebene AD, und ihre Winkel Gkg und Fkf, welche sie in beyden Ebenen mit einander machen, sind einander gleich.

Beweis. Es seye der Lichtstrahl Gk auf der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie AB der drey Ebenen HI, AC, AD senkrecht, so ist auch der zurükgeworfene Fk auf AB senkrecht, weil beyde in einer Verticalebene auf die Spiegelebene liegen. Man mache kF = kG und ziehe durch F und G die Linien DFf, CgG mit AB parallel, so liegen die Puncte Ff, Gg

in

in einer der Ebene des Spiegels parallelen Ebene. Da FkG eine Verticalebene auf die Ebene des Spiegels und ikF=ikG ist, so wird die durch F und G gezogene Linie durch das Perpendikel in zween gleiche Theile Fi und iG getheilt. Man ziehe gi und verlängere diese Linie in f, wo sie die Linie DFf schneiden wird. Da die Ebene durch jene Linie und durch k ebenfalls auf der Ebene des Spiegels senkrecht ist, so wird der zurükgeworfene Strahl von kg in dieser Ebene liegen. Nun ist der Winkel Fif=Gig, der Winkel fFi =iGg weil Df und CG parallel sind, ferner Fi=iG, folglich fG=Gg, fi=gi. Aber fik =gik weil beide rechte Winkel sind, und ki beyden Dreyeken ikg, ikf gemeinschaftlich, folglich der Winkel ikf= dem Winkel ikg; also ist fk der zurükgeworfene Strahl von g. Es ist aber auch fk=gk, Fk=Gk und Ff =gG, folglich Fkf=Gkg. Auf ähnliche Art kann dieses von jedem andern in der Ebene AC liegenden auf K fallenden Lichtstrahl gezeigt werden; folglich liegen alle in der Ebene AC auf dem Punct k fallende Lichtstrahlen nach der Zurükwerfung in der Ebene AD und machen in beyden Ebenen mit Gk und fk, also auch die zusammengehörige unter sich gleiche Winkel.

§. 84.

AB und CD Fig. 42 seyen die Spiegel des Sextanten, beyde auf seiner Ebene senkrecht, in welcher die Linien HG, GF, FE so gezogen sind, daſs DFE=dFG; FGB=bGH, wenn bB und dD die Durchschnittslinien der Ebene des Sextanten sind. Ist also HG ein Lichtstrahl, so wird dieser nach einer gedoppelten Reflexion in die Lage FE kommen. Durch die Linien HG, GF und FE lege man die Ebenen hHGI, fFGi, FfE senkrecht auf die Ebene des Sextanten, erstere schneiden die Spiegel in den Linien Gi und Ff, welche ebenfalls auf des Sextanten Ebene senkrecht seyn werden. Die Linie FE ist diejenige, mit welcher die Axe der Fernröhre parallel seyn muſs. Nun seye aber die Axe der Fernröhre die Linie fE welche mit des Sextanten Ebene den Winkel fEF macht. Zieht man durch den Punct f, wo die verlängerte Axe der Fernröhre den kleinen Spiegel CD trift, die Linie fg mit FG parallel, und macht in der Ebene fgGF den Winkel gfi = dem Winkel FEf, so wird nach dem 83. §. ein Lichtstrahl if durch Zurükwerfung von dem Spiegel CD in die Lage fE gebracht. Zieht man ferner hi mit HG parallel, und macht in der Ebene HGih den Winkel hik = dem ifg = FEf, so wird ein Lichtstrahl ki nach if, und von da aus nach fE zurükgeworfen. Folglich wird man durch die Fernröhre zugleich zween Gegenstände sehen, welche nicht in der Ebene des Sextanten liegen, wenn man beyde in der Axe der Fernröhre zur Berührung bringt, und der Winkel, welchen man miſst, ist der Winkel, welche die um *gleiche* Winkel FEf und hik gegen die Ebene des Sextanten geneigte Linien ki und fE mit einander machen, Die Alhidade gibt aber den Winkel der Linien

nien HG und FE an, welcher dem gedoppelten Neigungswinkel heyder Spiegel gleich ist, Der Winkel kih bleibt derselbe, so lange FEf sich nicht ändert, folglich liegen alle Strahlen auf der Oberfläche eines Kegels, der durch die Umdrehung der Linie ki um die Axe Gi beschrieben wird, wenn man den Spiegel um seine Axe dreht. Man findet also in diesem Fall mit dem Sextanten alle Winkel zu grofs, und die Berechnung des Fehlers reducirt sich auf die Auflösung der Aufgabe: Die beyden Schenkel eines Winkels haben gleiche gegebene Neigung gegen eine gegebene Ebene; durch sie stehen Ebenen senkrecht auf dieser Ebene, und machen mit einander einen gegebenen Winkel; man sucht den Winkel, welchen die beyden schiefen Schenkel mit einander machen; Oder in einem sphärischen Dreyek sind zwey gleiche Seiten sammt dem eingeschlossenen Winkel gegeben, man sucht die dritte Seite. Diese Aufgabe ist die umgekehrte der allgemeinern in Herrn Hofrath Kästners astron. Abhandlungen I. Samml. S. 35. n. 168. u. f. Wenn nach 186 der angeführten Abhandl. der eingeschlossene Winkel α, die ihm gegenüberstehende Seite δ, die beyden andern Seiten p und q heifsen, so ist

$$\cos\alpha = \frac{\cos\delta - \sin p \sin q}{\cos p \cos q}$$

aber hier p = q = der Neigung der Fernröhre

$$\text{also } \cos\alpha = \frac{\cos\delta - \sin p^2}{\cos p^2}$$

daher

daher $1 - \cos\delta = \cos p^2 (1 - \cos\alpha)$
folglich $2\sin\frac{1}{2}\delta^2 = 2\sin\frac{1}{2}\alpha^2 \cos p^2$, weil $1 - \cos\delta = 2\sin\frac{1}{2}\delta^2$ u. s. w.
und wenn man auf beyden Seiten mit 2 dividirt und die Wurzel auszieht

$$\sin\tfrac{1}{2}\delta = \cos p \sin\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Wenn also die Neigung der Fernröhre gegen die Ebene des Sextanten $= p$ ist, so findet man aus dem Winkel α welchen die Alhidade angibt, den Winkel, welchen man wirklich gemessen hat, auf folgende Art. Es seye $p = 10$ Min., $\alpha = 140^\circ$ so ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Lg}\sin\tfrac{1}{2}\alpha &= 9{,}9729858 \\ \mathrm{Lg}\cos p &= \underline{9{,}9999982} \\ \mathrm{Lg}\sin\tfrac{1}{2}\delta &= 9{,}9729840 \\ \tfrac{1}{2}\delta &= 69^\circ\, 59'\, 57'',6 \\ \delta &= 139\;\; 59\;\; 55{,}2 \end{aligned}$$

folglich hätte in diesem Fall die Alhidade den Winkel zu gros angegeben um 4,8 Sec.

§. 85.

Aus der Formel des vorhergehenden §.

$$\cos\alpha = \frac{\cos\delta - \sin p^2}{\cos p^2}$$

folgt ferner $\cos\delta - \cos\alpha = \sin p^2 (1 - \cos\alpha)$
es ist aber

$$\cos\delta - \cos\alpha = 2\sin\left(\frac{\alpha - \delta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha + \delta}{2}\right)$$

und $1 - \cos\alpha = 2\sin\frac{1}{2}\alpha^2$
folglich

$$\sin\left(\frac{\alpha - \delta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha + \delta}{2}\right) = \sin p^2 \sin\tfrac{1}{2}\alpha^2$$

wenn

wenn nun δ von α nur wenig unterschieden ist, so kann man $\frac{\alpha+\delta}{2}=\alpha$, folglich

$\sin\frac{\alpha+\delta}{2}=\sin\alpha=2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha$ sezen, so bekommt man wenn auf beyden Seiten mit $2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha$ dividirt wird

$$\sin\frac{\alpha-\delta}{2}=\frac{\sin p^2\sin\frac{1}{2}\alpha^2}{2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha}=\frac{1}{2}\sin p^2\tang\frac{1}{2}\alpha$$

oder weil $\frac{\alpha-\delta}{2}$ sehr klein ist, wenn man p klein annimmt

$$\alpha-\delta=\sin p^2\tang\frac{1}{2}\alpha=p^2\tang\frac{1}{2}\alpha$$

In dieser Formel muſs p in Theilen des Halbmessers ausgedrükt werden, weil das Quadrat davon vorkommt. Ist p in Secunden gegeben, so findet man p in Theilen des Halbmessers $=\frac{p.\pi}{648000}$, wenn π den Umfang des Kreises in Theilen des Durchmessers oder den halben Umfang in Theilen des Halbmessers und 648000 die Anzahl Secunden sind, die auf den Bogen von 180 Graden gehen. Da findet man also $\alpha-\delta$ in Theilen des Halbmessers

$$=\frac{p^2\pi^2}{(648000)^2}\tang\frac{1}{2}\alpha$$

Um diesen Bogen wieder in Secunden zu verwandeln, muſs man mit $\frac{648000}{\pi}$ multipliciren, folglich findet man

$$\alpha-\delta=\frac{\pi}{648000}p^2\tang\frac{1}{2}\alpha,$$ wo p und

$\alpha-\delta$

$\alpha - \delta$ in Secunden ausgedrükt sind. Nun ist

$$\begin{aligned} Lg\,\pi &= 0{,}4971499 \\ Lg\,648000 &= 5{,}8115750 \\ \hline Lg\,const. &= 0{,}6855749 - 6 = Lg\,e \end{aligned}$$ *).

Sezt man wie §. 84. p = 10 Min. = 600 Sec. und $\alpha = 140^\circ$, so wird

$$\begin{aligned} Lg\,p^2 = 2\,Lg\,p &= 5{,}5563025 \\ Lg\,tg\tfrac{1}{2}\alpha &= 0{,}4389341 \\ Lg\,e &= 0{,}6855749 - 6 \\ \hline Lg(\alpha - \delta) &= 0{,}6808115 \\ \alpha - \delta &= 4'',795 \quad \text{oder} = 4'',8 \end{aligned}$$

wie §. 84.

Hienach kann man eine Tafel berechnen, welche für verschiedene Neigungen der Fernröhre gegen die Ebene des Sextanten und für alle Winkel, die mit dem Sextanten gemessen werden können, ihre Verbesserung von 10 zu 10 Graden angibt. Eine solche Tafel findet sich in *Borda's Description* et *usage du cercle de Reflexion Table V.* für die Neigungen oder deviationen von 10 bis 60 Min. und für die Winkel von 0 bis 180° von 10 zu 10 Graden. Wenn α sehr nahe an 180 Grade kommt, kann man die hier gegebene Näherungsformel nicht mehr gebrauchen, die Rechnung muſs alsdann nach der Formel §. 84. geführt werden. Bey einem Sextanten ist die Näherungsformel genau genug, weil mit diesen Instrumenten höchstens Winkel von 140 Graden gemessen werden können. Die Bordasche Tafel ist hier Taf. II.

§. 86.

*) Kästners astron. Abhandlungen. I. Samml. S. 18. n. 98.

§. 86.

Wenn die Axe der Fernröhre mit der Ebene des Sextanten parallel ist, die Bilder aber nicht in der durch die Axe der Fernröhre gehenden jener Ebene parallelen Linie zu Berührung gebracht werden, so kann man ebenfalls den Fehler, welcher hieraus entsteht, nach §. 84. und 85. berechnen, wenn man weiſs, wie groſs die Neigung dieser Visirlinie gegen des Sextanten Ebene war. Man bestimmt diese Neigung vermittelst der beyden Fäden der Fernröhre, welche mit der Ebene des Sextanten parallel seyn müſsen; vorher aber muſs man den Abstand der Fäden in Kreistheilen wissen, das heist, man muſs wissen, wie groſs der Winkel ist, welchen Ebenen durch den Mittelpunct des Objectivs und die Fäden gelegt mit einander machen. Man könnte diesen Winkel aus der Brennweite des Objectivs und aus dem Abstand der Fäden berechnen. Bequemer und sicherer kann man ihn auf folgende Art bestimmen. Man stellt die Fäden durch Umdrehung der Ocularröhre auf die Ebene des Sextanten senkrecht, und legt ihn horizontal. Hierauf richtet man die Fernröhre so nach einem nahe an dem Horizont liegenden deutlichen Punct, daſs der eine Faden jenen Punct bedekt. Man bemerke den Winkel, welchen die Alhidade angibt, wenn das directe und reflectirte Bild desselben Puncts einander deken. Nun bewege man die Alhidade vermittelst der Micrometerschraube, so wird man zwey Bilder desselben Puncts sehen. Indem man nun das eine Bild

an

an dem einen Faden behält, bringt man durch Bewegung der Alhidade das andere Bild an den andern Faden. Der Winkel, welchen die Alhidade indessen beschrieben hat, ist der gesuchte Winkel. *Beyspiel.* Mit obigem Sextanten fand ich, als beyde Bilder eines Stabes in einer Entfernung von ungefähr 400 Fuſs einander bedekten, den Winkel $= 0^\circ 0' 30''$. Ich brachte das Bild des Stabes an den Faden welcher gegen dem Mittelpunct des Sextanten hinlag, und fand, nachdem ich durch Bewegung der Alhidade das andere Bild an den zweyten Faden gebracht hatte, den Winkel $= 1^\circ 24' 0''$ und zwar jenseits des Nullpuncts oder auf dem *Excedens*, daher Abstand der Fäden $= 1^\circ 24' 30''$. und eines jeden Abstand von der Axe der Fernröhre $= 0^\circ 42' 15''$. Nach dieser Operation werden die Fäden wieder der Ebene des Sextanten parallel gestellt. Gesezt nun, man hätte einen Winkel $97^\circ 23'$ gemessen, indem man die Bilder an dem einen Faden in Berührung brachte; so wäre die Deviation $= 42'$ (auf Secunden braucht man hier nicht zu sehen). Nun findet man für $40'$ Diviation in Taf. II und für 95° beob. Winkel die Verbesserung $= 31''$, für $100^\circ = 34''$, also für $97^\circ \frac{1}{3}$ $32'',4$. Wenn die Diviation um 5 Min. wächst, so nimmt in der Tafel die Verbesserung um $8''$ zu, also für $2'$ um $3'',2$; folglich ist die gesuchte Verbesserung $= 32'',4 + 3'',2 = 35'',6$, welche von dem beobachteten Winkel abgezogen werden müssen. Wenn man die Bilder nicht an einem Faden in Berührührung oder zur Bedekung bringt, so läſst sich die Deviation durch Schäzung bestimmen.

§. 87.

Wenn man einen Winkel miſst, indem man die Bilder an einem Faden in Berührung bringt, und nun den Sextanten so neigt, daſs die Bilder sich an dem andern Faden befinden, so müssen sich die Bilder wieder berühren, wenn die Axe der Fernröhre der Ebene des Sextanten parallel ist, weil alsdann die Fehler gleich sind auf beyden Seiteu, da beyde Deviationen gleich groſs sind. Dieses gibt also ein neues Mittel ab die Lage der Fernröhre zu berichtigen (§. 67.). Die Neigung der Axe der Fernröhre seye x, der Winkel, welchen die Alhidade angibt, wenn man die Bilder an dem einen Faden in Berührung bringt, a, an dem andern Faden α, der Abstand der Fäden $=\delta$, so ist die Verbesserung y für den ersten Fall $= e\left(\frac{\delta}{2}+x\right)^2 \tan\frac{1}{2}a$, für den zweyten $z = e\left(\frac{\delta}{2}-x\right)^2 \tan\frac{1}{2}\alpha$ nach §. 85. Nun ist $y-z$ gegeben, welches der Winkel ist, um welchen die Alhidade bewegt werden muſs, wenn man, nachdem die Bilder an dem einen Faden in Berührung gebracht worden sind, sie auch an dem andern zur Berührung bringen will. Also hat man

$$y-z = e\left(\frac{\delta}{2}+x\right)^2 \tan\frac{1}{2}a - e\left(\frac{\delta}{2}-x\right)^2 \tan\frac{1}{2}\alpha,$$

oder weil a und α nur wenig von einander verschieden seyn können

y — y

$$y-z=e\,\tang\tfrac{1}{2}a\left(\left(\frac{\delta}{2}+x\right)^2-\left(\frac{\delta}{2}-x\right)^2\right)$$
$$=e\,\tang\tfrac{1}{2}a.\,2\delta x$$
$$\text{folglich } x=\frac{y-z}{2e\delta\,\tang\frac{1}{2}a}$$

Der kleinere Winkel gehört immer zu demjenigen Faden, welcher am wenigsten von der Ebene des Sextanten abweicht. Gesezt man hätte einen Winkel bey Berührung der Bilder an dem einen Faden $=140$ Gr. an dem andern $=140^\circ\,1'\,17''$ gefunden, so liegt lezterer Faden am weitesten von einer, durch den Mittelpunct des Objectivs, der Ebene des Sextanten parallel gelegten Ebene. Es seye der Abstand der Fäden $=1^\circ\,20'=4800$ Sec. so ist

$$\begin{aligned}\mathrm{Lg}\,2d &= 3{,}9822712\\ \mathrm{Lg}\,e &= 0{,}6855749-6\\ \mathrm{Lg\,Tg.}\tfrac{1}{2}a &= \underline{0{,}4389341}\\ &\quad 0{,}1067802=1\\ \mathrm{Lg}(y-z) &= \underline{1{,}8864907}\\ \mathrm{Lg}\,x &= 2{,}7797195\\ x &= 602'',1=10'\,2''\end{aligned}$$

Fehler wenn der grofse Spiegel nicht senkrecht steht auf des Sextanten Ebene.

§. 88.

Wenn der grofse Spiegel mit der Ebene des Sextanten einen schiefen Winkel macht, und man berichtigt den kleinen Spiegel nach §. 66., so wird seine Ebene der des grofsen Spiegels parallel. Berichtigt man alsdann ferner die Axe der Fernröhre nach §. 81., so wird

wird sie der Ebene des Sextanten nicht parallel werden, sondern in einer Ebene liegen, welche den grofsen und kleinen Spiegel senkrecht durchschneidet. Nun nehme ich beyde Spiegel einander parallel aber gegen des Sextanten Ebene geneigt an; die Axe der Fernröhre seye in einer Ebene, welche beyde senkrecht durchschneidet. Es fragt sich, was für ein Fehler aus der Spiegel Neigung gegen des Sextanten Ebene in dem Winkelmessen entstehe?

Der Neigungswinkel beyder Spiegel wird durch den Winkel gemessen, welchen die auf dieselbige gefällte Perpendikel mit einander machen. Ist nun der Spiegel gegen die Ebene des Instruments geneigt, so beschreibt das Perpendikel keinen grösten Kreis, sondern die Oberfläche eines Kegels, dessen Axe auf jene Ebene senkrecht ist. Folglich gibt die Alhidade den Neigungswinkel beyder Spiegel, und also auch den Winkel, welchen man messen will, zu grofs. Der Spiegel weiche von der senkrechten Lage ab um den Winkel q, die Alhidade zeige einen Winkel α, so findet man beyder Spiegel Neigungswinkel λ nach §. 84.

$\sin\frac{1}{4}\lambda = \cos q \sin\frac{1}{4}\alpha$, weil der Winkel α der gedoppelte Winkel ist, um welchen die Alhidade bewegt wurde.

oder nach §. 83. $\frac{\alpha-\lambda}{2} = e\,q^2 \tang\frac{1}{4}\alpha$

daher $\alpha - \lambda = 2\,e\,q^2 \tang\frac{1}{4}\alpha$

Man kann also diesen Fehler ebenfalls vermittelst der zweyten Tafel finden. Man sucht die zu der Hälfte des Winkels, welchen die Alhidade angab, und zu der gegebenen Neigung des grofsen Spiegels gehörige Verbesserung, und nimmt das gedoppelte davon, so hat man die gesuchte Verbesserung des beodachteten Winkels. Zum Beyspiel. Es seye die Neigung des grofsen Spiegels $= 10'$, die Alhidade gebe den Winkel 130 Gr. So ist die zu 65 Gr. gehörige Verbesserung $= 1''$, also Verbesserung des Winkels $= 2''$. Der Fehler also welcher aus des Spiegels Neigung gegen die Ebene des Instruments entstehen kann, beträgt viel weniger, als der, welcher aus der Deviation der Fernröhre entsteht. Nach der Methode des §. 65. kann man gewifs den grossen Spiegel so berichtigen, dafs man bis auf 3 Min. von seiner richtigen Lage versichert seyn kann, folglich hat man hievon keine Fehler in dem Winkelmessen zu befürchten, welche bey einem Werkzeug von dieser Gröfse könnten bemerkt werden.

Fehler, wenn der kleine Spiegel auf der Ebene des Sextanten nicht senkrecht steht.

§. 89.

Ich nehme an, der grofse Spiegel stehe auf des Sextanten Ebene senkrecht, der kleine aber weiche von der verticalen Lage um den Winkel r ab, so wird ein Lichtstrahl, der in der Ebene liegt, welche der des Sextanten parallel ist, von dem kleinen Spiegel so zurükrükgeworfen, daſs er mit jener Ebene einen Winkel macht, der auf folgende Art bestimmt wird. Wenn Fig. 41 HI der kleine Spiegel, die Ebene durch FG und k auf des Spiegels Ebene senkrecht, die durch Dg und k der Ebene des Sextanten parallel ist, so ist $ikl =$ des Spiegels Abweichung von seiner verticalen Lage $= r$; der Lichtstrahl wird also, wenn er in der Ebene durch Dg und k in der Richtung gk einfällt, nach fso zurükgeworfen, daſs $Gkg = Fkf$ (§. 82.), folglich des zurükgeworfenen Strahls Winkel mit der Ebene des Instruments $= Dkf = 2\,Gkg$. Es ist aber $\sin ikl = \frac{li}{lk}$

$$= \frac{li}{gk \cos lkg} = \frac{Gg}{gk \cos lkg} = \frac{\sin Gkg}{\cos lkg};$$

oder weil der Winkel ikl sehr klein ist, $ikl \cos lkg = Gkg$. Also des zurükgeworfenen Lichtstrahls Neigung gegen des Sextanten Ebene $= 2\,ikl \cos lkg = 2\,r \cos lkg$. Wenn man also gleich den Sextanten in die Ebene der beyden Gegenstände bringt, zwischen welchen man Winkel messen will, so wird doch der von den Spiegeln zurükgeworfene Strahl beständig mit des Sextanten Ebene einen Winkel machen, der so groſs ist als $2\,r \cos lkg$, weil klg von beständiger Gröſse bleibt (dieser Winkel ist bey dem hier beschriebenen Sextanten $= 15°$ §. 64. Der wahre Winkel ist also die Hypotenuse eines rechtwinklichten sphärischen Dreyeks, dessen Perpendikel die Winkel $2\,r \cos 15°$ und α sind, wenn hier wieder α der Winkel heiſst, welchen die Alhidade angibt. Sezt man den verbesserten Winkel $=\gamma$, $2\,r\cos 1\,k\,g=\varrho$ so hat man $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\varrho$

Man sieht leicht, daſs dieser Fehler nur bey kleinen Winkeln in Betrachtung kommen kann Es seye $\alpha = 30'$

$\varrho = 2$

dieses Dreyek kann man als geradlinigt betrachten, folglich ist

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \varrho^2 = 904$$

daher $\gamma = \alpha + \frac{\varrho 2}{2\alpha} = 30', 0666 = 30$ Min. 4 Sec.

Für $\alpha = 60'$ wird $\gamma^2 = 3604$

$\gamma = 60,0333 = 60$ Min. $2''$ Der Fehler nimmt also mit dem Wachsen der Winkel sehr schnell ab. Uebrigens sieht man aus dem ersten Beyspiel, daſs man den kleinen Spiegel genau berichtigen muſs, wenn man den Durchmesser der Sonne vermittelst des Sextanten bestimmen will. Die Berichtigung des Spiegels kann aber sehr leicht und bis auf 30 Sec. genau nach §. 66. geschehen.

Fehler, welche entstehen, wenn die beyden Flächen der gläsernen Spiegel einander nicht parallel sind.

§. 90.

Wenn die beyden Flächen eines gläsernen Spiegels gegeneinander geneigt sind, so kann man sich diese Flächen erweitert gedenken, bis sie einander schneiden. Die Durchschnitslinie beyder Flächen wird entweder auf des Sextanten Ebene senkrecht stehen, oder derselben parallel seyn, oder einen schiefen Winkel

kel damit machen. Steht die Durchschnittslinie senkrecht auf der Ebene des Sextanten, so seye Fig. 43 BbeE der Durchschnitt des Spiegels mit einer Ebene, welche der Ebene des Sextanten parallel gelegt ist. Die Linien Bb und Ee verlängert werden einander schneiden in A unter einem Winkel, welcher so groſs ist als der Neigungswinkel der beyden Spiegelflächen. Ein Lichtstrahl HC, der in jener Ebene liegt, und auf den Spiegel in k auffällt, bleibt nach seiner Brechung nach D hin in jener Ebene, wird von dem hintern belegten Theil des Spiegels nach D in derselben Ebene zurükgeworfen, bey C wieder gebrochen, so daſs er nach der Richtung CH fortgeht, welche wieder in der parallelen Ebene des Sextanten liegt. Man ziehe an die Puncte k und C die Einfallslothe LK, FC auf die fordere Fläche des Spiegels, und verlängere sie in l und f, so ist $lkD = DCf - 2BAE$ oder

$LKM = FCG - 2BAE$

ferner $\sin LKM : \sin LKI = n : m$ (§. 53.)

und $\sin FCG : \sin FCH = n : m$

also $\sin LKI = \frac{m}{n} \sin LKM = \frac{m}{n} \sin(FCG - 2BAE)$

und $\sin FCH = \frac{m}{n} \sin FCG$

zieht man beyde Gleichungen von einander ab, so wird

$$\sin FCH - \sin LKI = \frac{m}{n}(\sin FCG - \sin(FCG - 2BAE))$$

$$= \frac{m}{n}(\sin FCG - \sin FCG \cos 2BAE + \cos FCG \sin 2BAE)$$

$$= \frac{m}{n}(\sin 2BAE \cos FCG + 2 \sin BAE^2 \sin FCG)$$

Wenn nun BAE nur einige Minuten beträgt, so kann man $\sin 2BAE = 2BAE$ sezen, und das Quadrat davon weglassen; $\sin FCH - \sin LKI$ ist gleich $2\cos\left(\frac{FCH + LKI}{2}\right)\sin\left(\frac{FCH - LKI}{2}\right)$ wo man wieder $\frac{FCH + LKI}{2} = FCH$ und $\sin\frac{FCH - LKI}{2} = \frac{FCH - LKI}{2}$ sezen darf

$$\text{also } FCH - LKI = \frac{2m}{n} BAE \frac{\cos FCG}{\cos FCH}$$
$$= \frac{2BAE\sqrt{(m^2 - n^2 \sin FCH^2)}}{n \cos FCH}.$$

Der Lichtstrahl HC wird also so zurükgeworfen, als ob er auf die Ebene eines Spiegels aufgefallen wäre, die mit der fordern Fläche des Spiegels BbeE einen Winkel machte, so groſs als $\frac{BAE\sqrt{(m^2 - n^2 \sin FCH^2)}}{n \cos FCH}$. Sezt man $m = 3, n = 2$ so wird dieser Winkel

$$= \frac{BAE\sqrt{(9 - 4\sin FCH^2)}}{2\cos FCH}$$

oder $x = \frac{3}{2} BAE \sec. FCH \sqrt{(1 - \frac{4}{9}\sin FCH^2)}$

Dieser Winkel ist also veränderlich, und nimmt mit dem Winkel FCH zu, denn $\sin(FCH)^2$ kann nicht gröſser werden als 1 und sec. FCH über alle Gränzen wachsen. Man kann sich also vorstellen, die auf den groſsen Spiegel auffallende Lichtstrahlen werden von einem Spiegel zurükgeworfen, der ausser der

Bewe-

Bewegung, die man ihm vermittelst der Alhidade gibt, noch eine eigene Bewegung auf der Alhidade selbst um die Axe des Sextanten hätte, welche von der Aenderung des Winkels x abhängt. Diese Bewegung geschiehet nach derselben Richtung nach welcher man den grofsen Spiegel bewegt, wenn der dikere Theil desselben gegen den Gradbogen hin liegt, nach der entgegengesezten Richtung, wenn der dikere Theil von dem Grandbogen an gerechnet jenseits des Mittelpuncts des Sextanten liegt, oder der einfallende Lichtstrahl und der dünnere Theil des Spiegels auf entgegengesezten Seiten des Mittelpuncts liegen. Im ersten Fall findet man die Winkel zu klein, im leztern zu grofs, und zwar um die gedoppelte Aenderung des Winkels x.

§. 91.

Bey dem oben beschriebenen Sextanten ist $FCH = 5^\circ$ wenn beyde Spiegel einander parallel sind. Es seye $BAE = \frac{1'}{2} = 30''$, so läfst sich x auf folgende Art berechnen.

$$
\begin{array}{rl}
\mathrm{Lg}\,2 = & 0{,}3010300 \\
\mathrm{Lg}\sin FCH = & \underline{9{,}4129962} \\
 & 9{,}7140262 \\
\mathrm{Lg}\,3 = & \underline{0{,}4771213} \\
\mathrm{Lg}\sin FCG = & 9{,}2369049 \\
FCG = & 9^\circ 56' 9'' \\
\mathrm{Lg}\cos FCG = & 9{,}9934370 = \sqrt{(1 - \tfrac{4}{9}\sin FCH^2)} \\
\mathrm{C.Lg}\cos FCH = & 0{,}0150562 \\
\mathrm{Lg}\,45'' = & \underline{1{,}6532125} \\
 & 1{,}6617057 \\
x = & 45'',89
\end{array}
$$

Man

Man habe einen Winkel gemessen von 120 Graden, so ist $FCH = 15^\circ + 60^\circ = 75^\circ$

$$
\begin{array}{rl}
\mathrm{Lg}\,2 = & 0{,}3010300 \\
\mathrm{Lg}\sin 75^\circ = & \underline{9{,}9849438} \\
 & 10{,}2859738 \\
\mathrm{Lg}\,3 = & \underline{0{,}4771213} \\
\mathrm{Lg}\sin & 9{,}8088525 \text{ gehört zu } 40^\circ\, 5'\, 13'' = q \\
\mathrm{Lg}\cos q = & 9{,}8837001 \\
\mathrm{C.Lg}\cos FCH = & 0{,}5870038 \\
\mathrm{Lg}\,45 = & \underline{1{,}6532125} \\
\mathrm{Lg}\,x = & 2{,}1239164 \\
x = & 133'',02 = 2'\,13'',02
\end{array}
$$

bey der parallelen Lage $x = 0\ 45{,}89$

Unterschied $= 1'\,27'',13$, das gedoppelte hievon gibt die Verbesserung $= 2\ 54,\ 26$

Wenn also der dikere Theil des grofsen Spiegels dem einfallenden Strahl zugekehrt war, so ist der gemessene Winkel $= 120^\circ - 2'\,54'' = 119^\circ\,57'\,6''$. Heifst der Winkel, welchen die Ebene des kleinen Spiegels mit der Axe der Fernröhre macht a (er ist bey diesem Sextanten $= 75^\circ$ §. 64.) der Winkel welchen die Alhidade angibt y; der Winkel welchen die beyden Flächen des grofsen Spiegels mit einander machen b, so ist der verbesserte Winkel $= y \pm 3b\left(\sec.(a + \tfrac{1}{2}y)\sqrt{(1 - (\tfrac{2}{3}\sin(a + \tfrac{1}{2}y))^2)} - \sec.a\sqrt{(1 - (\tfrac{2}{3}\sin a)^2)}\right)$.

§. 92.

Wenn von einem sehr entfernten Gegenstand ein Lichtstrahl HC Fig. 43 auf den Spiegel auffält, so wird dieser nach gedoppelter Brechung und einmaliger Zurükwerfung von der

der belegten Fläche des Spiegels in die Lage KI gebracht. Fällt von demselben Gegenstand ein Lichtstrahl auf k, so kann man diesen als parallel mit HC ansehen, dieser wird aber nach Zurükwerfung von der fordern Fläche des Spiegels nicht in die Lage KI kommen, weil der Winkel $LKI < FCH$ (§. 90.) folglich wird der von der fordern Fläche zurükgeworfene einen Winkel machen $= 3BAE$ sec. $FCH \sqrt{(1 - \frac{4}{9} \sin FCH^2)}$. Ein solcher prismatischer Spiegel macht also auch von unendlich entfernten Gegenständen gedoppelte Bilder, welche desto weiter von einander abstehen, je gröſser der Winkel FCH ist. Hienach kann man leicht untersuchen, ob ein Spiegel prismatisch ist. Wenn man nehmlich den Mond oder die Sonne in dem Spiegel betrachtet, so wird man nur ein Bild sehen, wenn beyde Flächen einander parallel sind (§. 58.), wenigstens zwey Bilder, wenn sie gegen einander genigt sind, die desto mehr von einander abstehen werden, je schiefer man die Lichtstrahlen auffallen läſst (§. 90.) *). Vermittelst einer Fernröhre wird man dieses noch genauer beobachten können. Nach §. 91. kann man eine Tafel berechnen, welche für alle Winkel, die mit dem Sextanten gemes-

*) Spiegel, deren beyde Flächen einander genau parallel sind, machen von sehr nahen Gegenständen auch zwey Bilder, für deren Absand von einander es aber ein Maximum gibt bey einer gewissen Schiefe des einfallenden Lichtstrahls. Läſst man diesen noch schiefer auffallen, so kommen die Bilder wieder einander näher (S. 57.).

messen werden können, bey einer angenommenen Neigung der Spiegelebenen z. B. von 1′, die Verbesserung der gemessenen Winkel angibt. Diese Verbesserungen sind wie die Formel §. 90. zeigt den Neigungen der Spiegelebenen proportional, und können folglich für jede andere gegebene Neigung leicht berechnet werden. Wenn man nun gefunden hat, daſs die beyden Ebenen des Spiegels gegen einander geneigt sind, so kommt es darauf an, die Gröſse dieser Neigung zu bestimmen. Zu diesem Ende messe man mit dem Sextanten einen Winkel z. B. von 120 Graden. Man nehme den groſsen Spiegel heraus, und seze ihn umgekehrt ein, so muſs der Fehler auf die entgegengesezte Seite fallen. Nachdem man also den Fehler des Index bestimmt hat, messe man den Winkel zum zweyten mal; findet er sich wieder eben so groſs, so sind beyde Flächen einander parallel, findet er sich gröſser oder kleiner, so sind sie gegen einander geneigt. Hätte man den Winkel bey der zweyten Messung $= 120^\circ\, 4'$ gefunden, so ist der Fehler für $120^\circ = 2'$. Oben §. 89. war dieser Fehler für $30''$ Neigung der Flächen beyder Spiegel $= 2' 54''$, also $2' 54'' : 2' 0'' = 30''$: der gesuchten Neigung $= 20'',69$

§. 93.

Wenn die Durchschnittslinie der beyden Spiegelebenen nicht auf der Ebene des Sextanten senkrecht steht, sondern mit derselben parallel ist, oder einen schiefen Winkel macht, so behält die Ebene, in welcher der einfallende de und der zurükgeworfene Lichtstrahl liegen nicht immer dieselbe Lage gegen der Ebene des Sextanten, sondern die Lage dieser Ebene ändert sich mit der Veränderung des Einfallswinkels; daher wird die Bestimmung des daher rührenden Fehlers in der Winkelmessung verwikelt. Es würde unnüz seyn sich länger hiebey aufzuhalten, weil die Bestimmung der hiezu erforderlichen Gröſsen nicht mit einiger Genauigkeit geschehen kann. Ueberhaupt wird man vermittelst eines Sextanten, dessen groſser Spiegel prismatisch ist, niemals genaue Beobachtungen machen können, weil die Bilder, welche alsdann von beyden Spiegelflächen entstehen, theils leicht mit einander verwechselt werden können, theils der Bemerkung ihrer genauen Berührung hinderlich sind. Metallene Spiegel wären also den gläsernen vorzuziehen, weil sie diesen Fehlern nicht ausgesezt sind. Die gewöhnlichen metallenen Spiegel laufen leicht an, daher werden in dem *Dictionaire encyclopédique de marine par Vial-du Clairbois (art. Sextant)* Spiegel von *Platina* vorgeschlagen. Wenn man einen Sextanten blos zu Sonnenbeobachtungen wollte, so könnte man den groſsen Spiegel von dunkelgefärbtem Glase machen, wie die Glasplatten des künstlichen Horizonts sind (§. 75.).

Wenn

Feinheit der Theilstriche.

§. 94.

Wenn man einen Theilstrich des Vernier genau auf einen Theilstrich des Gradbogens stellt, so steht der nächstvorhergehende und folgende schon so merklich von einem Theilstrich des Gradbogens ab, daſs man diesen Abstand, wenn man sich des zu dem Sextanten gehörigen Vergröſserungsglases bedient, noch sehr wohl halbiren kann. Der zweyte Theilstrich berührt alsdann kaum noch den auf dem Gradbogen, Folglich nimmt ein solcher Theilstrich nur einen Winkel von einer Minute ein. Da aber der Sextant in 120 Grade getheilt ist, so beträgt dieser Winkel eigentlich nur 30″. Sezt man die Dike eines Theilstrichs $= b$, den Halbmesser des Gradbogens $= a$, so ist der Winkel welchen ein Theilstrich einnimmt $= 206265 \frac{b}{a}$ Secunden (*Mayers pract. Geometrie I. Th.* §. 90.) also ist hier $\frac{b}{a} \frac{30}{206265}$. Der Halbmesser des Sextanten ist $= 5$ Z. folglich $b = \frac{150}{206265}$ Z. $=$ 0,000727 Z. $=$ 0,0087 Lin. Diese Linien sind beynahe so fein, als die auf den Branderschen Glasmikrometern, welche 0,005 Lin. breit sind. Uebrigens ist zu bemerken, daſs die Ungewiſsheit bey dem Ablesen eines Winkels nicht so groſs ist als der Winkel, welchen die Breite eines Theilstrichs einnimmt. Man kann vermittelst des Vergröſserungsglases noch sehr gut sehen,

hen, ob die Theilstriche des Vernier und des Gradbogens genau zusammentreffen, oder um die Hälfte ihrer Dike von einander abstehen. Ich seze daher den Fehler, welchen man bey dem hier beschriebenen Sextanten in Ablesung des Winkels vielleicht noch begehen könnte auf 15 Secunden. Da man aber bey Höhenmessungen vermittelst des künstlichen Horizonts die gedoppelte Höhen mifst (§. 71. 78.); so beträgt dieser Fehler in der Messung der Höhe nur $7\frac{1}{2}$ Secunden.

Fehler in der Stellung des künstlichen Horizonts.

§. 95.

Wenn die Glasplatte des künstlichen Horizonts (§. 75.) nicht genau horizontal ist, so wird ein darauf gefälltes Perpendikel nicht das Zenith treffen. Es seye also Z das Zenith, Fig. 44, P der Punct wo die Verlängerung des Perpendikels die scheinbare Himmelskugel trift, S der Punct, dessen Höhe man messen will. Man lege durch diese drey Puncte die gröfsten Kreise ZP, ZS, PS; so ist ZP der Neigungswinkel der Ebene des künstlichen Horizonts gegen den wahren Horizont, ZS des Puncts S Abstand vom Zenith oder das Complement seiner Höhe, PS das Complement der fehlerhaften Höhe. Nun ist in dem sphärischen Dreyek ZPS

$$\cos ZS = \cos PS \cos PZ + \sin PS \sin PZ \cos ZPS$$

oder wenn h die beobachtete fehlerhafte Höhe, h′ die verbesserte Höhe ist

sin

$$\sin h' = \sin h \cos PZ + \cos h \cos ZPS \sin ZP$$
$$= (1 - 2(\sin \tfrac{1}{2} PZ)^2) \sin h + \sin PZ \cos h \cos PZS$$
also $\sin h' - \sin h = \sin PZ \cos h \cos ZPS - 2(\sin \frac{1}{2} PZ)^2 \sin h$

folglich

$$2 \sin\left(\frac{h'-h}{2}\right) = \frac{\sin PZ \cos h \cos ZPS - 2(\sin \frac{1}{2} PZ)^2 \sin h}{\cos\left(\frac{h'+h}{2}\right)}$$

Aber PZ kann man immer kleiner als eine Minute annehmen, und h wird bey einem Sextanten nicht viel über 66 Grade betragen können, folglich ist PZ und daher auch $\frac{h'-h}{2}$ in Vergleichung mit h sehr klein, folglich kann man sezen

$$h' - h = \frac{PZ \cos h \cos ZPS - \frac{1}{2}(PZ)^2 \sin h}{\cos h}$$
$$= PZ \cos ZPS - \tfrac{1}{2}(PZ)^2 \,\mathrm{Tg}\, h$$

Sezt man nun $PZ = 1$ Min. $= 60''$ so ist $\frac{1}{2}(PZ)^2 = 1800$, welches mit $e\,Tg\,h$ multiplicirt den Werth dieses Glieds in Secunden gibt (§. 85.); also für $h = 66°$

$$\begin{aligned} \mathrm{Lg}\, Tg\,h &= 0{,}3514169 \\ \mathrm{Lg}\, e &= 0{,}6855749 - 6 \\ \mathrm{Lg}\, 1800 &= \underline{3{,}2552725} \\ & 0{,}2922643 - 2 \\ \tfrac{1}{2}(PZ)^2\, Tg\,h &= 0{,}0196 \text{ Sec.} \end{aligned}$$

Man kann daher sezen $h' - h = PZ \cos ZPS$; folglich kann der Fehler, welcher aus der nicht genau horizontalen Lage des künstlichen Horizonts entsteht, nicht gröſser werden als der Neigungswinkel des künstlichen Horizonts gegen den wahren Horizont. Die Aenderung des Winkels, welchen der auf den Horizontalspiegel auffallende Strahl mit dem zu-

zurükgeworfenen macht, ist zwar das gedoppelte der Aenderung des künstlichen Horizonts, allein dieser Winkel ist auch die gedoppelte Höhe (§. 71.). Nimmt man nun an, die Ebene des künstlichen Horizonts seye gegen den wahren Horizont um einen Winkel von 7,5 Sec. geneigt, so wird bey dem Umwenden der Libelle (§. 75.) dieser Fehler verdoppelt, und bringt in der Luftblase eine Bewegung von $\frac{1}{2}$ Lin. hervor (§. 76.). Wenn man also annimmt, man könne die Stelle der Luftblase nur bis auf $\frac{1}{2}$ Lin. genau bemerken, so wird doch der gröste Fehler in der Stellung des künslichen Horizonts nicht über $7\frac{1}{2}$ Secunden betragen. Gebraucht man aber einen Queksilberhorizont, so fällt dieser Fehler ganz weg.

Fehler, den man begehen kann, indem man die beyden Bilder zur Berührung bringt.

§. 96.

Die Genauigkeit, mit welcher man die beyden Bilder zur Berührung bringen kann, hängt theils von der Vergröſserung und Güte der Fernröhre, theils von der Beschaffenheit der Spiegel ab. Sind diese nicht sehr gut gearbeitet, so wird man nie das reflectirte Bild deutlich sehen, auch siehet man leicht, daſs man nur durch Versuche bestimmen kann, wie groſs die Fehler seyn können, welchen man diesfalls ausgesezt ist. Diese Fehler zu bestimmen machte ich folgenden Versuch. Ich

Ich nahm mit dem Sextanten die Höhe der Sonne nahe am Mittag, und beobachtete, wie viel Zeit verfloſs, bis ich bemerkte, daſs die beyden Sonnenbilder nach Beschaffenheit der Umstände über einander giengen, oder von einander abstunden. Aus der Polhöhe, Stundenwinkel und Abweichung der Sonne kann man, wie unten wird gezeigt werden, berechnen, um wie viel sich die Höhe ändert, wenn sich der Stundenwinkel um eine gewisse Grösse ändert. Da fand ich nun, daſs eine Aenderung in der Sonnenhöhe von 4 Secunden schon merklich war, bey welcher also der Abstand der Sonnenbilder sich um 8 Secunden änderte (§. 71.). Ich seze daher den grösten Fehler, welchen man begehen kann, auf 8 Secunden, welches 4 Secunden Fehler in der einfachen Höhe gibt.

Anmerkung. Herr Professor *Späth* in *Altdorf* sezt die Zuverlässigkeit, mit welcher man die beyden Bilder zur Berührung bringen kann, auf 9,5 Secunden, die Genauigkeit, mit welcher man den künstlichen Horizont nivelliren kann, auf 4 Secunden, den grösten Fehler, welchen man bey Ablesung des Winkels begehen kann, auf $7\frac{1}{2}$ Secunden. H. Bode astronom. Jahrbuch für 1792 S. 143 u. f.

Ueber die Genauigkeit, mit welcher vermittelst des Spiegelsextanten Winkel gemessen werden können.

§. 97.

Die bisherigen Untersuchungen dienen nun dazu, im ganzen die Genauigkeit zu bestimstimmen, mit welcher man vermittelst eines guten Spiegelsextanten von 5 Zollen im Halbmesser, wie der oben beschriebene ist, einen Winkel messen kann. Die Axe der Fernröhre kann man gewiſs bis auf 4 Min. genau nach der Methode (§. 67. u. 87.) der Ebene des Sextanten parallel machen, folglich wäre der gröſste Fehler, welcher aus der etwas unrichtigen Lage der Axe entstehen könnte nach §. 85. 0″,7. Den groſsen Spiegel kann man nach §. 65. bis auf 3 Minuten genau auf die Ebene des Sextanten senkrecht stellen; ein Fehler von 3 Min. gibt hier den gröſsten Fehler $=0'',3$. Bey dem Ablesen der Winkel kann man einen Fehler begehen von höchstens 15 Secunden (§. 94.) uud indem man die beyden Bilder zur Berührung bringt, einen von 8 Sekunden. Leztere beyden Fehler haben auch auf die Bestimmung des Fehlers des Index (§. 68.) einen Einfluſs; man könnte also hierüber bis auf $15+8$ oder 23 Secunden ungewiſs seyn. Fallen also alle Fehler auf eine Seite, so ist der gröſste mögliche Fehler $=0'',7+0'',3+15''+8''+23''=47$. Miſst man nun vermittelst des Queksilberhorizonts eine Sonnenhöhe, so beträgt der gröſste Fehler in der Messung der gedoppelten Sonnenhöhe 47″, weil die Oberfläche des Queksilbers von selbst eine horizontale Ebene wird; folglich kann man eine Sonnenhöhe bis auf 23,5 Secunden genau messen.

Über einige andere Instrumente zum Winkelmessen mit Spiegeln und Ramsden's Verbesserungen der Spiegelsextanten.

§. 98.

Der berühmte *Tobias Mayer* schlug anstatt eines Sextanten oder Octanten einen ganzen Kreis vor, dessen Beschreibung man in seinen Tabulis motuum Solis ac Lunae, welche die englische Admiralität im J. 1770 herausgegeben hat, findet, um dabey eine von ihm erfundene Methode die Winkel durch Wiederholung zu messen *), wodurch man ein vielfaches des auszumessenden Winkels bekommt, anwenden zu können. Borda brachte an diesem Reflexionskreis noch einige Verbesserungen an, und richtete ihn so ein, daſs man die Winkel auf beyden Seiten des Nullpuncts messen konnte, wobey nicht allein die Fehler, welche man bey der Bestimmung des Fehlers des Index begehen kann, wegfallen, sondern auch die Beobachtungen weniger Zeit erfordern. Borda gab von diesem Instrument die schon mehrmahls angeführte Schrift heraus: *Description et usage du cercle de réflexion, avec différentes méthodes pour calculer les observations nautiques. Par le Chevalier de Borda. A Paris* MDCCLXXXVII. In dieser Schrift findet man auch eine Beschreibung von dem Mayerschen Instrument. Herr Hofrath *Mayer* beschreibt

*) Comment. Soc. R. Götting. T. II und Herrn Hofr. J. T. Mayers practische Geometrie I. Th. S. 508.

schreibt in seiner practischen Geometrie (1 Th. S. 461. §. 122 u. f. der neuen Auflage) einen Winkelmesser mit Spiegeln in der Gestalt eines Quadranten, auch findet man daselbst eine deutliche Darstellung der Theorie geometrischer Werkzeuge mit Spiegeln. *Ramsden* hat auch eine Abhandlung über die Sextanten geschrieben, von welcher aber nur wenige Exemplare gedruckt wurden, weswegen diese Schrift nicht mehr zu haben ist. Herr Professor *Seyffer* hatte die Güte mir einen Aufsaz über einige Verbesserungen des Spiegelsextanten mitzutheilen, über welche ihm während seines Aufenthalts in England Ramsden selbst Auskunft gab. Diese Verbesserungen bestehen in folgendem. Ramsden erinnert mit Recht, daſs man den Sextanten durch die vielen Correctionsschrauben allzuzusammengesezt und eben dadurch wandelbar gemacht habe. Er warf daher an dem Sextanten alle Correctionsschrauben weg, diejenige ausgenommen welche dazu dient, den kleinen Spiegel auf die Ebene des Sextanten senkrecht zu stellen, und begnügte sich damit, bey dem Bau des Sextanten den kleinen Spiegel ungefähr dem groſsen parallel zu stellen, wenn die Alhidade auf *o* steht. Hat man den Fehler des Index einmal bestimmt, so wird sich derselbe nicht leicht ändern. Ramsden versichert, daſs mehrere Sextanten, nachdem sie nach Indien und wieder zurük gebracht worden waren, noch denselben Fehler des Index hatten, wie man ihn vor der Abreise gefunden hatte. (Der oben beschriebene Sextant hat ebenfalls an dem kleinen Spiegel nur eine Correctionsschraube.). Ferner suchte Ramsden der Biegsamkeit der Ebene des Sextanten abzuhelfen, und sie bey der geringsten Menge von Materie so fest als möglich zu machen, welches er am besten durch Regeln, die auf der Ebene des Sextanten senkrecht stehen erhielt. Hat der Sextant nicht seine gehörige Festigkeit, so beugt er sich nachdem man ihn in verschiedene Lagen bringt, wodurch die Spiegel ihre Lage gegeneinander ändern und Fehler in dem Winkelmessen entstehen. Die Einrichtung, welche darin besteht, daſs der Limbus und alle übrigen Stäbe des Sextanten doppelt sind, die durch Pfeiler mit einander verbunden werden, hat Ramsden wieder verworfen, *Troughton* hat einen auf diese Art eingerichteten Sextanten von 10 Zollen im Halbmesser für die hiesige Universität verfertigt. Das ganze Instrument scheint mir etwas wandelbar zu seyn, und der Fehler des Index verändert sich sehr leicht. Auch den groſsen Spiegel befestigte Ramsden auf eine neue Art auf der Alhidade vermittelst eines starken Klobens von Messing, wie an oben beschriebenen Sextanten gezeigt wurde. Ramsden zieht Spiegel von dunkelm, schwarzen Glas den belegten Spiegeln vor, weil leztere sehr schwer genau zu verfertigen sind. Ein schwarzer Spiegel an einem Sextanten wird wohl die durch Reflexion gesehenen Objecte etwas dunkel zeigen, zumal da die von dem groſsen Spiegel zurükgeworfene Strahlen noch einmal von dem kleinen Spiegel zurükgeworgeworfen werden, bis sie auf das Objectiv der Fernröhre fallen. Bey Sonnenbeobachtungen hat dieses nichts zu bedeuten, weil man ohnehin das Sonnenbild noch durch gefärbte Gläser blenden muſs.

Herr *von Zach* lieſs an seinen Sextanten zwar die Correctionsschrauben anbringen, aber sie versenken, so daſs man sie nur vermittelst eines Schlüssels umdrehen kann. Bey dieser Einrichtung kann das Instrument nicht leicht wandelbar werden, und man hat doch die Bequemlichkeit, den Sextanten berichtigen zu können. Weil die gefärbten Gläser, wenn sie nicht sehr gut gearbeitet sind, leicht einen Fehler in dem Winkelmessen erzeugen können, so brachte Herr von Zach bey Messung der Sonnenhöhen nur ein gefärbtes Glas vor dem Ocular an, um die beyden Sonnenbilder zugleich zu blenden. Bey den gewöhnlichen Blendungsgläsern werden die Fehler durch die Fernröhre noch vergrössert, welches bey dieser Einrichtung nicht statt finden kann.

Astronomische Uhren.

§. 99.

Die Uhren, welche zu astronomischen Beobachtungen gebraucht werden, sind von zweyerley Art, nehmlich solche, die beym Gebrauch fest stehen müssen, und solche, die auch, indem sie von einem Ort an dem andern gebracht werden, ihren Gang ununterbrochen fortsezen. An jenen ist ein Pendel angebracht, das durch seine Schwingungen die Umlaufszeit der Zeiger bestimmt, und bey dem Anfang eines jeden Schwungs durch das Räderwerk, welches durch ein Gewicht in Bewegung gesezt wird, eine kleine Beschleunigung erhält, welche das ersezt, was es durch Reibung und Widerstand der Luft verlohren hat. Diese haben statt des Pendenls eine *Unruhe (Balancier)*, bey welcher eine Spiralfeder die Stelle der Schwere vertritt und das Räderwerk wird ebenfalls durch eine Feder in Bewegung gesezt. Huygens hat zuerst das Pendel an den festen, die Unruhe an den tragbaren Uhren angebracht, und noch jezt hat man kein besseres Mittel gefunden, den Gang dieser Uhren gleichförmig zu machen. Die erstere Art von Uhren hat man früher zu einer sehr groſsen Vollkommenheit gebracht, als die leztere, die aber, nachdem *Harrison* die Bahn gebrochen, und *Mudge* ein neues *Stoswerk (echappement)* erfunden hatte, nun

auch

auch in einer sehr grofsen Vollkommenheit verfertigt werden, dafs man eine Pendeluhr schon als gut ansehen kann, welche einen so gleichförmigen Gang hat, als die tragbaren Uhren eines Mudge und Emery. Das beste Stoswerk zu den Pendeluhren ist der *Graham-sche Haken*, von dessen guten Ausarbeitung die Genauigkeit der Uhr vorzüglich abhängt. Das Räderwerk der Uhr mufs man so einfach als möglich machen. Der Secundenzeiger wird von der Axe des Steigrades, der Minutenzeiger von der Axe des Stundenrades getragen; die Stunden kann man auf die gewöhnliche Art einen mit dem Minutenzeiger concentrischen Zeiger weisen lassen. Noch einfacher läfst sich dieses machen, wenn man an der Röhre des Minutenzeigers, welche auf der Axe des Stundenrades stekt und durch Friction gehalten wird, ein Getriebe von sechs Zähnen anbringt, und dieses in ein Rad von 144 Zähnen greifen läfst, welches eine Scheibe mit einer Eintheilung in 24 gleiche Theile und beygeschriebenen Stunden von 0 bis 24 trägt. Diese Zahlen erscheinen nach und nach, indem sich die Scheibe dreht in einer Oefnung des Zifferblats, an welcher ein kleiner Zeiger sizt, der die Stunden zeigt. Dem Steigrad gibt man 30 Zähne, daher das Pendel 60 Schwingungen machen mufs, bis es einmal herum kommt, welches in einer Minute geschiehet, wenn das Pendel Secunden schwingt. *Franklin* hat eine sehr einfache Pendeluhr vorgeschlagen, die nur aus drey Rädern besteht, und Stunden, Minuten und Secunden zeigt, Das *Steigrad* hat 30 Zähne, kommt in jeder Minute einmal herum, und trägt den Secundenzeiger, das lezte Rad vollendet einen Umlauf in 4 Stunden und trägt an seiner Axe einen Zeiger, der auf dem in 4mal 60 gleiche Theile getheilten Zifferblatt die Minuten und die in einer Spirallinie herumgeschriebenen Stunden zugleich zeigt, so daſs die Stunden 0, 4, 8, 12; 1, 5, 9; 2, 6, 10; 11, 7, 3; auf vier Halbmessern des Kreises welchen der Zeiger beschreibt zu stehen kommen, die das Zifferblatt in vier Quadranten theilen. Man muſs also hier schon vorher bis auf vier Stunden wissen wie viel Uhr es ist. Die Einrichtung des Räderwerks kann auf folgende Art gemacht werden. Das Steigrad bekommt 30 Zähne und trägt ein Getrieb von 6. Dieses greift in ein Rad von 90 Zähnen, das an seiner Axe wieder ein Getrieb von 6 hat, und vermittelst dieses in ein Rad von 96 Zähnen greift, an welchem eine Walze oder Rolle angebracht ist, um die Schnur mit dem Gewicht aufzunehmen, so wird dieses leztere Rad einen Umlauf machen, wenn das Steigrad deren 240 gemacht hat, denn $\frac{90 \cdot 96}{6 \cdot 6} = 240$. Da nun das Steigrad in jeder Minute einen Umlauf macht, so dauert die Umlaufszeit des lezten Rades 240 Min. oder 4 St.

§. 74.

Der Gang der Pendeluhren hängt also von der Dauer der Schwünge des Pendels, folglich

lich von der Länge desselben und der Grösse der Schwünge ab *). Ein Pendel das Secunden schwingt hat nicht an allen Orten der Erdoberfläche gleiche Länge, wie *Richer* zuerst entdekte, der im J. 1672 lehrte, daſs das Secundenpendel auf der Insel Cayenne um 1,25 Lin. kürzer sey als in Paris. Es folgt hieraus daſs die Schwere in der Gegend des Aequators geringer seye als in Europa. Diese Abnahme der Schwere gegen dem Aequator hin, kommt theils von der durch die Umdrehung der Erde um ihre Axe erzeugten Schwungkraft, theils von ihrer gegen die Pole zusammengedrükten Gestalt her. So fand Bouguer die Länge des Secundenpendels unter der Breite 0° 13′ von 438,69 pariser Linien auf dem Pichincha, unter der Breite von 0° 25′ aber und am Meer = 439,10. Mayer in Kola unter der Breite 68° 52′ von 441,31 Linien; eine Tafel von beobachteten Pendellängen an verschiedenen Orten der Erde findet man in Herrn Prof. Bode's Kenntniſs der Erdkugel S. 85. In Gotha fand Herr *von Zach* die Länge des Secundenpendels = 440,693 Lin. (Suppl. Band zu Bode's astr. Jahrbuch S. 196. Diese Pendellängen beziehen sich auf ein Pendel das aus einem feinen Faden, den man sich ohne Schwere gedenkt, und einem angehängten Gewicht, dessen ganze Schwere man sich in *einem* Punct vereinigt vorstellt, besteht, und ein *einfaches* Pendel heiſst. Ein Pendel, an

*) Kästners höhere Mechanik. S. 326. Aufgabe 33. 2. Auflage.

an welchem mehrere Puncte als schwer betrachtet werden müssen, heist ein *zusammengeseztes* Pendel, an welchem man immer einen Punct angeben kann, in welchem die ganze Masse desselben vereinigt ebenso schwingen würde, als das zusammengesezte Pendel selbst schwingt. Dieser Punct heist der *Mittelpunct des Schwungs*, und sein Abstand von dem Aufhängpunct ist die Länge eines einfachen Pendels, das seine Schwingungen in derselben Zeit macht, in welcher das zusammengesezte die seinigen vollendet. Huygens gab in seinem *Horologium oscillatorium* die Methoden an, den Mittelpunct des Schwunges zusammengesezter Pendel zu finden. Man findet diese Methoden in Hrn. *Hofrath Kästners höheren Mechanik* mit Anwendung auf verschiedene zusammengesezte Pendel und in *Eulers theoria motus corporum solidorum.* Gewöhnlich besteht das Gewicht des Uhrenpendels aus einer *Linse*, die man an der Pendelstange auf und niederschieben kann, um dadurch den Gang der Uhr geschwinder oder langsamer zu machen.

Die Linse seye auf beyden Seiten gleich erhaben, ihre Dike $= 2a$, ihr Durchmesser $= 2b$, Gewicht $= M$. Die Pendelstange ein Parallelepipedum, Länge $= l$, Breite (in der Ebene des Schwungs) $= \beta$, Gewicht $= m$. Die Stange gehe durch die Linse hindurch, und das Gewicht eines Parallelepipedums von derselben Materie, aus welcher die Linse besteht, das die Öfnung der Linse für die Pendelstange ausfüllen würde, seye $= m'$, und L

der

der Abstand des Mittelpuncts der Linse von dem Anfang der Stange: so ist das Moment der Trägheit der durchlöcherten Linse um ihre Axe durch den Schwerpunct senkrecht auf die Ebene des Schwungs des Pendels $= A =$

$$= \frac{1}{10} M \frac{a^4 + 5a^2b^2 + 10b^4}{a^2 + 3b^2} - \frac{1}{12} m' (4\alpha^2 + \beta^2)$$

Das Moment der Trägheit der Pendelstange um eine Axe durch ihren Anfangspunct senkrecht auf die Fläche, deren Breite $= \beta$, seye $= B$, so ist

$$B = \frac{m}{3}(l^2 + \tfrac{1}{4}\beta^2)$$

Der Aufhängpunct seye an dem obern Ende der Pendelstange, so ist die Länge des einfachen Secundenpendels, das seine Schwingungen mit diesem in gleicher Zeit macht

$$= \frac{(M - m')L^2 + A + B}{(M - m')L + \frac{1}{2} m l}$$

Vermittelst dieser Formel kann man also die Abmessungen eines Pendels von der hier vorausgesezten Gestalt, das Secunden schwingen soll, bestimmen.

§. 101.

Die Zeit der Pendelschwünge hängt, wie schon oben bemerkt worden ist, nicht allein von der Länge des Pendels, sondern auch von der Gröſse der Schwünge ab. Wenn die Länge des Pendels $= a$, die Höhe des freyen Falls der Körper in einer Secunde $= g$, und der ganze Bogen, welchen das Pendel beschreibt,

$= 2\varphi$ gesezt wird, so läſst sich die Zeit eines Hingangs durch diesen Bogen durch folgende Reihe ausdrüken

$$\pi\sqrt{\left(\frac{a}{2g}\right)}\left(1+\tfrac{1}{4}(\sin\tfrac{1}{2}\varphi)^2+\tfrac{9}{64}(\sin\tfrac{1}{2}\varphi)^4+\tfrac{25}{256}(\sin\tfrac{1}{2}\varphi)^6+\ldots\ldots\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots.2n}\right)^2(\sin\tfrac{1}{2}\varphi)^{2n}\right)$$

Die Schwingungszeiten verhalten sich also wie diese Reihen; sezt man daher die Zeit eines halben Schwungs oder Hingangs durch den Bogen 2φ einer Secunde gleich, so wird die Zeit eines halben Schwungs desselben Pendels durch einen Bogen $= 2\psi$ seyn $=$

$$\frac{1+\frac{1}{4}(\sin\frac{1}{2}\psi)^2+\frac{9}{64}(\sin\frac{1}{2}\psi)^4+\text{etc.}}{1+\frac{1}{4}(\sin\frac{1}{2}\varphi)^2+\frac{9}{64}(\sin\frac{1}{2}\varphi)^4+\text{etc.}}$$

Es seye $\psi = 2^\circ$, $\varphi = 3^\circ$

so ist $\mathrm{Lg}(\sin\frac{1}{2}\psi)^2 = 0{,}4837106 - 4$

$(\sin\frac{1}{2}\psi)^2 = 0{,}00030459$

$\frac{1}{4}(\sin\frac{1}{2}\psi)^2 = 0{,}00007615$

ebenso $\frac{1}{4}(\sin\frac{1}{2}\varphi)^2 = 0{,}00017131$

Die folgenden Glieder werden so klein, daſs man sie ohne merklichen Fehler weglassen kann; folglich ist die gesuchte Zeit $= \frac{1{,}00007615}{1{,}00017131}$ $= 0{,}99990485$ Secunden und die Uhr würde hienach in einem mittlern Sonnentag voreilen um 8,23 Secunden. Sezt man die Reihe welche zu der Schwingungszeit T gehört $= S$, die welche zu t gehört $= s$, die dazu gehörigen Bogen des Schwungs 2φ und 2ψ, Anzahl der Schläge in einem mittlern Sonnentag $=$ n und N, so verhält sich

$$T : t = S : s$$
$$T : t = N : n$$
$$\overline{S : s = N : n}$$
$$S - s : s = N - n : n$$

Also die Voreilung der Uhr in einem mittlern Sonnentag $= \dfrac{n(S-s)}{s}$

Gebraucht man nun die beyden ersten Glieder der Reihen für S und s, so wird

$$N - n = n\left(\frac{1 + \frac{1}{4}(\sin\frac{1}{2}\varphi)^2 - 1 - \frac{1}{4}(\sin\frac{1}{2}\psi)^2}{1 - \frac{1}{4}(\sin\frac{1}{2}\psi)^2}\right)$$

$$= \frac{\frac{n}{4}\,((\sin\frac{1}{2}\varphi)^2 - (\sin\frac{1}{2}\psi)^2)}{1 - \frac{1}{4}(\sin\frac{1}{2}\psi)^2}$$

$$= \frac{\frac{n}{4}\sin\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)}{1 - \frac{1}{4}(\sin\frac{1}{2}\psi)^2}$$

Oder beynahe

$$N - n = \frac{n}{4}\sin\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)$$

Wendet man diese Formel auf das obige Beyspiel an, so wird $n = 86400$; $\varphi = 3^\circ$; $\psi = 2^\circ$; $\frac{\varphi+\psi}{2} = 2^\circ\,30'$; $\frac{\varphi-\psi}{2} = 30'$; $\frac{n}{4} = 21600$

$$\mathrm{Lg}\,21600 = 4{,}3344538$$
$$\mathrm{Lg}\sin\frac{\varphi+\psi}{2} = 8{,}6396796 - 10$$
$$\mathrm{Lg}\sin\frac{\varphi-\psi}{2} = 7{,}9408419 - 10$$
$$\mathrm{Lg}(N-n) = 0{,}9149753$$
$$N - n = 8{,}2219 \text{ Secunden.}$$

Wenn

Wenn man das Verhältniſs der Bogen φ und ψ beybehält, sie selbst aber kleiner annimmt, so wird der Unterschied der ihnen zugehörigen Anzahl von Schlägen in einem mittlern Sonnentag geringer. Sezt man z. B. $\psi = 1^\circ$, $\varphi = 1^\circ 30'$, so beträgt die Voreilung der Uhr nur 2,05 Secunden. Je kleiner man also die Schwünge des Pendels einer Uhr macht, desto weniger wird ihr gleichförmiger Gang durch die Aenderungen der Schwingungsbogen des Pendels gestört. Bey der Pendeluhr auf dem Observatorio in *Greenwich* war die Gröſse des Schwungs im Febr. 1787 $= 3^\circ 54'$; ($1^\circ 57'$ auf jeder Seite der Verticallinie) im Sept. 1787 $= 2.(2^\circ 7')$. Hienach hätte die Uhr im Sept. täglich um $1'',43$ Secunden langsamer gehen sollen, als im Februar. Allein das Pendel wurde d. 4. Jul. verkürzt. *Astronomical observations made at the royal observatory at Greenwich 1787 by N. Maskelyne.* Wenn also die Länge des Pendels einer Uhr sich nicht ändert, so eilt sie doch im Winter vor, wenn die Schwingungen wegen der Verdikerung des Oels kleiner werden. Man bemerkt dies an Uhren, die mit guten Compensationspendeln versehen sind, z. B. an der *Sheltonschen* Uhr auf der Göttingischen Sternwarte, welche im Sommer gegen 2 Sec. täglich langsamer geht als im Winter.

§. 102.

Huygens brachte an seinen Uhren die Pendel auf eine Art an, die groſse Schwingungen des Pendels erforderte. Weil nun bey grossen

sen Schwingungen eine kleine Aenderung in dem Bogen des Schwungs schon eine beträchtliche Aenderung in der Zeit der Schwingungen hervorbringt, so suchte er seinen Pendeln eine solche Einrichtung zu geben, daſs groſse und kleine Schwingungen in derselben Zeit erfolgen sollten. Er fand daſs die *Cycloide* diese Eigenschaft habe, und hieng daher die Pendel zwischen zweyen cycloidalisch gebogenen Blechen an einem Faden auf, der beym Schwingen abwechselnd sich auf diese Bleche aufwikelte, und sich wieder davon abwikelte, so daſs die Schwingungen wirklich in einer Cycloide geschahen, weil die durch Abwiklung der Cycloide entstandene Linie wieder dieselbe Cycloide ist. Allein die Cycloide hat, wie Euler zeigte, nur in dem leeren Raume die Eigenschaft, daſs groſse und kleine Schwingungen in ihr in einerley Zeit erfolgen, bey einem zusammengesezten Pendel nicht einmal im leeren Raume. Die Frfindung des englischen Hakens oder Grahamschen Ankers macht aber diese Verbesserung des Pendels entbehrlich, weil man durch jenes *Echappement* sehr kleine Schwingungen erhalten kann.

§. 103.

Der Widerstand der Luft, welchen die Pendel bey ihrer Bewegung leiden, wird desto gröſser, je gröſser die beschriebenen Bogen sind, und je geringer das specifische Gewicht der Linse ist. Auch aus diesem Grunde sind kleine Schwingungen den groſsen vorzuziehen. Dem Gewicht des Pendels gibt man die Gestalt

stalt einer Linse, um den Widerstand der Luft zu vermindern, und verfertigt sie aus einer messingenen mit Bley ausgegossenen Schale. Um das Reiben am Aufhängungspunct zu vermindern, hat man sie anfangs an einem Faden aufgehängt; weil dieser aber sich leicht ausdehnt und zusammenzieht nach der verschiedenen Trokenheit der Luft, so gebraucht man jezo anstatt der Fäden stälerne Federn, dergleichen zu den Taschenuhren gebraucht werden, oder man gibt oben den Pendelstangen ein paar stählerne Zapfen, die unterwärts gekehrte Schneiden haben, und mit diesen in halbcylindrischen Hölungen, die sich in unterlegten Platten von gehärtetem Stahl oder Agat befinden, liegen, wodurch das Pendel nach Art eines Wagbalkens aufgehängt wird. Diese Art die Pendel aufzuhängen (suspension à couteaux) ziehen einige Künstler und besonders Berthoud der Aufhängung mit Federn vor. Berthouds Versuche zeigen wirklich, daſs erstere Art dem Pendel weniger Widerstand entgegensezt als die leztere. Allein mit der Zeit verlieren die stählerne Schneiden und die Unterlagen ihre Politur, und verursachen alsdann eine stärkere Reibung als der von der Unbiegsamkeit der Federn herkommende Widerstand beträgt. Es scheinen daher diese wegen ihrer Dauerhaftigkeit den Vorzug vor jenen zu verdienen.

§. 104.

Auf den Gang der Pendeluhren wirken hauptsächlich auch die Abwechselungen der Wärme

Wärme und Kälte, weil die Pendelstange durch die Wärme länger und durch die Kälte kürzer wird. Daher gehen die Pendeluhren im Sommer langsamer als im Winter. La Lande sezt die tägliche Voreilung einer Uhr mit einer eisernen Pendelstange im Winter auf 20 Sec. wenn sie im Sommer nach mittlerer Sonnenzeit geht *). Ebenso fand es auch H. Hofr. Kästner an einer von Kampe verfertigten Uhr. *(Ueber die Aenderung des Gangs der Pendeluhren, Göttingen.* 1778.) Aus Beobachtungen, die Herr Schulze auf der Berliner Sternwarte über den Gang zwoer Pendeluhren anstellte, folgt diese Voreilung = 15 Sec. *(Berlin. astron. Jahrbuch oder Ephemeriden für* 1783.) *Graham* kam auf den Gedanken, die Pendelstange von *Ebenholz* oder *Nuſsbaum* zu machen, weil das Holz nach der Länge der Fasern durch die Wärme wenig verändert wird, es ist aber der Wirkung der Feuchtigkeit und Trokenheit der Luft unterworfen, und wirft sich daher leicht. *Wollaston* hat über eine mit einer hölzernen Pendelstange versehene Uhr ein ganzes Jahr hindurch Beobachtungen angestellt, die er in den philosophical Transactions bekannt gemacht hat **). Die Uhr gieng den *Winter* über *langsamer*, und im *Sommer geschwinder* als sie der mittlern Zeit nach gehen sollte. Die hölzerne Pendelstange hat sich also in der Kälte verlängert, und in der Wärme verkürzt, welches wohl von der in

*) Astronomie Tom. II. 2462 troissieme édition.
**) Berl. astron. Jahrbuch fur 1776 S. 215 Samml.

in dem Holz befindlichen Feuchtigkeit herrühren mag. Die gröste tägliche Veränderung gieng nicht viel über 2 Secunden, die gröste Voreilung im Junius betrug in 30 Tagen 56 Secunden. Die Stange war aus Fichtenholz verfertigt. Herr Inspector *Köhler* in Dresden verfertigte eine Pendelstange aus Fichtenholz und Messing *), wo die Theile des Messings sich zu den Theilen des Holzes wie $7\frac{1}{2}:28$ verhielten. Das Holz wurde noch zu lang gefunden, denn die Uhr gieng bey zunehmender Wärme noch etwas zu geschwinde.

§. 105.

Graham machte mehrere Versuche mit einer Art von *Queksilberthermometer*, das er an dem Pendel anbrachte, um durch das Steigen des Queksilbers bey der Wärme den Mittelpunct des Schwungs um eben so viel zu erhöhen, als er durch die Ausdehnung der Pendelstange herabgerükt worden war, und bey der Erkältung ebenfalls den Mittelpunct des Schwungs in derselben Entfernung von dem Aufhängungspunct zn erhalten. Er zog aber nachher dieser Art von Compensation das von *Harrison* schon im Jahr 1726 erfundene Compensationspendel vor, und verfertigte eines nach dieser Einrichtung 1740. Man nennt diese Pendel *rostförmige* Pendel (gridiron pendulums) weil sie aus mehreren mit einander parallel laufenden und durch Querbande verbundenen Stangen bestehen, die ihnen die Gestalt

*) Berl. astron. Jahrbuch f. 1782. S. 150. Samml.

Gestalt eines Rostes geben. Beschreibungen von diesen Compensationspendeln geben la Lande und Berthoud *); sie bestehen aus fünf *eisernen* und vier *messingenen* Stangen, die so mit einander verbunden sind, daſs die messingenen Stangen die Linse um eben so viel erhöhen, als sie durch die eisernen Stangen herabgelassen wird, wenn durch die Wärme diese Stangen ausgedehnt werden. Man hat jezo etwas einfachere Compensationspendel, zu welchen nur fünf Stangen erfordert werden, zwey von *Zink* und drey von *Eisen*. Auf der Herzoglichen Sternwarte in Gotha befindet sich eine vortrefliche von *Arnold* verfertigte Pendeluhr, die mit einem solchen aus Eisen und Zink zusammengesezten Pendel versehen ist. Die 45ste Figur Taf. VI. stellt dieses Pendel nach den vom Herrn *von Zach* mir mitgetheilten Abmessungen vor. An der Stahlfeder *fc* hängt die eiserne Stange *cp*. Diese trägt vermittelst des Querstüks *qq* bey *p* die beyden Zinkstangen *qq*, *qq*, welche vermittelst des Querstüks *a* die beyden eisernen Stangen *rr*, *rr* unterstüzen, die durch das Stük *d* mit einander verbunden sind. Die Linse ist in der Mitte durchbrochen, und stellt zwey Abschnitte von Linsen vor, die nur bey *eg*, *hi* und vermittelst der Brüke *t* mit einander zusammenhängen. Eine Schraube kl, deren Mutter in dem Stük *d* ist, unterstüzt mit ihrem Kopf *k* die Linse, und dient zur Auf- und Nie-

*) Astronomie T. II. 2463. et suiv. F. Berthoud Essai sur l'horlogerie.

Die Arnoldsche Uhr kostet 100 Guineen.

Niederbewegung derselben. Weil nun die Ausdehnung des Zinks durch die Wärme viel gröſser ist als die des Eisens, so werden sich bey zunehmender Wärme die beyden Zinkstangen mehr ausdehnen, als die Eisenstange *cp*, folglich wird das Stük *a* in die Höhe gehoben; allein die eisernen Stangen *rr*, *rr* und die Schraube kl, die die Linse tragen, dehnen sich ebenfalls aus, und bringen die Linse wieder tiefer herunter, und zwar wenn die eisernen Stangen das gehörige Verhältniſs gegen die von Zink haben, genau um eben so viel, als das Querstük *a* erhoben wurde. Die

		p. Z.	Lin.
Länge der Stahlfeder *fc* ist	=	0	11,0
Länge der Eisenstange *cq*	=	35	11,8
— der Zinkstangen *qq*	=	21	4,0
— der Eisenstangen *rr*	=	22	11,8

Sowohl die Eisen- als Zinkstangen sind cylindrisch, erstere 2,7 leztere 4,4 Lin. dik. Die Stangen sind noch durch ein Querband *mn* mit einander verbunden, das mit den Stangen *rr*, *rr*, durch Stifte verbunden ist, den Stangen *qq*, *qq*, *cp* aber eine freye Bewegung verstattet. Die Stangen *rr*, *rr* sind mit den Querstüken *a* und *d* durch Stifte verbunden, und machen mit denselben eine zusammenhängende Rahme aus, und eben so die Zinkstangen mit den Stüken *a* und *b*. In lezterem stekt die eiserne Stange *cp*, und ist durch einen Stift befestigt, geht durch ein Loch in dem Querstük *a*, und hat daselbst eine freye Bewegung. Alle fünf Stangen liegen in *einer* Ebene, nehmlich in der Ebene des Schwungs.

§. 106.

35,11,8
11,0
36 10,8

36 8.8 6 50

§. ~~105.~~ 106

Man hat bemerkt, daſs der Gang der Uhr eine Störung leidet, wenn das Uhrgewicht der Linse gegenüber zu stehen kommt, die man der Gravitation des Gewichts gegen die Linse zuschreibt. Deswegen führte man die Schnur über Rollen an die hintere Seite des Pfeilers, an welchem die Uhr befestigt ist, und lieſs daselbst das Uhrgewicht herabhängen. Auf der Herzoglichen Sternwarte in Gotha ist die Einrichtung dazu gemacht, daſs man das Gewicht in eine in den Boden gemachte Hölung hinunter lassen kann, so daſs das Gewicht auch wenn die Uhr aufgezogen ist nicht über die Fläche des Bodens hervorkommt. Ich habe an meiner Uhr bemerkt, daſs das Uhrgewicht in eine oscillirende Bewegung kam, wenn es der Linse nahe war. Diese Bewegung war am stärksten, wenn der Schwerpunct des Gewichts schon gegen vier Zolle unter dem Mittelpunct der Linse war. An dieser Stelle gab dieses Gewicht mit seiner Schnur ein mit dem Uhrpendel gleichzeitiges Pendel ab, wo also jenes durch das leztere immer beschleunigt wurde, welches nicht der Fall war, wenn das Gewicht dem Mittelpunct der Linse gerade gegenüber stund, und seine Schwünge in kürzerer Zeit machte, als das Uhrpendel, daher dieses der Bewegung des Gewichts zuweilen entgegenwürkte. *Emery* in London hat ähnliche Bewegungen an einem Pendel bemerkt, das er nahe bey einem in Bewegung gesezten Pendel aufgehängt hatte.

§. 107.

Die Vervollkomnung der tragbaren Uhren war noch weit grösern Schwierigkeiten unterworfen. Die Kraft der Hauptfeder, wodurch das Räderwerk in Bewegung gesezt wird, nimmt mit dem Ablaufen der Uhr ab, wodurch ihr Gang immer langsamer wird. Zuerst suchte man den Zug der Feder durch eine an dem lezten Rad angebrachte excentrische Scheibe auf welche eine Feder drükte, die der Hauptfeder, wenn die Uhr aufgezogen war, mehr als gegen dem Ablaufen der Uhr hin entgegenwürkte, gleichförmig zu machen. Besser bewerkstelligte man dieses vermittelst einer an dem lezten Rad angebrachten conischen Walze, auf welche sich eine mit der Trommel, in welche die Feder eingeschlossen ist, verbundene Kette aufwikelt, so dafs die Feder vermittelst der Kette bey ihrer anfänglichen stärkern Spannung auf einen kürzern Hebelsarm würkt, der sich in demselben Verhältnifs verlängert, in welchem die Kraft der Feder bey dem Ablaufen der Uhr abnimmt. Graham erfand ein Stofswerk, das aus einem holen Halbcylinder von Stahl besteht, an dessen Axe die Unruhe befestigt ist, und dessen beyde Schneiden durch die schief gearbeiteten Zähne des Steigrades bald auf diese, bald auf jene Seite abwechslend getrieben werden. Nach jedem Schlag fällt ein Zahn des Steigrades auf die innere hole oder äufsere convexe Fläche des Cylinders so auf, dafs die Richtung seines Druks nach der Axe des Cylinders geht. Diese Einrichtung machte-

Die Cylinderuhren kauft man
jetzt 1843 für 40 Gulden –
u. 1770 kosteten sie noch 100 Gulden

te die conische Walze entbehrlich, wenn man eine Uhr blos zum gewöhnlichen Gebrauch verlangte. In einem weit höhern Grad leisten dieses die von *Mudge* in London gegen das Jahr 1760 erfundenen *freyen Stofswerke*, welche die Eigenschaft haben, dafs die Unruhe, nachdem sie durch das Räderwerk einen Stofs zur Fortsezung ihrer Bewegung erhalten hat, jedesmal ganz von dem Räderwerk abgesondert *freye* Schwingungen macht. Versuche zeigen, dafs man bey diesen Uhren die conische Walze zur Abgleichung der Feder entbehren könnte; zu mehrerer Sicherheit bringt man sie aber dennoch an. Harrison brachte bey seiner Uhr an dem nächsten Rade nach dem Steigrad eine feine Feder an, die immer nach einem Verflufs von 2 Sekunden wieder durch die Hauptfeder aufgezogen wurde, um die bey seinem Stofswerk, das im Grunde die bey Taschenuhren noch gewöhnliche Lappenspindel ist, nothwendige gleiche Kraft des Steigrades zu erhalten. Mudge hält diese Einrichtung für einen Behelf schlechter Arbeiter, wenn man ein gutes freyes Stofswerk an der Uhr anbringt.

§. 108.

Nun war aber noch eine Störung des gleichförmigen Ganges der Uhr aus dem Wege zu räumen, welche die Uhr durch die Abwechselung der Wärme und Kälte leidet, die auf tragbare Uhren mit der Spiralfeder einen weit stärkern Einflufs hat als auf die Pendeluhren. Denn die Schwere, welche an dem-

 selben

selben Ort der Erde immer gleich groſs ist, wird hier an der Unruhe durch die Spiralfeder ersezt, deren Kraft sich mit den Abwechselungen der Temperatur der Luft ändert. Das Moment der Trägheit der Unruhe ist denselben Wirkungen ausgesezt. Da die Kraft der Spiralfeder mit ihrer Verkürzung oder Verlängerung, und damit auch die Anzahl der Schwünge der Unruhe in einer gegebenen Zeit wächst oder abnimmt, so brachte Harrison an seiner Uhr eine Vorrichtung an, wodurch die Spiralfeder bey zunehmender Wärme verkürzt, bey abnehmender verlängert wurde. Die Bewegung wurde durch zwey aufeinander genietete Bleche von Stahl und Messing, hervorgebracht; der aus den beyden Metallen zusammengesezte Streifen muſste sich, wenn er bey einer gewissen Temperatur gerade war, bey einer Veränderung derselben wegen der ungleichen Ausdehnung der Metalle krümmen, so wie sich ein trokenes Brett krümt, wenn man es auf der einen Seite naſs macht. *Emery* bringt aber die Compensation wegen der Wärme und Kälte durch Veränderung des Moments der Trägheit der Unruhe hervor, indem er zwey kleine messingene Gewichte an den beyden Endpuncten eines Durchmessers vermittelst eines nach Harrisons Methode aus Messing und Stahl zusammengesezten schlangenförmig gebogenen Streifens anbringt, die daher ihren Abstand von dem Mittelpunct der Unruhe nach den verschiedenen Graden der Wärme gehörig ändern. An den Endpuncten des auf jenem senk-

senkrechten Durchmessers befinden sich zwey ähnliche Gewichte, die zur Regulirung der Uhr dienen, und deswegen sich in Schrauben endigen, um sie dem Mittelpunct der Unruhe näher zu bringen oder weiter davon zu entfernen. Zu welchem grofsen Grad der Vollkommenheit man diese Uhren, die man Zeithalter (Timekeeper) oder Chronometer nennt, gebracht habe, kann man aus den vielen Beweisen, die Herr *von Zach* in H. Prof. *Bode* astron. Jahrbücher eingerükt hat, sehen. Howells in London hat kürzlich einige Vortheile an seinen Chronometern angebracht, die auf eine verlängerte Dauer der Richtigkeit ihrer Bewegung einen merklichen Einflufs haben. Ein Timekeeper von Howells kostet 100 Guin.

Berichtigung der Uhr.

§. 109.

Die Zeit einer Beobachtung wird nach *wahrer* oder nach *mittlerer Sonnenzeit* oder nach *Sternzeit* angegeben; eine von diesen dreyen kann leicht in die andere verwandelt werden. Man bekommt sie, wenn man weifs, was die Uhr zeigte, da die Sonne oder ein Stern, dessen Lage auf der Himmelskugel man kennt, durch den Mittagskreis gieng, und was sie in dem Augenblik der Beobachtung zeigte, vorausgesezt dafs 24 Stunden der Uhr genau einen wahren Sonnentag oder einen mitlern oder Sterntag ausmachen, oder das Voreilen der Uhr in 24 Stunden gegeben sey. Da ein wahrer Sonnentag nicht immer von gleicher

Länge ist, so kann eine gleichförmig gehende Pendeluhr nicht immer wahre Zeit zeigen, sondern sie wird der wahren Zeit bald vorauseilen, bald gegen dieselbe zuükbleiben. Man hat zwar Uhren so eingerichtet, daſs sie ihren Gang der Ungleichheit der wahren Sonnentage gemäſs änderten, oder durch sehr zusammengesezte Räderwerke mitlere und wahre Zeit zugleich angaben. Allein solche Uhren sind nicht allein sehr entbehrlich, sondern auch zu astronomischen Beobachtungen nicht brauchbar, weil es nicht möglich ist, ihnen die gehörige Genauigkeit zu geben.

Zur Beobachtung der geraden Aufsteigung der Sterne sind Uhren die man nach Sternzeit gehen läſst, besonders bequem; man findet sie daher auch auf allen guten Sternwarten. Zu astronomischen Beobachtungen, die man zur Bestimmung der geographischen Lage der Oerter anstellt, scheinen mir, besonders für einen reisenden Beobachter, Uhren die nach mitlerer Sonnenzeit gehen bequemer.

Bestimmung der Zeit des Durchgangs eines Sterns durch den Mittagskreis.

§. 110.

Das leichteste Mittel zur Bestimmung der Zeit der Culmination eines Sterns sind *correspondirende Höhen.* Man miſst nehmlich eines Sterns Höhe vor seinem Durchgang durch den Mittagskreis und bemerkt die Zeit der Uhr, da der Stern diese Höhe erreichte. Nach seinem Durchgang durch den Mittagskreis wartet man die Zeit ab, da der Stern wieder dieselbe Höhe erreicht, so ligt der Augenblik des Durchgangs des Sterns durch den Mittagskreis in der Mitte zwischen den beyden Augenbliken, da der Stern vor und nach seiner Culmination dieselbe Höhe hatte. Denn die Höhe eines Sterns wird durch den Stundenwinkel, die Pohlhöhe und durch seine Abweichung bestimmt, bleiben die beyden lezteren Stüke ungeändert, so gehören gleichen Höhen gleiche Stundenwinkel zu, folglich liegt der Augenblik der Culmination in der Mitte zwischen den beyden Zeitpuncten, da der Stern dieselbe Höhe hatte. Man sieht hieraus, daſs man die Höhen selbst nicht zu wissen braucht, sondern nur von ihrer Gleichheit muſs versichert seyn; der Gang der Uhr wird zwischen den beyden Beobachtungen als gleichförmig vorausgesezt. Um die Zeit der Culmination desto sicherer zu erhalten, nimmt man Vor- und Nachmittags mehrere Höhen, und leitet aus jedem Paar die Zeit der Culmination her, ihre Uebereinstimmungen unter einander zeigen die Genauigkeit der Beobachtungen an, und man nimmt, wenn sie von einander verschieden sind das arithmetische Mittel aus allen, das heiſst, man dividirt ihre Summe durch ihre Anzahl.

§. 111.

Wenn man correspondirende Höhen der Sonne nimmt, so sind die zu gleichen Höhen gehörende Stundenwinkel einander nicht gleich, weil sich die Abweichung der Sonne bestän-

beständig ändert, Es seye die Höhe der Sonne $= Sh$ Fig. 46. Taf. IV. $= h$, Polhöhe $= PO$ $= \varphi$, Abweichung der Sonne $= \delta$, so hat man in dem sphärischen Dreyek die drey Seiten $Pz = 90^\circ - \varphi$, $Ps = 90^\circ - \delta$, $Zs = 90^\circ - h$. Der Stundenwinkel $ZPs = t$, folglich

$$\text{I. } \sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$

Des Nachmittags seye die Abweichung der Sonne $= d$, ihre Höhe der vormittägigen h gleich, der dazu gehörige Stundenwinkel $= T$, so ist wiederum

$$\text{II. } \sin h = \sin\varphi \sin d + \cos\varphi \cos d \cos T$$

also aus I. $\cos t = \dfrac{\sin h - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta}$

aus II. $\cos T = \dfrac{\sin h - \sin\varphi \sin d}{\cos\varphi \cos d}$

Cos T wird kleiner als cos t und also T grösser als t wenn d grösser ist als δ. Zieht man die zweyte Gleichung von der ersten ab, so hat man

$$\cos t - \cos T = \frac{\sin h - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta} - \frac{\sin h - \sin\varphi \sin d}{\cos\varphi \cos d}$$

$$= \frac{\sin h (\cos d - \cos\delta) + \sin\varphi (\sin d \cos\delta - \cos d \sin\delta)}{\cos\varphi \cos\delta \cos d}$$

oder $2 \sin\left(\dfrac{T-t}{2}\right) \sin\left(\dfrac{T+t}{2}\right) =$

$$\frac{(\sin\varphi - \sin h \sin\delta)\sin(d-\delta) - 2\sin h \cos\delta \sin\left(\dfrac{d-\delta}{2}\right)^2}{\cos\varphi \cos\delta \cos d}$$

Nun beträgt die gröste tägliche Aenderung der Abweichung der Sonne 23′ 42″ und die Zwischenschenzeit der Beobachtungen höchstens 12 St. (einen Fall ausgenommen, der in der Folge wird betrachtet werden), also $\frac{d-\delta}{2}$ nicht mehr als $5'55''$

$$\text{aber Lg}\sin\left(\frac{d-\delta}{2}\right)^2 = 14{,}4716060-20$$

$$\text{Lg}\,\frac{1}{\text{e}} = 5{,}3144251 \quad (\S\,85)$$

$$0{,}7860311-1$$

gehört zu 0,61 Sec. welches nur 0,04 Sec. in Zeit beträgt, also kann man ohne merklichen Fehler sezen

$$2\sin\left(\frac{T-t}{2}\right)\sin\left(\frac{T+t}{2}\right) = \frac{(\sin\varphi-\sin h\sin\delta)\sin(d-\delta)}{\cos\varphi\cos\delta\cos d}$$

oder weil die Bogen $\frac{T-t}{2}$, $d-\delta$ klein sind

$$(T\text{-}t)\sin\left(\frac{T+t}{2}\right) = \frac{d-\delta}{\cos\varphi\cos\delta^2}(\sin\varphi\text{-}\sin h\sin\delta)$$

Aus I ist

$$\sin h\sin\delta = \sin\varphi\,\sin\delta^2 + \cos\varphi\,\sin\delta\cos\delta\cos t$$

$$\text{also } (T-t)\sin\left(\frac{T+t}{2}\right) =$$

$$\frac{d-\delta}{\cos\varphi\cos\delta^2}(\sin\varphi\cos\delta^2 - \cos\varphi\sin\delta\cos\delta\cos t)$$

$$= (d-\delta)\,(\text{tang}\,\varphi - \text{tang}\,\delta\cos t)$$

oder

oder weil $\frac{T-t}{2}$ sehr nahe $= t$ ist

$$T-t=(d-\delta)\left(\frac{\tang\varphi}{\sin t}-\tang\delta\,\mathrm{cotang}\,t\right)$$

um so viel wäre der Stundenwinkel nach dem Durchgang der Sonne durch den Mittagskreis gröſser als der vormittägiche. Näme man also das Mittel aus beyden Zeiten für den Mittag an, so würde dieser um die Hälfte des Bogens $T-t$ in Zeit verwandelt zu spät angegeben. Gehen nun 24 Stunden der Uhr auf einen wahren Sonnentag, so bekömmt man die Verbesserung in Zeit, wenn man $d-\delta$ in Secunden ausdrükt, und mit 2.15 dividirt; folglich wäre die Mittagsverbesserung in Sec. ausgedrükt

$$-\frac{(d-\delta)}{30}\left(\frac{\tang\varphi}{\sin t}-\tang\delta\,\mathrm{cotg}\,t\right)$$

Ist die Sonne in den niedersteigenden Zeichen, so wird die Verbesserung additiv. Die Breite, Abweichung und Stundenwinkel braucht man nur bis auf einige Minuten zu wissen. Die Abweichung der Sonne sammt ihrer täglichen Aenderung bekommt man aus astronomischen Tafeln oder Kalendern, den Stundenwinkel t mit hinlänglicher Genauigkeit aus der halben Zwischenzeit der Beobachtungen *).

§. 112.

*) Eine sinnreiche Methode, die Zeitgleichung allein aus den Beobachtungen herzuleiten lehret H. *Rittenhouse* in den Transactions of the american philosophical society held at Philadelphia Vol. I. pag. 155. II. edition. *De Zach* tabulae motuum Solis p. 90.

Um den Gebrauch dieser Formel zu zeigen, wende ich sie auf folgendes Beyspiel an. Ich nahm den 27. März 1794. auf der hiesigen Sternwarte mit dem zehnzolligen Sextanten von Troughton folgende correspondirende Höhen. In der ersten Columne sind die beobachteten gedoppelten Höhen des obern Sonnenrandes, in der zweyten die Zeiten vor dem Durchgang der Sonne durch den Meridian, in der dritten die nach ihrem Durchgang, da sie die beygeschriebenen Höhen erreichte, nach der *Sheltonschen* Uhr, die nach Sternzeit geht. Weil ich diese Höhen in der Folge noch zu anderer Absicht gebrauchen werde, so bemerke ich, daſs der Fehler des Zeigers (§. 68.) von 1′ 0″ zu den beobachteten Höhen addirt werden muſs.

° ′	U. ′ ″	U. ′ ″
45 50	20 46 9,0	4 16 4,0
46 40	— 49 9,0	— 13 3,0
50	— 49 45,0	— 12 28,0
47 0	— 50 20,0	— 11 51,0
— 10	— 50 55,0	— 11 15,0
— 20	— 51 34,0	— 10 38,0
— 30	— 52 9,5	— 10 2,5
— 40	— 52 45,0	— 9 25,5
— 50	— 53 22,0	— 8 48,0
48 0	— 53 59,0	— 8 13,5
— 10	— 54 35,0	— 7 36,0
— 30	— 55 48,0	— 6 24,0
— 40	— 56 25,0	— 5 47,5
— 50	— 57 1,0	— 5 10,5
49 0	— 57 38,0	— 4 34,0
— 10	— 58 15,0	— 3 56,0
— 20	— 58 52,0	— 3 19,0
— 30	— 59 28,0	— 2 43,0
— 50	21 0 43,0	4 1 29,0

Zieht

Zieht man die Zeit der ersten Beobachtung von 24 St. ab, so erhält man 3 St. 13′ 51″,0 als die Zeit welche von dem Augenblik der Beobachtung bis zu dem Zeitpunct da die Uhr 24 oder o zeigte verflossen ist; folglich wäre, die Veränderung der Abweichung der Sonne = o gesezt, der gedoppelte Stundenwinkel = $3^{St.}$ 13′ 51″,0 + $4^{St.}$ 16′ 4″,0 = $7^{St.}$ 29′ 55″,0; folglich Stundenwinkel in Zeit = $3^{St.}$ 44′ 57″,5 dieses zu der Zeit der vormittägichen Beobachtung $20^{h.}$ 46′ 9″,0 addirt, gibt Zeit der Uhr im Mittag $24^{U.}$ 31′ 6,″5. Oder man addire zu der nachmittägichen Beobachtung 24 Stunden (weil von 24 oder o Uhr an von neuem gezählt wird) und nehme das arithmetische Mittel aus dieser Zeit und der vormittägichen, so hat man die Zeit der Uhr im Mittag, an welcher noch die oben gezeigte Verbesserung angebracht werden muſs.

Zeit der Uhr Vormitt.	$20^{U.}$	46′	9,″0	
— — — Nachm.	28	16	4, 0	
Summe	49	2	13,0	
Mittel	24	31	6,5	(unverbesserter Mittag)

beyde Zeiten von einander abgezogen geben

Zwischenzeit der Beobachtung	$7^{St.}$	29′	55′	
halbe Zwischenzeit	3	44	57,5	
betr. in Graden	56°	14′	22,5	(15 Grade auf eine Stunde gerechnet)
$\varphi =$	51	31	54	

(Da die Uhr nach Sternzeit geht, so gibt eine Stunde nicht ganz 15° Veränderung des Stundendenwinkels der Sonne; dieses beträgt für 3 St. 44′ 57″,5, 9′ 15″ um welches t kleiner müſste angenommen werden. Allein diese Aenderung des Stundenwinkels bringt keine merkliche Aenderung in der Mittagsverbesserung hervor).

Die Abweichung der Sonne im Mittag für den Berliner Meridian aus astr. Jahrbuch für 1794 ist $= 2^{\circ}\ 47'\ 5''$ die man hier ungeändert beybehalten kann. Die tägliche Aenderung der Abweichung der Sonne vom 26 auf den 27. beträgt 23′ 27″; vom 27 auf den 28 aber 23′ 25″, folglich im Mittel 23′ 26″, daher ihre Veränderung in $7\frac{1}{2}$ Stunden $= 439'',3 =$ $= d - \delta$.

$$\frac{d-\delta}{30} = 14'',6433$$

$$\mathrm{Lg}\ \frac{d-\delta}{30} = 1,1656390$$

$$\mathrm{Lg\,Tang}\,\varphi = \underline{0,0998875}$$

$$1,2655265$$

$$\mathrm{Lg}\sin t = \underline{0,9197901 - 1}$$

$$1,3457364 \quad \text{gehört zu } 22'',168$$

$$\mathrm{Lg}\,\frac{d-\delta}{30} = 1.1656390$$

$$\mathrm{Lg}\ Tg\,\delta = 8,6870013 - 10$$

$$\mathrm{Lg\,Cotg}\,t = \underline{9,8250749 - 10}$$

$$0,6777152 - 1 \ \text{gehört zu } \underline{0,476}$$

$$\text{Unterschied} = 21'',692$$

Da nun die Sonne in den aufsteigenden Zeichen war, so muſs diese Verbesserung von dem Mittel abgezogen werden, folglich ist die

Zeit der Uhr im wahren Mittag $0^{U.}\ 31'\ 6'',5 - 21'',692 = 0^{U.}\ 30'\ 44'',808$.

Anmerkung. Wenn man die Mittagsverbesserung genau haben wollte, so müfste man obige Mittagsverbesserung noch in dem Verhältnifs von 24 St. : 24 St. 3′ 56″ vergröfsern, weil die Uhr in einem Sonnentag 24 St. 3′ 56″ zeigte, und wenn man ihre tägliche Voreilung von 1,8 Sec. noch in Rechnung bringen wollte, in dem Verhältnifs von 24 St. : 24 St. 3′ 57″,8 dieses macht die Mistagsverbesserung = 21″,751. Man sieht hieraus wie man rechnen müfste, wenn der Gang der Uhr merklich von der mitlern Zeit abwiche.

§. 113.

Wenn man mehrere correspondirende Höhen genommen hat, so hat man nicht nöthig die Mittagsverbesserung für jedes Paar besonders zu berechnen. Man nimmt aus den verschiedenen Resultaten, welche jedes Paar Höhen gab, das Mittel und berechnet die Verbesserung des Mittags für dieses Mittel, indem man die halbe Zwischenzeit zweyer in der Mitte liegender Beobachtungen gebraucht, weil für kleine Zwischenzeiten die Verbesserung des Mittags beynahe der Zeit proportional ist. So geben obige Beobachtungen den unverbesserten Mittag im Mittel um $0^{U.}\ 31'\ 5'',8947$; die halbe Zwischenzeit der Beobachtungen für dieses Mittel $3^{St.}\ 37'$, vermittelst welcher man die Mittagsverbesserung berechnet.

Aus der Formel §. 111. siehet man leicht, dafs man eine Tafel für die Mittagsverbesserung berechnen kann. Die Abweichung der Sonne und die tägliche Veränderung derselben hängen von der Länge der Sonne ab, also kann man für eine gegebene Breite eine Tafel berechnen, welche die halbe Zwischenzeit der Beobachtungen und die Länge der Sonne zu Argumenten hat. Für jede Breite wird eine solche Tafel brauchbar, wenn man für jeden Theil der Mittagsverbesserung eine eigene Tafel berechnet, und den Zähler des ersten Glieds = 1 macht. Die erste Tafel gibt alsdann die Werthe $\frac{d-\delta}{30 \sin t}$ die zweyte $\frac{(d-\delta)\tang\delta}{30 \tang t}$. Was man aus der ersten Tafel findet, muſs man mit der Tangente der Breite, unter welcher man die Höhen genommen hat, multipliciren. Weil die beyden Theile einerley Argumente haben, so kann man sie auch in eine Tafel neben einander setzen. Die Argumente bekommen ihre gehörigen Zeichen, woran man siehet, ob man die Verbesserung addiren oder abziehen muſs. Dergleichen Tafeln findet man in den meisten Ephemeriden, in der Berliner *Sammlung astronomischer Tafeln* I. Band S. 291 und 292. und besonders genau und ausführlich in Herrn *von Zach Tabulis motuum Solis* etc. *Gothae* 1792 Tab. XXXVIII. pag. CX. et seq. Wie solche Tafeln berechnet werden lehrt H. Hofrath Kästner. Astr. Abhandlungen I. Samml. S. 248. Wegen der Veränderung der Schiefe der Ecliptic bedürfen diese Tafeln mit der Zeit einer Verbesserung.

In Tab. XXXVIII. Tab. motuum Solis findet man mit der Länge der Sonne $0^{Z.}\ 7^{\circ}\ 0'$ und der halben Zwischenzeit der Beobachtungen $3^{St.}\ 37'$ den ersten Theil der Mittagsverbesserung $= -17'',40$ welches mit der Tangente der Breite multiplicirt $-21'',90$ gibt. Der zweyte Theil ist $+0'',49$ also die Mittagsverbesserung $= -21'',90 + 0'',49 = -21'',41$ wozu noch die Acceleration $0'',06$ kommt, weil die Uhr nach Sternzeit gieng. Daher ist die Zeit der Zhr im wahren Mittag $= 0^{U.}\ 31'\ 5'',89 - 21'',47$ $= 0^{U.}\ 30'\ 44'',42$. im Mittel.

§. 114.

Es ist noch zu untersuchen, wie weit vom Mittage die Höhen genommen werden müssen, damit die in der Messung derselben begangenen Fehler den geringsten Einfluſs auf die Zeitbestimmung haben. Wenn sich die Höhe eines Sterns sehr langsam ändert, so wird ein kleiner Fehler, den man in der Stellung des Instruments auf die vormittägiche Höhe und in der Beobachtung selbst begeht, einen merklichen Einfluſs auf die Zeitbestimmung haben. Man muſs daher, wenn andere Umstände es erlauben, die Höhen zu der Zeit beobachten, da sie sich am schnellsten ändern. Die Geschwindigkeit der Höhenänderung wird desto gröſser seyn, je kleiner der Winkel ist, welchen die Richtung, in der sich der Stern bewegt, mit dem Verticalkreis macht, oder je gröſser der parallactische Winkel *PSZ* Fig. 46. Taf. IV. ist. Wenn die §. 111. gebrauchten Buchstaben beybehalten werden, so gehört der

der gröſste parallactische Winkel einer Höhe h zu, deren sinus $= \frac{\sin\delta}{\sin\varphi}$ *). Sezt man diesen Werth in die obige Gleichung (§. 111.) zwischen Polhöhe, Abweichung, Stundenwinkel und Höhe, so findet sich

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\delta} = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$

also $\sin\delta = \sin\varphi^2 \sin\delta + \sin\varphi \cos\varphi \cos\delta \cos t$

$$(1 - \sin\varphi^2) \sin\delta = \sin\varphi \cos\varphi \cos\delta \cos t$$

$$\sin\delta = \operatorname{tang}\varphi \cos\delta \cos t$$

folglich $\cos t = \frac{\sin\delta}{\cos\delta \operatorname{tang}\varphi} = \operatorname{tang}\delta \operatorname{cotg}\varphi$

Vermittelst dieser Formel findet man also die Zeit, zu welcher man unter der Breite φ einen Stern, dessen Abweichung $= \delta$ ist, beobachten muſs, wenn die Fehler in der Höhenmessung den kleinsten Einfluſs auf die Zeitbestimmung haben sollen.

Der allgemeine Ausdruk für das Azimuth a ist $\cos a = \frac{\sin\delta - \sin h \sin\varphi}{\cos h \cos\varphi}$. Sezt man hier $\sin h = \frac{\sin\delta}{\sin\varphi}$ so wird

$$\cos a = \frac{\sin\delta - \sin\delta}{\cos h \cos\varphi} = \frac{0}{\cos h \cos\varphi}$$

So lange δ kleiner ist als φ, kann h nicht gleich 90 Gr. folglich $\cos h$ nicht $= o$ werden, weil h nicht gröſser werden kann als $90^\circ - \varphi + \delta$.

Folglich verändert sich die Höhe eines Sterns, dessen Abweichung kleiner ist als die Pol-

*) Kästners astron. Abhandl. I. Samml. S. 134. u. f.

Polhöhe, alsdann am geschwindesten, wenn sein Azimuth $= 90^\circ$ ist, oder wenn er durch den ersten Verticalkreis geht.

§. 115.

Nun kann der Fehler, welchen eine unrichtig gemessene Höhe in der Zeitbestimmung selbst unter den günstigsten Umständen hervorbringt, berechnet werden. Wenn man die Gleichung $\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$ differentiirt, indem man h und t als veränderlich betrachtet, so kömmt $dh \cos h = - dt \sin t \cos\varphi \cos\delta$

In dem sphärischen Dreyek PZS Fig. 46 aber verhält sich

$$\sin ZS : \sin PZ = \sin ZPS : \sin PSZ$$

$$\text{oder} \quad \cos h : \cos\varphi = \sin t : \sin p$$

$$\text{also ist} \quad \sin p = \frac{\sin t \cos\varphi}{\cos h}$$

$$\text{folglich} \quad dh = - dt \sin p \cos\delta$$

Für den grösten parallactischen Winkel p ist das Azimuth $= 90$ Gr. also der Sinus des grösten parallactischen Winkels selbst $= \frac{\cos\varphi}{\cos\delta}$ $= \sin p$

dieser Werth von $\sin p$ in die Formel für dh gesezt, gibt

$$dh = - dt \cos\varphi, \text{ und } dt = - dh \sec\varphi$$

Hienach könnte ein jeder Stern, den man in dem ersten Verticalkreis beobachten kann, mit gleicher Zuverlässigkeit zur Zeitbestimmung vermittelst correspondirender Höhen gebraucht werden. Wegen der Ungewifsheit der Stralenbrechung aber sind grofse Höhen den kleinern vorzuziehen.

Für die Breite von Göttingen ist sec. $\phi =$ 1,607505. also $dt = -1{,}607505.\, dh$ und in Zeit $dt = -\frac{1{,}607503}{15}\, dh = -0{,}107167\, dh$. Ein Fehler von 10 Secunden in der Messung der Höhe bringt also selbst unter den günstigsten Umständen schon 1,07 Secunden Fehler in der Zeitbestimmung hervor.

Aus der Formel $\sin k = \frac{\sin \delta}{\sin \phi}$ siehet man, dafs man einen Stern, dessen Abweichung südlich ist, nicht in dem ersten Verticalkreis beobachten kann; denn $\sin \delta$ folglich auch $\sin k$ werden negativ und die Höhe fällt unter den Horizont. Für einen Stern im Aequator wird δ und also auch $k = o$, und also verändert der Stern seine Höhe am geschwindesten beym Aufgehen und Untergehen.

Für eine nördliche Abweichung wird k desto gröfser, je gröfser die Abweichung ist. Ist des Sterns Abweichung der Polhöhe gleich, so geht er durch das Zenith, daselbst berührt der erste Verticalkreis den Parallelkreis, welchen der Stern beschreibt, und seine schnellste Höhenänderung geschiehet am Zenith.

Da der Cosinus des Stundenwinkels für die schnellste Höhenänderung $= \frac{\mathrm{Tg}\,\delta}{\mathrm{Tg}\,\phi}$, so darf man die correspondirenden Höhen desto näher an dem Mittage nehmen, je gröfser des Sterns nördliche Abweichung ist. Dieser Cosinus

sinus wird negativ, also der Stundenwinkel stumpf, wenn δ negativ oder die Abweichung südlich ist; alsdann ist aber der Stern, wie schon oben gezeigt wurde, unter dem Horizont. Man kann also keinen Stern in dem Verticalkreis beobachten, dessen Stundenwinkel gröſser ist als $90°$ oder 6 Stund. Weiter als 6 Stunden vom Mittage muſs man daher keine correspondirende Höhen nehmen.

§. 99.

Wenn eines Sterns nördliche Abweichung *gröser* ist als die Breite, so geht er bey seiner grösten Höhe zwischen dem Zenith und Nordpol durch den Mittagskreis, und kommt daselbst dem ersten Vertical am nächsten aber nie in denselben. An den Parallelkreis eines solchen Sterns kann man einen Verticalkreis ziehen, der ihn berührt; in diesem Verticalkreis fällt die Richtung seiner täglichen Bewegung mit demselben zusammen, und seine Höhenänderung ist daselbst am geschwindesten. Es seye Fig. 48. Taf. VI. ZPR der nordliche Quadrant des Mittagskreises, QTS ein Parallelkreis eines Sterns, dessen nordliche Abweichung gröser ist als die Breite, Z das Zenith, P der Nordpol, ZO ein Verticalkreis, der den Parallelkreis des Sterns berührt. Zieht man an den Berührungspunct Q den Abweichungskreis PQ, so hat man ein bey Q rechtwinklichtes sphärisches Dreyek ZPQ. In demselben ist

$$\text{Cos } PQ : \text{sin. tot.} = \text{Cos } PZ : \text{Cos } ZQ$$

folg-

folglich $\sin h = \frac{\sin \varphi}{\sin \delta}$

ferner $\sin PZ : \text{sin. tot.} = \sin PQ : \sin PZQ$

also $\sin a = \frac{\text{Cos } \delta}{\text{Cos } \varphi}$

endlich $\text{sin. tot.} : \text{Cotg } PZ = \text{Tang } PQ : \text{Cos } QPZ$

daher $\text{Cos } t = \text{Tang } \varphi \text{ Cotg } \delta$

Der parallactische Winkel ist hier $PQZ = 90°$ folglich

$$dt = -\frac{dh}{\text{Cos } \delta} = -dh \text{ sec. } \delta. \text{ (§. 115.)}$$

Da $\text{Cos } t = \text{Tang } \varphi \text{ Cotg } \delta$, so ist die Zeit der schnellsten Höhenänderung auch derjenigen Sterne, welche bey ihrer grösten Höhe zwischen dem Zenith und dem Pol durch den Mittagskreis gehen, weniger als 6 Stunden von ihrem obern Durchgang durch den Meridian entfernt. Aus der Formel $\sin a = \frac{\text{Cos } \delta}{\text{Cos } \varphi}$ folgt, daſs alsdann ihr Azimuth kleiner ist als 90 Gr. Solche Sterne sind desto unsicherer zur Zeitbestimmung zu gebrauchen, je gröser ihre Abweichung ist, weil $dt = -dh \text{ sec } \delta$.

§. 117.

Wenn man correspondirende Höhen eines Sterns nimmt, der nahe am Zenith vorbey gehet, so hat man zwey Vortheile. Erstlich ist die Beobachtung von der Veränderung der Stralenbrechung frey, weil diese selbst nahe am Zenith sehr klein ist. Zweytens fällt die Zeit der schnellsten Höhenänderung sehr nahe an die Zeit der Culmination des Sterns, man

man hat also nicht nöthig lange auf die correspondirenden Höhen zu warten, und in so kurzer Zeit ist auch keine Aenderung des Gangs der Uhr zu befürchten. Daher schlug Herr *Aubert* folgende Methode correspondirender Höhen vor *).

Man wähle einen Stern, dessen scheinbarer Abstand vom Nordpol wenig von der Aequatorshöhe des Orts unterschieden sey. Dieser Stern wird bey seinen Höhen auf beyden Seiten des Meridians zweymal in Verticalkreise kommen, die den Parallelkreis, den der Stern beschreibt, berühren werden **), und alsdann nahe an dem Meridian, dem ersten Verticalkreis und dem Zenith seyn. Nimmt man also in jenen Verticalkreisen correspondirende Höhen, so ist die Zeit zwischen beyden Beobachtungen sehr kurz, die Höhenänderung für diesen Stern am geschwindesten (§. 116.) und die Beobachtung von aller Ungleichheit und Unbeständigkeit der Stralenbrechung frey, und man darf dem Höhenmesser keine Bewegung in dem Azimuth geben, welches sonst bey correspondirenden Höhen leicht Fehler verursachen kann.

Zu Beobachtungen von dieser Art werden folgende zwey Stüke erfordert, die wohl zu bemerken sind. 1) Der Beobachter muſs an dem Ocular seiner Fernröhre einen unter einem Winkel von 45° geneigten Planspiegel ha-

*) Philosophical Transactions 1776. De Zach tabulae motuum Solis pag. 98. et seq.

**) Dieses kann nur alsdann geschehen, wenn des Sterns nördliche Abweichung gröſser ist als die Breite §. 114.

haben, der die von dem nahe am Scheitel stehenden Stern herkommenden Lichtstralen unter einem rechten Winkel gegen das Auge des Beobachters zurükwirft, weil die rükwärts geneigte Lage des Körpers nicht allein die Augen schwächt, sondern auch der Genauigkeit der Beobachtung, welche sehr oft von einer bequemen Lage des Körpers abhängt, nachtheilig ist. 2) Man muſs die Höhe des Fixsterns in dem Verticalkreis, welcher den Parallelkreis des Sterns berührt, das Azimuth und den Stundenwinkel vorläufig berechnen (§. 116.). Kennt man diese Stüke, so stellt man den Quadranten so, daſs die bewegliche Fernröhre auf die voraus berechnete Höhe, die Ebene des Quadranten nach dem Azimuth gerichtet ist. Aus der geraden Aufsteigung des Sterns und dem Stundenwinkel kennt man die Zeit, da der Stern in das Sehefeld der Fernröhre kommt und die Beobachtungen anzustellen sind. Nun kann man den Verticalfaden an den Fixstern bringen, der ihn nicht verlassen wird, und die Antritte des Sterns an die horizontale Fäden ohne das Instrument bewegen zu dürfen sehr genau beobachten.

§. 118.

Wenn des Sterns Abstand vom Nordpol gröser ist als die Aequatorshöhe, so wird man ihn auf beyden Seiten des Mittagskreises in dem ersten Verticalkreis beobachten können (§. 115.). Stellt man des Quadranten Ebene in diesen Verticalkreis oder senkrecht auf die Mittagsfläche, so wird man die correspondirenrenden Höhen des Sterns nehmen können, ohne den Quadranten zu bewegen, weil diese gewöhnlich etwas über 90 Grade fassen, vorausgesezt daſs der Abstand des Sterns vom Zenith den Winkel nicht übertreffe, den man auf beyden Seiten des Nullpuncts (oder des neunzigsten Grades, wenn der Quadrant Höhen angibt) messen kann. Die Zeit wird sich vermittelst eines solchen Sterns noch genauer bestimmen lassen, als nach §. 115. vermittelst eines dessen Abweichung die Breite übertrift. Denn für diesen ist $dt = -dh \sec \delta$ (§. 116.) für jenen $dt = -dh \sec \varphi$ (§. 115.) aber hier $\delta > \varphi$, folglich auch der Fehler in der Höhenmessung gefährlicher bey einem Stern der zwischen dem Zenith und dem Pol seine gröſste Mittagshöhe erreicht, als bey einem der in dem südlichen Quadranten des Mittagskreises culminirt.

§. 119.

Die Methode, die Zeit der Culmination eines Sterns, der nahe am Zenith vorbey geht, durch correspondirende Höhen zu bestimmen, leitete mich auf folgende, die ich in der Ausübung sehr genau und bequem gefunden habe. Die Absehenslinie einer Fernröhre, die mit einem Fadenkreuz versehen ist, stelle ich genau vertical, und drehe die Fernröhre so um ihre Axe, daſs der eine Faden in der Mittagslinie liegt, so berührt dieser Faden den Mittagskreis im Zenith, und der Augenblik der Culmination eines Sterns ist der Augengenblik seines Antritts an diesen Faden. Um

die

die Beobachtungen vervielfältigen zu können, spannte ich mehrere Fäden parallel mit dem Mittagsfaden auf beyden Seiten desselben in gleichen Abständen aus, so gab das Mittel aus aus zweyen Antritten an gleichweit auf beyden Seiten von dem Mittagsfaden abstehende Fäden ebenfalls den Augenblik der Culmination. Die Einrichtung der Fernröhre ist folgende. An einer starken eisernen Stange *GH* Fig. 49. Taf. VI. sind zwey Gabeln *EF*, welche die Gestalt eines *Y* haben, befestigt. In diesen liegt die Fernröhre *AB* mit ihren Bekleidungen von Glokenmetall, die genau cylindrisch gedreht sind, *C* und *D*. Die obere *D* hat einen vorstehenden Ring, damit die Fernröhre nicht herunter gleite; sie wird noch überdies durch zwey Ueberschläge, wovon der eine bey *C* gezeichnet, der bey *D* aber der Deutlichkeit wegen weggelassen ist, in ihren Lagern gehalten. Die Stüke *IK* und *LM* werden an der Mauer durch Schrauben befestigt, und die vier Schrauben *i*, *k*, *l*, *m*, welche conische Spitzen haben, und in ähnliche Vertiefungen in der Stange *GH* passen, dienen zur Befestigung der Stange und zugleich zur verticalen Stellung der Fernröhre. Um die Stange *GH* noch besser zu befestigen, ist die Querstange *PQ* angebracht. Senkrecht auf der Axe der Fernröhre ist eine Libelle *NO* angebracht, die man durch die Schraube *p*, deren Mutter durch eine zwischen der Querstange *no* und der Libelle *NO* liegende Spiralfeder *q* beständig angedrükt wird, berichtigen kann. Das Fadenkreuz befindet sich

auf

auf einer vierekigten Platte, welche durch acht in dem Gehäuse *ab* befindliche Schrauben hin und her geschoben werden kann. Wenn man die Libelle *NO* der Axe der Fernröhre parallel anschraubt, so hat man zugleich die gewöhnliche Sissonsche oder Brandersche Wasserwage. Das Instrument kann also leicht auch zum Nivelliren eingerichtet werden. Nur ist hier zu bemerken; daſs zu gegenwärtigen astronomischen Gebrauch die schwer zu erhaltende gleiche Dike der Cylinder *C* und *D* nicht nothwendig ist, wie bey der Wasserwage.

§. 120.

Die Berichtigung dieses Instruments ist sehr leicht. Zuerst macht man die Absehenslinie mit der Umdrehungsaxe der Fernröhre parallel, indem man das Instrument horizontal legt, das Fadenkreuz auf einen entfernten deutlichen Punct richtet, und darauf Achtung gibt, ob der Durchschnitt des Fadenkreuzes immer auf denselben Punct trift, wenn man die Fernröhre um ihre Axe dreht. Findet sich dieses nicht, so verschiebt man das Fadenkreuz so lange, bis der Durchschnitt desselben bey dem Umdrehen der Fernröhre um ihre Axe jenen Punct nicht mehr verläſst, so ist die Absehenslinie mit der Umdrehungsaxe der Fernröhre parallel. Nun stellt man die Fernröhre vermittelst ihres Trägers, den man durch die Schrauben *i, k, l, m* befestigt, vertical auf, und bringt die Luftblase in die Mitte der Glasröhre vermittelst der Schraube *p*, wo man ihre

Stelle

Stelle bezeichnet. Hierauf dreht man die Fernröhre halb um ihre Axe, kommt die Luftblase wieder an ihre Stelle, so ist von dieser Seite keine Veränderung vorzunehmen, hat sie aber ihren Ort verändert, so verbessert man die Hälfte des Fehlers vermittelst der Schraube *p*, die andere Hälfte vermittelst der Schrauben, deren Richtung mit der Richtung der Libelle ungefähr parallel ist, also wenn die Libelle die in der Figur gezeichnete Lage hat, vermittelst der Schrauben *l* und *m*. Eben so berichtigt man die Umdrehungsaxe der Fernröhre nach der auf der erstern senkrechten Richtung, bis die Luftblase ihre Zeichen nicht mehr verläſst, in welche Verticalebene man auch die Libelle bringen mag, so steht die Umdrehungsaxe der Fernröhre vertical, folglich auch die Absehenslinie, weil sie mit der Umdrehungsaxe parallel gemacht wurde. Geht also ein Stern durch das Zenith, so wird der Augenblik seines Durchgangs durch den Durchschnittspunct des Fadenkreuzes die Zeit seiner Culmination seyn. Geht aber ein Stern nicht genau durch das Zenith, so muſs man den einen Kreuzfaden in die Mittagslinie zu bringen wissen. Dieses kann sehr leicht geschehen, wenn der Stern sehr nahe am Zenith vorbeygehet, man darf alsdann nur darauf Achtung geben, ob der Stern bey seinem Durchgang durch das Sehefeld der Fernröhre auf beyden Seiten des Mittagsfadens, den man nur nach dem Augenmaſs nach dem Meridian gerichtet hat, gleichweit von dem darauf senkrechten oder Parallelfaden absteht.

Ein kleiner Fehler in der Lage des Mittagsfadens hat bey sehr kleinen Abständen vom Zenith nichts zu bedeuten. Für gröſsere Zenithabstände muſs man folgendes Mittel gebrauchen. An das Stük *no* Fig. 49 bringt man ein Paar Diopteru an, deren Absehenslinie man mit einem der Kreuzfäden parallel macht, indem man die Fernröhre mit ihrem Träger horizontal legt, sie nach einem an einer weiſsen Wand aufgehängten Bleyfaden richtet, die Absehenslinie der Diopter an *no* vermittelst eines Bleyfadens ebenfalls horizontal stellt, und das Gehäuse *ab*, in welchem die Kreuzfaden sind, so dreht, daſs der eine Faden mit dem an der Wand aufgehängten Bleyfaden zusammenfällt, so ist die Absehenslinie der Dioptern mit einem der beyden Kreuzfäden parallel. Um das Gehäuse *ab* drehen zu können, ist an dasselbe eine Röhre angelöthet, welche genau in die Röhre *AC* paſst, und durch Friction darin gehalten wird. Man kann alsdann eine Mittagslinie ziehen, nach welcher man das Diopterlineal *no* richtet *).

§. 121.

Daſs diese Mittagslinie nicht sehr genau gezogen seyn müſse, wird folgende Untersuchung zeigen. Wenn der Faden nicht genau in der Mittagslinie liegt, und also kein Stük des Mittagskreises ist, so kann man ihn doch als ein Stük eines Verticalkreises betrachten, dessen Azimuth, die Abweichung des Fadens von

*) Wie man eine Mittagslinie zieht wird unten gezeigt werden (§. 130, 131.)

von der Mittagslinie ist. Diese Abweichung seye $=\xi$ Sec., des Sterns Höhe $=\eta$, seine Abweichung $=\delta$, so ist die Zeit seiner Culmination von der Zeit seines Durchgangs durch den Faden verschieden $\frac{\xi \cos \eta}{15 \cos \delta}$ Secunden *). Es seye $\delta = 51^\circ 0''$, Polhöhe $= 51^\circ 32'$, so ist $\eta = 89^\circ 28$

$$\begin{array}{rl}
\mathrm{Lg} \cos \delta = & 9{,}7988718 \\
\mathrm{Lg}\, 15 = & \underline{1{,}1760913} \\
 & 10{,}9749631 \\
\mathrm{Lg} \cos \eta = & \underline{17{,}9688698 - 10} \\
 & 6{,}9939067 - 10
\end{array}$$

gehört zu 0,000986

Folglich beträgt der Fehler für einen Stern, der 32 Minuten von dem Scheitel absteht, 0,000986. ξ Secunden, also wenn ξ auch $= 10$ Min. wäre, nur 0,59 Secunden.

Vermittelst eines beweglichen Fadens, wie bey Mikrometern, könnte man des Sterns Abstand von dem unbeweglichen Parallelfaden bey seinen Antritten an den ersten und dritten Faden messen. Der Unterschied beyder Abstände durch den Abstand der beyden äußersten Fäden in Theilen eines grösten Kreites dividirt gäbe die Tangente des Winkels ξ. Man könnte alsdann mit einem solchen Mikrometer zugleich Abstände vom Zenith messen, folglich die Breite bestimmen. Vermittelst eines Nezes von 45 Graden oder eines Rautennezes ließe sich ebenfalls beydes bewerk-

*) Kästners astron. Abhandl. I. Samml. S. 193.

werkstelligen. Kästners astron. Abhandl. II. Samml. S. 281. u. f. S. 286. u. f.

§. 122.

Wenn die Absehenslinie der Fernröhre nicht genau berichtigt wäre, so könnte man doch die Zeit der Culmination eines Sters nach der Methode, welche Herr *von Zach* in seinen Sonnentafeln pag. 134. lehrt, bestimmen. Man beobachtet den Antritt des Sterns an den ersten und zweyten Faden, dreht alsdann die Fernröhre halb um ihre Axe, und beobachtet den Stern am dritten Faden, der eigentlich wieder der erste ist. Das Mittel aus den beyden äussersten Antritten gibt alsdann die Zeit der Culmination, welche mit der Zeit des Antritts an den mittlern Faden verglichen den Fehler der Absehenslinie gibt.

Wenn die Fäden nicht fein sind, so wird der Stern, wenn er hinter einen Faden kommt, ganz verschwinden. Alsdann muſs man an jedem Faden so wohl Ein- als Austritte beobachten, und aus beyden ein Mittel nehmen. Die Zeit, wie lange ein Stern auf demselben Parallelkreis hinter dem Faden bleibt, hängt von seiner Gröſse, und wenn man denselben Stern zu verschiedenen Zeiten beobachtet, von der Heiterkeit des Himmels und der Nähe der Sonne ab.

Beyspiel. Denn 24. März 1794 machte ich vermittelst einer nach §. 119. eingerichteten Fernröhre auf der hiesigen Sternwarte folgende Beobachtungen des Sterns γ im Drachen, nachdem ich die Absehenslinie der Fernröhre bey-

beynahe ihrer Umdrehungsaxe parallel gemacht, leztere aber genau berichtigt hatte.

	I. Faden	II. Faden	
Antritte	$17^{U.}55'\ 35'',2$	$17^{U.}56'\ 47'',0$	als die Libelle gegen Mittag gekehrt war.
Austritte	— 55 38,0	— 56 50,0	
A) Mittel	17 55 26,6	17 56 48,5	
Antr.	17 57 51,2	als die Libelle gegen Norden gekehrt war.	
Austr.	— — 54,0		
B) Mittel	17 57 52,6		

Das Mittel aus A und $B = 17^{U.}\ 56'\ 44'',6$ Culmin. γ Draconis

Der Stern war am mittlern Faden um $17\ 56'\ 48,5$

Fehler des mittlern Fadens $= 3'',9$

Folglich müssen von der Zeit des Durchgangs durch den mittlern Faden 3,9 Sec. abgezogen werden, wenn die Libelle gegen Mittag gekehrt ist, und dazu addirt werden, wenn sich die Libelle auf der Nordseite der Fernröhre befindet, um die Zeit der Culmination zu haben.

§. 123.

Oefters wird man durch die Witterung gehindert, daſs man an einem Tag keine correspondirende Höhen bekommen kann. Hat man aber an einem Nachmittag und dem darauf zunächst folgenden Vormittag gleiche Höhen der Sonne genommen, so kann man daraus die Zeit der Mitternacht bestimmen. Es seye Fig. 47. Taf. VI. Z das Zenith SsK ein Höhenkreis, P der Pol des Aequators, OW ein Theil des Horizonts, ZPR der nördliche Quadrant des Meridians. Die nachmittägige

Höhe seye in K, die an dem nächstfolgenden Vormittag in S beobachtet. Wären nun die Polardistanzen PK, PS einander gleich, so wären auch die Stundenwinkel ZPK, ZPS und ihre Supplemente RPK, RPS einander gleich, und die halbe Zwischenzeit der Beobachtungen zu der Zeit der Beobachtung in K addirt gäbe die Zeit der Mitternacht. Hat aber die Abweichung in der Zwischenzeit beyder Beobachtungen um sq zugenommen, so ist der Winkel ZPS gröſser als ZPK um den Winkel SPs, wenn man $Ps = PK$ macht. Der Winkel SPs ist

$$= sq\left(\frac{\operatorname{cotg} PZ}{\sin ZPs} - \frac{\operatorname{cotg} Ps}{\operatorname{tg} ZPs}\right); \text{ (§. 111.)}$$

folglich

$$RPS = 180° - ZPS = 180° - ZPs - SPs$$

$$= 180° - ZPs - sq\left(\frac{\operatorname{cotg} PZ}{\sin ZPs} - \frac{\operatorname{cotg} Ps}{\operatorname{tang} ZPs}\right)$$

$$\frac{RPS + RPK}{2} = 180° - ZPs - \frac{sq}{2}\left(\frac{\operatorname{cotg} PZ}{\sin ZPs} - \frac{\operatorname{cotg} Ps}{\operatorname{tang} ZPs}\right)$$

$$= 180° - ZPK - \frac{sq}{2}\left(\frac{\operatorname{cotg} PZ}{\sin ZPK} - \frac{\operatorname{cotg} Ps}{\operatorname{tang} ZPK}\right)$$

Also muſs man zu der halben Zwischenzeit der Beobachtungen addiren den Winkel

$$\frac{sq}{2}\left(\frac{\operatorname{cotg} PZ}{\sin ZPK} - \frac{\operatorname{cotg} PS}{\operatorname{tang} ZPK}\right) \text{ in Zeit}$$

verwandelt, um die Zeit zu bekommen, welche die Sonne gebrauchte, um von k in den nördlichen Theil des Meridians zu kommen. Für znnehmende *) Abweichung ist daher diese

*) Unter zunehmender Abweichung wird hier Annäherung zu dem Nordpol verstanden.

se Verbesserung der Mitternacht positiv, für abnehmende negativ, und bekommt die der gleichzeitigen (oder zu derselben Länge der Sonne gehörigen) Mittagsverbesserung entgegengesezte Zeichen (§. 111.). Die beyden Glieder des Coefficienten von $\frac{sq}{2}$ sind dieselben, welche bey der Mittagsverbesserung (§. 111.) für die Stundenwinkel *ZPK*, *ZPS* vorkommen. Nur ist $\frac{1}{2} sq$ nicht die zu dem Stundenwinkel *ZPK*, sondern die zu dem Winkel *RPK* gehörige Veränderung der Abweichung der Sonne. Diese wird in demselben Verhältniſs gröſser seyn als die bey der Berechnung der Mittagsverbesserung für dieselbe Länge der Sonne angenommene Veränderung der Abweichung, in welchem die Zwischenzeit der zur Bestimmung der Mitternacht genommenen Höhen gröſser ist als ihre Ergänzung zu 24 Stunden, oder in welchem der Winkel *RPK* gröſser ist als *ZPK*. Hat man also Tafeln für die Mittagsverbesserung, so findet man daraus die Verbesserung der Mitternacht auf folgende Art.

Man ziehe die halbe Zwischenzeit der Beobachtungen von 12 Stunden ab, suche mit dieser gefundenen Zeit und mit der Länge der Sonne für die zwischen den Beobachtungen liegende Mitternacht die Mittagsverbesserung, ändere an beyden Theilen der Mittagsverbesserung die Zeichen, und vergrössere sie in dem Verhältniſs der halben Zwischenzeit der Beobachtungen zu ihrer Ergänzung zu 12 Stunden, so hat man die Verbesserung der Mitternacht.

Auf diese Art kann man die Mitternachtsverbesserung für *stumpfe* Stundenwinkel *von Mitternacht an gerechnet* finden, aber nicht die Mittagsverbesserung für Zwischenzeiten, die gröſser sind als 12 Stunden, weil alsdann der Winkel ZPK stumpf wird, und die Grösse $\frac{\text{cotg}\, Ps}{\text{tang}\, ZPK}$ das entgegengesezte Zeichen bekommt *).

Beyspiel. Den 27. März 1792 nahm ich in *Altburg* bey *Calw* im Wirtembergischen folgende correspondirende Höhen der Sonne mit dem Sextanten:

Vormittag.	gedopp. Höhe d. obern ⊙ R	Nachmittag.	
12U. 3′ 15″,0	63° 0′	2U. 49′ 49″,0	Hieraus Zeit der Uhr im wahren Mittag nach §. 112. 23U. 56′ 14″,07
4 30,0	— 20	— 48 33,5	
5 44,0	— 40	— 47 18,0	
7 1,0	64 0	— 46 4,0	
8 17,0	— 20	— 44 48,0	
9 33,5	— 40	— 43 31,0	
10 50,0	65 0	— 42 15,0	

An dem darauf folgenden Tage wollte ich wieder correspondirende Höhen nehmen, um die wahre Zeit des Eintritts des Aldebarans am dunkeln Mondrande, welchen ich d. 27. März um 9U. 16′ 34″,7 Zeit der Uhr beobachtete, zu bestimmen. Allein wegen ungünstiger Witterung bekam ich nur des Vormittags folgende Höhen:

März

*) Kästners astr. Abh. I. Samml. S. 274. u. f.

März 27. $21^{U.}2'46'',5$ | $63^\circ 40'$
— 4 0,5 | 64 0
— 5 17,0 | — 20
— 6 34,7 | — 40
März 28 nach bürgerlicher Zeit

Aus diesen 4 Höhen verbunden mit den correspondirenden nachmittägichen vom 27 März fand ich die unverbesserte Mitternacht

$\frac{1}{2}(21^{U.}2'46'',5 + 2^{U.}47'18''0) = 11^{U.}55'2'',25$

	11	55	2,25
	11	55	2,50
	11	55	2,85
Mittel	11	55	2,46

Die halbe Zwischenzeit der Beobachtungen (für das Mittel) ist $9^{St.}9'$ folglich $ZPS = 12^{St.} - (9^{St.} + 9') = 2^{St.}51'$ und in Graden $= 42^\circ 45'$. Die Abweichung der Sonne d. 27. März um Mitternacht ist $= 3^\circ 10'$ nördlich. Zunahme der Abweichung der Sonne in 24 St. $= 23'24''$ folglich in $9^{St.}9' = 535,27$ Sec. $= \frac{1}{2}sq$; die Breite $= 48^\circ 43'26''$ also $PZ = 41^\circ 16'34$

$$\begin{aligned} \text{Lg cotg}\, PZ &= 0,0566128 \\ \text{C. Lg sin}\, ZPS &= 0,1682577 \\ \text{Lg}\tfrac{1}{2}sq &= 2,7285729 \\ \hline & \quad 2,9534434 \end{aligned}$$

gehört zu $898'',345$

$$\begin{aligned} \text{Lg cotg}\, PS &= 8,7429222 - 10 \\ \text{Lg Cotg}\, ZPS &= 0,0341445 \\ \text{Lg}\tfrac{1}{2}sq &= 2,7285729 \\ \hline & \quad 1,5056396 \end{aligned}$$

gehört zu $32'',036$

daher $SPs = 898'',345 - 32'',036 = 866'',309$, und in Zeit $= \frac{866,309}{15} = 57'',754$ also die Zeit der Uhr um Mitternacht $11^{U.} 55' 2'',46 + 57'',75 = 11^{U.} 56' 0'',21$

§. 124.

Wenn man auf diese Art zwey Culminationen der Sonne oder eines Sterns bestimmt hat, so kann man finden, ob die Uhr nach wahrer oder nach mittlerer Sonnenzeit oder nach Sternzeit gehet. Nehme ich das im vorhergehenden §. gegebene Beyspiel, so zeigte die Uhr, als die Sonne d. 27. März culminirte

$23^{U.} 56' 14'',07$

und $11 \quad 56 \quad 0,21$ als die Sonne unter dem Horizont durch den Mittagskreis gieng, beyder Zeiten Unterschied ist $11^{St.} 56' 0'',21 - 23^{St.} 56' 14'',07 = 11^{St.} 59' 46'',14$ *).

Die Uhr gieng also für wahre Zeit zu langsam, weil 12 wahre Sonnenstunden so groſs als $11^{St.} 59' 46'',14$ der Uhr sind, oder ihre Stunden waren länger als wahre Sonnenstunden.

Will man die Uhr mit *mittlerer* Zeit vergleichen, so verwandelt man die aus correspondirenden Höhen gefundenen w. Zeiten der Durchgänge durch den Mittagskreis in mittlere Zeit. Für den Berliner Meridian ist die Zeitgleichung d. 27. März im Mittage $+ 5' 15'',3$, d. 28 $= + 4' 56'',7$, also ihre Abnahme in 24 Stunden $= 18'',6$. Altburg liegt von Berlin

*) Kann dieses abziehen, wie hier, nicht geschehen, so werden $24^{St.}$ addirt.

lin 18′ 40″ in Zeit gegen Abend, also war es in Berlin $0^{U.}$ 18′ 40″ wahrer Zeit, als es an ersterem Ort Mittag war. Die Veränderung der Zeitgleichung in dieser Zeit von 18′ 40″ beträgt $\frac{18' \, 40''}{24 . 60'}$. 18″,6 oder 0″,2. Daher ist die Zeitgleichung d. 27. März im Mittage für den Beobachtungsort $= 5' \, 15'', 1$ und aus demselben Grunde die Zeitgleichung um Mitternacht $+ 5' 5'', 8$. Die Uhr sollte also, wenn sie nach mittlerer Zeit gestellt gewesen wäre, im wahren Mittag gezeigt haben

	$0^{U.}$ 5′ 15″,10
sie zeigte aber	23 56 14,07
Unterschied =	9 1,03

folglich gieng die Uhr für mittlere Zeit zu spät um 9′ 1″,03.

Ferner ist die mittlere Zeit d. 27. März um Mitternacht

	$12^{U.}$ 5′ 5,8″0
Zeit d. Uhr	11 56 0,21
Unterschied =	9 5,59

also gieng die Uhr d. 27. März um Mitternacht für mittlere Zeit zu spät um 9′ 5″,59 und blieb gegen mittlere Zeit in 12 Stunden zurük um $9' \, 5'', 59 - 9' \, 1'', 03 = 4'', 56$.

Da man nun die Zeit der Uhr d. 27. März im Mittag und um Mitternacht kennt, so kann man die wahre Zeit des Eintritts des Aldebarans (§. 123.), welche zwischen beyde Zeitpuncte fiel, angeben. Zieht man die Zeit der Uhr im wahren Mittag d. 27 März von 24 Stunden ab, so findet man $24^{St.} - (23^{St.} \, 56'$

14″,07)

$14'',07) = 3'\,45'',93$, welches zu der Zeit im Augenblik des Eintritts des Aldebarans addirt, die Anzahl von Stunden, Min. u. s. w. der Uhr gibt, welche von dem Augenblik des wahren Mittags an bis zu dem Eintritt des Aldebarans verflosseu sind

$$\begin{array}{rrr} 9^{U.} & 16' & 34'',70 \\ + \;0 & 3 & 45,93 \\ \hline 9 & 20 & 20,63 \end{array}$$

Wären der Uhr Stunden, Min. u. s. w. genau so lang als wahre Sonnenstunden, so wäre dieses die wahre Zeit des Eintritts. Allein nach §. 124 waren 12 *wahre Sonnenstunden* $= 11^{St.}\,59'\,46'',14$ *der Uhr*, also mufs man die Stunden der Uhr in wahre Sonnenstunden verwandeln. Es seyen N Stunden der Uhr $= N'$ wahren Sonnenstunden; um T Stunden der Uhr in wahren Sonnenstunden T' auszudrüken, mache man die Proportion

$N : N' = T : T'$, so hat man

$$T' = \frac{N'}{N} \cdot T.$$

also für gegenwärtigen Fall

$$T' = \frac{12^{St.}\,0'\,0''}{11^{St.}\,59'\,46'',14} \cdot (9^{St.}\,20'\,20'',63$$

Man drüke die Stunden, Minuten u. s. w. in Secunden aus, so findet man

$$\begin{array}{rll} N' = & 43200'',00. & \text{Lg} = 4,6354837 \\ T = & 33620,63. & \text{Lg} = 4,5266058 \\ N = & 43186,14. & \text{C.Lg} = 0,3646556-5 \\ \hline & & \text{Lg } T' = 4,5267451 \\ & & T' = 33631'',4 \\ & & \quad = 9^{St.}\,20'\,31'',4 \end{array}$$

wahre

wahre Zeit der Beobachtung des Eintritts α ♉. Bequemer kann T' gefunden werden, wenn man den Unterschied zwischen T' und T sucht. Da sich verhält

$N : N' = T : T'$, so hat man auch

$$N' - N : N = T' - T : T$$

$$\text{also } T' - T = \frac{N' - N}{N} . T$$

und man findet $T' = T + \frac{N' - N}{N} T$

Geht die Uhr zu geschwind, so ist $N' < N$, und man hat

$$T' = T - \frac{N - N'}{N} . T$$

Für obiges Beyspiel ist $N' - N = 13'',86$

$T = 9^{St.} 20' 20'',63$

$N = 11\ 59\ 46,14$

$Lg\ 13'',86 = 1,1417632$

$Lg\ T = 4,5266058$

$C.\ Lg\ N = 0,3646556 - 5$

$1,0330246$

gehört zu $10'',79$

Also ist

$T' = 9^{St.} 20' 20'',63 + 10'',79 = 9^{St.} 20' 31'',42$

Auf dieselbe Art findet man auch die mittlere Zeit der Beobachtung.

mittlere Z. im Mittag	$0^{U.} 5' 15'',10$	27. März
— — um Mittern.	$12\ 5\ \ 5,80$	
Zwischenzeit =	$11\ 59\ 50,70 = N'$	
Zeit der Uhr im Mitt.	$23\ 56\ 14,07$	
— — — um Mittern.	$11\ 56\ \ 0,21$	
	$11\ 59.\ 46,14 = N$	
	$N' - N = 4,56$	

Zeit

$$\begin{array}{rrrr}
\text{Zeit der Uhr im Mittag} & 23^{U.}\,56 & 14{,}07 & \\
\text{mittlere Zeit} & \underline{0 \quad 5} & \underline{15{,}10} & \\
 & 9 & 1{,}03 & \\
\text{Zeit der Beob.} & \underline{9^{St.}\,16} & \underline{34{,}70} & \\
 & 9 \quad 25 & 35{,}73 & = T
\end{array}$$

$$T' = 9^{St.}\,25'35'',73 + \frac{4'',56\,(9^{St.}\,25'\,35'',73)}{11^{St.}\,59'\,46'',14}$$
$$= 9^{St.}\,25'39'',3$$

welches die mittlere Zeit der Beobachtung ist.

§. 125.

Die Uhren, welche nach Sternzeit gehen, werden so gestellt, daſs sie 0 Uhr zeigen, wenn der Anfangspunct der Ecliptic oder 0 Gr. ♈ culminirt. Da nun die gerade Aufsteigung der Sterne von Abend gegen Morgen gerechnet wird, so wird ein Stern desto später culminiren, je gröſser seine gerade Aufsteigung ist. Ist diese z. B. $= 90^\circ$, so wird die Uhr $6^{U.}$ zeigen müssen, wenn der Stern culminirt, weil 360° 24 Stunden geben. Um also eine Uhr mit Sternzeit zu vergleichen, beobachte man die Zeit der Culmination eines Sterns (§. 110. u. f.), berechne seine gerade Aufsteigung für den Tag der Beobachtung und verwandle sie in Zeit (15° auf eine Stunde gerechnet). Diese Zeit hätte die Uhr zeigen müssen, wenn sie genau nach Sternzeit gestellt wäre. Vergleicht man also die Zeit der Uhr in dem Augenblik der Culmination des Stern mit der geraden Aufsteigung desselben in Zeit verwandelt, so findet sich die Abweichung der Uhr von der Sternzeit. Da die gerade Aufsteigung der

der Sterne sich wegen der *Präcession, Nutation* und *Aberration*, auch wegen ihrer *eigenen Bewegung*, ändert, so muſs man bey der Berechnung derselben diese Dinge in Rechnung bringen. Man kann also auch nicht sagen, daſs eine Uhr *gleichförmig* gehe, wenn man findet, daſs sie 24 Stunden von einer Culmination eines Sterns bis zu seiner nächstfolgenden zeigte. In so kurzer Zeit ist zwar die Veränderung der geraden Aufsteigung eines Sterns geringe, wenn man aber aus zwey mehrere Tage von einander entfernten Culminationen auf den Gang der Uhr schliesen wollte, so würde man schon merkliche Fehler begehen.

Einige andere Methoden, die Zeit zu bestimmen, welche die Polhöhe als beynahe oder als genau bekannt voraussezen, werden unten vorkommen. Was die Bestimmung der Zeit aus Durchgängen der Sterne betrift, so findet man dazu die vollständigste Anleitung und sehr bequem eingerichtete Tafeln zu Abkürzung und Erleichterung der Rechnung in des Herrn *von Zach tabulis motuum Solis.*

§. 126.

Die Zeit der Culmination eines Fixsterns, dessen gerade Aufsteigung man kennt, wird sich nun leicht angeben lassen, wenn die Uhr berichtigt ist. Hat man eine Uhr die nach Sternzeit geht, so wird sie in dem Augenblik der Culmination die gerade Aufsteigung des Sterns in Zeit angeben, oder eben so viel mehr oder weniger zeigen müssen, als sie der Sternzeit voreilt oder nachgeht. Ist die Uhr

nach

nach mittlerer Sonnenzeit gestellt und durch correspondirende Sonnenhöhen berichtigt, so kennt man den Augenblik des Durchgangs der Sonne durch den Meridian. In diesem Augenblik seye die gerade Aufsteigung eines Sterns $= A$, die gerade Aufsteigung der Sonne $= a$ und A gröſser als a, so wird dieser Stern in dem Augenblik der Culmination der Sonne noch um den Stundenwinkel $A - a$ *gegen Morgen* von dem Mittagskreis abstehen, und es werden noch so viele Stunden, Min. und Secunden Sternzeit bis zu dem Augenblik der Culmination des Sterns verflieſsen, als der Bogen $A - a$ in Zeit verwandelt beträgt (15 Grade auf eine Stunde gerechnet). Nun kommt aber ein Fixstern nach einer Uhr, die nach mittlerer Zeit gehet, täglich um $3' 55'',908$ früher in den Meridian, folglich muſs man von dem in Zeit verwandelten Bogen $A - a$ noch die in dieser Zeit geschehene Acceleration der Fixsterne abziehen, um die mittlere Zeit der Culmination des Sterns zu erhalten. Ist die gerade Aufsteigung der Sonne gröſser als die gerade Aufsteigung des Sterns, so wird der Stern von der Sonne in dem Augenblik ihrer Culmination um einen Stundenwinkel $= a - A$ *gegen Abend* abstehen, und um den Stundenwinkel $360° - a + A$ *gegen Morgen*. Man findet also immer den Stundenwinkel, um welchen ein Stern von der Sonne in dem Augenblik ihrer Culmination *gegen Morgen* absteht, wenn man von der geraden Aufsteigung des Sterns die gerade Aufsteigung der Sonne im Mittage abzieht, und in dem Fall, wenn des

des Sterns gerade Aufsteigung kleiner wäre, als die der Sonne, zuerst 360° dazu addirt. Ferner erhellet aus dem bisher gesagten, daſs der Unterschied zwischen der geraden Aufsteigung des Sterns, und der geraden Aufsteigung der Sonne *in dem Augenblik der Culmination des Sterns* so in Zeit verwandelt, daſs 15° auf eine Stunde gehen, die *wahre* Zeit gebe, welche von der Culmination der Sonne bis zu der Culmination des Sterns verflieſst.

Beyspiel. In *Altburg* zeigte die Uhr d. 24. Dec. 1791 im Mittag $0^{U.}\,3'\,2''$; d. 25. Dec. $0^{U.}\,3'\,49'',0$. Die mittlere Zeit im wahren Mittag war d. 24. Dec. $0^{U.}\,0'\,5'',6$; d. 25. Dec. $0^{U.}\,0'\,35'',7$, und also die Abweichung der Uhr von mittlerer Zeit d. 24. Dec. $+\,2'\,56''4$; d. 25. Dec. $+\,3'\,13'',3$. Man sucht die Zeit der Uhr in dem Augenblik des Durchgangs des *Polarsterns* durch den Meridian d. 24. Dec.

Die gerade Aufsteigung des Polarsterns ist für diese Zeit $= 12^{\circ}\,38'\,20''$. Die gerade Aufsteigung der Sonne d. 24. im Mittag (aus astron. Jahrbuch für 1791 mit Meridiandifferenz $18'\,40''$ westlich von von Berlin) $272^{\circ}\,56'\,54''$. Hier muſs man also zu der geraden Aufsteigung des Sterns 360 Grade addiren, und von dieser Summe die gerade Aufsteigung der Sonne abziehen, so findet sich der Stundenwinkel des Polarsterns d. 24. Dec. im Mittag $= 99^{\circ}\,41'\,26''$ gegen Morgen, und in Zeit

$$= 6^{St.}\, 38'\, 45'',7$$

$$-\text{Accel. in } 6^{St.}\,38 = -\quad 1\quad 5,3$$

	6 37 40,4
d. 24. Dec. mittlere Zeit im Mittag	0 0 5,6
mittlere Zeit der Culm. des Polarst.	6 37 46,0

Die Abweichung der Uhr von der mittlern Zeit im Mittage d. 24. Dec. war $+2' 56'',4$ und ihre Voreilung in 24 Stunden $= 3' 13'',3 - 2' 56'',4 = 16'',9$, also ihre Abweichung von der mittlern Zeit d. 24. Dec. Abends um $6^U\cdot 37' = +2' 56,4 + 4'',6 = +3' 1'',0$. Folglich culminirte der Polarstern *über dem Pol*, als die Uhr zeigte $6^U\cdot 37' 46'',0 + 3' 1'',0 = 6^U\cdot 40' 47''$.

Da ein Sterntag $= 24^{St.} - (3' 55'',908)$ *) $= 23^{St.}\, 56' 4'',092$ mittlerer Zeit, so findet man die Zeit der Culmination eines Sterns *unter* dem Pol wenn man zu der *über* dem Pol $11^{St.}\, 58' 2'',046$ addirt. Hier muſs noch die Voreilung der Uhr in Rechnung gebracht werden.

Culm. über dem Pol	$6^U\cdot 40' 47'',0$	Zeit der Uhr.
	11 58 2,0	
	18 38 49,0	
Voreilung der Uhr in $11^{St.}\, 58'$	+ 8,4	
Culm. unter d. Pol	18 38 57,4	
od. d. 25. Dec. Morg.	8 38 57,4	

§. 127.

Anstatt die gerade Aufsteigung der Sonne abzuziehen, kann man auch ihre Ergänzung zu 360 Gr. addiren. So findet sich nach dem Bey-

*) De Zach tabulae motuum Solis. Tab.

Beyspiel des vorhergehenden §.

$$360^\circ - 272^\circ\,56'\,54'' = 87^\circ\;3'\;6''$$

$$\text{gerade Aufst. des Polarst.} = \underline{12\;\;38\;\;20}$$

$$\text{Stundenwinkel} = 99\;\;41\;\;26$$

Diese Ergänzung findet sich in den astronomischen Jahrbüchern in Zeit verwandelt (15° auf eine Stunde) für den Augenblik des Mittags unter der Aufschrift: Oestlicher Abstand 0° ♈ von der Sonne. Wird hiezu die gerade Aufsteigung des Sterns in Zeit addirt, und die Acceleration der Fixsterne in Rechnung gebracht, so hat man die wahre Zeit der Culmination des Sterns.

$$\text{d. 25. Dec. Abst. } 0^\circ \text{♈ von der Sonne} = 5^{St.}\,48'\,16''$$

$$\text{gerade Aufst. Polarst. in Zeit} = \underline{0\;\;50\;\;33{,}3}$$

$$6\;\;38\;\;49{,}3$$

(Bode Jahrbuch für 1791.)

Nun war der Abstand 0° ♈ d. 25. Dec. kleiner um $4'\,27''$, folglich d. 24. Dec. $6^{U.}\,38'$ kleiner um $1'\,13'',9$. Diese Acceleration von $6^{U.}\,38'\,49'',3$ abgezogen gibt die wahre Zeit der Culm. d. Polarst. $6^{U.}\,37'\,35'',4$ für den Berliner Meridian, weil der Abstand 0° ♈ für den Berliner Meridian berechnet ist. Wird dieser auf den Meridian von Altburg reducirt, (indem man $\frac{(4'\,27'')(18'\,40'')}{1440}$ davon abzieht, weil Altburg $18'\,40''$ von Berlin gegen Abend liegt), so findet sich

Abst. 0° ♈ von der Sonne für Berlin	=	$5^{St.}$	48′	16″,0
reduct. merid.	=		—	3,5
Abst. 0° ♈ für d. Altbg. Mer.	=	5	48	12,5
gerade Aufst. Polarst.	=	0	50	33,3
		6	38	45,8
Accel.	—		1	13,9
wahre Zeit der Culm. d. Polarst. Altbg. Merid.		6	37	31,9
Zeitgleichung	+	0	0	13,9
Culm. d. Polarst. nach m. Z.		6	37	45,8

(§. 126.)

§. 128.

Wenn man durch correspondirende Höhen die Zeit der Culmination eines Sterns bestimmt hat, so kann man die Uhr mit mittlerer Zeit so vergleichen. Man berechnet die mittlere Zeit der Culmination des Sterns nach §. 126. oder §. 127., diese Zeit mit der aus correspondirenden Höhen gefundenen Zeit des Durchgang des Sterns durch den Mittagskreis verglichen gibt der Uhr Abweichung von der mittlern Zeit.

Auf diese Art erhält man die Zeit des Durchgangs eines Sterns durch den Meridian mit einer Genauigkeit, die zur Bestimmung der Breite hinreichend ist. Will man aber die Uhr vermittelst der Fixsterne genau berichtigen, so muſs man bey der Berechnung der geraden Aufsteigung des Sterns seine *Nutation*

und

und *Aberration* *) nach der geraden Aufsteigung in Rechnung bringen. Es seye die Länge der aufsteigenden Mondsknoten $= N$, die gerade Aufsteigung des Sterns $= A$, die Schiefe der Ecliptic $= \omega$, die Länge der Sonne $= \odot$, des Sterns Abweichung $= \delta$, so ist die Nutation in der geraden Aufsteigung

$$= -9''55 \cos N \cos A \operatorname{tang} \delta - 7''05 \sin N \sin A \operatorname{tang} \delta - 7'',05 \operatorname{cotg} \omega \sin N.$$ **).

Weil $\cos N \cos A = \frac{1}{2} \cos (N + A) + \frac{1}{2} (\cos N - A)$
und $\sin N \sin A = \frac{1}{2} \cos (N - A) - \frac{1}{2} \cos (N + A)$
so läfst sich die Nutation in der geraden Aufsteigung auch so ausdrüken:

$$-8'',3 \cos (N - A) \operatorname{tang} \delta - 1'',25 \cos (N + A) \operatorname{tang} \delta - 7'',05 \operatorname{cotg} \omega \sin N$$

Die *Aberration* in der geraden Aufsteigung ist

$$= -\frac{20''(\cos \frac{1}{2}\omega)^2 \cos (A - \odot)}{\cos \delta} + \frac{20''(\sin \frac{1}{2}\omega)^2 \cos (A + \odot)}{\cos \delta}$$

Sezt man die Schiefe der Ecliptic $= 23^{\circ}\, 28'$, so wird die Nutation in der geraden Aufsteigung =

$$-8'',3 \cos (N - A) \operatorname{tang} \delta - 1'',25 \cos (N + A) \operatorname{tang} \delta - 16'',25 \sin N$$

die Aberration in der geraden Aufsteigung

$$= -\frac{19'',17 \cos (A - \odot)}{\cos \delta} + \frac{0'',83 \cos (A + \odot)}{\cos \delta}.$$

Eine

*) Ueber die *tägliche* Aberration sehe man einen Aufsaz von H. M. *Camerer* in dem ersten Supplem. Band zu Bode's astron. Jahrbüchern S. 198.

**) Connoissance des temps pour l'année 1789 p. 143. wenn man nach Maskelyne $2a = 19'',1$ und $2b = 14'',1$ sezt.

Eine Veränderung der Schiefe der Ecliptic um eine Minute verändert den Factor des lezten Glieds der Formel für die Nutation nur um 0,003 Secunden, die beyden Factoren in der Formel für die Aberration um $0'',002$ und $0'',001$.

Die Veränderung der geraden Aufsteigung eines Sterns wegen der Nutation ist also in Zeit

$$= 0'',553 \cos(N - A) \operatorname{tang} \delta - 0'',083 \cos(N + A) \operatorname{tang} \delta - 1'',083 \sin N$$

Die Aberration in Zeit ist

$$- \frac{1'',272 \cos(A - \odot)}{\cos \delta} + \frac{0'',055 \cos(A + \odot)}{\cos \delta}.$$

Wenn man die *beobachtete* gerade Aufsteigung eines Sterns in die *mittlere* verwandeln will, muſs man in diesen Formeln die entgegengesezten Zeichen gebrauchen.

§. 129.

Um den Gebrauch dieser Formeln zu zeigen, wende ich sie auf das in dem 126. §. gegebene Beyspiel an. Die Länge der Sonne und des Knotens sollten eigentlich für den Augenblik berechnet werden, für welchen man die Aberration und Nutation sucht. Allein die Nutat. und Aberration verändert sich in einem Tage so wenig, daſs man die Länge der Sonne und des Knotens für den nächsten Mittag aus den Ephemeriden nehmen darf.

Die gerade Aufsteigung des Polarsterns

$= 22^\circ\ 38'\ 20'' = A$ (§. 127.) Abweichung

$= 88\ \ 11\ \ 49 = \delta$

Die Länge der Sonne

$= \text{IX}^{Z}\ 2^\circ\ 40'$ oder $= 272^\circ\ 40' = \odot$

Die Länge des Knotens

$= \text{VI}\ 8\ \ 22 \qquad = 188\ \ 12 = N$

Also

Also $N + A = 175° 44'$; $N - A = 201° 0'$; $A - \odot = 99° 58'$ *); $A + \odot = 285° 18'$. Hier werden $\cos(N - A)$, $\cos(N + A)$, $\sin N$, $\cos(A - \odot)$ negativ, also bekommen die Formeln für die Nutation und Aberration durchaus das Zeichen +.

$$\begin{array}{rl} \text{Lg}\, 0'',553 = & 0,7427251 - 1 \\ \text{Lg} \cos(N - A) = & 9,9987947 - 10 \\ \text{Lg tang}\, \delta = & \underline{1,5019702} \\ & 1,2434900 \end{array}$$

gehört zu $17'',51$

$$\begin{array}{rl} \text{Lg}\, 1'',083 = & 0,0346285 \\ \text{Lg} \sin N = & \underline{9,1628853 - 10} \\ & 0,1975138 - 1 \end{array}$$

gehört zu $0'',16$

$$\begin{array}{rl} \text{Lg}\, 0'',083 = & 0,9190781 - 2 \\ \text{Lg} \cos(N + A) = & 9,9701517 - 10 \\ \text{Lg tang}\, \delta = & \underline{1,5019702} \\ & 0,3912000 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & + \ 2'',46 \\ & + \ 17,51 \\ & \underline{+ \ 0,16} \\ \text{Nutat.} = & + \ 20,13 \text{ in Zeit.} \end{array}$$

Lg

*) Weil hier A kleiner ist als ⊙, so werden zu A 360° addirt, um abziehen zu können.

$$
\begin{array}{rl}
\text{Lg } 1'',272 = & 0,1044871 \\
\text{Lg}\cos(A-\odot) = & 9,2382349-10 \\
\text{C. Lg}\cos D = & \underline{1,5021853} \\
 & 0,8449073 \\
 & +\ 7'',00 \\
\text{Lg } 0'',055 = & 0,7427251-2 \\
\text{Lg}\cos(A+\odot) = & 9,4213950-10 \\
\text{C. Lg}\cos D = & 1,5021853 \\
 & 0,6663054-1 \\
 & +\ 0'',46 \\
 & 7,00 \\
\text{Aberration} = & +\ 7,46 \quad \text{in Zeit.} \\
\text{Nutation} = & \underline{+\ 20,13} \\
\text{Summe} = & 27,59 \\
\text{Culm. Polarst. um} & \underline{6^{U.}\ 40'\ 47,00} \ \text{Zeit der Uhr. (§. 126)} \\
\text{Verbess. Zeit d. Culm} & 6\ \ 41\ \ 14,59
\end{array}
$$

Filar - Gnomon.

§. 130.

Wenn man durch ein kleines rundes Loch die Sonnenstrahlen in ein verfinstertes Zimmer fallen läſst, so entsteht auf dem Boden oder der gegenüberstehenden Wand ein Bild der Sonne. Hat man nun auf dem Boden eine Mittagslinie gezogen, so wird man die Zeiten beobachten können, da der vorhergehende und der nachfolgende Sonnenrand die Mittagslinie berührten, das Mittel aus beyden gibt die Zeit der Culmination der Sonne. Eine solche Vorrichtung nennt man einen *Gnomon*, wovon es verschiedene Einrichtungen gibt. Die bequemste scheint mir diejenige zu seyn, welche

welche H. Prof. *Kratzenstein* in den Berliner Ephemeriden für 1782 S. 133 beschrieben hat. Man befestigt nehmlich ein Messingblech ungefähr mit der Weltaxe parallel an der Mauer eines gegen Mittag liegenden Zimmers oberhalb eines Fensters. Diese Platte hat ein Loch von einer Linie im Durchmesser, an dessen oberem Theile eine feine Kerbe ist, die den Silberfaden *) durchläſst, der oberhalb derselben auf der Platte befestigt ist. Der Faden geht in das Zimmer nach der gegenüberstehenden Mauer fort, wo eine messingene Klammer befestigt ist, die eine messingene Schraube mit einigen fein eingedrehten Kerben führt, und beynahe auf der Mittagslinie senkrecht steht. Ueber eine von diesen Kerben wird der Silberdrat gehängt, und mit einem Gewicht gespannt. Von diesem Faden hängt ein darüber hin und her beweglicher feiner mit einem kleinen Gewicht beschwerter Faden herab. Dem Gewicht gibt man ein groſses Volumen und hängt es in ein Glas mit Wasser, damit es bald zur Ruhe kömmt.

Ist nun der ausgespannte Faden in der Mittagslinie, so bestimmt dieser mit dem herabhängenden Loth die Mittagsfläche. Will man also die Culmination der Sonne beobachten, so stellt man hinter das Loth ein weiſs angestrichenes oder mit weiſsem Papier überzogenes Brett, so kann man das Vorübergehen des Sonnenbildes vor dem Verticalfaden beobachten. Wenn der Faden etwas von dem Brett

*) Ich gebrauchte eine feine messingene Saite.

Brett absteht, so kann man die Zeiten beobten, da der Schatten des Verticalfadens, der in dem Sonnenbild sehr scharf erscheint, die Ränder der Sonne berührt.

Die Lage der Mittagslinie muſs man vorher beynahe kennen. In dieser Absicht darf man nur einen Faden mit einem Gewicht an dem Fenster aufhängen, und die Lage seines Schattens beobachten, wenn die Sonne culminirt, welches man leicht wissen kann, wenn man die Uhr berichtigt hat. Ist nun der Gnomon aufgerichtet, so nimmt man correspondirende Höhen, und beobachtet auch die Zeit der Culmination der Sonne an dem Gnomon, so findet man aus dem Unterschied der aus correspondirenden Sonnenhöhen und aus der Beobachtung an dem Gnomon gefundenen Zeiten der Culmination der Sonne den Fehler des Gnomons, den man leicht vermittelst der Schraube, über welche der Silberfaden herabhängt, verbessern kann.

§. 131.

Die Berichtigung des Gnomons zu erleichtern und abzukürzen, bediente ich mich folgender Methode. Ich zählte die Anzahl der Schraubengänge, welche auf einen Zoll giengen, und fand $25\frac{1}{2}$. Diese mit der Länge des ausgespanten Drats von 12,75 Fuſs verglichen dienten zur Bestimmung der Anzahl von Schraubengängen, welche erfordert wurden, um jenen Drat um einen gegebenen Winkel zu verrüken. Da der Drat horizontal ausgespannt ist, so ist der Winkel, welchen er mit der

Mit-

Mittagslinie macht, wenn der Gnomon noch fehlerhaft gefunden wird, das Azimuth der Ebene des Gnomons. Dieses kann man finden, wenn man weiſs, um wie viel früher oder später die Sonne durch die Ebene des Gnomons gieng, als durch die Mittagsebene. Denn in dem sphärischen Dreyek PZS Fig. 46, wo Z das Zenith, P der Pol, S der Ort der Sonne, und ZS ein Vertialkreis durch sie ist, verhält sich.

$$\sin PS : \sin PZS = \sin ZS : \sin ZPS$$

$$\text{oder } \cos\delta : \sin a = \cos h : \sin t$$

Weil man hier a und t als klein annehmen darf, so kann man statt ihren Sinus die Bogen selbst und h der Mittagshöhe der Sonne gleich sezen, welche $AH = qs = 90^\circ - \varphi + \delta$ ist, folglich hat man

$$a = \frac{\cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)} . t$$

Beyspiel. Den 27. März 1792 war der erste Rand der Sonne an dem Verticalfaden

um	$23^{U.}54'$	$26''$,5		
der 2te um	23 56	35,0		
Summe	47 51	1,5		
Hälfte	23 55	30,75	Mittelpunct d. ☉ am Gnomon.	
Mittag um	23 56	14,07	(§. 123.)	

Fehl. d. Gnomons = 43,32 in Zeit.

$t = 649''$,8 im Bogen.

$\varphi = 48^\circ 43'$

$\delta = \ \ 2 \ \ 58$

$\varphi - \delta = 45 \ \ 45$

$$\begin{aligned} Lg\,t &= 2{,}8127797 \\ Lg\cos\delta &= 9{,}9994176 \\ C.\,Lg\sin(\varphi-\delta) &= 0{,}1449039 \\ Lg\,a &= 2{,}9571012 \\ a &= 905'',9 = 15'\,5'',9 \end{aligned}$$

Da die Sonne früher durch die Ebene des Gnomons als durch die Mittagsebene gieng, so machte erstere mit dieser einen Winkel von 15′ 5″,9 gegen Morgen, folglich muſste der an der Schraube befindliche Endpunct des ausgespannten Drats weiter gegen Morgen gerükt werden, welches durch die Umdrehung der Schraube geschehen konnte. Wie viele Umdrehungen der Schraube erfordert wurden, um den Drat in die Mittagslinie zu bringen, lieſse sich so berechnen. Auf einen Zoll giengen $25\frac{1}{2}$ Schraubenrevolutionen, folglich war

eine Revolution $= \dfrac{1}{25,5} = \frac{2}{51}$ Zollen. Diese

Gröſse mit der Länge des Drats = 12,75 F. = 153 Zollen dividirt gibt die Tangente des Winkes, welcher einer Schraubenrevolution zugehört, oder den Winkel selbst in Theilen des Halbmessers, weil die Winkel klein sind. Folglich ist dieser Winkel

$$= \frac{2.206265}{51.153} \text{ Secunden.}$$

$$= 52,868 \text{ Sec.}$$

und die Anzahl von Schraubenrevolutionen, welche zu dem Winkel a'' gehört

$$= \frac{a}{52,868} = \frac{905,9}{52,868} = 17,135$$

Die

Die Höhe des Lochs, durch welches die Sonnenstralen einfielen, über dem Boden war 10 Fuſs, und ich konnte vermittelst dieses Gnomons die Uhr bis auf eine Secunde berichtigen, welches zu Messung der Mittagshöhen hinreichende Genauigkeit gibt. Dieser Gnomon diente nun auch zur Berichtigung der Zenithfernröhre §. 130. und §. 131.

Bestimmung der Polhöhe, oder der geographischen Breite eines Orts.

§. 132.

Es ist schon oben §. 3. und 4. im allgemeinen gezeigt worden, wie man aus der Mittagshöhe eines Fixsterns oder der Sonne die Breite findet. Da man aus dem Vorhergehenden auch die zu diesen Beobachtungen erforderlichen Instrumente kennet, so werde ich jezt die Sache ausführlicher behandlen können.

Nach §. 110. u. f. kann man die Zeit berechnen, da die Sonne oder ein Stern durch den Mittagskreis geht; miſst man in diesem Augenblik seine Höhe, so bekommt man die Mittagshöhe. Es fragt sich, *wie genau* man die Zeit des Durchgangs durch den Mittagskreis wissen müsse, damit keine merkliche Fehler in der Messung der Mittagshöhe entstehen, und wie die Veränderungen der Mittagshöhen können berechnet werden, wenn man sie kurz vor oder nach der Culmination genommen hat, um daraus die wahren Mittagshöhen herzuleiten.

Höhen-

Höhenänderung nahe an dem Mittagskreis.

§. 133.

In der Gleichung (§. 111.) $\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$, kann man statt $\cos t$ sezen $1 - 2(\sin\frac{1}{2}t)^2$; so wird

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta - 2(\sin\tfrac{1}{2}t)^2 \cos\varphi \cos\delta$$
$$= \cos(\varphi - \delta) - 2(\sin\tfrac{1}{2}t)^2 \cos\varphi \cos\delta$$

Hat man nun einen Stern von nördlicher Abweichung in dem *südlichen* Theil des Meridians genommen, so ist nach §. 4. die Aequatorshöhe oder $90^\circ - \varphi$ (§. 3.) = der Mittagshöhe (H) − Abweichung δ; also $H = 90^\circ - \varphi + \delta = 90^\circ - (\varphi - \delta)$, und $\cos(\varphi - \delta) = \sin H$, folglich

$$\sin H - \sin h = 2(\sin\tfrac{1}{2}t)^2 \cos\varphi \cos\delta$$

Für einen Stern von südlicher Abweichung ist $\sin\delta$ negativ, also

$$\sin h = \cos\varphi \cos\delta \cos t - \sin\varphi \sin\delta$$
$$= \cos(\varphi + \delta) - 2(\sin\tfrac{1}{2}t)^2 \cos\varphi \cos\delta,$$

folglich ebenfalls

$\sin H - \sin h = 2(\sin\frac{1}{2}t)^2 \cos\varphi \cos\delta$, weil hier $H = 90^\circ - \varphi - \delta$ (§. 4.)

aber $\sin H - \sin h = 2\cos\left(\frac{H+h}{2}\right)\sin\left(\frac{H-h}{2}\right)$

sezt man $H - h = \Delta h$, so wird $\frac{H+h}{2} = H - \frac{1}{2}\Delta h$

folglich

$$2\cos(H - \tfrac{1}{2}\Delta h)\sin\tfrac{1}{2}\Delta h = 2(\sin\tfrac{1}{2}t)^2 \cos\varphi \cos\delta$$

und $\sin\frac{1}{2}\Delta h = \frac{(\sin\frac{1}{2}t)^2 \cos\varphi\cos\delta}{\cos(H - \frac{1}{2}\Delta h)}$

$$= \frac{(\sin\frac{1}{2}t)^2 \cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi \mp \delta + \frac{1}{2}\Delta h)} \left.\begin{matrix} - \text{für nördl.} \\ + \text{für südl.}\end{matrix}\right\} \text{Abweich.}$$

Vermittelst dieser Formel kann man die Höhenänderung Δh so genau als man will berechnen. Man sezt nehmlich zuerst den Nenner $= \sin(\varphi \mp \delta)$ und berechnet so den $\sin\frac{1}{2}\Delta h$. Dieser Werth von $\frac{1}{2}\Delta h$ in den Nenner gesezt gibt den $\sin\frac{1}{2}\Delta h$ schon näher, und man kann diese Näherung so weit treiben, bis man zwey aufeinander folgende gleiche Werthe von Δh bekömmt.

Ist aber der Stundenwinkel t klein, und $\varphi - \delta$ nicht kleiner als 20°, so kann man in dem Nenner $\frac{1}{2}\Delta h$ weglassen, und statt $\sin\frac{1}{2}\Delta h$, $\sin\frac{1}{2}t$ die Bogen selbst gebrauchen, alsdann wird $\frac{1}{2}\Delta h = \frac{\frac{1}{4}t^2 \cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi \mp \delta)}$

Die Höhe seye n Minuten vor oder nach der Culmination genommen, so ist $t = 900''.\,n$, (weil $1'' = 15''$ im Bogen) und in Theilen des Halbmessers 1 (§. 85.) $= 900.\,\mathrm{n.\,e}$, also

$$\Delta h = \frac{2.\,(450.\,\mathrm{e})^2 \cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi \mp \delta)}.\,\mathrm{n}^2,$$

folglich in Secunden

$$\Delta h = \frac{2.\,(450)^2 \cos\varphi\cos\delta.\,\mathrm{e}}{\sin(\varphi \mp \delta)}.\,\mathrm{n}^2 =$$

$$\frac{1,96345 \cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi \mp \delta)}.\, n^2 \text{ *)}$$

Sezt

*) Wenn man diese Näherungsformel genauer berechnet, so findet sich Δh

Sezt man $n=1$, so bekömmt man die Höhenänderung für ein Zeitminute vor oder nach Mittag, diese mit dem Quadrat der Zeit vor oder nach der Culmination in Minuten ausgedrükt multiplicirt gibt die Höhenänderung für jeden andern Stundenwinkel mit hinlänglicher Genauigkeit, wenn n nicht grösser ist als 10. Der beständige Logarithme von 1,96345. ist. $= 0{,}2930199$.

Beyspiel. Man hat d. 19. Apr. 1794 unter einer Breite von $51°32'$ die Höhe der Sonne $3'\,45''$ nach Mittag beobachtet, wie viel war diese Höhe von der Mittagshöhe der Sonne verschieden?

$$\begin{array}{rlrl} \text{Hier } \varphi = & 51°\,32' \ldots & \text{Lg}\cos = & 9{,}7938317-10 \\ \delta = & \underline{11 \quad 20} \ldots & \text{Lg}\cos = & 9{,}9914477-10 \\ \varphi-\delta = & 40 \quad 12 & \text{C. Lg}\sin = & 0{,}1901322 \\ & & \text{Lg const.} = & \underline{0{,}2930199} \\ & & & 0{,}2684316 \end{array}$$

gehört zu $1'',855$ = Höhenänderung in einer Minute.

Diese

$$\Delta h = \frac{1{,}96345.\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi \mp \delta)}\, n^2 - \frac{0{,}0000093\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi \mp \delta)}\left(\tfrac{1}{3} + \cos\varphi\cos\delta\,\text{cotg}(\varphi-\delta)\right) n^4.$$

Hieraus findet sich leicht, daſs der Fehler obiger Formel für $n=10$ unter einer Breite von $51°\,32'$ im Sommersolstitio, wo er am grösten wird, nur 0,16 Sec. und unter einer Breite von $40°$ unter denselben Umständen 0,62 in der Berechnung der Veränderung der Mittagshöhe der Sonne beträgt. Die Breite φ und Abweichung δ dürfen nur bis auf einige Minuten bekannt seyn.

Diese Höhenänderung mit $(3' \, 45'')^2 = (3{,}75)^2 = 14{,}06$ multiplicirt giebt $26''{,}08$, um welches die $3' \, 45''$ nach der Culmination der Sonne beobachtete Höhe kleiner war als die Mittagshöhe.

§. 134.

Für einen Stern, der in dem nordlichen Theil des Meridians culminirt, dessen Abweichung also größer ist als die Breite (§. 4.) wird $\varphi - \delta$ negativ, der Cosinus eines negativen Bogens aber bleibt positiv, folglich ist auch in diesem Fall

$$\sin h = \cos(\delta - \varphi) - 2(\sin \tfrac{1}{2} t)^2 \cos\varphi \cos\delta$$

$$\text{also } \Delta h = \frac{1{,}96345 \cos\varphi \cos\delta}{\sin(\delta - \varphi)} \,.\, n^2.$$

Ist aber der Stundenwinkel t stumpf, so ist (wen T = Stundenwinkel von Mitternacht angerechnet),

$$\begin{aligned} \sin h &= \sin\varphi \sin\delta - \cos\varphi \cos\delta \cos T \\ &= \sin\varphi \sin\delta - \cos\varphi \cos\delta + 2(\sin \tfrac{1}{2} T)^2 \cos\varphi \cos\delta \\ &= -\cos(\varphi + \delta) + 2(\sin \tfrac{1}{2} T)^2 \cos\varphi \cos\delta. \end{aligned}$$

Eines Sterns Mittagshöhe *unter* dem Pol ist $= \varphi - (90^\circ - \delta) = \varphi + \delta - 90^\circ$ (§. 4.), also $\varphi + \delta > 90^\circ$, wenn man seine Höhe *unter* dem Pol noch beobachten kann, und $\sin(\varphi + \delta - 90^\circ) = -\operatorname{Cos}(\varphi + \delta)$, folglich, wenn H wieder die Mittagshöhe heißt,

$\sin h = \sin H + 2(\sin \tfrac{1}{2} T)^2 \cos\varphi \cos\delta$ und die *Zunahme* der Höhe in n Minuten vor oder nach der Culmination des Sterns

$$= \frac{1{,}96345 \cos\varphi \cos\delta . n^2}{\cos(\varphi + \delta - 90^\circ)} = \frac{1{,}96345 \cos\varphi \cos\delta}{\sin(180^\circ - (\varphi + \delta))} . n^2$$

Wenn

Wenn man die Höhenänderung eines Fixsterns berechnen will, muſs n in *Sternzeit* gegeben seyn.

Die Formeln für die Höhenänderung in n Minuten vor oder nach der Culmination der Sonne oder eines Sterns sind also folgende:

I. *In dem südlichen Theil des Meridians.*

$$\Delta h = \frac{1{,}96345 \cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi \mp \delta)} \cdot n^2 \quad \left.\begin{matrix} -\text{für nördl.} \\ +\text{für südl.} \end{matrix}\right\} \text{Abweichung}$$

II. *In dem nordlichen Theil des Meridians.*

$$\Delta h = \frac{1{,}96345 \cos\varphi \cos\delta}{\sin(\delta - \varphi)} \cdot n^2$$

für Höhen über dem Pol.

$$= \frac{1{,}96345 \cos\varphi \cos\delta}{\sin(180^\circ - (\varphi + \delta))} \cdot n^2$$

für Höhen unter dem Pol.

§. 135.

Wenn ein Quadrant in der Mittagsfläche steht und man eines Sterns Höhe vor oder nach der Culmination, so weit es das Sehefeld der Fernröhre verstattet, nimmt, so ist diese Höhe von seiner Mittagshöhe aus zweyerley Ursachen verschieden. Einmal weil seine Höhe kleiner war als die Mittagshöhe, fürs zweyte weil die nach dem Stern gezogene Absehenslinie nicht mehr mit des Quadranten Ebene parallel ist. Es fragt sich nun, wie dieser Fehler berechnet werden könne?

Man sieht leicht, daſs es hier auf den scheinbaren Weg ankömmt, welchen der Stern

durch

durch das Sehefeld der Fernröhre nimmt. Wäre dieser Weg eine gerade mit dem Horizont parallele Linie, so würde man in jeder Stelle des Sehefelds auf dieser Linie die Mittagshöhe des Sterns bekommen. Ist er aber eine krumme Linie, so wird man des Sterns Höhe zu groſs oder zu klein bekommen, je nachdem diese ihre hole Seite gegen das Zenith oder gegen den Horizont kehrt.

Wenn man sich nach einem Stern hin eine gerade Linie gezogen gedenkt, so beschreibt diese während des täglichen Umlaufs des Sterns die Oberfläche eines geraden Kegels (wenn man die Stralenbrechung, Veränderung der Declination u. s. w. nicht in Betrachtung zieht). Ein Stük eines ähnlichen Kegels beschreibt der Hauptstral in der Fernröhre, welches durch eine in dem Brennpunct liegende und auf der in der Mittagsfläche befindlichen Seitenlinie des Kegels senkrecht stehende Ebene geschnitten wird, in welcher das Fadenkreuz ist. Der scheinbare Weg des Sterns ist also ein Kegelschnitt, und kann den verschiedenen Abweichungen der Sterne nach eine Ellipse, Parabel, Hyperbel oder eine gerade Linie werden.

§. 136.

ACB Fig. 50 Taf. VI seye ein Schnitt dieses Kegels durch die Mittagsebene, *CD* seine Axe, welche die Weltaxe seyn wird, *B* die Stelle des Fadenkreuzes, und also *CB* des Objectivs Brennweite, *BA* ein Durchschnitt der erweiterten Ebene des Fadenkreuzes mit der Mittagsebene auf *CB* senkrecht, so wird ein Stern bey seinem Durchgang durch die Mittagsfläche den horizontalen Faden in dem Brennpunct der Fernröhre berühren. $DCA = DCB$ ist des Sterns Abstand vom Pol. So lange also ACB kleiner ist als ein rechter Winkel, so ist der scheinbare Weg des Sterns eine *Ellipse*, deren grofse Axe $= AB$. Wird ACB ein rechter Winkel, so wird AB mit AC parallel, und der Schnitt ist eine *Parabel*. Für $ACB > 90^\circ$ entsteht eine *Hyperbel* bis zu 180° da die Kegelfläche in eine Ebene übergeht, und der scheinbare Weg des Sterns eine *gerade Linie* wird. Eben so entstehen dieselben Schnitte bey südlichen Abweichungen oder Polardistanzen $> 90^\circ$. Für 45 Grad südliche Abweichung oder für 135 Grad Abstand von dem Nordpol entsteht wieder eine *Parabel*. Man hat also für die Abstände von dem Nordpol

von 0° bis	45°	Ellipse.	
	45°	Parabel.	
von 45 bis	90	Hyperbel.	
	90	gerade Linie.	
von 90 bis	135	Hyperbel.	den erstern entgegenges.
	135	Parabel.	

§. 137.

Wenn die Gestalt des Kegels, der Abstand *CB* der schneidenden Ebene von der Spitze des Kegels und der Winkel ABC gegeben sind, so kann man leicht den Parameter und die grofse Axe des Kegelschnitts nach bekannten Regeln finden. Für gegenwärtigen Fall ist

CB

CB des Objectivs Brennweite $= l$, $ACD = DCB$ des Sterns Abstand vom Pol $= D$ und ABC ein rechter Winkel. Daraus findet sich die grofse Axe AB

$$= l \text{ tang. } 2D$$

der Parameter der grofsen Axe $= \frac{l \sin 2D}{\cos D^2}$

Nun seyen ab, de, Fig. 51 die beyden Kreuzfäden, ab der Mittagsfaden oder der verticale Faden, so ist ca ein Theil der grofsen Axe des Kegelschnitts, und man hat, wenn $cp = x$, $pm = y$, die grofse Axe $= 2a$ und ihr parameter $= p$ gesezt wird

$$y^2 = px \mp \frac{p}{2a} \cdot x^2$$

Wird diese quadratische Gleichung aufgelöfst, so findet man für ein gegebenes pm das zugehörige cp, oder qm aus pm, das heist den Abstand von dem horizontalen Faden für einen gegebenen Abstand von dem Mittagsfaden, und also die Verbesserung der Höhe. Oben hatten wir

$$2a = l \text{ tang } 2D$$

$$p = \frac{l \sin 2D}{\cos D^2}$$

also $\frac{p}{2a} = \frac{\cos 2D}{\cos D^2}$, und die Gleichung für den Kegelschnitt

$$y^2 = \frac{l \sin 2D}{\cos D^2} \cdot x - \frac{\cos 2D}{\cos D^2} \cdot x^2$$ oder wenn man y und x in Theilen der Brennweite des Objectivs ausdrükt

$$\frac{y^2}{l^2} = \frac{\sin 2D}{\cos D^2} \cdot \frac{x}{l} - \frac{\cos 2D}{\cos D^2} \cdot \frac{x^2}{l^2}$$

also $\frac{x}{l} = \text{tang}\, 2D (1 - \sqrt{(1 - \frac{\cos 2D}{\sin D^2} \cdot y^2)}) = qm.$

für $D = 45^\circ$ wird tang $2D = \infty$, und $\cos 2D = 0$, allein in diesem Fall ist der Schnitt eine Parabel (§. 136.), deren Parameter $= \frac{l \sin 2D}{\cos D^2} = 2l$

also $$y^2 = 2lx$$

und $$\frac{x}{l} = \frac{1}{2} \frac{y^2}{l^2}.$$

Wenn die Abstände vom Pol groſs sind, so wird folgende Formel bequemer seyn, welche man findet, wenn die Gröſse unter dem Wurzelzeichen in eine Reihe aufgelöſst wird.

$$\frac{x}{l} = \frac{1}{4} \frac{\sin 2D}{\sin D^2} \frac{y^2}{l^2} + \frac{1}{32} \frac{\sin 4D}{\sin D^4} \frac{y^4}{l^4}.$$

Wird nun $\frac{x}{l}$ mit 206265 multiplicirt, so bekommt man qm Fig. 51 in Theilen eines grösten Kreises. Um diese Verbesserung gehörig anbringen zu können, bemerke ich, daſs eine Höhe, die man mit einem in der Mittagsebene aufgestellten Quadranten auſser dem Meridianfaden nimmt, *gröſser* ist als die Mittagshöhe, wenn die Polardistanz *kleiner* ist als 90 Gr., und die Höhe gegen *Süden* genommen ist, oder gegen *Norden unter* dem Pol; aber kleiner für *südliche* Abweichung oder Polardistanz *gröſser* als 90°, und für Höhen *unter* dem Pol.

§. 138.

Die Tangente des Winkels, welchen die nach dem Stern gezogene Linie mit des Quadranten Ebene macht, ist $\frac{y}{l}$. Nennt man diesen Winkel λ, so ist

$$\frac{x}{l} = \frac{1}{4}\,\frac{\sin 2D}{\sin D^2}\,(\operatorname{tang}\lambda)^2$$

$+ \frac{1}{32}\,\frac{\sin 4D}{\sin D^4}\,(\operatorname{tang}\lambda)^4$, und in Secunden

$$= \frac{206265}{4}\,\sin 2D\left(\frac{\operatorname{tang}\lambda}{\sin D}\right)^2$$

$$+ \frac{206265}{32}\,\sin 4D\left(\frac{\operatorname{tang}\lambda}{\sin D}\right)^4.$$

Das zweyte Glied kann man weglaſsen, ohne einen Fehler von 0,1 Sec. zu begehen, wenn λ kleiner ist als $\frac{1}{10}D$.

Beyspiel. Man hat die Höhe des obern Sonnenrandes bey 23° 27′ *nordlicher* Abweichung mit einem in der Mittagsfläche stehenden Quadranten beobachtet, als der eine Sonnenrand den Mittagsfaden berührte, um wie viel war diese Höhe von der Mittagshöhe verschieden?

$$D = 66^\circ\, 33'\, 0''$$

Halbmess. $\odot = \lambda = 0\quad 15\quad 47$

$$2D = 133\quad 6\quad 0$$

$$C.\,\mathrm{Lg}\sin = 0{,}0374376$$
$$\mathrm{Lg\,tang} = 7{,}6619279 - 10$$
$$\mathrm{Lg}\left(\frac{\mathrm{tang}\,\lambda}{\sin D}\right) = 7{,}6993655 - 10$$
$$\mathrm{Lg}\left(\frac{\mathrm{tang}\,\lambda}{\sin D}\right)^2 = 15{,}3987310 - 20$$
$$\mathrm{Lg}\sin 2D = 9{,}8634194 - 10$$
$$\mathrm{Lg}\ \frac{1}{\frac{1}{2}} = 5{,}3144251 = \mathrm{Lg}\,206265 \quad (\S.\ 85.)$$
$$0{,}5765755$$

gehört zu 3,772

Unterschied von der Mittagshöhe

$$= \frac{3{,}772}{4} = 0{,}943 \text{ Sec.}$$

Da nun nach §. 137. die beobachtete Höhe in diesem Fall gröſser ist als die Mittagshöhe, so müssen 0,9 Sec. von der beobachteten Höhe abgezogen werden, um die Mittagshöhe zu erhalten.

Ist die Abweichung der Sonne $= 23^\circ 27'$ *südlich*, so wird $D = 113^\circ 27'$, $2D = 226^\circ 54'$, also $\sin 2D$ wieder eben so groſs als bey nordlicher Abweichung, aber negativ. $\left(\frac{\mathrm{tang}\,\lambda}{\sin D}\right)^2$ bleibt beständig positiv, folglich bekömmt bey südlicher Abweichung die Verbesserung der Mittagshöhe das entgegengesezte Zeichen, und sie muſs also zu beobachteten Höhen addirt werden, wie man schon aus §. 137. weiſs. Für alle in dem südlichen Theil des Meridians genommene Höhen wäre also die Verbesserung

rung $\quad = -5{,}566 \sin 2D \left(\frac{\tang \lambda}{\sin D}\right)^2$

Weil λ klein ist, so könnte man den Bogen statt der Tangente gebrauchen. Allein man mufs doch diesen Bogen in Theilen des Halbmessers ausdrüken; daher ist es bequemer aus den trigonometrischen Tafeln den Logarithmen der Tangente zu nehmen, zumal da man λ nicht genauer als bis auf Minuten zu wissen nöthig hat.

Bestimmung der Breite vermittelst der Circumpolar-Sterne.

§. 139.

Wenn man die Mittagshöhe eines Sterns *über* und *unter* dem Pol mifst, so kann man daraus nach §. 3. S. 3. die Breite finden. Weil kleine Höhen wegen der Stralenbrechung unsicher sind, so wählt man dazu solche Sterne deren Abstand vom Pol geringe und deren kleinste Höhe folglich nicht viel von der grössten unterschieden. Der *Polarstern* (α ursae minoris) ist unter den kenntlichen Sternen der nächste am Pol, und also zur Bestimmung der Breite am vortheilhaftesten zu gebrauchen. Da er am Ende des Decembers Abends um 6 Uhr *über* dem Pol, und also 12 Sternstunden nachher *unter* demselben durch den Mittagskreis geht, so kann man ihn um diese Zeit Abends *über* und Morgens *unter* dem Pol in dem Meridian beobachten.

Um

Um den Quadranten in den Mittagskreis zu bringen, darf man nur nach §. 126. die Zeit der Culmination eines Sterns berechnen, und den Quadranten in dem Augenblik der Culmination des Sterns so stellen, daſs der Stern an dem Verticalfaden des Fadenkreuzes steht. Man wird dieses leicht zu Stande bringen, wenn man einige Secunden vor der Culmination des Sterns den Verticalfaden auf ihn richtet, und durch sanfte Bewegung des Quadranten in dem Azimuth ihn daran zu erhalten sucht, bis die Uhr die Zeit der Culmination angibt, und hierauf den Quadranten fest schraubt. Ein kleiner Fehler in der Stellung des Quadranten in die Mittagsebene hat auf die Messung der Mittagshöhen keinen merklichen Einfluſs, wie §. 133. und 134. gezeigt wurde.

Beyspiel. Den 24. Dec. 1791 beobachtete ich in *Altburg* mit einem nach obiger Beschreibung eingerichteten Quadranten, den ich in die Mittagsfläche gestellt hatte, die Höhe des Polarsterns *über* dem Pol $= 50° 55' 30''$. Die 96 Theilung gab 54 Gr. 1 Viertheil und 4 Theile des Vernier. Die Uhr zeigte als der Stern durch den Verticalfaden gieng $6^{U.} 40' 36''$

Den 25. Dec. Morgens um 6 Uhr oder den 24. Decemb. $18^{U.} 40' 6''$ gieng der Stern *unter* dem Pol durch den Verticalfaden, und ich fand die Mittagshöhe *unter* dem Pol $= 47° 20' 0''$ nach der gewöhnlichen und $= 50\ 1\ 15$ nach 96 Theilung.

Beob.

Beob Höhe *über* dem Pol =	50°55′ 30″,0		
Col. Fehler (§. 41.)	— 23 30,0		
	50 32 0,0		
nach der 96. Theil. =	50 31 49,7		
Mittel =	50 31 54,8		
Taf. III. Stralenbrechung	— 0 47,0		
wahre Höhe =	50 31 7,8		
Beob.Höhe *unter* dem Pol =	47°20′ 0″,0		
	— 23 30,0		
	46 56 30,0		
nach der 96. Th. =	46 56 29,8		
Mittel =	46 56 29,9		
Stralenbrech.	— 53,3		
wahre Höhe *unter* d. Pol =	46 55 36,6		
— — *über* — — =	50 31 7,8		
Summe =	97 26 44,4		
Hälfte =	48 43 22,2	Breite (§. 3.)	

nach der 54 =	50°37′ 30″,00	Taf. I.
96. Th. 1 =	0 14 3,75	Taf. I.
4 =	0 3 30,94	Taf. I.
	50 55 4,69	
Coll. Fehler (§. 41.)	— 23 15,00	
	50 31 49,69	
nach der 50 =	46 52′ 30″,00	Taf. I.
96. Th. 2 =	0 14 3,75	Taf. I.
15 =	0 13 11,01	Taf. I.
	47 19 44,76	
	— 23 15,00	
	46 56 29,76	

§. 140.

Wenn man die Zeit weiſs, da ein Stern so wohl über als unter dem Pol in dieselbe Verticalfläche kam, und den Gang der Uhr kennt, nach welcher die Beobachtungen gemacht wurden, so kann man finden, was diese Verticalfläche vor einen Winkel mit der Mittagsfläche macht. Ist die Verticalfläche in der Mittagsfläche, so muſs die Zwischenzeit zwischen dem Durchgang durch die Verticalebene über dem Pol und dem Durchgang unter dem Pol genau so groſs seyn, als ein halber Sterntag (in Zeit der Uhr ausgedrükt, wenn die Uhr nicht nach Sternzeit geht). Hat man einen Stern zweymal nach einander auf derselben Seite des Pols, und einmal auf der entgegengesezten in der Verticalebene beobachtet, so geben die ersteren Beobachtungen den Gang der Uhr oder den Sterntag in Zeit der Uhr ausgedrükt, eine der erstern mit der lezten verglichen, zeigt, ob der Verticalkreis den Parallelkreis des Sterns halbirt, oder in der Mittagsebene liegt.

Es seye ZPR Fig. 48 Taf. VI der nordliche Quadrant des Meridians, Z das Zenith, P der Pol, STQ ein Parallelkreis eines Sterns, der zweymal in demselben Verticalkreis $ZTSW$ beobachtet wird, das eine mal in T das andere mal in S. Man fälle aus dem Pol P das Perpendikel PW auf den Verticalkreis ZW, so sind die sphärischen rechtwinklichten Dreyeke TPW, SPW einander gleich. Der Winkel TPS und also auch die Hälfte dessel-

ben

ben TPW ist gegeben, weil sich die ganze tägliche Umlaufszeit des Sterns zu der Zeit von T bis S verhält sich wie 360 Gr. zu dem Winkel TPS. PS ist des Sterns Abstand vom Pol. Also hat man

$$1 : \cos WPT = \operatorname{tang} PT : \operatorname{tang} PW.$$

Nun kennt man in dem rechtwinklichten Dreyek ZPW die beyden Catheten PW und $PZ = 90^\circ - PR =$ dem Complement der Breite, und es verhält sich

$$1 : \sin PZ = \operatorname{cotang} Pw : \operatorname{cotg} PZw$$
$$= \operatorname{tang} PZW : \operatorname{tang} PW$$

Hieraus findet sich also der Winkel PZW oder das Azimuth der Verticalfläche. Man sieht leicht, daſs die Verticalebene, in welcher man den Stern beobachtet, auf derjenigen Seite des Pols liegt, auf welcher die Zeit von einem Durchgang bis zu dem nächstfolgenden kleiner ist als ein halber Sterntag.

Wenn der Winkel WPT beynahe 90 Gr. ist, so läſst sich die Formel zur Rechnung bequemer einrichten. Man nenne das Complement des Winkels WPT ψ, so ist $\psi =$ dem halben Unterschied zwischen einem halben Sterntag und der Zeit von einem obern oder untern Durchgang bis zu dem nächstfolgenden untern oder obern in Grade verwandelt. Ist nun ψ klein, so wird auch $\operatorname{tang} PW$ klein, also kann man sezen $PW = \psi \operatorname{tang} PT = \psi \operatorname{cotg} \delta$, und aus demselben Grunde

$$PZW = \frac{PW}{\sin PZ} = \frac{\psi \operatorname{cotg} \delta}{\operatorname{cosin} \varphi} = \psi \operatorname{cotg} \delta \sec \varphi.$$

Bey-

Beyspiel. Nach §. 139. war die Zeit von dem obern Durchgang des Polarsterns bis zu seinem untern $= 18^{St.} 40' 6'' - 6^{St.} 40' 36'' = 11^{St.} 59' 30''$. Ein Sterntag ist $= 23^{St.} 56' 4'',09$ mittlerer Zeit. Die Uhr gieng aber täglich $16'',9$ der mittlern Zeit vor (§. 126.), folglich ist ein Sterntag $= 23^{St.} 56' 21''$ Zeit der Uhr. Die Hälfte davon ist $11^{St.} 58' 10'',5$. Folglich war die Zeit von dem obern Durchgang bis zu dem untern grösser als ein halber Sterntag um $1' 19'',5$. Die kleinere Zwischenzeit fiel also auf die östliche Seite des Pols, und der Quadrant wiche von Norden gegen Osten von der Mittagsfläche ab. Nun geben $\frac{1' 19'',5}{2}$ oder $39'',75$ Zeit der Uhr hier ohne merklichen Fehler $39'',75$ mittlere Zeit, und in einer mittleren Sonnenstunde beschreibt ein Fixstern einen Bogen von $15^0\ 2' 27'',847$ *), folglich gehören zu 39,75 Secunden m. Z. $9' 57'',882$ im Bogen. Also

$$
\begin{array}{lrl}
\psi = 597'',882 & Lg = & 2,7766155 \\
\delta = 88^0\ 12' & Lg\,cotg = & 8,4972928 - 10 \\
\varphi = 48\ \ 43 & C.\,Lg\sin = & \underline{0,1240964} \\
 & Lg\,PZW = & 1,3980047 \\
 & PZW = & 25'',00 \quad \text{Azimuth des Quadranten.}
\end{array}
$$

§. 141.

Da man nun in dem sphärischen Dreyek den Winkel *PZW*, und die Seiten *PZ*, *PT* kennt,

*) De Zach tabulae motuum Solis pag. CXXVII. Tab. XLV. und Samml. astron. Tafeln I. Band S. 294. Taf. XXXIII.

kennt, so kann man den Stundenwinkel ZPT finden. Man hat

$$\operatorname{cotg} m = \operatorname{tang} PZW \cos PZ \text{ *)}$$
$$\cos n = \cos m \operatorname{tang} PZ \operatorname{cotg} PT$$

und hieraus $ZPT = m + n$
$$ZPS = m - n$$

Wenn PZW klein ist, so hat man

$$90^\circ - m = PZW \cos PZ = PZW \sin \varphi$$
$$90^\circ - n = (90^\circ - m) \operatorname{tang} PZ \operatorname{cotg} PT = PZW \cos \varphi \operatorname{tang} \delta$$

also

$$ZPS = 180^\circ - PZW \sin \varphi - PZW \cos \varphi \operatorname{tang} \delta$$
$$ZPT = - PZW \cos PZ + PZW \sin PZ \operatorname{cotg} PT$$
$$= - PZW \sin \varphi + PZW \cos \varphi \operatorname{tang} \delta.$$

sezt man statt PZW seinen Werth $\psi \operatorname{cotg} \delta \sec \varphi$ (§. 140.) so wird

$$ZPS = 180^\circ - \psi \operatorname{cotg} \delta \operatorname{tang} \varphi - \psi = 180^\circ - RPS$$

und $ZPT = \psi - \psi \operatorname{cotg} \delta \operatorname{tang} \varphi$

Nimmt man statt ψ im Bogen die diesem Bogen zugehörige Zeit, so findet man RPS, ZPT in Zeit, und also den Unterschied zwischen dem Durchgang durch den Mittagskreis ZPR und den Scheitelkreis $ZTSW$, Fig. 48.

Oben hatten wir ψ in Zeit $= 39'',75$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Lg} 39'',75 &= 1,5993371 \\
\operatorname{Lg} \operatorname{cotg} \delta &= 8,4972928 - 10 \\
\operatorname{Lg} \operatorname{tg} \varphi &= \underline{0,0565024} \\
& 0,1531323
\end{aligned}$$

gehört zu $1'',422$

$$\psi = \underline{39,75} \text{ in Zeit.}$$
$$ZPT = 38,33$$
$$RPS = 41,17$$

Der

*) Kästners astron. Abhandl. I. Samml. S. 199. n. 152. S. 212. n. 179. lies $\cos n = \operatorname{tang} s \operatorname{cotg} \delta \cos \lambda$.

Der Quadrant wiche von Norden gegen Osten von der Mittagsfläche ab (§. 140.), und der Stern kam also über dem Pol früher an den Verticalfaden als in den Mittagskreis, folglich ist die Zeit der Culmination des Polarsterns $6^{U.} 40' 36'' + 38'',3 = 6^{U.} 41' 14'',3$ welches nur $0'',3$ von der oben §. 129. berechneten Zeit der Culmination abweicht, aber hier blos ein glücklicher Zufall ist, weil man mit einer Fernröhre, die nur 20 mal vergröſsert, gewiſs nicht genauer als bis auf 10 Secunden die Zeit des Austritts des Polarsterns an dem Meridianfaden beobachten kann. Gebraucht man Sterne von gröſsern Abweichungen, so ist dieses das *bequemste* und *sicherste Mittel*, die Zeit vermittelst einer Mittagsfernröhre zu bestimmen, und sie in dem Mittagskreis gehörig aufzustellen.

Nach §. 134. Form. II. ist die Höhenänderung des Polarsterns in einer Minute vor oder nach der Culmination = 0,064 Sec. über dem Pol
= 0,059 Sec. unter dem Pol.
folglich waren die Höhen des Palarsterns, welche 38 Sec. vor seinem *obern* und 41 Sec. nach seinem *untern* Durchgang durch den Mittagskreis genommen wurden von den Mittagshöhen nur einige Hunderttheile von Secunden verschieden.

§. 142.

Die hier beschriebene Methode, die Breite zu bestimmen, sezt die Abweichung des Sterns in der Zwischenzeit der Beobachtungen als *unverändert* voraus. Bekanntlich darf man dieses nicht mehr annehmen, wenn die Beob-

ach-

achtungen mehrere Tage von einander entfernt sind, weil die *Praecession* *), *Aberration*, *Nutation*, und die *eigene Bewegung* der Fixsterne die Abweichung beständig verändern. Diese Veränderungen kann man mit hinlänglicher Schärfe berechnen, wenn man die Abweichungen und gerade Aufsteigungen nur beynahe kennt. So kann man berechnen, um wie viel die Abweichung des Sterns zur Zeit der ersten Beobachtung von seiner Abweichung zur Zeit der zweyten verschieden war, und also bestimmen, wie groſs die zweyte Höhe würde gewesen seyn, wenn sich die Abweichung in der Zwischenzeit der Beobachtungen nicht geändert hätte. Diese auf die Zeit der ersten Beobachtung reducirte Höhe kann man nun, wie bisher gezeigt wurde, zur Bestimmung der Breite gebrauchen.

Hätte z. B. die Abweichung des Polarsterns in der Zwischenzeit der Beobachtungen (§. 139.) um 10 Secunden zugenommen, so würde man seine Höhe *unter* dem Pol $= 46^\circ\, 55'\, 36'',6 + 10'' = 46^\circ\, 55'\, 46'',6$ gefunden haben. Da hätte man also von der beobachteten Höhe müssen abziehen $10''$, um sie auf die Zeit der ersten zu reduciren.

§. 143.

Die von der Praecession und der eigenen Bewegung der Fixsterne herrührende jährliche Ver-

*) Wegen der Praecession nähert sich gegenwärtig der Polarstern beständig dem Nordpol bis in die Mitte des Jahrs 2102, da er vom Pol nur noch 27′ abstehen wird. Kästners astron. Abhandl. I. Samml. 336.

Veränderung ihrer Abweichung *) findet man in den Verzeichnissen der Fixsterne, in welchen ihre gerade Aufsteigungen und Abweichungen für einen gewissen Zeitpunct angegeben sind. Hieraus kann man leicht die Abweichung eines Fixsterns für eine gegebene Zeit finden. Die Nutation und Aberration in der Abweichung werden auf folgende Art be-

*) In der Connoissance des temps 1792 stehen Tafeln zur Berechnung der von der Praecession herrührenden Veränderung der geraden Aufsteigung und Abweichung von H. *de Lambre*. Er nimmt das jährliche Vorrüken der Nachtgleichen nach H. *la Lande* in diesem Jahrhundert zu 50″,25 an, S. 206. Daselbst sagt er "Man würde etwas mehr finden, wenn nur die vereinigte Wirkung des Monds und der Sonne auf das Sphäroid der Erde in Betrachtung gezogen würde. In der That macht nach den neuern Untersuchungen des Herrn de la Place die Wirkung der Planeten die Aequinoctialpuncte jährlich 0″,2016 in dem Aequator oder 0″,1849 in der Ecliptic *vorwärts* gehen; folglich muſs die von dem Mond und der Sonne bewirkte Praecession 50″,4349 seyn, weil die ganze beobachtete Praecession 50″,25 ist. Ist nun die Schiefe der Ecliptic $= \omega$ die gerade Aufsteigung des Sterns $= A$, seine Abweichung $= \delta$, Länge $= L$, Breite $= \lambda$, $dL = n. 50'',4349$, wenn n die Anzahl von Jahren ist, für welche man die Praecession verlangt, $dA, d\delta$ die Veränderung der zu dL gehörigen geraden Aufsteigung und Abweichung, so hat man nach aller Schärfe:

$$\sin \tfrac{1}{2} d\delta = \frac{\sin \tfrac{1}{2} dL \sin \omega \cos \lambda \cos (L + \tfrac{1}{2} dL)}{\cos (\delta + \tfrac{1}{2} d\delta)}$$

$$\sin (dA + n. 0'', 2016) = \frac{2 \sin \tfrac{1}{2} dL \cos \lambda^2}{\cos \delta \cos (\delta + d\delta)} \times$$

$$(\cos \omega \cos \tfrac{1}{2} dL - \sin \omega \operatorname{tang} \lambda (L + \tfrac{1}{2} dL));$$

und mit einer hinlänglichen Genauigkeit:

$$d\delta = n. 20'',084 \cos (A + \tfrac{1}{2} dA)$$

$$dA = n. 46'',0619 + n. 20'',084 \sin (A + \tfrac{1}{2} dA) \operatorname{tang} (\delta + \tfrac{1}{2} d\delta)$$

berechnet. Es seye die gerade Aufsteigung eines Fixsterns $= A$, seine Abweichung δ, die Länge der Sonne $= \odot$, die Länge des aufsteigenden Mondsknoten $= N$, so ist die Nutation in der Abweichung

$$= \pm a \cos N \sin A \mp b \cos A \sin N \text{ *)}$$

Die oberen Zeichen gelten für nordliche, die unteren für südliche Abweichungen. Die Aberration in der Abweichung ist

$$= -20''(\cos A \sin \odot - \cos\omega \sin A \cos \odot) \sin\delta - 20'' \sin\omega \cos \odot \cos\delta;$$

Folglich, wenn $2a = 19'',1$; $2b = 14'',1$ und $\omega = 23^\circ 28'$ gesezt wird (§. 128.)

Nutation in der Abweichung

$$= \pm 9'',55 \cos N \sin A \mp 7'',05 \cos A \sin N$$

Aberration in der Abweichung

$$= -20'' \cos A \sin \odot \sin\delta + 18'',346 \sin A \cos \odot \sin\delta - 7'',964 \cos \odot \cos\delta$$

Wenn man südliche Abweichungen als positiv betrachtet, so bekommt das lezte Glied das Zeichen $+$.

Bestimmung der Breite und der Schiefe der Ecliptic vermittelst der grösten und kleinsten Mittagshöhe der Sonne.

§. 144.

Wenn man die Mittagshöhe der Sonne zur Zeit der *Sommersonnenwende* misst, so ist dieselbe gleich dem Unterschied der Aequatorshöhe und der grösten Abweichung der Sonne oder der Schiefe der Ecliptic. Zur Zeit der

*) Connoissance des temps 1789.

der *Wintersonnenwende* findet man die Höhe der Sonne im Mittag gleich der Summe der Aequatorshöhe und Schiefe der Ecliptic. Folglich ist die halbe Summe der gröſsten und kleinsten Mittagshöhe der Sonne der Aequatorshöhe gleich, welche von 90 Gr. abgezogen die Breite gibt. Statt der Mittagshöhen kann man auch Abstände vom Zenith gebrauchen. (§. 4.) Da ist der kleinste Abstand vom Zenith = dem Unterschied der Breite und der Schiefe der Ecliptic, der gröste = der Summe von beyden, also die Breite = der halben Summe der kleinsten und grösten Zenithdistanz der Sonne in dem Mittagskreis. Der halbe Unterschied von beyden ist die Schiefe der Ecliptic.

Ist die Schiefe der Ecliptic gröſser als die Breite, so fallen die gröſsten und kleinsten Höhen oder die kleinsten und gröſsten Abstände vom Zenith auf entgegengesezte Seiten des Zeniths. In diesem Fall ist die halbe Summe von beyden der Schiefe der Ecliptic, der halbe Unterschied der Zenithdistanzen der Breite gleich, welche *nordlich* oder *südlich* ist, je nachdem die in dem nordlichen Theil des Meridians genommene Zenithdistanz die *kleinere* oder *gröſsere* ist. S. die Tafel zu §. 4. S. 5. Weil man wegen der Unsicherheit der Stralenbrechung nicht gerne kleine Höhen gebraucht, so ist diese Methode unter solchen Breiten, welche kleiner sind als 34° 8′, der Methode, die Breite vermittelst des Polarsterns zu bestimmen (§. 139.), vorzuziehen, weil alsdann die kleinste Höhe der Sonne gröser

ser

ser ist, als die Höhe des Polarsterns unter dem Pol.

§. 145.

Um diese Methode gehörig anwenden zu können, muſs man noch folgendes in Betrachtung ziehen. Das Solstitium tritt selten so nahe an dem Mittag ein, daſs man die nächste Mittagshöhe der Sonne als die Solstitialhöhe ansehen könnte, und man kann noch überdies durch die Witterung gehindert werden, diese Höhe zu beobachten. Die Schiefe der Ecliptic verändert sich wegen ihrer Secular-Abnahme und wegen der Nutation, daher kann man in zwey auf einander folgenden Sonnenwenden sie nicht als gleich, und also auch das Mittel aus den beyden Solstitialhöhen nicht als die wahre Höhe des Aequators betrachten. Man nimmt daher zur Zeit der Sonnenwenden mehrere Mittagshöhen der Sonne, aus welchen man, wenn die Schiefe der Ecliptic nur beynahe bekannt ist, die wahre Solstitialhöhe bestimmen kann. Durch diese Vervielfältigung der Beobachtungen bekommt man die Solstitialhöhe noch genauer, als wenn man unmittelbar sie selbst beobachtet hätte. Die Reduction wegen der Veränderung der Schiefe der Ecliptic wird auf ähnliche Art gemacht, wie §. 142. an dem Polarstern wegen der Veränderung seiner Abweichung gezeigt wurde.

§. 146.

Aus der geraden Aufsteigung der Sonne (A) und der Schiefe der Ecliptic (ω) findet man die Abweichung der Sonne (δ). Denn die gerade Aufsteigung der Sonne, die dazu gehörige Länge und Abweichung bilden ein rechtwinklichtes sphärisches Dreyek, in welchem der eine Cathetus die Abweichung der Sonne der andere ihre gerade Aufsteigung, und die Schiefe der Ecliptic der dem erstern entgegengesezte Winkel ist. Folglich ist

$$\operatorname{tang}\delta = \sin A \operatorname{tang}\omega$$

Differentiirt man diese Gleichung, indem man δ und A als veränderlich betrachtet, so ist

$$\text{I.}\quad \frac{d\delta}{(\cos\delta)^2} = dA \cos A \operatorname{tang}\omega$$

Ein Bogen des Aequators von einem Solstitialpunct an bis an den Ort der Sonne gerechnet seye x, so ist $A = 90^\circ - x$ (oder $270^\circ - x$), folglich

$$d\delta = -dx \sin x \operatorname{tang}\omega (\cos\delta)^2.$$

Da nun $\operatorname{tang}\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \sin A \operatorname{tang}\omega$, so ist

$$\left.\begin{matrix}(\sin\delta)^2 \\ 1-(\cos\delta)^2\end{matrix}\right\} = (\cos\delta \sin A \operatorname{tang}\omega)^2 =$$

$$(\cos\delta \operatorname{tang}\omega)^2 (1-(\sin x)^2)$$

$$\text{also}\quad 1 = (\cos\delta)^2 (1 + (1-\sin x^2) \operatorname{tang}\omega^2)$$

$$= (\cos\delta)^2 (1 + \operatorname{tang}\omega^2 - (\sin x \operatorname{tang}\omega)^2)$$

$$\text{daher}\quad (\cos\delta)^2 = \frac{(\cos\omega)^2}{1-(\sin x \sin\omega)^2}.$$

Wird dieser Werth von $\cos\delta$ in der Gleichung (I.) substituirt, so wird

$$d\delta = \frac{-dx \sin x \sin\omega \cos\omega}{1-(\sin x \sin\omega)^2}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} dx \sin x \sin 2\omega}{1-(\sin x \sin\omega)^2}$$

Der

Der Nenner in eine Reihe aufgelöſst und mit dem Zähler multiplicirt gibt

$$d\delta = -\tfrac{1}{2}\sin 2\omega\, dx\, \sin x -$$
$$\tfrac{1}{2}\sin 2\omega (\sin\omega)^2 (\sin x)^3\, dx - \text{etc.}$$

für kleine Bogen ist sehr nahe $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3$ also, wenn man die über 3 gehenden Potenzen von x wegläſst

$$d\delta = -\tfrac{1}{2}\sin 2\omega\, x dx + \tfrac{1}{2}\sin 2\omega (\tfrac{1}{6} - (\sin\omega)^2) x^3 dx$$

Wird nun integrirt, so erhält man

$$\delta = \text{const.} - \tfrac{1}{4}\sin 2\omega\, x^2 + \tfrac{1}{8}\sin 2\omega (\tfrac{1}{6} - (\sin\omega)^2) x^4$$

Da nun für $x = 0$, $\delta = \omega$ werden muſs, so ist die zu x gehörige Abnahme der Abweichung, oder der Unterschied zwischen der Abweichung und der Schiefe der Ecliptic

II. $\Delta\delta = \frac{1}{4}\sin 2\omega . x^2 - \frac{1}{8}\sin 2\omega (\frac{1}{6} - (\sin\omega)^2) x^4$ *).

§. 147.

Um nun die Veränderung der Abweichung der Sonne in n Tagen vor oder nach der Sonnenwende berechnen zu können, muſs man die Veränderung der geraden Aufsteigung der Sonne in einem Tage zur Zeit der Sonnenwenden wissen. Diese beträgt im Wintersolstitio 1° 6′ 39″ oder 3999″, im Sommersolstitio 3742 Secunden. Im allgemeinen seye sie $= \Delta A$, so ist die Veränderung der Abweichung in n Tagen vor oder nach der Sonnenwende, wenn die Rechnung nach §. 85. oder §. 133. geführt wird,

$= \frac{1}{4}$

*) $\Delta\delta$ hängt zwar auch von der Veränderung der Schiefe der Ecliptic ab. Da aber diese in einem Jahr nur 3″ beträgt, so kann man sie in so kurzer Zwischenzeit $= 0$ sezen.

$$=\tfrac{1}{4}\sin 2\omega . e\Delta A^2 . n^2 -$$

$\tfrac{1}{8}\sin 2\omega . e^3 . \Delta A^4 (\tfrac{1}{6} - (\sin\omega)^2) n^4$ Secunden

Wird nun $\omega = 23^\circ 28'$, $\Delta A = 3742$ und $= 3999$ gesezt, so findet sich

für die Sommer-Sonnenwende

$\Delta\delta = 12{,}3988 . n^2 - 0{,}000016527 . n^4$ Secunden.

für die Winter-Sonnenwende

$\Delta\delta = 14{,}1603 . n^2 - 0{,}000021557 . n^4$ Sec.

Also ist bis auf 0,01 Secunden genau, wenn der Abstand von den Sonnenwenden nicht grösser ist als fünf Tage

$\Delta\delta = 12{,}3988 . n^2$ für die Sommersonnenwende.

$\Delta\delta = 14{,}1603 . n^2$ für die Wintersonnenwende.

Eine Mittagshöhe der Sonne N Tage vor oder nach der Sommersonnenwende ist also $= 90^\circ - \varphi + \omega - 12{,}3988 . N^2$

und n Tage vor oder nach derselben

$$= 90^\circ - \varphi + \omega - 12{,}3988 . n^2$$

Beyder Höhen Unterschied (Δh) kennt man aus den Beobachtungen, also ist

$\Delta h = 12{,}3988 (N^2 - n^2) = 12{,}3988 (N + n)(N - n)$

Die Zwischenzeit der Beobachtungen ist $N - n$ oder $N + n$, je nachdem die Höhen auf *derselben* oder auf *entgegengesezten* Seiten der Sonnenwende genommen sind. Folglieh hat man in dem ersten Fall:

$$N + n = \frac{\Delta h}{12{,}3988 . (N - n)} = 0{,}080653 . \frac{\Delta h}{N - n}$$

in dem zweyten Fall:

$$N - n = \frac{\Delta h}{12{,}3988 . N + n} = 0{,}080653 . \frac{\Delta h}{N + n}$$

In

In der Wintersonnenwende gebraucht man statt der Zahl $\frac{1}{12,3988}$ die Zahl $\frac{1}{14,1603}$ oder 0,0706200.

Da man nun so wohl $N+n$ als auch $N-n$ kennt, so findet man $N = \frac{N+n+N-n}{2}$ und $n = \frac{N+n-(N-n)}{2}$, oder die Abstände der Beobachtungen von der Sonnenwende, wobey zu bemerken ist, daſs zur Zeit der Sommersonnenwende der gröſsere Abstand von derselben der gröſsern Zenithdistanz oder kleinern Höhe, zur Zeit der Wintersonnenwende aber der kleinern Zenithdistanz oder gröſsern Höhe zugehört. Aus obigen Formeln siehet man, daſs ein kleiner Fehler in dem Unterschied der Höhen Δh auf die Bestimmung des Abstands von der Sonnenwende einen kleinern Einfluſs hat, wenn die Beobachtungen auf entgegengesezten Seiten derselbigen liegen, weil alsdann der Nenner des Bruchs gröſser wird.

§. 148.

Zur Erläuterung dieser Methode wähle ich folgende Zenithdistanzen der Sonne im Mittag, welche auf der königl. Sternwarte in *Greenwich* beobachtet wurden *).

1788

*) Astronomical observations made at the royal observatory at Greenwich in the year MDCCLXXXVIII. by Nevil Maskelyne. London 1789.

1788. Jun. 15	28° 21′ 52″,0. Unt. Rand.		Refr. 29″,7
	27 50 20,0. Ob. R.		
17.	28 18 22,1. U. R.	—	29,6
	27 46 49,2. O. R.		
22.	28 16 29,4. U. R.	—	29,5
	27 45 2,8. O. R.		
27.	28 25 10,2. U. R.	—	29,3
	27 53 37,3. O. R.		
Dec. 14.	74 59 1,4. U. R.	—	3′ 35,4
	74 26 32,6. O. R.		
16.	75 4 13,5. U. R.	— –	39,0
	74 31 44,1. O. R.		
20.	75 9 7,1. U. R.	— –	40,6
	74 36 37,6. O. R.		
21.	75 9 6,9. U. R.	— –	37,7
	74 36 39,5. O. R.		
22.	75 8 45,9. U. R.	— –	39,8
	74 36 13,1. O. R.		
23.	75 7 47,4. U. R.	— –	42,8
	74 35 16,3. O. R.		

Also

Also Jun. 15. u. R.	28°	21′	52″,0	
o. R.	27	50	20,0	
Summe =	56	12	12,0	
Z. D. Mittelp. d. $\odot$	28	6	6,0	
Collim. Fehler		+	6,0	*)
	28	6	12,0	
Stralenbr.		+	29,7	
	28	6	41,7	
Parallaxe		—	3,9	
Wahre Zenithdist. d. $\odot$ =	28	6	37,8	d. 15 Jun.
ebenso	28	3	7,3	17 —
—	28	1	17,7	22 —
—	28	9	55,1	27 —

Aus diesen Zenithdistanzen siehet man, daſs die Sonnenwende zwischen d. 15 und 27 Jun. fällt. Der Unterschied der Zenithdistanzen d. 15 und 27 Jun. ist $= 3' 17'',3 = 197'',3 = \Delta h$. Die Zwischenzeit der Beobachtungen $= 12$ Tagen $= N + n$, weil die Zenithdistanzen auf entgegengesezten Seiten der Sonnenwende genommen sind. Also ist

$$N - n = \frac{0{,}080653 \,.\, 197{,}3}{12} = 1{,}326 \text{ (§. 147. II Fall).}$$

$$N + n = 12{,}000$$

$$\text{Summe} = 13{,}326 = 2N.$$

$$\text{Unterschied} = 10{,}326 = 2n.$$

Daher ist $N = 6{,}663$ und $n = 5{,}337$ Tagen. Da nun die erste Zenithdistanz kleiner ist als die

*) Astronomical Observations made at the royal observatory at Greenwich in the year 1787 pag. 17. observ. Zenithdist.

die lezte, so ist jene 5,337 Tage vor der Sonnenwende genommen, folglich ist die Zeit der Sonnenwende Jun. 15. + 5,337 Tage oder Jun. 20,337.

Der Unterschied der Zenithdistanzen d. 22. und 27. Jun. ist $= 8'37'',4 = 517'',7 = \Delta h$. Die Zwischenzeit der Beobachtungen = 5 Tagen $= N - n$, weil die Zenithdistanzen auf derselben Seite der Sonnenwende liegen. Also ist

$$N + n = \frac{0{,}080653 \cdot 517{,}7}{5} = 8{,}3509 \quad (\S.\ 147.\ \text{I. Fall.})$$

$$N - n = \underline{5{,}0000}$$

$$\text{Summe} = 13{,}3509 \text{ und } N = 6{,}67545$$

$$\text{Untersch.} = 3{,}3509 \quad n = 1{,}67545$$

folglich wurde die Zenithdistanz d. 27. Jun. 6,67545 Tage nach der Sonnenwende beobachtet, und die Zeit der Sonnenwende wäre hienach Jun. 20,324.

Aus den Beobachtungen vom 15. und 22. Jun. findet sich auf dieselbe Art die Zeit der Sonnenwende Jun. 20, 344. Das Mittel aus diesen drey Bestimmungen gibt

Jun. 20, 335 oder Jun. 20 $8^{U.}\ 2',4$.

Hienach finden sich der Ordnung nach folgende Zwischenzeiten zwischen den Beobachtungen und zwischen der Sonnenwende

Jun.	15	5,324	Tage.
	17	3,324	
	22	1,676	
	27	6,676	

Nun kann man den Unterschied zwischen den beobachteten Zenithdistanzen, und zwischen der in der Sonnenwende, berechnen. Es ist z. Beysp. für die Beobachtung vom 15. Jun.

$n =$

$$n = 5{,}324;\ \mathrm{Lg}\,n = 0{,}7262380$$
$$\mathrm{Lg}\,n^2 = 1{,}4524760$$
$$\mathrm{Lg}\,12{,}3988 = \underline{1{,}0933798}$$
$$2{,}5458558$$

gehört zu $351'',44 = 5'51'',4$

beob. Zenithdist. 15. Jun. =	28° 6 37,8
Zenithdist. im Solstitio =	28 0 46,4
aus der Beob. vom 17. Jun.	28 0 50,3
22. Jun.	28 0 42,9
27. Jun.	28 0 42,5
Mittel =	28 0 45,5

Die Zenithdistanzen vom December 1788 auf wahre reducirt sind folgende:

Dec. 14	74° 46′ 20″,1
16	— 51 35,5
20	— 56 30,5
21	— 56 28,6
22	— 56 7,0
23	— 55 12,3

Die Beobachtungen vom 14 und 23 December geben, auf obige Art behandelt, die Zeit der Wintersonnenwende Dec. 20,5879

vom 16 und 22 Dec.	20,5977
vom 14 und 20 Dec.	20,5922
Mittel =	20,5926

oder Dec. 20 14U. 13′,3

Dec. 21 2 13,3 Morg. bürgerl. Zeit.

Werden nun die Zenithdistanzen auf die Zeit der Sonnenwende reducirt, so erhält man

aus der Z. D. vom 14 Dec.	74° 56′ 35″,5
16	— 56 34,2
20	— 56 35,5
21	— 56 30,9
22	— 56 35,0
23	— 56 34,4
Mittel =	74 56 34,2
in der Sommersonnenwende =	28 0 45,5
Summe =	102 57 19,7
Hälfte =	51 28 39,85

Breite von Greenwich.

§. 149.

Es ist schon oben (§. 145.) bemerkt worden, dafs bey diesen Untersuchungen auch der Veränderung der Schiefe der Ecliptic müsse Rechnung getragen werden. Die Veränderung der Schiefe der Ecliptic kommt theils von ihrer Secularabnahme, theils von dem Wanken der Erdaxe her. Erstere beträgt in einem Jahr 0″,344 nach H. von Zach Sonnentafeln, leztere ist = dem Product aus 9″,55 in den Cosinus des Mondsknotens, und mufs zu der *mittlern* Schiefe addirt werden so lange cos *N* positiv ist, abgezogen, wenn er negativ wird.

Nun war die Länge des aufsteigenden Mondsknotens d. 20. Jun. 1788 = $8^{z.}$ 16° 16′ = 256° 16′. d. 20. Dec. = $8^{z.}$ 6° 34′ = 246° 34′. Sezt man die mittlere Schiefe der Ecliptic d. 20. Jun. 1788 = ω, so ist ihre *scheinbare* Schiefe, wie sie aus den Beobachtungen folgt = $\omega +$ 9″,55 cos (256° 16′). Den 20. Dec. war die mittlere Schiefe wegen der Secularabnahme

um

um $\frac{0'',34}{2}$ oder 0″,17 kleiner, also die wahre Schiefe $= \omega - 0'',17 + 9'',55 \cos(246^\circ\, 34')$.

Bey der Nutation muſs nach *Ximenes* *) noch eine Verbesserung, welche von der Länge der *Erdnähe* des Monds abhängt, und sich auf 2″ erstreken kann, angebracht werden. Sie muſs von der nördlichen Nutation abgezogen, zu der südlichen addirt werden, wenn die Erdnähe des Monds in dem *IX* Zeichen ist; ist aber des Monds Erdnähe in dem Anfang des dritten Zeichens, so muſs die Verbesserung zu der nordlichen Nutation addirt, und von der südlichen abgezogen werden. In dem Zeichen *O* und *VI* ist die Verbesserung $= 0$, in den übrigen dem Quadrat des Cosinus des Abstands vom Perigäo proportional. Die Länge der Erdferne des Monds ist d. 20. Jun. $= 9^{Z.}\, 26^\circ\, 19'$, also die Länge der Erdnähe $= 3^{Z.}\, 26^\circ\, 19'$. d. 20. Dec. $= 4^{Z.}\, 16^\circ 46'$. Daher Nutat. d. 20. Jun. $= -(2'',26 - 1'',63) = -0'',63$. d. 20. Dec. $= -(3''76 - 0'',99) = -2'',77$ und scheinbare Schiefe der Ecliptic

d. 20. Jun. $= \omega - 0'',63$

d. 20. Dec. $= \omega - 2,77 - 0'',17$

folglich war die scheinbare Schiefe der Ecliptic den 20. Dec. kleiner als den 20. Jun. um 2,3 Sec. Die Zenithdistanz würde also d. 20. Dec. wenn sich die Schiefe der Ecliptic nicht geändert hätte um 2″,3 gröſser oder $= 74^\circ\, 56'\, 36'',5$ gewesen seyn.

Nun

*) De Zach tabulae motuum Solis. pag. 56.

Nun ist Z. D. d. 20. Jun.	=	28° 0′ 45″,5 (§. 148.)
reduc. Z. Dist. d. 20. Dec.	=	74 56 36,5
Summe	=	102 57 22,0
Breite	=	51 28 41,0
Diff.	=	46 55 51,0
Hälfte	=	23 27 5,55 =

der scheinbaren Schiefe der Ecliptic den 20. Jun. 1788. Wird nun die Nutation mit *entgegengesezten* Zeichen angebracht, so findet sich die mittlere Schiefe der Ecliptic = 23° 27′ 56″,13.

Wird aber die *Verbesserung der Nutation nach Ximenes* weggelassen, so findet sich die Schiefe der Ecliptic im Dec. nur um 1,50 Sec. kleiner als im Jun. und

die Breite von Greenwich	=	51° 28′ 40″,6
scheinb. Schiefe d. Ecliptic	=	23 27 55,1
mittlere — — —	=	23 27 57,4

§. 150.

Wenn man die Länge der Sonne als bekannt voraussezt, so kann man die Zeit der Sonnenwenden bestimmen, und die Rechnung sehr abkürzen *). Es ist hier zu bemerken, daſs die Zeit der Sonnenwende durch nahe an derselben liegende Beobachtungen nicht genau bestimmt werden kann, weil ein kleiner Fehler in der Höhe oder Zenithdistanz einen groſsen Fehler in der Länge der Sonne hervorbringt. Zur Bestimmung der Sonnenlänge gebraucht man daher solche Höhen, die nahe bey der Tag- und Nachtgleiche genommen sind. Hat man

*) De Zach tabulae motuum Solis. p. 62 et 63.

man durch solche Beobachtungen die Zeit, da die Sonne in 0° ♈ tritt, bestimmt, so findet man vermittelst der übrigen Elemente der Sonnentafeln die Zeit der Sonnenwenden genauer. Die Beobachtungen bey der Sonnenwende geben aber immer die Zeit derselben mit einer Genauigkeit, die zu der Reduction der Beobachtungen hinlänglich ist.

Methoden, die Breite zu bestimmen, wobey die Abweichungen der Sterne als bekannt vorausgesezt werden.

§. 151.

Man mißt eines Sterns Höhe oder Abstand vom Scheitel, bringt dabey die Verbesserungen wegen des Collimationsfehlers und der Stralenbrechung an, so findet man nach §. 4. aus dem Abstand vom Scheitel und aus des Sterns scheinbarer Abweichung die Breite. Man gebraucht hiezu vorzüglich Sterne, die nahe am Zenith vorbeygehen, theils weil daselbst die Stralenbrechung geringe ist, theils um den Quadranten durch *Umwendung* (§. 42.) berichtigen zu können. Hier muſs ebenfalls der Veränderung der Abweichung des Sterns in der Zwischenzeit Rechnung getragen werden.

Beyspiel. *Tobias Mayer* beobachtete mit dem gegen *Norden* gekehrten Mauerquadranten der Götting. Sternwarte folgende Abstände γ *Draconis* vom Zenith:

d. 22 Jul. 1756 | 0° 0′ 2″,6
d. 23 | 0 0 7,2
d. 24 | 0 0 9,2
d. 29 | 0 0 9,2

Da diese Zenithdistanzen auf dem Gradbogen noch zwischen 0° und 90° liegen, so fallen sie in den nordlichen Quadranten des Meridians, vorausgesezt, daſs der Collimationsfehler des Quadranten kleiner war als diese Abstände.

Als der Quadrant wieder gegen *Süden* aufgestellt war, fand Mayer

d. 7 Aug. 1756 | 0° 0′ 9″,2 | jenseits des
d. 8 — | 0 0 7,8 | Nullpuncts.

Da man die Veränderung der Abweichung in so kleinen Zwischenzeiten der Zeit proportional annehmen kann, so nehme man aus den Zeiten und aus den Zenithdistanzen ein Mittel. Auf diese Art findet sich

Jul. 25 | 0° 0′ 7″,05 Zenithdistanz.
Aug. 8 | 0 0 8,5

Die Abweichung γ Drac. 25 Jul. 56 =
51° 31′ 41″,6 *nach Mayer*
51 31 38,6 *Bradley*
51 31 36,6 *de la Caille*

Nutat. und Aber. d. 25 Jul. † 8,6″5 † 11″,18 = † 19″,73
(§. 143.) d. 8. Aug. † 8,34 † 14,62 = † 22,96

Die Praecession beträgt nur − 0″,03, also war des Sterns Abweichung den 8. Aug. gröſser als den 25. Jul. um 3″,20, folglich auch seine Zenithdistanz um eben so viel gröſser, weil sie auf der Nordseite war. Die Zenithdistanz d. 8. Aug. würde also, wenn des Sterns Abweichung sich nicht geändert hätte, gewesen seyn

= 0°

	=	0°	0′	5″,30	
Z. D. d. 25. Jul.	=	0	0	7,05	
Untersch.	=			1,75	
Collim. Fehler	=			0,87	(§. 42.)
Summe	=	0	0	12,35	
Hälfte	=	0	0	6,17	wahre Z. Dist. 25. Jul.
scheinb. Abweich. *	=	51	32	1,33	nach Mayer
Untersch.	=	51	31	55,16	Breite (§. 4. 1. I. Fall)
		—	—	52	mit Bradley's } Abw.
		—	—	50	— de la Caille's } Abw.

§. 152.

Weil man zur Beobachtung der Sterne nahe am Zenith nur einen kleinen Gradbogen nöthig hat, so verfertigte man dazu eigene Instrumente von grossen Halbmessern mit einem Bogen von einigen Graden auf beyden Seiten des Nullpuncts, welche *Zenithsectoren* heissen. Mit solchen Instrumenten kann man zwar die Abstände vom Scheitel sehr genau messen. Allein die Genauigkeit der Breite hängt von der Genauigkeit der Abweichungen der Sterne ab, welche durch Mauerquadranten gefunden werden, folglich kann man die Breite mit Zenithsectoren nicht genauer bestimmen, als mit dem Mauerquadranten, mit welchem die Abweichungen der Sterne bestimmt sind. Verlangt man aber nur den *Unterschied* der Breiten zweyer Oerter, wie bey den Untersuchungen über die Gestalt der Erde, so braucht man weder den Collimationsfehler, noch die Abweichung des Sterns zu wissen, wenn man an beyden Oertern Zenithdistanzen *desselben* Sterns beobachtet (§. 5. S. 6.).

Bestimmung der Breite durch Unterschiede der Höhen gegen Norden und Süden.

§. 153.

Wenn man Mittagshöhen der Sterne so wohl in dem südlichen, als auch in dem nördlichen Quadranten des Mittagskreises nimmt, so kann man daraus den Collimationsfehler und die Breite zugleich finden. Man seze die Abweichung des gegen *Süden* culminirenden Sterns $=\delta$, so ist seine Mittagshöhe $=90^\circ-\varphi\pm\delta=H$, $+$ für nördliche, $-$ für südliche Abweichung. Die Abweichung des gegen *Norden* culminirenden Sterns seye $=d$, so ist seine Mittagshöhe über oder unter dem Pol $=\varphi\mp(90^\circ-d)=h$. Also die Breite aus der südlichen Höhe

$$=\varphi=90^\circ-H\pm\delta$$

aus der nördlichen Höhe

$$=\varphi=h\mp(90^\circ-d)$$

Also

$$2\varphi=90^\circ-H+h\pm\delta\mp(90^\circ-d)$$

I. $\varphi=\dfrac{\delta+d}{2}-\left(\dfrac{H-h}{2}\right)$ für nördl. Abw. und Höhen üb. d. Pol.

II. $\varphi=\dfrac{d-\delta}{2}-\left(\dfrac{H-h}{2}\right)$ für südl. Abw. und Höhen üb. d. Pol.

III. $\varphi=90^\circ-\left(\dfrac{d-\delta}{2}\right)-\left(\dfrac{H-h}{2}\right)$ für nördl. Abw. u. Höhen unter d. Pol.

IV. $\varphi=90^\circ-\left(\dfrac{\delta+d}{2}\right)-\left(\dfrac{H-h}{2}\right)$ für südl. Abw. u. Höhen unt. d. Pol.

Hier kommen allein *Unterschiede* der Höhen vor, folglich hebt sich der Collimationsfehler

fehler auf beyden Seiten auf. Hat man die Breite nach dieser Methode gefunden, so kann man die Mittagshöhen der Sterne angeben, welche mit den beobachteten verglichen den Collimationsfehler bestimmen, oder wenn er bereits auf andere Art gefunden ist, berichtigen oder bestätigen.

Beyspiel. Den 1. April 1791 fand ich in *Altburg* die Mittagshöhe von β Cepheus *unter* dem Pol mit dem Quadranten

$= 28° 47' 30'',0$ nach der 90 Th.
$28\ 46\ 52,5$ — — 96 Th.

den 2. April, Mittagshöhe des unteren Randes der Sonne

$= 46° 25' 30'',0$ nach der 90 Th.
$46\ 25\ \ 4,7$ — — 96. Th.

Folglich im Mittel (mit Collimationsfehler 23′30″ für die 90, und 23′ 15″ für die 96 Th. §. 41.) *)

Mittagshöhe β Cepheus =	28° 23′	48″,7	
Stralenbr. =	−1	45,1	
wahre Höhe =	28 22	3,6	$= h$

beob.

*) Wenn der Collimationsfehler so groſs wie hier ist, so würde man anfangs eine fehlerhafte Stralenbrechung finden. In diesem Fall muſs man, wenn man den Collim. Fehler nicht schon beynahe kennt, um die Stralenbrechung genau berechnen zu können, die Rechnung wiederholen.

beob. Mittagsh. der Sonne =	46° 2′ 24″,8
− Stralenbrechung =	0 0 55,0
	46 1 29,8
+ Parallaxe =	0 0 5,9
	46 1 35,7
+ Halbmesser ☉ =	0 16 1,8
w. Höhe der Sonne =	46 17 37,5 = H
— — β Cepheus =	28 22 3,6 = h
	17 55 33,9
$\frac{H-h}{2}$ =	8 57 46,95
scheinb. Abw. β Ceph. =	69° 38′ 38″,3 = d
Abweich. der ☉ =	5 0 34,0 = δ
$\frac{d-\delta}{2}$ =	32 19 2,15
$\frac{H-h}{2}$ =	8 57 46,95
Aequatorshöhe =	41 16 49,10
	89 59 60,0
Breite =	48 43 10,9
scheinb. Polardist. β Ceph. =	20 21 21,7
wahre Höhe β Cepheus =	28 21 49,2
Stralenbr.	+ 1 45,1
scheinb. Höhe =	28 23 34,3
beobachtete H. =	28 47 30,0 (90. Th.)
90 Th. Collimationsfehler =	23 55,7
scheinb. Höhe =	28 23 34,3
	28 46 52,5 (96 Th.)
96 Th. Collim. Fehler =	0 23 18,2

Wenn

Wenn man aus jeder Höhe besonders nach §. 4. die Breite bestimmt, ohne den Collimationsfehler in Rechnung zu bringen, so sind die beyden Bestimmungen um den gedoppelten Collimationsfehler voneinander verschieden. Die wahre Breite ist gleich dem arithmetischen Mittel aus beyden, der Collimationsfehler = ihrem halben Unterschied.

§. 154.

Sind die Höhen wenig von einander verschieden, so kann man ihren Unterschied mit einem Micrometer messen. Alsdann sind auch die Stralenbrechungen auf beyden Seiten einander beynahe gleich, folglich auch die scheinbaren Höhenunterschiede den wahren. Man hat also hiezu nur eine mit einem Micrometer versehene Fernröhre mit einer Vorrichtung nöthig, vermittelst welcher man sie jedes mal in dieselbe Lage gegen den Horizont bringen kann. Diese Methode wurde zuerst von dem Dänischen Astronomen, *Pet. Horrebow*, gebraucht, und durch *Hell* weiter ausgeführt und angewandt. Man sehe die Wiener *Ephemeriden* für 1771, und die *Beyträge zu verschiedenen Wissensch. von einigen öst. Gelehrten. Wien* 1775. S. 106. u. f. *Röslers Handbuch der practischen Astronomie* 1 Th. S. 311. u. f.

Ohne Micrometer lassen sich die Höhenunterschiede auf folgende Art bestimmen. Man richte die Fernröhre nach dem unter der kleinern Höhe culminirenden Stern, und bringe sie hierauf in dieselbe Lage gegen den Horizont auf der andern Seite des Zeniths, wo man die Zeit abwartet, da der andere Stern vor und nach seiner Culmination die Höhe des erstern erreicht. Aus den correspondirenden Höhen hat man die Zeit der Culmination des Sterns, folglich auch seinen Abstand von dem Mittagskreis. Da die Mittagshöhen beyder Sterne wenig von einander verschieden angenommen werden, so kann man den Unterschied der beobachteten Höhe des Sterns von seiner Mittagshöhe nach §. 134. berechnen, und also die Breite finden.

Wie man die *kreisförmige Blendung* in dem Sehefeld einer Fernröhre als ein Mikrometer gebrauchen, folglich auch Höhenunterschiede im Mittag messen könne, lehrt *la Lande. Astronomie* 2510. *H. Hofrath Kästner in Astron. Abhandl.* II. *Samml.* S. 279. u. f. und in dem *astron. Jahrbuch für* 1796 S. 164. u. f. Es wird dabey der scheinbare Weg des Sterns durch das Sehefeld der Fernröhre als eine *gerade* Linie angenommen, welches nur in dem Aequator statt findet (§. 135.) und in den Fällen wo des Sterns Polardistanz klein ist, merkliche Fehler hervorbringen kann, die man aber nach angef. und folg. §. berechnen und verbessern könnte, wenn die Methode selbst einige Schärfe der Beobachtungen verstattete.

Bestimmung der Breite vermittelst des Spiegelsextanten.

§. 155.

Wenn man die Uhr berichtigt hat (§. 109. u. f.), so kann man nach derselben den Augenblik der Culmination der Sonne angeben. In diesem Augenblik messe man mit dem Sextanten die Höhe der Sonne (§. 78.), aus welcher man auf die bisher gezeigte Art die Breite findet.

Hat man keine Uhr, so nehme man gegen Mittag mehrere Höhen der Sonne, bis sie wieder anfangen abzunehmen. Die gröſste ist sehr nahe die Mittagshöhe (§. 159.). Ist man aber mit einer Uhr versehen, so nehme man mehrere Höhen vor der Culmination und dieselben Höhen nach der Culmination, wobey man jedesmal die Zeit der Uhr bemerkt. Die correspondirenden Höhen geben die Zeit der Culmination der Sonne und jeder Beobachtung Abstand vom Mittag. Hieraus findet sich die Mittagshöhe der Sonne, wenn man die Höhenänderung zu der beobachteten Höhe addirt (§. 134.).

Beyspiel. Ich beobachtete in *Göttingen* sehr nahe unter derselben Breite, unter welcher die Sternwarte liegt, mit dem 10 zolligen Sextanten von *Troughton* (§. 98.) und einem Queksilber Horizont mit dem Dache ohne ein schwimmendes Planglas d. 11. März 1794. folgende gedoppelte Höhen des obern Sonnenrandes. Die Zeiten sind nach einer Secunden-

Ta-

Taschenuhr, die nach mittlerer Zeit geht, angegeben.

I.	$23^{U.}$	51′	38	70°	14′	45″
II.	—	53	0	—	16	5
III.	—	54	40	—	17	30
IV.	—	56	3	—	18	15
V.	—	57	30	—	19	0
VI.	—	58	32	—	19	25
VII.	—	59	25	—	19	50
VIII.	0	1	0	—	19	50
IX.	—	3	25	—	19	35
X.	—	4	28	—	19	20
XI.	—	5	55	—	18	50
XII.	—	7	28	—	18	5
XIII.	—	8	35	—	17	30
XIV.	—	10	20	—	16	5
XV.	—	11	40	—	14	45

Den Fehler des Index fand ich = 9′ 30″,0 (§. 68.) additiv.

Die drey ersten Höhen correspondiren mit den drey lezten und geben die Zeit der Uhr im Mittag (§. 110.) $0^{U.}$ 1′39″,0; 40″,0; 37″,5, also im Mittel $0^{U.}$ 1′39″ *). Die Abweichung der Sonne war d. 11. Merz 1794 im Mittag für den Berliner Meridian (15′ 53″ östlich von Göttingen)

= 3° 30′ 52″ südlich
in 15′ 53″ Veränd. der Abw. − 0 14
Abw. der Sonne für Gött. = 3 30 38 = δ

Hätte

*) Bey diesen Bestimmungen des wahren Mittags darf man keine so übereinstimmende Resultate erwarten wie bey corresp. Höhen, die weit vom Mittage genommen sind. Man hat aber auch hier keine sehr genaue Zeitbestimmung nöthig.

Hätte man bey diesen Beobachtungen keine Uhr gebraucht, so würde man die gröſste Höhe 70° 19′ 50″ für die Mittagshöhe annehmen müssen. Hieraus findet sich die Breite auf folgende Art:

	70°	19′	50″
Error ind.	+	9	30
gedopp. Höhe =	70	29	20
einfache H. =	35	14	40,0
Refract.	—	1	20,5
	35	13	19,5
Parall. ⊙		+	6,8
	35	13	26,3
Halbm ⊙	—	16	8,1
wahre Höhe =	34	57	18,2
Abw. ⊙ südl. +	3	30	38,0
Aequat. Höhe =	38	27	56,2
Breite =	51	32	3,8

§. 156.

Da man aber die Zeit des Mittags, und die Zeit jeder Beobachtung hat, so kann man alle Höhen die nicht weiter als 10 Minuten von dem Mittag entfernt sind, auf die Mittagshöhe vermittelst der Formel §. 134. reduciren, und also an einem Mittag viele von einander unabhängige Bestimmungen der Breite erhalten, aus welchen man ein Mittel nimmt.

Die Höhenänderung am Mittag findet sich so:

$$\varphi = 51^\circ 32' \quad \text{Lg cos} = 9{,}7938317-10$$
$$\delta = 3\;31 \quad \text{Lg cos} = 9{,}9991815-10$$
$$\varphi+\delta = 55\;\;3 \quad \text{C. Lg sin} = 0{,}0863704$$
$$\text{Lg const.} = 0{,}2930199$$
$$0{,}1724035$$

gehört zu $1'',4873$ = Höhenänd. in 1 Min.

Die erste Höhe wurde beobachtet um $23^{U.}\,51'\,38''$, also $10'\,1''$ vor der Culmination der Sonne, wofür man 10 Min. annehmen darf. Das Quadrat davon 100 mit 1,487 multiplicirt gibt $148'',7$ oder $2'\,28'',7$ um welches die beobachtete Höhe kleiner war, als die Mittagshöhe. Nun ist die erste Höhe auf wahre reducirt

	$= 34^\circ\,54'\,45'',7$
Höhenänd. =	2 28,7
Mittagshöhe =	34 57 14,4
Abw. =	3 30 38,0
Aequat. Höhe =	38 27 52,4
Breite =	51 32 7,6

Die Quadrate der zwischen jeder Beobachtung und zwischen dem wahren Mittag verflossenen Anzahl von Minuten sind der Ordnung nach folgende:

I.	100,0	VI.	9,6	XI.	18,5
II.	72,2	VII.	4,8	XII.	33,6
III.	49,0	VIII.	0,4	XIII.	47,6
IV.	31,4	IX.	3,2	XIV.	75,7
V.	17,2	X.	7,8	XV.	100,0

Wird hiemit die Höhenänderung in einer Minute multiplicirt, so findet man den Unterschied zwischen jeder beobachteten Höhe und der

der Mittagshöhe; daraus die Mittagshöhen selbst und folgende Breiten:

I.	51° 32′ 7″,6	VI.	51° 32′ 2″,0	XI.	51° 32′ 6″,2
II.	— 32 8,8	VII.	— 31 56,7	XII.	— 32 6,2
III.	— 32 0,8	VIII.	— 32 3,2	XIII.	— 32 2,8
IV.	— 32 4,5	IX.	— 32 6,5	XIV.	— 32 3,8
V.	— 32 3,2	X.	— 32 7,1	XV.	— 32 7,6

Breite im Mittel 51° 32′ 4″,5

Wenn man nicht die aus jeder Beobachtung besonders folgende Breite, sondern nur das Mittel aus allen verlangt, so läſst sich die Rechnung auf folgende Art abkürzen. Da die Höhen nur wenig von einander verschieden sind, so bleibt die Stralenbrechung und Parallaxe für jede Höhe dieselbe; die Abweichung der Sonne im Mittag, ihren Halbmesser, den Fehler des Index kann man ebenfalls als beständige Gröſsen betrachten. Folglich kommen bey dem Mittel aus allen die algebraischen Summen dieser Gröſsen durch ihre Anzahl dividirt, und die Summe der Höhenänderungen am Mittag durch ihre Anzahl dividirt vor. Man bekommt daher die Breite im Mittel, wenn man das Mittel aus allen beobachteten Höhen nimmt, zu demselben das Mittel der Höhenänderungen am Mittag addirt, und aus dieser mittlern scheinbaren Höhe die Breite auf obige Art herleitet. Da die Höhenänderungen am Mittag dem Product des Quadrats des Abstands vom Mittage in die Höhenänderung in einer Minute gleich sind, so erhält man die Höhenänderung im Mittel, wenn man das Mittel jener Quadratzahlen mit der Höhenänderung in einer Minute multiplicirt. So findet

findet sich das Mittel aus den beobachteten gedoppelten Höhen

	=	70° 17′	55″,3	
Collim. Fehler	+	9	30,0	
		70 27	25,3	
einfache Höhe	=	35 13	42,65	

Das Mittel aus den oben angegebenen Quadraten der Abstände vom Mittag 38,08 mit der Höhenänderung in einer Minute 1″,4873 multiplicirt gibt 56″,64, welches zu 35° 13′ 42″,65 addirt die auf den Mittag reducirte Höhe gibt

		35° 14′ 39″,3	
Refract.	—	1 20,5	
		35 13 18,8	
Par. ☉	+	6,8	
		35 13 25,6	
Halbm. ☉	—	16 8,1	
w. Höhe	=	34 57 17,5	
Abw.	=	3 30 38,0	
Aequat. Höhe	=	38 27 55,5	
Breite	=	51 32 4,5	

§. 157.

Die Abweichung der Sonne wurde in der Zwischenzeit der Beobachtungen bisher als unverändert angenommen, indem man die nach der Formel §. 134. berechnete Höhenänderung als die wahre Höhenänderung der Sonne, und das Mittel der Zeiten der correspondirenden Höhen als den wahren Mittag betrachtete. Die von dieser Voraussezung herrührenden Fehler würden sehr beträchtlich, wenn

wenn man vermittelst der Zeit des *wahren* Mittags die Höhenänderung berechnet hätte, weil die Veränderung der Abweichung der Sonne in einer Minute beynahe eine Secunde betragen kann, und nahe am Mittag sehr nahe eine gleiche Aenderung in der Sonnenhöhe hervorbringt. Allein da man die aus den correspondirenden Höhen gefundene Zeit als die Zeit des wahren Mittags angesehen hat, so heben sich die von beyden Voraussezungen herrührenden Fehler beynahe gegen einander auf.

Will man aber die Rechnung genau führen so muſs man vermittelst der Abstände vom *wahren* Mittag die Höhenänderung nach §. 134. berechnen, und aus der auf diese Art gefundenen Mittagshöhe mit der Abweichung der Sonne *für den Augenblik der Beobachtung* die Breite herleiten, oder, wenn man alle Höhen auf den Mittag reduciren und aus ihrem Mittel mit der Abweichung der Sonne für den wahren Mittag die Breite herleiten will, zu der berechneten Höhenänderung die Veränderung der Abweichung der Sonne in der Zeit ihres Abstands vom Mittag addiren oder davon abziehen, je nachdem die Sonne in den aufsteigenden oder niedersteigenden Zeichen ist, und die Beobachtung vor der Culmination gemacht ist, umgekehrt wenn man die Höhe nach dem Durchgang der Sonne durch den Mittagskreis genommen hat.

Daſs die Verbesserung des Mittags für so kleine Stundenwinkel, wenn gleich die Veränderung der Abweichung der Sonne in der Zwischenzeit der Beobachtungen klein ist,

doch

doch sehr beträchtlich werden könne, siehet man aus der Formel §. 111, der eine Theil der Mittagsverbesserung wird durch den sinus des Stundenwinkels dividirt, oder mit seiner Cosecante multiplicirt, der andere wird mit der Cotangente des Stundenwinkels multiplicirt. Für die correspondirenden Höhen §. 155. findet sich die Mittagsverbesserung $= -19{,}76$ Sec. folglich die Zeit des wahren Mittags $0^{U.}\ 1'\ 39'' - 19'',8 = 0^{U.}\ 1'\ 19'',2$. Hienach ist der Abstand der ersten Beobachtung vom Mittag $= 9'\ 41'' = 9',7$; das Quadrat davon $= 94{,}09$ mit 1,4873 (Höhenänd. in einer Minute) multiplicirt gibt $2'\ 19'',9$. Die Veränderung der Abweichung der Sonne in 9,7 Min. beträgt $9'',5$, folglich ist die ganze Höhenänderung, weil die Sonne in den aufsteigenden Zeichen und die Beobachtung vor ihrer Culmination gemacht war $= 2'\ 19'',9 + 9'',5 = 2'\ 29'',4$. Die erste Höhe, durch Collimationsfehler, Stralenbrechung, Parallaxe und Halbmesser der Sonne verbessert, ist

	=	34°	54′	45″,7
Höhenänd.	+		2	29,4
Mittagshöhe	=	34	57	15,1
Abweich. im Mittag	=	3	30	38,0
Aequatorshöhe	=	38	27	53,1
Breite	=	51	32	6,9

§. 158.

Aus den Höhen nahe am Mittag kann man, wenn auch unter denselben keine übereinstimmende wären, die Zeit des wahren Mittags

auf

auf folgende Art herleiten. Es seye die Mittagshöhe $=H$, die Höhenänderung in einer Minute vor oder nach der Culmination $=\Delta H$, die Veränderung der Abweichung der Sonne in einer Minute $=\pm\Delta\delta$. (das obere Zeichen in den aufsteigenden, das untere in den niedersteigenden Zeichen). Eine Höhe N Minuten *vor* der Culmination seye $=h$, so ist $h=H-\Delta H.N^2\mp\Delta\delta.N$ nach dem vorhergehenden.

Eine zweyte Höhe h', welche man n Minuten *nach* dem Durchgang der Sonne durch den Mittagskreis genommen hat, wird seyn

$$=H-\Delta H.n^2\pm\Delta\delta.n$$

Wird von dieser Höhe die erste abgezogen, so findet sich

$$h'-h=\Delta H(N^2-n^2)\pm(N+n)\Delta\delta.$$
$$=\Delta H(N+n)(N-n)\pm(N+n)\Delta\delta.$$

$N+n$ ist hier die Zwischenzeit der Beobachtungen in Minuten ausgedrükt, $h'-h$ der Unterschied der Höhen, folglich findet man aus dieser Gleichung

$$N-n=\frac{h'-h\mp(N+n)\Delta\delta}{\Delta H(N+n)}$$

$$\text{I.}\quad =\frac{h'-h}{\Delta H(N+n)}\mp\frac{\Delta\delta}{\Delta H}$$

und daraus ferner

$$N=\frac{N+n+N-n}{2}$$

$$n=\frac{N+n-(N-n)}{2}$$

wobey zu bemerken ist, daſs der gröſsere Stundenwinkel N immer der kleinern Höhe

zuge-

zugehört. Da man nun die Zeit der Uhr in dem Augenblik einer jeden Beobachtung kennt, so findet man die Zeit des wahren Mittags, wenn man die vormittägichen Stundenwinkel zu den Zeiten der ihnen zugehörigen Beobachtungen addirt, die nachmittägen aber davon abzieht.

Sind die *beyden* Höhen *vor* oder *nach* dem Durchgang der Sonne durch den Mittagskreis genommen, so ist für den ersten Fall:

$$h = H - \Delta H.\, N^2 \mp \Delta\delta.\, N$$
$$h' = H - \Delta H.\, n^2 \mp \Delta\delta.\, n$$
$$h' - h = \Delta H (N^2 - n^2) \pm \Delta\delta (N - n)$$

II. folglich $N + n = \frac{h' - h}{\Delta H (N - n)} \mp \frac{\Delta\delta}{\Delta H}$.

für den zweyten Fall findet sich:

$$h = H - \Delta H.\, N^2 \pm \Delta\delta.\, N$$
$$h' = H - \Delta H.\, n^2 \pm \Delta\delta.\, n$$
$$h' - h = \Delta H (N^2 - n^2) \mp \Delta\delta (N - n)$$

III. folglich $N + n = \frac{h' - h}{\Delta H (N - n)} \pm \frac{\Delta\delta}{\Delta H}$

Hier ist die Zwischenzeit der Beobachtungen $= N - n$, die Formeln geben $N + n$, folglich findet man wieder, wie oben, N und n, und daraus die Zeit des wahren Mittags.

Man findet z. B. aus der ersten und dreyzehnten Höhe §. 155. die Zeit des wahren Mittags auf folgende Art. Der Unterschied der *gedoppelten* Höhen ist 2′ 45″, folglich der Unterschied der *einfachen* Höhen = 1′ 22″,5 = 82″,5 = $h' - h$, Die Zwischenzeit der Beobachtungen = 16′ 57″,0 = 16,95 Minuten, = $N + n$. (I.) Die Abnahme der südlichen Abweiweichung der Sonne (Annäherung zum Nordpol) vom 11. bis 12. März $=23'33''$, folglich die Veränderung der Abweichung der Sonne in einer Minute $=0'',981=+\Delta\delta$. Nach §. 156. $\Delta H=1'',4873$. Also

$$\text{(I.)}\ N-n=\frac{82{,}5}{16{,}95.\ 1{,}4873}-\frac{0{,}981}{1{,}4873}$$
$$=3{,}272-0{,}659=\ 2{,}613\ \text{Min.}$$
$$N+n=\ 16{,}950$$
$$2N=\ 19{,}563.\ \text{Summe}$$
$$N=\ 9{,}7815\ \text{Min.}$$
$$2n=\ 14{,}337.\ \text{Diff.}$$
$$n=\ 7{,}1685\ \text{Min.}$$

Da nun die um $23^{U.}\,51'\,38''$ genommene Höhe die kleinere ist, so gehört ihr der grössere Stundenwinkel 9,7815 Min. $=9'\,46'',9$ zu. Folglich wäre die Zeit des wahren Mittags $23^{U.}\,51'\,38''+9'\,46'',9=0^{U.}\,1'\,24'',9$.

Um auch ein Beyspiel zu geben, wie man 2 Höhen, die auf *derselben* Seite des Mittagskreises genommen sind, vergleiche, nehme ich die beyden nach dem Durchgang der Sonne durch den Mittagskreis beob. Höhen IX und XV. §. 155. Der Unterschied der gedoppelten Höhen ist $=4'\,50''$; der Unterschied der einfachen $=2'\,25''=145''$. Die Zwischenzeit der Beobachtungen $=8'\,15''=8{,}25$ Min. $=$ $N-n$ (II. 2ter Fall.). Also

$$(\text{II.})\ N+n = \frac{145}{8{,}25.\,1{,}4873} + \frac{0{,}981}{1{,}4873}$$
$$= 11{,}8174 + 0{,}659 = 12{,}4764$$
$$N-n = 8{,}2500$$
$$2N = 20{,}7264 \quad \text{Summe.}$$
$$N = 10{,}3632$$
$$2n = 4{,}2264 \quad \text{Diff.}$$
$$n = 2{,}1132$$

Folglich war die IX Höhe 2,113 Min. oder $2'6'',8$ nach dem Durchgang der Sonne durch den Mittagskreis genommen, und die Zeit des wahren Mittags findet sich, wenn man $2'6'',8$ von der Zeit der Beobachtung $0^{U.}\ 3'\ 25''$ abzieht, also $0^{U.}\ 1'\ 18'',2$.

§. 159.

Sezt man in der Formel (I. §. 158.) $h'=h$, so wird

$$\frac{N-n}{2} = \mp \frac{\Delta\delta}{2.\Delta H} = \textit{der Mittagsverbesserung.}$$

Diese ist für alle Höhen, die nicht weiter als 10 Minuten von dem Mittag genommen sind, brauchbar, und hängt nicht von der Gröſse des Stundenwinkels, sondern allein von der Breite und der Abweichung der Sonne ab.

Für die correspondirenden Höhen §. 155. findet sich also, weil $\Delta\delta = +0'',981$, weil die Sonne in den aufsteigenden Zeichen ist, $\Delta H = 1'',4873$ (§. 156.)

$$\frac{N-n}{2} = \frac{0{,}981}{2{,}9746} = 0',3298 = 19'',79+.$$

Oben

Oben §. 57. wurde gefunden 19,8 Secunden.

Die beyden Höhen kann man so nahe beyeinander nehmen, daſs ihre Zwischenzeit kleiner ist als die Mittagsverbesserung, welche *constant* ist, folglich findet die *gröſste* Höhe der Sonne, welche zwischen die beyden gleichen Höhen fallen muſs, nicht in dem Mittagskreis statt, sondern *vor* ihrem Durchgang durch den Mittagskreis, wenn die Sonne in den *niedersteigenden*, *nach* demselben, wenn sie in den *aufsteigenden* Zeichen ist.

Die Höhe der Sonne n Minuten nach ihrem Durchgang durch den Mittagskreis ist $= h' = H - \Delta H . n^2 + \Delta \delta . n$ für aufsteigende Zeichen (§. 158.). In dieser Gleichung kann man $H, \Delta H, \Delta \delta$ als unveränderlich betrachten, und n so klein annehmen, daſs $\Delta \delta . n > \Delta H . n^2$, folglich wächst die Höhe der Sonne noch *nach* ihrem Durchgang durch den Mittagskreis. Differentiirt man diese Gleichung, indem man h' und n als veränderlich betrachtet, so findet sich:

$$\frac{dh'}{dn} = -2n\Delta H + \Delta\delta$$

dieses $= 0$ gesezt gibt für das *Maximum*

$$n = \frac{\Delta\delta}{2 . \Delta H}$$

So viele Minuten nach dem wahren Mittag erreicht die Sonne ihre *gröſste* Höhe, wenn sie in den *aufsteigenden* Zeichen ist.

In den *niedersteigenden* Zeichen erreicht sie ihre *gröste* Höhe $\frac{\Delta\delta}{2 . \Delta H}$ Minuten *vor* ihrem Durchgang durch den Mittagskreis.

Dieses stimmt mit der oben gefundenen Mittagsverbesserung überein; denn wird die Zwischenzeit der gleichen correspondirenden Höhen $= 0$ gesezt, so findet sich die gröſste Höhe $\frac{\Delta\delta}{2.\Delta H}$ Minuten vor oder nach der Sonne Durchgang durch den Meridian. Die Zeit des *unverbesserten* Mittags aus correspondirenden Höhen nahe an dem Mittag ist also die Zeit der gröſsten Höhe der Sonne.

Wenn man unter der Zeit der Culmination der Sonne den Augenblik ihrer gröſsten Höhe versteht, so sind die Zeiten der Culmination und des Durchgangs durch den Mittagskreis verschieden.

Sezt man den zu der gröſsten Höhe der Sonne gehörigen Werth von n in die Gleichung $h' = H - \Delta H . n^2 + \Delta\delta . n$, so findet sich der Unterschied zwischen der gröſsten Höhe der Sonne und zwischen ihrer Mittagshöhe $= \frac{\Delta\delta}{4.\Delta H} . \Delta\delta$; also für obiges Beyspiel $= 0{,}1649 . 0'',981 = 0'',16$.

Bey dem Mond kann dieser Unterschied sehr merklich werden. Den 9. Sept. 94 um Mitternacht ist nach d. *Jahrbuch* für 94 die Abweichung des Monds $= 6° \, 0'$ *südlich.* d. 10. $= 0° \, 54$. *südl.* Hieraus findet sich für die Breite von *Göttingen* $\Delta H = 1'',4397$. Die Veränderung der Abweichung des Monds in einer Minute $= 12{,}75$ Sec. $= \Delta\delta$. Folglich ist der Unterschied zwischen der Mittagshöhe und zwischen der gröſsten Höhe des Monds $= 28{,}2$ Secun-

Secunden. Diese gröſste Höhe erreicht der Mond 4,428 Min. oder $4' 25'',68$ nach seinem Durchgang durch den Meridian. Hier würde man also einen beträchtlichen Fehler begehen, wenn man, um die Mittagshöhe des Monds zu messen, ihn nahe am Meridian mit dem Quadranten verfolgen und seine gröſste Höhe als die Mittagshöhe ansehen wollte.

Aus zweyen Höhen, wovon die eine nahe am Meridian, die andere weit von demselben genommen ist, und aus der Zwischenzeit der Beobachtungen die Breite zu finden.

§. 160.

Es seye die von dem Mittag entferntere Höhe $= h$, die nahe an demselben liegende $= h'$, die Stundenwinkel t und t', so ist nach §. 111.

$$\sin h' = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t'$$
$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

also $\sin h' - \sin h = \cos \varphi \cos \delta (\cos t' - \cos t)$

$$= \cos \varphi \cos \delta \sin \left(\frac{t + t'}{2}\right) \sin \left(\frac{t - t'}{2}\right)$$

Liegen beyde Höhen auf *derselben* Seite des Mittagskreises, so ist die halbe Zwischenzeit der Beobachtungen in Grade verwandelt $= \frac{t - t'}{2}$, folglich hat man

$$\text{(I.)}\ \sin\left(\frac{t+t'}{2}\right)=\frac{\sin h'-\sin h}{2.\cos\varphi\cos\delta\sin\left(\frac{t-t'}{2}\right)}$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{h'+h}{2}\right)\sin\left(\frac{h'+h}{2}\right)}{\cos\varphi\cos\delta\sin\left(\frac{t-t'}{2}\right)}$$

Also $t'=\frac{t+t'}{2}-\frac{t-t'}{2}$.

Liegen aber die beyden Höhen auf *entgegengesezten* Seiten des Mittagskreises, so ist $\frac{t+t'}{2}$ die halbe Zwischenzeit der Beobachtungen in Grade verwandelt, und

$$\text{(II.)}\ \sin\left(\frac{t-t'}{2}\right)=\frac{\sin h'-\sin h}{2\cos\varphi\cos\delta\sin\left(\frac{t+t'}{2}\right)}$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{h+h'}{2}\right)\sin\left(\frac{h'-h}{2}\right)}{\cos\varphi\cos\delta\sin\left(\frac{t+t'}{2}\right)}$$

Folglich wieder:

$$t'=\frac{t+t'}{2}-\frac{t-t'}{2}$$

Sezt man in der Gleichung für $\sin h'$ den $\cos t'$ $=1-2(\sin\frac{1}{2}t')^2$, so wird

$$\sin h'=\sin\varphi\sin\delta+\cos\varphi\cos\delta-$$
$$2(\sin\tfrac{1}{2}t')^2\cos\varphi\cos\delta$$
$$=\cos(\varphi-\delta)-2(\sin\tfrac{1}{2}t')^2\cos\varphi\cos\delta$$

Für

Für südliche Abweichungen wird

$$\sin h' = \cos(\varphi + \delta) - 2(\sin \tfrac{1}{2} t')^2 \cos\varphi \cos\delta$$

Es ist aber der Sonne Abstand vom Zenith im Meridian $= \varphi \mp \delta$, folglich, wenn die Mittagshöhe H heiſst $\cos(\varphi \mp \delta) = \sin H$, also

$$(\text{III.})\ \sin H = \sin h' + 2(\sin \tfrac{1}{2} t')^2 \cos\varphi \cos\delta.$$

Weil nun die eine Höhe h' nahe an dem Mittag genommen ist, so wird der Werth von $\frac{t-t'}{2}$ nicht merklich geändert, wenn φ etwas unrichtig angenommen wäre. Man nimmt daher die Breite nach Schäzung an, und berechnet mit dieser angenommenen Breite den Stundenwinkel t' nach I. oder II., daraus findet man nach III. die Mittagshöhe und die Breite. Weicht diese sehr von der angenommenen Breite ab, so sucht man vermittelst dieser Breite den Stundenwinkel t' und die Mittagshöhe von neuem, um die Breite genau zu bekommen.

Um die Formel III. mit Logarithmen berechnen zu können, seze man

$2(\sin \tfrac{1}{2} t')^2 \cos\varphi \cos\delta = \sin M$, so wird

$$(\text{IV.})\ \sin H = 2 \sin\left(\frac{h'+M}{2}\right) \cos\left(\frac{h'-M}{2}\right)$$

Die Abweichung wird in der Zwischenzeit der Beobachtungen als unverändert angenommen, man berechnet sie daher für den in die Mitte der beyden Beobachtungen fallenden Zeitpunct.

Beyspiel. Ich beobachtete in der Gesellschaft des H. *von Zach* in *Molschleben*, einem Dorfe in der Nähe von *Gotha*, dessen

Lage

Lage gegen die Gothaische Sternwarte durch Dreyeke bestimmt ist *), mit einem 4zolligen Spiegelsextanten d. 28. Sept. 1793 folgende gedoppelte Höhen des obern Sonnenrandes. Die Zeiten sind nach H. von Zach *Chronometer* angegeben, und von den gedoppelten Höhen müssen 17′ 45″ *(Error indicis)* abgezogen werden.

$$\begin{array}{rl} 21^{U.}\ 1'\ 19'',2 & 54^\circ\ 0'\ \ 0'' \\ 23\ 37\ \ 4,0 & 74\ 14\ 30 \end{array}$$

$$\text{Hier ist also } h' = 36\ 41\ 11,8$$

$$h = 26\ 33\ 21,0$$

$$\frac{h'+h}{2} = 31\ 37\ 16,4$$

$$\frac{h'-h}{2} = \ \ 5\ \ 3\ 55,4$$

Die Zwischenzeit der Beobachtungen ist $= 2^{St.}\ 35'\ 46'',5$, wozu $1'',7$ addirt werden muſs, weil die Uhr in 24 St. um $15'',59$ zurük blieb, und es findet sich $\frac{t-t'}{2} = 19^\circ\ 28'\ 18'',7$ weil die beyden Höhen auf derselben Seite des Meridians genommen sind. Die Abweichung der Sonne ist $= 2^\circ\ 14'\ 9''$ *südlilh* $= \delta$. Die Breite ϕ ist $= 51^\circ\ 0'\ 50''$. Statt dieſer nehme ich $51^\circ\ 10'\ 50''$, also die Breite um 10 Min. zu groſs an, weil ich sie hier noch nicht als genau bekannt vorausseze. Nun hat man nach I.

Lg

*) Astron. Jahrbuch f. 1793. S. 170.

$$\text{Lg}\cos\left(\frac{h'+h}{2}\right) = 9{,}9302014$$

$$\text{Lg}\sin\left(\frac{h'-h}{2}\right) = 8{,}9459242$$

$$\text{C. Lg}\cos\varphi = 0{,}2028237$$

$$\text{C. Lg}\cos\delta = 0{,}0003307$$

$$\text{C. Lg}\sin\left(\frac{t-t'}{2}\right) = 0{,}4771072$$

$$\text{Lg}\sin\left(\frac{t+t'}{2}\right) = 9{,}5563872$$

$$\frac{t+t'}{2} = 21°6'\ 16'',2$$

$$\frac{t-t'}{2} = 19\ 28\ 18{,}7$$

$$t' = 1\ 37\ 57{,}5$$

$$\tfrac{1}{2}t' = 0\ 48\ 58{,}7$$

$$\text{Lg}\,2 = 0{,}3010300$$

$$\text{Lg}(\sin\tfrac{1}{2}t')^2 = 16{,}3074310$$

$$\text{Lg}\cos\varphi = 9{,}7971763$$

$$\text{Lg}\cos\delta = 9{,}9996693$$

$$\text{Lg}\sin M = 6{,}4053066$$

$$M = 0°\,0'\,52'',5$$

Weil der Winkel M sehr klein ist, so kann man den Bogen seinem Sinus gleich sezen, und man findet Lg M in Secunden ausgedrükt, wenn man den Log $\frac{1}{e}$ zu dem Lg sin M addirt.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Lg}\sin M &= 6{,}4053066-10\\
\mathrm{Lg}\,\frac{1}{e} &= 5{,}3144251\\
\mathrm{Lg}\,M &= 1{,}7197317\\
M &= 52'',44\\
h' &= 36^\circ\,41\;\;11{,}8\\
\frac{h'+M}{2} &= 18\;\;21\;\;\;2{,}1\\
\frac{h'-M}{2} &= 18\;\;20\;\;\;9{,}7\\
\mathrm{Lg}\,2 &= 0{,}3010300\\
\mathrm{Lg}\sin\left(\frac{h'+M}{2}\right) &= 9{,}4980768\\
\mathrm{Lg}\cos\left(\frac{h'-M}{2}\right) &= 9{,}9773708\\
\mathrm{Lg}\sin H &= 9{,}7764776\\
H &= 36^\circ 42'\,13'',7\\
\text{Abweich. d.}\odot &= \;\;2\;\;16\;\;56{,}0\\
\text{Aeq. Höhe} &= 38\;\;59\;\;\;9{,}7\\
\text{Breite} &= 51\;\;\;0\;\;50{,}3
\end{aligned}
$$

Unmittelbar aus der Mittagshöhe fand ich diese Breite $=51^\circ\,0'\,44''6$.

Wenn man den Bogen t' in Zeit verwandelt, so findet sich, daſs die Höhe $6'31'',9$ vor dem Durchgang der Sonne durch den Mittagskreis genommen war. Da dieser Abstand vom Mittag kleiner ist als 10 Min. so könnte man den Unterschied zwischen der gröſsern Höhe und zwischen der Mittagshöhe nach §. 134. berechnen.

§. 161.

§. 161.

Diese Methode, die Breite zu bestimmen, wurde von H. *Douwes* vorgeschlagen, und zuerst in dem I. Band der Abhandlungen der gelehrten Gesellschaft zu Harlem bekannt gemacht. Einen sehr guten Aufsaz darüber von Herrn Prof. *Nieuwland* findet man in dem ersten Supplementenband zu H. Bode's astron. Jahrbüchern S. 42 u. f. *Directe* Auflösungen jener Aufgabe in H. Hofrath *Kästners astron. Abhandlungen*, I. Samml. S. 413. in obigem Aufsaz von. H. Prof. *Nieuwland* u. a. O.

H. Douwes hat *Hülfstafeln* zur Abkürzung der Rechnung verfertigt, die sich sammt der Erklärung ihres Gebrauchs in den *Tables requisite to be used with the nautical ephemeris for finding the latitude and longitude at sea*, II. *edition* pag. 58 - 80 befinden. Diese Tafeln geben die Werthe von $\mathrm{Lg\,sec.}\left(\frac{t-t'}{2}\right)$ oder $\mathrm{C.\,Lg\,sin}\left(\frac{t-t'}{2}\right)$ für die Stundenwinkel in Zeit von $0^{U.}$ bis $5^{U.}\,50'$ unter der Aufschrift Lg $\frac{1}{2}$ *elaps. time*, von $\mathrm{Lg\,2.\,sin}\left(\frac{t+t'}{2}\right)$ ebenfalls von $0^{U.}$ bis $5^{U.}\,50'$ unter der Aufschrift Lg. *middle time*, endlich die Werthe von $\mathrm{Lg\,sin.\,vers.}\,t'$ oder $\mathrm{Lg\,2}\,(\sin\frac{1}{2}t')^2$ von $0^{U.}$ bis $8^{U.}\,50'$ unter der Aufschrift *Lg. rising* für den Halbmesser 100 000 von 10 zu 10 Sec. in Zeit an. Die Summe der arithmetischen Complemente von $\mathrm{Lg}\cos\varphi$ und $\mathrm{Lg}\cos\delta$ heisst daselbst *Log. ratio*. Statt $2\cos\left(\frac{h'+h}{2}\right)$

sin

$\sin\left(\frac{h'-h}{2}\right)$ §. 160. wird der Logarithme des Unterschieds der *natürlichen* Sinus für den Halbmesser 100 000 genommen. Man findet also Lg 2. $\sin\left(\frac{t+t'}{2}\right)$ oder Lg. middle time $=$ Log. ratio $+$ Lg $(\sin h' - \sin h) +$ Lg half elaps. time. Dieser Logarithme in den Tafeln aufgesucht gibt $\frac{t+t'}{2}$ also hat man t' nach §. 160. Nun wird von dem Log. rising für t' der Log. ratio abgezogen, die dazu gehörige Zahl aufgesucht, und zu dem Sinus der gröſsten Höhe (für den Halbmesser 100 000) addirt, so hat man den sinus der Mittagshöhe.

Man hat zween bekannte Sterne, wovon der eine in dem nordlichen, der andere in dem südlichen Theil des Meridians culminirt in gleichen aber unbekannten Höhen, und die Zeiten beobachtet, da die Sterne diese Höhen erreichten, man soll daraus die Breite finden.

§. 162.

Da die Zeiten der Beobachtungen gegeben sind, so findet man aus diesen Zeiten und aus den geraden Aufsteigungen der Sterne die Stundenwinkel t und t', der erstere gehöre zu dem gegen *Süden*, der andere zu dem gegen *Norden* culminirenden Stern, ihre Abweiweichungen seyen δ und δ', so ist, wenn die gleichen Höhen h heißen:

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$
$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta' + \cos\varphi \cos\delta' \cos t'$$

Also $o = \sin\varphi\,(\sin\delta' - \sin\delta) + \cos\varphi\,(\cos\delta' \cos t' - \cos\delta \cos t)$

$$\text{und } \tan\varphi = \frac{\cos\delta \cos t - \cos\delta' \cos t'}{\sin\delta' - \sin\delta}$$

$$= \frac{\cos\delta \cos t\left(1 - \dfrac{\cos\delta' \cos t'}{\cos\delta \cos t}\right)}{2\cos\left(\dfrac{\delta' + \delta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\delta' - \delta}{2}\right)}$$

Man seze $\dfrac{\cos\delta' \cos t'}{\cos\delta \cos t} = \cos N$, so ist

$$1 - \frac{\cos\delta' \cos t'}{\cos\delta \cos t} = 2(\sin \tfrac{1}{2} N)^2, \text{ folglich}$$

$$\tan\varphi = \frac{\cos\delta \cos t\,(\sin\tfrac{1}{2}N)^2}{\cos\left(\dfrac{\delta' + \delta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\delta' - \delta}{2}\right)}.$$

Wenn die beyden Sterne in *demselben* Quadranten des Meridians genommen sind, so bleibt die Formel dieselbe. Allein kleine Fehler in den Abweichungen der Sterne würden sehr grosse in der Breite hervorbringen.

Wird der Stundenwinkel t' stumpf, oder ist der Stern näher bey seinem *untern* Durchgang durch den Mittagskreis als bey dem *obern*, so wird $\cos t'$ negativ, und man hat

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{\cos\delta\cos t\left(1 + \frac{\cos\delta'\cos t'}{\cos\delta\cos t}\right)}{2\cos\left(\frac{\delta'+\delta}{2}\right)\sin\left(\frac{\delta'-\delta}{2}\right)}$$

folglich, wenn man $\frac{\cos\delta'\cos t'}{\cos\delta\cos t} = \cos N$ sezt

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{\cos\delta\cos t(\cos\tfrac{1}{2}N)^2}{\cos\left(\frac{\delta'+\delta}{2}\right)\sin\left(\frac{\delta'-\delta}{2}\right)}$$

Die Stundenwinkel der Sterne kann man durch Beobachtung finden, wenn man von jedem gleiche Höhen auf beyden Seiten des Mittagskreises beobachtet, d. h. correspondirende Höhen nimmt.

Je näher man die Sterne bey dem Mittagskreis rechnen kann, desto sicherer kann man die Breite bestimmen.

§. 163.

Wenn man auf diese Art die Breite gefunden hat, so kann man aus der Breite, Stundenwinkel und Abweichung die Höhe berechnen. Diese Höhe mit der, welche das Instrument angibt, verglichen, gibt den Fehler desselben *). Die Formel (§. 111.)

$$\sin h = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t$$

kann zu dieser Absicht bequemer eingerichtet werden. Man seze statt $\cos t$ den gleichen Werth $1 - 2(\sin\tfrac{1}{2}t)^2$, so wird

sin

*) Eine Anwendung von dieser Methode machte H. Prof. *Beitler* in Mitau. Astr. Jahrb. für 1795. S. 147. u. f.

$$\sin h = \cos(\varphi - \delta) - 2(\sin \tfrac{1}{2} t)^2 \cos\varphi \cos\delta$$

und, wenn $2(\sin\frac{1}{2}t)^2 \cos\varphi \cos\delta = \cos O$ gesezt wird, $\sin h = \cos(\varphi - \delta) - \cos O$

$$= 2 \sin\left(\frac{O + \varphi - \delta}{2}\right) \sin\left(\frac{O - \varphi + \delta}{2}\right)$$

Oder

weil $\sin h = \cos(90^\circ - h) = 1 - 2\left(\sin \frac{90^\circ - h}{2}\right)^2$

und $\cos(\varphi - \delta) = 1 - 2\left(\sin \frac{\varphi - \delta}{2}\right)^2$

so ist

$$1 - 2\left(\sin \frac{90^\circ - h}{2}\right)^2 = 1 - 2\left(\sin \frac{\varphi - \delta}{2}\right)^2 - 2(\sin \tfrac{1}{2} t)^2 \cos\varphi \cos\delta$$

folglich $\left(\sin\left(\frac{90^\circ - h}{2}\right)\right)^2 =$

$$\left(\sin \frac{\varphi - \delta}{2}\right)^2 + (2 \sin \tfrac{1}{2} t)^2 \cos\varphi \cos\delta$$

$$= \left(\sin \frac{\varphi - \delta}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{(\sin\frac{1}{2}t)^2 \cos\varphi \cos\delta}{\left(\sin \frac{\varphi - \delta}{2}\right)^2}\right)$$

Man seze $\dfrac{\sin\frac{1}{2}t\sqrt{(\cos\varphi \cos\delta)}}{\sin\left(\frac{\varphi - \delta}{2}\right)} = \operatorname{tang} P$

so wird

$$\sin\left(\frac{90^\circ-h}{2}\right)=\sin\left(\frac{\varphi-\delta}{2}\right)\sqrt{(1+(\operatorname{tang}P)^2)}$$

$$=\sin\left(\frac{\varphi-\delta}{2}\right)\sec.P$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{\varphi-\delta}{2}\right)}{\cos P}.$$

Aus drey Höhen eines Sterns und den Zwischenzeiten der Beobachtungen die Breite zu finden.

§. 164.

Wenn man den zu einer Höhe gehörigen Stundenwinkel wüſste, so könnte man nach §. 160 die Breite finden. Es kommt also nur darauf an, einen Stundenwinkel aus den gegebenen Stüken zu finden. Man seze die Stundenwinkel $=t, t', t''$, die dazu gehörigen Höhen h, h', h''; $t-t''=\Delta t$, $t-t'=\Delta t'$, $t'-t''=\Delta t''$, so ist (§. 111.)

$$\sin h''=\sin\varphi\sin\delta+\cos\varphi\cos\delta\cos t''$$
$$\sin h=\sin\varphi\sin\delta+\cos\varphi\cos\delta\cos t$$

also $\sin h''-\sin h=\cos\varphi\cos\delta(\cos t''-\cos t)$

ebenso $\sin h''-\sin h'=\cos\varphi\cos\delta(\cos t''-\cos t')$

folglich $$\frac{\sin h''-\sin h}{\sin h''-\sin h'}=\frac{\cos t''-\cos t}{\cos t''-\cos t'}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{t+t''}{2}\right)\sin\left(\frac{t-t''}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t''+t'}{2}\right)\sin\left(\frac{t'-t''}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{t+t''}{2}\right)\sin\frac{\Delta t}{2}}{\sin\left(\frac{t'+t''}{2}\right)\sin\frac{\Delta t''}{2}}$$

aber $\frac{t'+t''}{2} = \frac{t+t''-\Delta t'}{2}$

und $\sin\left(\frac{t'+t''}{2}\right) = \sin\left(\frac{t+t''}{2}\right)\cos\frac{\Delta t'}{2}$

$$-\cos\left(\frac{t+t''}{2}\right)\sin\frac{\Delta t'}{2}$$

folglich $\frac{\sin h'' - \sin h}{\sin h'' - \sin h'} =$

$$\frac{\sin\frac{\Delta t}{2}}{\left(\frac{\cos\Delta t'}{2} - \operatorname{cotg}\left(\frac{t+t''}{2}\right)\sin\frac{\Delta t'}{2}\right)\sin\frac{\Delta t''}{2}}$$

und hieraus

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{t+t''}{2}\right) = \operatorname{cotg}\frac{\Delta t'}{2} -$$

$$\frac{\sin\frac{\Delta t}{2}(\sin h'' - \sin h')}{\sin\frac{\Delta t'}{2}\sin\frac{\Delta t''}{2}(\sin h'' - \sin h)}$$

oder

$$\operatorname{tang}\left(\frac{t+t''}{2}\right) = \operatorname{tang}\frac{\Delta t'}{2} -$$

$$\frac{\sin\frac{\Delta t'}{2}\sin\frac{\Delta t''}{2}(\sin h'' - \sin h)}{\sin\frac{\Delta t}{2}(\sin h'' - \sin h')}$$

Vermittelst dieser Formel findet man $\frac{t+t''}{2}$, wird hievon $\frac{t-t''}{2}$ oder $\frac{1}{2}\Delta t$ abgezogen, so hat man den Stundenwinkel t'', folglich auch die Uebrigen, weil ihre Unterschiede gegeben sind.

Sind die Zwischenzeiten der Beobachtungen gleich, und gehören sie zu einem Stundenwinkel $= \Delta t$, so hat man

$$\text{tang}\left(\frac{t+t''}{2}\right) = \text{tang}\,\frac{\Delta t}{2} - \frac{\sin\Delta t\,(\sin h'' - \sin h)}{\sin h'' - \sin h'}$$

Wenn man den Stundenwinkel und die Abweichung des Sterns kennt, so kann man die Breite daraus *directe* herleiten, wie in dem folgenden §. wird gezeigt werden.

Aus dem Stundenwinkel, der Abweichung und Höhe eines Sterns die Breite zu finden.

§. 165.

Die Gleichung §. 111. läſst sich so einrichten:

$$\sin h = \sin\delta(\sin\varphi + \cos\varphi\,\text{cotang}\,\delta\cos t)$$

Man seze $\text{cotg}\,\delta\cos t = \text{cotang}\,M$

$$\text{oder}\ \frac{\text{tang}\,\delta}{\cos t} = \text{tang}\,M,\ \text{so wird}$$

$$\sin h = \sin\delta(\sin\varphi + \cos\varphi \operatorname{cotang} M)$$
$$= \frac{\sin\delta}{\sin M}(\sin\varphi\sin M + \cos\varphi\cos M)$$
$$= \frac{\sin\delta}{\sin M}\cos(\varphi - M)$$

also $\cos(\varphi - M) = \frac{\sin h \sin M}{\sin\delta} = \cos N$

folglich ist die Breite $= N + M$

Für südliche Abweichungen wird M negativ, da findet sich also

die Breite $= N - M$

Wenn man *correspondirende* Höhen genommen hat, so geben diese die Zeit der Culmination des Sterns und die Stundenwinkel, welche zu jeder Höhe gehören, folglich die zu der Auflösung dieser Aufgabe erforderlichen Stüke.

Beyspiel. Nach §. 112. war die scheinbare gedoppelte Höhe des obern Sonnenrandes $= 49° 50' 0''$, als die Sternuhr zeigte $4^{U.} 1' 29'',0$. Im Mittag zeigte die Uhr $0^{U.} 30' 44'',4$ (§. 113.). Folglich sind von dem Augenblik des Mittags an bis zu dem Augenblik der Beobachtung verflossen $4^{St.} 30' 44'',6$ Zeit der Uhr. Die Uhr eilte der Sternzeit vor 1,9 Sec. in einem Sterntag, folglich ist der Stundenwinkel $= 3^{St.} 30' 44'',6 - 0'',3 = 3^{St.} 30' 44'',3$ Sternzeit. Nun machen $24^{St.}$ Sternzeit $24^{St.} - (3' 55'',908)$ mittl. Zeit (§. 126.) folglich $3^{St.} 30' 44'',3$ Sternzeit $3^{St.} 30' 44'',3 - 34'',5 = 3^{St.} 30' 9'',8$ mittl. Zeit. D. 27. März ist die mittlere Zeit im wahren Mittag $0^{U.} 5' 23'',5$. d. 28. M. $0^{U.} 5' 5'',0$, also sind $23^{St.} 59' 41'',5$ *mittlerer* Zeit $= 24$ St. *wahrer* Sonnennenzeit, und $3^{St.} 30' 9'',8$ mittl. Z. $= 3^{St.} 30' 9'',8 + 2'',7 = 3^{St.} 30' 12'',5$ wahrer Zeit.

Die wahre Zeit der Beobachtung kann man auch so berechnen. Die mittlere Zeit im wahren Mittag für den Meridian von Göttingen d. 27. März ist

	$= 0^{U.} 5' 23'',3$	
die Zeit der Uhr	$0\ 30\ 44,4$	im Mittag.
der Uhr Abweich. von der mittl. Zeit	$= 0\ 25\ 21,1$	
Acc. d. Uhr $=$	$+\ 34,8$ *)	
Abw. v. d. m. Zeit zur Zeit der Beob.	$= 0\ 25\ 55,9$	

Die Zeit der Beobachtung war	$4^{U.}\ 1'\ 29,''0$
	$-\ 25\ 55,9$
mittlere Zeit der Beobachtung.	$3\ 35\ 33,1$
Zeitgleichung	$-\ 5\ 20,6$
wahre Zeit der Beobachtung	$3\ 30\ 12,5$
— — in Grade verw.	$= 52^{\circ} 33'\ 7'',5 = t$

In dem Augenblik der Beobachtung war es in Berlin $3^{U.} 30' 12'',5 + 13' 53'' = 3^{U.} 44' 5'',5$ Nachmittag. Die Veränderung der Abweichung der Sonne in dieser Zeit ist $= \frac{3^{St.} 44'}{24} . (23' 25'')$

	$= 3' 39''$
Abw. ☉ im Mittag	$= 2\ 47\ 5$
— — für die Z. der Beob.	$= 2\ 50\ 44 = \delta$

die

*) $34'',8 =$ Accel. der Sternzeit für mittl. Sonnenzeit + Acc. der Uhr für Sternzeit $= 34'',5 + 0'',3$

die gedopp. Höhe d. ☉ =	49°50′	0″,0	(§. 112)	
Error ind.	+ 1	0,0		
	49 51	0,0		
Hälfte =	24 55	30,0		
Refract.	— 2	2,2		
	24 53	27,8		
Parall. ☉	0	7,7		
	24 53	35,5		
Halbm. ☉	— 16	4,0		
wahre Höhe der ☉ =	24 37	31,5	$= h$	

Lg sin tot =	10,0000000
Lg tang δ =	8,6964016
	18,6964016
Lg cos t =	9,7839322
Lg tang M =	8,9124694
M =	4° 40′ 24″
Lg sin M =	8,9110224
Lg sin h =	9,6198069
C. Lg sin δ =	1,3041342
Lg cos N =	9,8349635
N =	46° 51′ 16″
M =	4 40 24
Breite =	51 31 40

§. 166.

Um zu untersuchen, welche Fehler in der Breite entstehen, wenn in der Messung der Höhe und in der Zeitbestimmung ein kleiner Fehler wäre begangen worden, differentiire man die Gleichung sin $h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi$

$\cos\delta\cos t$, indem man h, φ, und t als veränderlich betrachtet, so findet man

$$dh\cos h = d\varphi\cos\varphi\sin\delta - d\varphi\sin\varphi\cos\delta\cos t - dt\sin t\cos\varphi\cos\delta$$

folglich ist

$$d\varphi = \frac{-dh\cos h}{\sin\varphi\cos\delta\cos t - \cos\varphi\sin\delta} - \frac{dt\sin t\cos\varphi\cos\delta}{\sin\varphi\cos\delta\cos t - \cos\varphi\sin\delta}$$

$$= \frac{-dh\cos h}{\sin(\varphi-\delta) - 2(\sin\tfrac{1}{2}t)^2\sin\varphi\cos\delta} - \frac{dt\sin t\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta) - 2(\sin\tfrac{1}{2}t)^2\sin\varphi\cos\delta}$$

Beyder Brüche Nenner werden desto grösser, und ihre Zähler desto kleiner, je kleiner t wird. Je näher also die Beobachtungen bey dem Mittag gemacht werden, desto sicherer kann man daraus die Breite herleiten, und die Beobachtungen in dem Mittagskreis selbst sind die vortheilhaftesten.

Wendet man die Formel auf das Beyspiel des 165. §. an, so erhält man

$$d\varphi = -2{,}44\,dh - 1{,}09\,dt.$$

Ein Fehler von 10 Sec. in der Höhe bringt also in der Breite schon einen Fehler von 24,4 Sec., und ein Fehler von 15 Sec. in dem Stundenwinkel oder von 1 Sec. in Zeit einen von 16,35 Sec. hervor.

Es hat aber diese Methode den Vorzug, daſs man an einem Tag sehr viele Bestimmungen der Breite erhalten kann. Aus diesem Grunde empfielt sie auch H. *von Zach* in dem *astron. Jahrbuch* für 1794 S. 175. u. f. Ueberberdieſs kann man hier die Zeiten abwarten, da die Sonne gewisse Höhen erreicht, also die Alhidade auf eine runde Zahl der Eintheilungen stellen, um bey dem Ablesen der Höhen keine Schäzung gebrauchen zu dürfen.

Am vortheilhaftesten würde es seyn, correspondirende Höhen zur Zeit der schnellsten Höhenänderung (§. 114.) und andere nahe bey dem Mittag zu nehmen. Erstere dienten zur Bestimmung der Stundenwinkel oder der wahren Zeit der Beobachtungen, leztere zur Bestimmung der Breite.

Aus drey nahe an dem Mittag genommenen Höhen und aus den Zwischenzeiten der Beobachtungen die Breite zu finden.

§. 167.

Wenn die Höhen nicht über 10 Minuten von dem Mittag genommen sind, so sind die Unterschiede zwischen diesen Höhen und der Mittagshöhe sehr nahe den Quadraten der Stundenwinkel proportional (§. 133.). In diesem Fall könnte man sich also der Methode §. 158. bedienen, wenn die Breite nur beynahe bekannt wäre, um die Höhenänderung in einer Minute vor oder nach Mittag (ΔH) berechnen zu können. Sind aber *drey* Höhen nahe an dem Mittag gemessen worden, so läſst sich auch diese aus den Beobachtungen selbst herleiten.

Es seyen die beobachteten Höhen $h, h' h''$, ihre Abstände vom Mittag n, n', n'' Minuten, die

die Veränderung der Abweichung in einer Minute $= \Delta\delta$, die Höhenänderung für den Stundenwinkel von 1 Zeitminute $= \Delta H$, so ist

I. Wenn alle drey Höhen vor dem Mittag genommen sind

$$\left.\begin{aligned} h &= H - \Delta H . n n \mp \Delta\delta . n \\ h' &= H - \Delta H . n' n' \mp \Delta\delta . n' \\ h'' &= H - \Delta H . n'' n'' \mp \Delta\delta . n'' \end{aligned}\right\} \text{§. 158.}$$

also $h'' - h = \Delta H (n + n'')(n - n'') \pm (n - n'')\Delta\delta$

$h'' - h' = \Delta H (n' + n'')(n' - n'') \pm (n' - n'')\Delta\delta$

Dividirt man die erste Gleichung mit $n - n''$, die zweyte mit $n' - n''$ und zieht diese von jener ab, so findet man

$$\frac{h'' - h}{n - n''} - \frac{h'' - h'}{n' - n''} = (n - n')\Delta H$$

also hat man

$$\Delta H = \frac{\dfrac{h'' - h}{n - n''} - \dfrac{h'' - h'}{n' - n''}}{n - n'}$$

Dieselbe Formel findet man, wenn alle drey Höhen nach dem Durchgang durch den Mittagskreis genommen sind.

II. Sind zwey Höhen auf derselben und eine auf der entgegengesezten Seite des Meridians gemessen worden, so ist

$$\left.\begin{aligned} h &= H - \Delta H . n n \mp \Delta\delta . n \\ h' &= H - \Delta H . n' n' \mp \Delta\delta . n' \end{aligned}\right\}$$

$h'' = H - \Delta H . n'' n'' \pm \Delta\delta . n''$ folglich

$h'' - h = \Delta H (n + n'')(n - n'') \pm \Delta\delta (n + n'')$

$h'' - h' = \Delta H (n' + n'')(n' - n'') \pm \Delta\delta (n' + n'')$

Hier sind die Zwischenzeiten der Beobachtungen $n + n''$, und $n' + n''$ gegeben, man dividire also die erste Gleichung durch $n + n''$, die zwey-

zweyte durch $n'+n''$ und ziehe sie von einander ab, so findet sich

$$\frac{h''-h}{n+n''}-\frac{h''-h'}{n'+n''}=(n-n')\Delta H, \text{ also}$$

$$\Delta H=\frac{\frac{h''-h}{n+n''}-\frac{h''-h'}{n'+n''}}{n-n'}$$

Auf diese Art findet man also ΔH; die Rechnung wird ganz nach §. 158. fortgesezt,

Beyspiel. Nach §. 155. war um

$$\begin{array}{lll} 23^{U.}\,51'\,38'' & h = & 34^\circ 54'\,45'',7 \\ -\;\;57\;\;30 & h' = & 34\;\;56\;\;53,2 \\ 0\;\;\;1\;\;\;0 & h'' = & 34\;\;57\;\;18,2 \end{array}$$

Hier ist

$$\begin{array}{rll} n-n'' = & 9'\,22'' = & 9,366 \text{ Min.} \\ n'-n'' = & 3\;\;30 = & 3,500 \\ n-n' = & 5\;\;52 = & 5,866 \\ h''-h = & 2\;\;32,5 = & 152,5 \text{ Sec.} \\ h''-h' = & 0\;\;25,0 = & 25,0 \text{ Sec.} \end{array}$$

Also $$\Delta H=\frac{\frac{152,5}{9,366}-\frac{25,0}{3,5}}{5,866}=1'',55$$

Oben §. 156. wurde gefunden $\Delta H = 1'',487$, also ist ΔH aus den Beob. nur $0'',063$ zu gros. Nun hat man nach §. 158.

$$\begin{aligned} n+n'' &= \frac{h''-h}{n-n''}-\frac{\Delta\delta}{\Delta H} \\ &= \frac{152,5}{1,55.9,366}-\frac{0,981}{1,55} \\ &= 10,504 - 0,633 \\ &= 9,871 \\ n-n'' &= 9,366 \\ \text{Untersch.} &= 0,505 = 2n'' \\ n'' &= 0,2525 \end{aligned}$$

Un-

Unterschied zwischen der gröſsten Höhe und der Mittagshöhe

$=(0{,}2525)^2 \cdot 1{,}55 = 0{,}1$ Sec. folglich die Mittagshöhe $= 34^\circ\,57'\,18'',3$

Da $n'' = 0{,}2525$ und $n' - n'' = 3{,}500$, so ist $n' = 3{,}500 + 0{,}252 = 3{,}752$ Min.

Also ist der Unterschied zwischen der Höhe h' und der Mittagshöhe

$$= (3{,}752)^2 \cdot 1{,}55 = 21'',8$$

$$\begin{array}{rl} h' = & 34^\circ 56'\ 53{,}2 \\ \hline \text{Mittagshöhe} = & 34\ \ 57\ \ 15{,}0 \\ \text{Abw. d.} \odot = & 3\ \ 30\ \ 38{,}0 \\ \hline \text{Aequat. Höhe} = & 38\ \ 27\ \ 53{,}0 \\ \text{Breite} = & 51\ \ 32\ \ \ 7{,}0 \end{array}$$

§. 168.

Wenn man sich der bisher beschriebenen Methoden, die Breite zu bestimmen, bedient, die Beobachtungen nahe an dem Mittag vervielfältigt, und die Alhidade auf eine runde Zahl der Eintheilungen stellt, um keine Schätzung gebrauchen zu dürfen, so wird man vermittelst des Spiegelsextanten die Breiten genauer erhalten, als man von einem so kleinen Instrument erwarten sollte. So fand H. Prof. *Seyffer* mit dem 10 zolligen Sextanten von *Troughton* im Jahr 1794 folgende Breiten:

März.	22	51° 31′ 56″	27	51° 31′ 59″
	23	— 32 5	28	— 32 1
	25	— 32 5	29	— 32 2
	26	— 32 6	31	— 32 4

mit

mit dem oben beschriebenen 5 zolligen Sextanten:

Apr. 12	51° 32′ 6″	Apr. 27	51° 32′ 4″
13	— 32 4	Jun. 24	— 31 48
14	— 32 0	— 30	— 31 56
15	— 32 8	Jul. 5	— 32 4
17	— 32 9	— 7	— 32 0
18	— 32 5	— 12	— 32 0

Ich fand mit dem 10 zolligen Sextanten:

März. 2	51° 31′ 55″	8	51° 32′ 8″
3	— 32 7	9	— 32 7
4	— 32 7	10	— 32 5
5	— 32 8	11	— 32 4
6	— 32 59		

Den 19. April fand ich mit dem 5 zolligen Sextanten im Mittel aus 16 nicht über 10 Minuten vom Mittag entfernten Höhen die Breite $= 51° 32' 5''$.

Bey diesen Beobachtungen wurde ein künstlicher Horizont mit Queksilber (§. 72.) gebraucht.

Die Höhen der Fixsterne lassen sich mit dem Sextanten nicht so genau nehmen als die Sonnenhöhen, theils weil ihr Licht durch die Zurükwerfung von dem künstlichen Horizont und von den Spiegeln des Sextanten zu sehr geschwächt wird, theils weil man die beyden Bilder nicht so scharf zur Bedekung bringen, als man das Berühren der Sonnenbilder beobachten kann. Aus diesem Grunde habe ich mich auch bey den Methoden, die Breite vermittelst des Spiegelsextanten zu bestimmen, auf Sonnenhöhen eingeschränkt.

Noch einige Methoden, die wahre Zeit einer Beobachtung zu bestimmen.

§. 169.

Wenn man die Breite als bekannt voraussezt, so kann man aus der Höhe eines Sterns und aus seiner Abweichung den Stundenwinkel berechnen, und aus diesem mit der bekannten geraden Aufsteigung des Sterns die Sternzeit, mittlere und wahre Sonnenzeit finden. Hat man die Höhe der Sonne gemessen, so gibt der zu dieser Höhe gehörige Stundenwinkel in Zeit verwandelt (15° auf eine Stunde gerechnet) die wahre Zeit der Beobachtung.

Der Stundenwinkel findet sich leicht aus der Gleichung §. 111.

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

wenn man die bekannten Gröſsen auf eine Seite des Gleichheitszeichens bringt, und mit $\cos \varphi \cos \delta$ dividirt, und man findet

$$\cos t = \frac{\sin h - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta}$$

Weil sich aber diese Formel nicht genau durch Logarithmen berechnen läſst, so seze man statt $\cos t$ den gleichgültigen Werth $1 - 2(\sin \frac{1}{2} t)^2$, alsdann wird

$$\sin h = \cos(\varphi - \delta) - 2(\sin \tfrac{1}{2} t)^2 \cos \varphi \cos \delta$$

folglich

$$2(\sin \tfrac{1}{2} t)^2 \cos \varphi \cos \delta = \sin h - \cos(\varphi - \delta)$$
$$= \sin h - \sin(90^\circ - \varphi + \delta)$$
$$= 2 \cos \frac{(h + 90^\circ - \varphi + \delta)}{2} \sin \frac{(h - 90^\circ + \varphi - \delta)}{2}$$

Statt

Statt der Abweichung δ bringe man die Polardistanz D in die Gleichung, und seze $\delta = 90^\circ - D$, so kommt

$$(\sin\tfrac{1}{2}t)^2 \cos\varphi \sin D = \sin\frac{(\varphi + D - h)}{2} \cos\frac{(\varphi + D + h)}{2}$$

Man seze die Summe der *Breite, Polardistanz* und *Höhe* $= S$, so findet sich

$$(\sin\tfrac{1}{2}t)^2 = \frac{\cos\frac{1}{2}S \sin(\frac{1}{2}S - h)}{\cos\varphi \sin D}.$$

Die Zeit, da man die Höhen nehmen muſs, um die Zeit am sichersten zu bestimmen, ist begreiflich diejenige, da sich die Höhe am schnellsten ändert (§. 114.).

Wenn man aus einer Sonnenhöhe die wahre Zeit finden will, so muſs man die Abweichung der Sonne für den Augenblik der Beobachtung haben, und also die wahre Zeit schon wenigstens bis auf eine halbe Minute genau wissen. So genau könnte man mit der Abweichung der Sonne für den nächsten Mittag durch eine vorläufige Rechnung schon die wahre Zeit der Beobachtung finden.

Beyspiel. Den 27. März 1794 war nach §. 112. die gedoppelte Höhe des obern Sonnenrandes $= 49^\circ 50' 0''$, als die Uhr zeigte $4^{St.}\ 1' 29'',0$ nachmitt. Die wahre Höhe der Sonne war also $= 24^\circ 37' 31'',5 = h$. Die Abweichung der Sonne $= 2^\circ 50' 44''$ nördlich, also ihre Polardistanz $= 87^\circ 9' 16'' = D$. Die Breite ist $= 51^\circ 31' 54'' = \varphi$. Nun wird die Rechnung auf folgende Art geführt:

$h =$	$24^\circ\ 37'\ 31'',5$		
$\varphi =$	$51\ \ 31\ \ 54,0$	C.Lg cos $=$	0,2061524
$D =$	$87\ \ \ 9\ \ 16,0$	C.Lg sin $=$	0,0005358
$S =$	$163\ \ 18\ \ 41,5$		
$\frac{1}{2}S =$	$81\ \ 39\ \ 20,7$	Lg cos $=$	9,1617284
$\frac{1}{2}S - h =$	$57\ \ \ 1\ \ 49,2$	Lg sin $=$	9,9237406

Summe $=$ Lg $(\sin \frac{1}{2}t)^2 =$ 19,2921572

$\frac{1}{2}$ Summe $=$ Lg $\sin \frac{1}{2}t =$ 9,6460786

$\frac{1}{2}t = 26^\circ\ 16'\ 27'',4$

$t = 52\ \ 32\ \ 54,8$

Stundenwinkel in Zeit $= 3^{St.}\ 30'\ 11'',7$ wahre Zeit

$4\ \ \ 1\ \ 29,0$ Zeit der Uhr

Abweichung der Uhr von der wahren Zeit $= 0\ \ 31\ \ 17,3$

Die Beobachtung wurde also gemacht um $3^{U.}\ 30'\ 11'',7$ wahrer Zeit nachmitt. Wäre die Voreilung der Uhr für wahre Sonnenzeit vom 27. bis 28. März bekannt, so könnte man aus dieser Beobachtung die Zeit der Uhr im wahren Mittag herleiten. Da die Uhr der Sternzeit täglich $1'',9$ voreilte, so läſst sich jene Voreilung berechnen.

D. 27. März war die mittlere Zeit im wahren Mittag

$= 0^{U.}\ 5'\ 23'',5$

d. 28. März $= 0\ \ 5\ \ 5,0$

also $24^{St.}$ wahre Zeit $= 23\ \ 59\ \ 41,5$ mittl. Zeit.

Nun sind 24 mittl. Sonnenstunden

also $= 24^{St.}\ 3'\ 56'',55$ Sternz.

$23^{St.}\ 59'\ 41'',5$ mittl. Zeit
$24\ \ 0\ \ 0,0$ wah. Zeit $= 24\ \ 3\ \ 38,0$ Sternz.

und, weil die Uhr der Sternzeit in einem Tag $1'',9$ voreilte

$24^{St.} 0' 0''$ wahrer Zeit $= 24^{St.} 3' 39'',9$ Zeit der Uhr.

Die Uhr eilte also in 24 St. wahrer Zeit der Sonne vor $3' 39'',9$, folglich in $3^{St.} 30' 11'',7$ wahrer Zeit $32'',07$. Daher war ihre Abweichung von der wahren Zeit d. 27. März im Mittag $= 31' 17'',3 - 32'',07 = 30' 45'',23$, folglich die Zeit der Uhr im wahren Mittag $= 0^{U.} 30' 45'',23$, nur $0'',8$ mehr als §. 13.

Auf diese Art kann man also eine Uhr durch einzelne Höhen, wenn die Witterung, oder andere Umstände keine correspondirende Höhen verstatten, berichtigen. Um die Zeit genauer zu erhalten, müssen mehrere Höhen genommen werden, aus welchen man die wahren Zeiten der Beobachtungen berechnet. Diese mit den Zeiten der Uhr verglichen geben der Uhr Abweichung von der wahren Zeit, und man nimmt aus den verschiedenen Resultaten ein Mittel.

§. 170.

Nach §. 169. ist

$$\sin h = \cos(\varphi - \delta) - 2(\sin \tfrac{1}{2} t)^2 \cos\varphi \cos\delta$$

also $$2(\sin \tfrac{1}{2} t)^2 = \frac{\cos(\varphi - \delta) - \sin h}{\cos\varphi \cos\delta}$$

Man kann also den Stundenwinkel auch auf folgende Art vermittelst der *Douwesischen* Tafeln berechnen:

Von dem $\cos(\varphi - \delta)$ oder dem Sinus der Mittagshöhe ziehe man den Sinus der beobachteten Höhe ab, zu dem Logarithmen dieses Unterschieds addire man die Summe der arithmetimetischen Complemente von $\text{Lg} \cos \varphi$ und $\text{Lg} \cos \delta$, so hat man den Log. $2(\sin \frac{1}{2} t)^2$ oder den *Log. rising* §. 161., welcher in den Tafeln aufgesucht den Stundenwinkel in Zeit gibt.

Für obiges Beyspiel ist

$$\begin{array}{rll} \varphi = & 51^\circ\ 31'\ 54'' & \text{C. Lg} \cos = 0{,}2061524 \\ \delta = & \underline{\ \ 2\ \ 50\ \ 44} & \text{C. Lg} \cos = \underline{0{,}0005358} \\ \varphi - \delta = & 48\ \ 41\ \ 10 & \text{Summe} = 0{,}2066882 = \end{array}$$

Lg. ratio.

$$\left.\begin{array}{r} \text{Cos}(\varphi - \delta) = 66018 \\ \sin h = \underline{41668} \end{array}\right\} \text{für den Halbmesser } 100\,000$$

$$\text{Unterschied} = 24350 \quad \text{Lg} = \underline{4{,}3864990}$$

$$\text{Lg rising} = 4{,}5931872$$

gehört zu $3^{\text{St.}}\ 30'\ 11'',7$

Vermittelst der gewöhnlichen trigonometrischen Tafeln könnte man den Stundenwinkel nach dieser Formel auch so finden. Man suche die zu dem Log $2(\sin \frac{1}{2} t)^2$ gehörige Zahl auf, so ist diese der Sinus versus des Stundenwinkels, welcher von dem Halbmesser abgezogen den cosinus des Stundenwinkels gibt.

In dem hier gegebenen Beyspiel gehört zu dem Logarithme 4,5931872 die Zahl 39191,08 = sin. vers. t für den Halbmesser 100000, also ist der $\cos t = 60808{,}92$ welcher in den Tafeln aufgesucht $t = 52^\circ\ 32'\ 55''$ gibt.

§. 171.

Eine andere Methode, die Zeit durch einzelne Höhen zu bestimmen, hat H. *von Zach* im astron. Jahrbuch für 1789 S. 160 vorgeschlagen. Man berechnet für einen gewissen Stun-

Stundenwinkel die Höhe der Sonne, reducirt diese wahre Höhe auf die scheinbare, stellt den Winkelmesser auf die voraus berechnete Höhe, und wartet die Zeit ab, da die Sonne diese Höhe erreicht, so gibt diese Zeit mit dem in Zeit verwandelten Stundenwinkel, für welchen man die Höhe berechnete, der Uhr Abweichung von der wahren Zeit. Die Berechnung der Höhe kann nach einer der §. 163. gegebenen Formeln geführt werden, oder nach folgenden Formeln:

Man seze $\cos t \operatorname{cotang} \varphi = \operatorname{tang} M$, so ist

$$\sin h = \frac{\sin \varphi}{\cos M} \sin (M + \delta)$$

Denn es ist §. 111.

$$\begin{aligned} \sin h &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t \\ &= \sin \varphi (\sin \delta + \operatorname{cotg} \varphi \cos t \cos \delta) \\ &= \sin \varphi (\sin \delta + \operatorname{tang} M \cos \delta) \\ &= \frac{\sin \varphi}{\cos M} (\sin \delta \cos M + \cos \delta \sin M) \\ &= \frac{\sin \varphi}{\cos M} \sin (M + \delta) \end{aligned}$$

Für eine gegebene Breite kann man die zu verschiedenen Stundenwinkeln gehörigen Werthe von M und $\frac{\sin \varphi}{\cos M}$ in eine Tafel bringen, dergleichen Herr Prof. *Bode* in die *Ephemeriden* für 1778 S. 177 u. f. und den I. *Supplement-Band zu den astronomischen Jahrbüchern* S. 78 u. f. für die Breite von Berlin eingerükt hat. Was hier M heifst ist dort AE, und $\frac{\sin \varphi}{\cos M} = \sin SHR$, $\delta = ES$.

Für südliche Abweichung wird

$$\sin h = \frac{\sin \varphi}{\cos M} \sin(M - \delta)$$

Beyspiel. Es seye der Stundenwinkel

	$=$	52°	$32'$	$55'',2$	$= t$
die Breite	$=$	51	31	54,0	$= \varphi$
die Abweichung	$=$	2	50	44,0	$= \delta$

$\mathrm{Lg} \cos t =$	9,7839660
$\mathrm{Lg}\,\mathrm{cotg}\, \varphi =$	9,9001124
$\mathrm{Lg}\,\mathrm{Tg}\, M =$	9,6840784
$M =$	$25^\circ\ 47'\ 14'',4$
$\mathrm{Lg} \sin \varphi =$	9,8937352
$\mathrm{C.Lg} \cos M =$	0,0455573
$\mathrm{Lg} \sin (M + \delta) =$	9,6805129
$\mathrm{Lg} \sin h =$	9,6198054

$h =$		24°	$37'$	$31'',5$
Halbm. ☉	+	16		4,0
		24	53	35,5
Par. ☉	−	0		7,7
		24	53	27,8
Refract.	+	2		2,2
Scheinb. Höhe des obern Randes $=$		24	55	30,0
gedopp. Höhe $=$		49	51	0,0
Error ind.	−	1		0,0
		49	50	0,0

Nun wurde den 27. März (§. 112.) unter der hier vorausgesezten Breite und Abweichung der Sonne die gedoppelte Höhe des obern Sonnenrandes gefunden $= 49^\circ\ 50'$ folglich

lich war der Stundenwinkel $= 52^\circ 32' 55'',2$ und die wahre Zeit der Beobachtung $3^{U.} 30' 17'',7$.

§. 172.

Ob man gleich durch mehrere einzelne Höhen, wenn die Breite bekannt ist, die Zeit genau bestimmen und sich durch ihre Uebereinstimmung von der Genauigkeit der Beobachtungen versichern kann, so zieht man doch die correspondirende Höhen den einzelnen vor, theils weil bey einzelnen Höhen ein kleiner Fehler in der Breite den Stundenwinkel merklich ändert, theils weil die Rechnung beschwehrlich ist.

Wenn die Witterung es nicht erlaubt, correspondirende Höhen zu nehmen, sondern so wie man sie finden kann, so kann man doch nach der Methode des Herrn Obrist *von Tempelhof* *) die Zeit des Durchgangs durch den Mittagskreis eben so genau, als durch correspondirende Höhen, bestimmen.

Zu einer gewissen Zeit T seye die Höhe der Sonne $= h$, ihre Abweichung $= \delta$, die Breite $= \varphi$, der Stundenwinkel $= t$. Zu einer andern Zeit, T', die Höhe $= h'$, Abweichung $= \delta'$, der Stundenwinkel $= t'$, so ist nach der bekannten Gleichung (§. 111.)

$$\text{I. } \operatorname{Cos} t = \frac{\sin h - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta}$$

$$\text{II. } \operatorname{Cos} t' = \frac{\sin h' - \sin \varphi \sin \delta'}{\cos \varphi \cos \delta'}$$

*) I. Supplement-Band zu den Berl. astronomischen Jahrbüchern S. 214. u. f.

Die beyden Gleichungen multiplicire man mit $\cos\varphi\cos\delta\cos\delta'$, und ziehe die zweyte von der ersten ab, so hat man

$$\cos\varphi\cos\delta\cos\delta'(\cos t-\cos t')=\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta+\sin\varphi(\sin\delta'\cos\delta-\cos\delta'\sin\delta)$$

Es ist aber

$$\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta=\sin h\cos\delta-\sin h'\cos\delta-\sin h(\cos\delta-\cos\delta')=\cos\delta(\sin h-\sin h')$$
$$-2\sin h\sin\left(\frac{\delta'+\delta}{2}\right)\sin\left(\frac{\delta'-\delta}{2}\right);$$ ferner

$$\sin h-\sin h'=2\cos\left(\frac{h+h'}{2}\right)\sin\left(\frac{h-h'}{2}\right),$$

und

$$\cos t-\cos t'=2\sin\left(\frac{t'+t}{2}\right)\sin\left(\frac{t'-t}{2}\right)$$

folglich

$$2\cos\varphi\cos\delta\cos\delta'\sin\left(\frac{t'+t}{2}\right)\sin\left(\frac{t'-t}{2}\right)$$
$$=2\sin\left(\frac{h-h'}{2}\right)\cos\left(\frac{h+h'}{2}\right)\cos\delta$$
$$-2\sin h\sin\left(\frac{\delta'+\delta}{2}\right)\sin\left(\frac{\delta'-\delta}{2}\right)$$
$$+\sin\varphi\sin(\delta'-\delta)$$

Da nun die Veränderung der Abweichung der Sonne in einem Tag noch nicht 24 Min. beträgt, so kann man, ohne einen Fehler von $0'',02$ im Bogen, sezen, $\sin(\delta'-\delta)=\delta'-\delta$, und um so viel mehr $\sin\left(\frac{\delta'-\delta}{2}\right)=\frac{\delta'-\delta}{2}$, also wird

2 cos

$$2\cos\varphi\cos\delta\cos\delta'\sin\left(\frac{t'+t}{2}\right)\sin\left(\frac{t'-t}{2}\right)$$

$$=2\sin\left(\frac{h-h'}{2}\right)\cos\left(\frac{h+h'}{2}\right)\cos\delta$$

$$+(\delta'-\delta)\left(\sin\varphi-\sin h\sin\left(\frac{\delta'+\delta}{2}\right)\right)$$

Ist nun die eine Höhe vor, die andere nach der Culmination genommen worden, so ist die halbe Zwischenzeit der Beobachtungen $\frac{T'-T}{2}$ in Grade verwandelt = der halben Summe der Stundenwinkel $=\frac{t'+t}{2}$

Also findet man

$$\sin\left(\frac{t'-t}{2}\right)=\frac{\sin\left(\frac{h-h'}{2}\right)\cos\left(\frac{h+h'}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t+t'}{2}\right)\cos\varphi\cos\delta'}$$

$$+\frac{\left(\frac{\delta'-\delta}{2}\right)\left(\sin\varphi-\sin h\sin\left(\frac{\delta'+\delta}{2}\right)\right)}{\cos\varphi\cos\delta\cos\delta'\sin\left(\frac{t+t'}{2}\right)}$$

Der Bogen $\frac{t'-t}{2}$ in Zeit verwandelt und von der halben Zwischenzeit der Beobachtungen $\frac{T'-T}{2}$ abgezogen gibt den zu der vormittägigen Höhe gehörigen Stundenwinkel in Zeit, welcher zu der Zeit „T“ addirt, die Zeit der Uhr im wahren Mittag gibt.

Für einen Fixstern ist $\delta' = \delta$, also das zweyte Glied der Gröſse rechter Hand des Gleichheitszeichens $= 0$.

Sind die Höhen nicht über zwey bis drey Grade verschieden, so kann man ohne beträchtlichen Fehler sezen

$$\frac{t'-t}{2} = \frac{\left(\frac{h-h'}{2}\right)\cos\left(\frac{h+h'}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t+t'}{2}\right)\cos\varphi\cos\delta'} + \frac{\left(\frac{\delta'-\delta}{2}\right)\operatorname{tang}\varphi}{\cos\delta\cos\delta'\sin\left(\frac{t+t'}{2}\right)} - \frac{\left(\frac{\delta'-\delta}{2}\right)\sin h\sin\left(\frac{\delta'+\delta}{2}\right)}{\cos\varphi\cos\delta\cos\delta'\sin\left(\frac{t+t'}{2}\right)}$$

Die Formel ist für den Fall eingerichtet, wenn die nachmittägiche Höhe kleiner ist als die vormittägiche; im entgegengesezten Fall wird $\frac{h-h'}{2}$, $\frac{t'-t}{2}$ negativ, und der zur vormittägichen Höhe gehörige Stundenwinkel ist $= \frac{t+t'}{2} + \frac{t'-t}{2}$. Man sieht aus dieser Formel, daſs die Abweichung, Breite und die *absoluten* Höhen nicht sehr scharf bekannt seyn dürfen, nur muſs die Veränderung der Abweichung in der Zwischenzeit der Beobachtuntungen und der Unterschied der Höhen genau bekannt seyn. Aus diesem Grunde hat diese Methode grofse Vorzüge vor der Methode der einzelnen Höhen, und sie kann selbst alsdann sehr nüzlich seyn, wenn man correspondirende Höhen bekommen hat, und die Beobachtungen auf verschiedene Arten mit einander verbindet, um die Zeit des Mittags genauer zu erhalten. Die Rechnung kann auch nicht sehr beschwerlich seyn, weil man die zu den Bogen φ, δ, δ', $\frac{\delta'+\delta}{2}$, $\frac{h+h'}{2}$ und $\frac{t+t'}{2}$ gehörigen trigonometrischen Linien nur für Minuten suchen darf.

Um diese Formel durch ein Beyspiel zu erläutern, wähle ich von den §. 112. angeführten Höhen folgende:

$47^\circ\ 0'$ um $20^{U.}\ 50'\ 20''$ Vormitt. (T.)
$49\ \ 50$ um $4\ \ 1\ \ 29$ Nachmitt. (T'.)

Die wahren Höhen sind $h = 23^\circ\ 12'\ 23'',3$

$$h' = 24\ \ 37\ \ 31,5$$

$$h - h' = -\ 1\ \ 25\ \ \ 8,2$$

$$\frac{h-h'}{2} = -\ 0\ \ 42\ \ \ 34,1 = 2554'',1$$

Abweichung der ☉ $= 2^\circ 44'\ \ 3'',3 = \delta$

$$2\ \ 50\ \ 44,0 = \delta'$$

$$\frac{\delta'-\delta}{2} = 200'',3$$

$$\frac{h+h'}{2} = 23^\circ\ 55',\ \frac{\delta'+\delta}{2} = 2^\circ\ 47'$$

 $T' - T$

$\frac{T'-T}{2} = 3^{St.} 35' 34'',5.$ Hätte die Uhr von einer Culmination bis zu der nächstfolgenden 24 Stunden gezeigt, so wäre die halbe Zwischenzeit der Beobachtungen in Grade verwandelt, 15° auf eine Stunde gerechnet, $= \frac{t+t'}{2}$. Da aber die Uhr in 24 wahren Sonnenstunden $24^{St.} 3' 39'',9$ zeigte (§. 169.) so muſs man vorher jene Zwischenzeit in wahre Sonnenzeit verwandeln durch die Proportion: $24^{St.} 3' 39'',9 : 3^{St.} 35' 34'',5 = 24 : x$, oder den zu der Zwischenzeit $\frac{T'-T}{2}$ gehörigen Bogen durch die Proportion suchen:

$$\left.\begin{matrix} 24^{St.} 3' 39'',9 : 3^{St.} 35' 34'',5 \\ {}^{*})\ 86619'',9 : 12934'',5 \end{matrix}\right\} = 360^\circ : \frac{t+t'}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Nun ist } Lg\,360 &= 2,5563025 \\ Lg\,12934,5 &= \underline{4,1117497} \\ &\ 6,6680522 \\ Lg\,86619,9 &= \underline{4,9376178} \\ Lg\,\frac{t+t'}{2} &= 1,7304344 \end{aligned}$$

$$\frac{t+t'}{2} = 53,757 \text{ Gr. } 53^\circ 45' 25''$$

Um die Formel bequemer berechnen zu können, bringt man ihre drey Glieder unter einerley Nenner, alsdann ist

$t'-t$

*) Diese Verwandlung der Stunden und Minuten in Secunden geschiehet leicht vermittelst der Tafel in H. Hofrath Kästners astron. Abhandlungen. II. Sammlung S. 82.

$$\frac{t'-t}{2} = \frac{\left(\frac{h-h'}{2}\right)\cos\left(\frac{h+h'}{2}\right)\cos\delta}{\sin\left(\frac{t+t'}{2}\right)\cos\varphi\cos\delta\cos\delta'}$$

$$+ \frac{\left(\frac{\delta'-\delta}{2}\right)\sin\varphi}{\sin\left(\frac{t+t'}{2}\right)\cos\varphi\cos\delta\cos\delta'}$$

$$- \frac{\left(\frac{\delta'-\delta}{2}\right)\sin h\sin\left(\frac{\delta'+\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t+t'}{2}\right)\cos\varphi\cos\delta\cos\delta'}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{Lg}\sin\left(\frac{t+t'}{2}\right) &= 9{,}9066131 \\
\mathrm{Lg}\cos\varphi &= 9{,}7938317 \\
\mathrm{Lg}\cos\delta &= 9{,}9995054 \\
\mathrm{Lg}\cos\delta' &= \underline{9{,}9994642} \\
\text{Summe} &= 39{,}6994144 \\
\text{C. arithm.} &= 0{,}3005856 \\
\mathrm{Lg}\,\frac{h-h'}{2} &= 3{,}4072379 \\
\mathrm{Lg}\cos\left(\frac{h+h'}{2}\right) &= 9{,}9610108-10 \\
\mathrm{Lg}\cos\delta &= \underline{9{,}9995054-10} \\
& \ 3{,}6683397
\end{aligned}$$

gehört zu 4659'',5

$$Lg\left(\frac{\delta'-\delta}{2}\right) = 2{,}3016809$$

$$Lg\sin\varphi = 9{,}8937452-10$$

$$C.\ arith. = 0{,}3005856$$

$$2{,}4960117$$

gehört zu $313'',3$

$$Lg\left(\frac{\delta'-\delta}{2}\right) = 2{,}3016809$$

$$Lg\sin h = 9{,}5955452-10$$

$$Lg\sin\left(\frac{\delta'+\delta}{2}\right) = 8{,}6862718-10$$

$$C.\ arith. = 0{,}3005856$$

$$0{,}8840835$$

gehört zu $7'',6$

Weil nun $\frac{h-h'}{2}$ negativ ist, so ist

$$\frac{t'-t}{2} = -4659'',5+313'',3-7'',6 = -4353'',8$$

$$= -\frac{4353{,}8}{15} \text{ oder } -290{,}25 \text{ Sec. in Zeit.}$$

Da aber nach §. 169. 24 wahre Sonnenstunden $24^{St.}\,3'\,39'',9$ der Uhr gleich waren, so sind $290'',25$ wahrer Zeit $= 290'',25 + 0'',74 = 4'\,50'',99$ Zeit der Uhr.

$$\left.\begin{aligned} \text{Nun war } \frac{t+t'}{2} &= 3^{St.}\ 35'\ 34'',50 \\ \frac{t'-t}{2} &= -0\ \ 4\ \ 50{,}99 \end{aligned}\right\} \text{in Zeit}$$

	3	40	25,49
Zeit der Beob.	20	50	20,00
Zeit der Uhr im Mittag	0	30	45,49

Be-

Bestimmung der Länge eines Orts auf der Oberfläche der Erde.

§. 173.

Die Länge eines Orts läſst sich am leichtesten durch Beobachtung derjenigen Himmelsbegebenheiten, die sich *wirklich* ereignen, dergleichen die *Verfinsterungen des Monds und der Trabanten des Jupiters* sind, bestimmen (§. 9. S. 9.). Wären diese Erscheinungen von der Art, daſs man genau den Augenblik, da sie sich ereignen, angeben könnte, so würden sie das bequemste und zugleich das sicherste Mittel seyn, die Länge zu bestimmen. Allein der Schatten der Erde auf dem Mond ist nicht scharf begränzt, so daſs man weder den Anfang und das Ende der Mondsfinsternisse, noch den Ein- und Austritt der Mondsfleken mit der hier erforderlichen Genauigkeit angeben kann, wenigstens viele Uebung dazu erfordert wird. Die Verfinsterungen der Jupiterstrabanten, welche *Hell* zur Längenbestimmung besonders empfohlen hat, gewähren ebenfalls nur alsdenn einige Genauigkeit, wenn man viele Beobachtungen so mit einander verbindet, daſs die von der Verschiedenheit der Fernröhren und der Augen herrührenden Fehler einander aufheben. Die übrigen §. 9. angeführten Erscheinungen, mit welchen erst noch eine Reduction muſs vorgenommen werden, besonders die *Bedekungen der Fixsterne vom Mond,* verstatten eine

eine gröſsere Genauigkeit. Da man aber bey der Berechnung derselben die Länge schon beynahe kennen muſs, so sind erstere Erscheinungen immer zu der vorläufigen Längenbestimmung nüzlich, und dienen zur Abkürzung einer sonst etwas beschwerlichen Berechnung der leztern.

Bestimmung der Länge durch Mondsfinsternisse.

§. 174.

Man beobachtet den Anfang und das Ende der Finsterniſs, bey totalen Finsternissen noch Anfang und Ende der totalen Verfinsterung, und die Ein- und Austritte der kenntlichsten Mondsfleken in und aus dem Schatten der Erde *), welche gewöhnlich in den astronomischen Jahrbüchern angekündigt werden. Um die Fleken nicht mit einander zu verwechseln, muſs man eine genaue Mondscharte gebrauchen. Herr *von Zach* zeigte mir eine zu dieser Absicht sehr bequem eingerichtete Charte, die auf Pappe mit einer kreisförmigen Oefnung von der Gröſse der Mondscharte aufgeleimt, und mit Oehl durchsichtig gemacht war. Hinter diese Charte wird beym Ge-

*) *Hell* schlug zu diesen Beobachtungen nur etwa 20 mal vergröſsernde Fernröhren vor. Herr *von Zach* aber fand, daſs man hier mit Vortheil stärkere Vergröſserungen achromatischer Fernröhren und Spiegeltelescope gebrauchen könne, welches auch die schöne Uebereinstimmung seiner Beobachtungen mit andern, die mit ähnlichen Instrumenten angestellt worden, beweiſst.

Gebrauch ein Licht gesezt, welches die Charte erleuchtet, und ihr ein dem vollen Monde ähnliches Ansehen gibt; zugleich ist der Beobachter gegen das Blenden des Lichts gesichert. Die Augenblike der Beobachtungen bemerkt man an der Uhr, welche man berichtigt, um die Zeit der Beobachtungen in wahrer, mittlerer oder Sternzeit angeben zu können.

Hat man nun an einem andern Ort Beobachtungen derselben Erscheinungen, so findet man aus der Vergleichung ihrer Zeiten den *Mittagsunterschied*, und folglich auch den Unterschied der Längen beyder Oerter (§. 7.).

Weil der Mondschatten nicht scharf begränzt ist, so muſs man sich eine gewisse Gränze desselben wählen, an welcher man immer die Ein- und Austritte der Fleken bemerkt. Sind die Fleken groſs, so kann man die Ein- und Austritte ihrer Ränder und ihrer Mittelpuncte, die man nach dem Augenmas bestimmt, beobachten. Hat sich der andere Beobachter einer Fernröhre, welche von der des erstern verschieden ist, bedient, so wird er die Ein- und Austritte früher oder später gesehen haben, als der erstere. Nimmt man aber aus den Mittagsunterschieden, welche so wohl aus den Eintritten, als auch aus den Austritten hergeleitet wurden, ein Mittel, so heben sich diese Fehler gegen einander auf.

Beyspiel. Bey der totalen Mondsfinsterniſs den 22. October 1790 wurden in *Paris* von H. *Mechain*, und in *Gotha* von H. *von Zach*

Zach folgende correspondirende Beobachtungen gemacht *). Die Zeit ist *wahre* Zeit.

	Paris.			Gotha.		
vermut. Anfang	11U.	6′	33″	11U.	41′	19″
Anf. gewiſs	—	7	33	—	41	44
Grimald. I. Rand	—	9	28	—	44	3
Aristarch	—	23	36	—	57	37
Copernic. I. R.	—	29	58	12	3	21
— II. R.	—	32	13	—	6	3
Tycho	—	30	33	—	4	5
totale Verfinst.	12	14	25	—	48	4
Anf. d. Austr.	13	55	23	14	28	36
Grim. ganz	—	58	46	—	32	17
Kepler halb	14	8	23	—	42	7
Cop. I. R.	—	16	23	—	49	9
— II. R.	—	18	48	—	52	23
Plato I. R.	—	19	33	—	—	—
— II. R.	—	20	48	—	—	—
Tycho II. R.	—	24	3	—	57	34
M. seren. I. R.	—	32	3	15	4	47
— — II. R.	—	43	18	—	17	1.

In *Gotha* wurde also der Anfang der Mondsfinsterniſs beobachtet um

	11U.	41′	44″
in *Paris* um	11	7	33
Mittagsuntersch.	0	34	11

Da man nun in Gotha bey dem Anfang der Mondsfinsterniſs mehr zählte als in Paris, so gieng die Sonne durch den Mittagskreis von Gotha, *früher*, als durch den Mittagskreis von Paris. Folglich liegt Gotha von Paris gegen *Morgen*. Bey dem Aus-

*) Astron. Jahrbuch für 1794 S. 91. und 170.

Austritt des Plato wurde in Gotha nur die Zeit beobachtet, da er halb ausgetreten war, $14^{U.}\,53'\,46''$. Da aber in Paris die beyden Ränder des Plato beobachtet wurden, so findet man die Zeit, da er halb ausgetreten war, wenn man aus beyden Beobachtungen das Mittel nimmt, und bekommt auf diese Art eine correspondirende Beobachtung.

Plato. I. Rand	$14^{U.}$	$19'$	$33''$	
— II. R.	—	20	48	
Plato halb	14	20	10,5	in Paris
— —	14	53	46,0	in Gotha
Mittagsuntersch.	0	33	35,5	

Auf diese Art finden sich folgende Mittagsunterschiede:

	Aus den Eintr.	Aus den Austritten
	$34'\ 46''$	$33'\ 13''$
	34 11	33 31
	34 35	33 44
	34 1	33 36
	33 23	33 35
	33 50	33 35
	33 32	33 31
	33 39	32 44
Eint. Mittel	33 59,6	33 43
Austr. —	33 32,8	33 32,8
Mittel aus beyden	33 46,2	

Hier weichen die drey ersten Beobachtungen am meisten von den übrigen ab, welche gut unter einander stimmen. Werden sie als unsicher ausgeschlossen, so ist das Mittel aus den Eintritten

$$\begin{array}{rl} & 33'\ 41'',0 \\ \text{Aus den Austr.} & \underline{33\ \ 32,8} \\ \text{Mittel} = & 33\ \ 36,9 \quad ^{*}) \end{array}$$

Dieser Mittagsunterschied in Grade verwandelt gibt

$$\begin{array}{rll} & 8^{\circ}\,24'\ 13'',5 & \\ \text{Länge von Paris} = & \underline{20\quad 0\quad 0,0} & (\S.\ 1.\ S.\ 2.) \\ \text{Länge von Gotha} = & 28\ \ 24\ \ 13,5 & \end{array}$$

Bestimmung der Länge durch Verfinsterungen der Jupiterstrabanten.

§. 175.

Um aus den Beobachtungen der Finsternisse der Jupiterstrabanten den Mittagsunterschied der Oerter genau zu bestimmen, müssen so wohl Eintritte als Austritte der Trabanten an den beyden Oertern, deren Mittagsunterschied man bestimmen will, beobachtet werden. Sucht man nun aus den Eintritten und Austritten besonders den Mittagsunterschied, und nimmt aus beyden Bestimmungen ein Mittel, so heben sich die von der Verschiedenheit der Fernröhren und der Augen herrührende Fehler gegen einander auf, wie oben bey den Mondsfinsternissen gezeigt wurde. *Hell* zog diese Methode, die Länge zu bestimmen allen andern vor *), wenn man auf die von ihm gezeigte Art aus den Beobach-

*) Dieser Mittagsunterschied ist nur 8″,2 gröſser, als der, welchen H. *von Zach* im Mittel aus vielen Bestimmungen gefunden hat. Tabulae motuum Solis. p. 12.

**) Ephemerides astronomicae anni 1764 pag. 189.

achtungen den Mittagsunterschied herleite. Die Bedingungen, welche seine Methode erfordert, und in einem Zeitraum von *fünf* oder *sechs Jahren* erhalten werden können, sind folgende:

I. Man gebrauche nur die Beobachtungen des I. und II. Trabanten.

II. Diese Beobachtungen, nimmt man an, seyen beständig mit derselben Fernröhre gemacht.

III. Solche correspondirende Beobachtungen des ersten und zweyten Trabanten werden wenigtsens dreyſsig oder vierzig erfordert, die an jedem Ort bey günstigem Himmel gemacht sind.

IV. Eben so viele Eintritte als Austritte.

V. Man mache eine Auswahl derjenigen Beobachtungen, welche von den Beobachtern selbst als *gut* angegeben werden, schliese aber diejenigen gänzlich aus, welche drey oder vier Tage vor oder nach der Opposition des Jupiters beobachtet wurden, auſser wenn sie mit den übrigen überein stimmen, denn bey diesen kann, nicht wegen der verschiedenen Güte der Fernröhren, sondern wegen der Nähe des Trabanten bey der hellen Scheibe des Jupiters, ein Fehler von zwey Minuten begangen werden. Ebenso müssen diejenigen nicht leicht gebraucht werden, welche sich zu einer Zeit ereignen, da der Jupiter in dem Knoten der Bahnen seiner Trabanten und zugleich einer derselben sich so nahe bey einem andern befindet, daſs man sie nicht leicht von einander unterscheiden kann. Auch müssen diejenigen sorgfältig ausgeschlossen werden, welche bey zu geringen Höhen des Jupiters oder in zu starker Dämmerung gemacht wurden.

VI. Endlich wird angenommen, die Beobachtungen seyen von geübten Beobachtern gemacht, und genau auf wahre Zeit reducirt.

Zu den Beobachtungen der Verfinsterungen der Jupiterstrabanten werden wenigstens 10 füſsige gemeine oder diesen gleichkommende achromatische Fernröhren oder Spiegeltelescope erfordert.

Beyspiel. Hell beobachtete in Wien den Eintritt des ersten Trabanten 1757 März 21

	12$^{U.}$ 55′ 25″
Weiſs in Tyrnau um	13 0 14
Mittagsuntersch. =	4 49

Im Jahr 1762 Dec. 21. Austritt des I. Trabanten

Hell in Wien	11$^{U.}$ 35′ 51″
Weiſs in Tyrnau	11 40 32
Mittagsunterschied	4 41
oben aus d. Eintr.	4 49
Summe	9 30
Mittel	4 45

Folglich liegt Tyrnau von Wien 4′ 45″ in Zeit gegen Morgen.

Der

Der halbe Unterschied zwischen den beyden Bestimmungen $= 4''$ ist der Unterschied der Fernröhren.

Die Austritte der Trabanten erfordern eine besondere Aufmerksamkeit, um den ersten Augenblik ihrer Wiedererscheinung zu bemerken. In dem Augenblik, da man den ersten Blik vermuthet, fängt man an, die Secunden zu zählen, und verläſst die Fernröhre nicht früher, als bis man sich von dem wirklichen Austritt des Trabanten versichert hat, Die Beobachtung läſst sich leichter machen, wenn man den Ort bestimmt hat, wo der Trabant wieder erscheinen muſs, welches vermittelst eines *Jovilabiums* *) geschehen kann. *Hell* hat in dieser Absicht die Lage der Trabanten gegen den Jupiter für die Zeit der in Wien sichtbaren Verfinsterungen derselben in seinen Ephemeriden angegeben.

Bestimmung der Länge aus Beobachtungen der Sonnenfinsternisse.

§. 176.

Genauer, als durch Mondsfinsternisse und Verfinsterungen der Jupiterstrabanten, kann die Länge aus den Beobachtungen der Sonnenfinsternisse hergeleitet werden, weil man den Augenblik des Anfangs und besonders des Endes

*) Weidleri explicatio Jovilabii Cassiniani. La Lande Astronomie. Bode Erläuterung der Sternkunde, I. Th. §. 498.

Endes derselben sehr genau beobachten kann, wenn man sich stark vergröſsernder Fernröhren bedient. Es erhellet zwar aus der Natur der Sache, daſs man den Anfang einer Sonnenfinsterniſs, oder den Augenblik, da die Ränder des Monds und der Sonne einander berühren, immer zu spät angeben wird, weil man nur alsdann den Anfang der Sonnenfinsterniſs angeben kann, wenn der Mond schon einen merklichen Eingrif in die Sonnenscheibe gemacht hat. Allein der Unterschied zwischen dem Augenblik, da die beyden Ränder einander berühren, und dem, da man den Anfang der Finsterniſs bemerkte, wird immer sehr klein seyn, wenn man sich starker Vergröſserungen bedient, und bey weitem mit der Ungewiſsheit, welche bey Beobachtung der Mondsfinsternisse und der Verfinsterungen der Jupiterstrabanten statt findet, in keine Vergleichung kommen. *La Lande* gibt die Vorschrift, bey der Berechnung der Sonnenfinsternisse die Summe der Halbmesser für die Beobachtung des Anfangs um 2″ zu vermindern *), gibt aber nicht die Vergröſserung der Fernröhre, welche man bey der Beobachtung gebraucht, an, von welcher doch diese Grösse abhängt. *Hell* hielt die Sonnenfinsternisse und die Bedekungen der Fixsterne vom Mond deswegen für unsicher zur Längenbestimmung, weil diese Beobachtungen auf den Mittelpunct der Erde reducirt werden müssen, und die zu dieser Rechnung erforderlichen Ele-

*) Astronomie Tom. II. 1789.

Elemente, die Parallaxe des Monds, seine scheinbare Breite, die Gestalt der Erde, der Halbmesser der Sonne und des Monds, aus den astronomischen Tafeln genommen werden, deren Unrichtigkeit allerdings einen merklichen Einfluſs auf die Resultate der Rechnungen haben kann. Allein *Lexell* *) zeigte, wie man nicht allein den Einfluſs, welchen die Unrichtigkeit der Elemente, die in der Rechnung als genau bekannt vorausgesezt werden, und folglich auch die Zuverlässigkeit der aus den Beobachtungen hergeleiteten Schlüsse bestimmen, sondern auch den Fehler der Elemente der Rechnung durch Verbindung der Beobachtungen mit einander finden könne. Sind also gleich die Sonnenfinsternisse weit seltener, als die Finsternisse der Jupiterstrabanten, so kann man doch aus genauen Beobachtungen einer Sonnenfinsterniſs die Länge eines Orts wenigstens so genau bestimmen, als aus einer groſsen Anzahl der Verfinsterungen der Jupiterstrabanten, wobey, wie *Hell* selbst bemerkt, noch eine Ungewiſsheit von 10 Sec. statt finden kann, die sich bey Sonnenfinsternissen selten findet.

§. 177.

Bey der Beobachtung der Sonnenfinsterniſs gebraucht man gefärbte Gläser, welche man vor dem Ocular anbringt. Ich habe gewöhn-

*) N. Commentarii academiae scientiarum imperialis petropolitanae. T. XV.

wöhnliches reines und eben geschliffenes Glas, das ich an einer Lampe schwarz anlaufen liefs, sehr bequem gefunden. Um diese geschwärzten Gläser dauerhafter zu machen, kann man dem geschwärzten Glas eine Einfassung von Papier geben, welche verhindert, dafs ein zweytes darauf gelegtes ähnliches Stük Glas die geschwärzte Seite berührt. Die beyden Gläser werden nun mit Sigellak zusammengeküttet. Nimmt man ein längliches Stük Glas, so kann man das eine Ende stärker schwärzen als das andere, welches man gebrauchen kann, wenn das Sonnenlicht durch Dünste oder dünne Wolken geschwächt ist.

Es ist gut, wenn man den Anfang der Finsternifs durch *Rechnung* oder durch *Construction* vorher bestimmt, um nicht die Augen vor der Beobachtung durch Aufpassen auf den Anfang der Finsternifs zu schwächen. Die bequemste Methode, die Umstände einer Sonnenfinsternifs zu berechnen, scheint mir die *Mayersche* zu seyn. (*Tobiae Mayeri opera inedita. Vol.* I. pag. 23. sq. *F. E. Bode Erläuterung der Sternkunde.* II. Th. S. 603. §. 661. u. f.) Eine sehr vollständige Anleitung zur Berechnung der Sonnenfinsternisse findet man in G. C. *Reccards Abhandlung von der grofsen Sonnenfinsternifs* d. 1. *April* 1764. Anleitungen zur Bestimmung der Umstände einer Sonnenfinsternifs durch *Zeichnung* findet man ebenfalls in der hier angeführten Schrift, in *Lamberts Beyträgen zum Gebrauch der Mathematik*, II. Th. II.

Abth.

Abth. so wie in den meisten astronomischen Lehrbüchern.

Statt der *Mayerschen* Formeln für die Parallaxen, kann man auch die unten vorkommende gebrauchen. Man berechnet für verschiedene Zeitpuncte die wahre Länge und Breite des ☽, seine Horizontalparallaxe und Durchmesser, die wahre Länge der Sonne, ferner die Längen- und Breitenparallaxen, vermittelst welcher man die scheinbare Mondsbreite, den Unterschied der scheinbaren Längen, und daraus den Abstand der Mittelpuncte findet. Nun sucht man durch Interpolation die Zeit, da der Abstand der Mittelpuncte der Summe der Halbmesser des Monds und der Sonne gleich ist, welches die Zeit des Anfangs und des Endes gibt.

§. 178.

Der Mond ist der Erde so nahe, daſs er von einem Punct ihrer Oberfläche aus gesehen an einer andern Stelle erscheint, als man ihn aus dem Mittelpunct der Erde sehen würde, und aus demselben Grunde erscheint er auch zweyen Beobachtern auf der Oberfläche der Erde in demselben Augenblik an verschiedenen Stellen des Himmels. Daher kömmt es, daſs zwey Beobachter an verschiedenen Oertern der Erde den Anfang einer Sonnenfinsterniſs nicht in *einem Augenblik* sehen, weil diese nicht eine wirkliche Verdunkelung der Sonne ist, sondern von dem zwischen der Sonne und dem Ort des Beobachters auf der Erde befindlichen Mond herrührt, der die zu dem Beobachter kommenden Sonnenstralen zum Theil oder ganz auffängt. Die Beobachtungen der Sonnenfinsternisse können also nicht gerade zu, wie Mondsfinsternisse, zur Bestimmung des Mittagsunterschieds gebraucht werden. Aus den Beobachtungen des Anfangs und des Endes kennt man die *scheinbare* Entfernung der Mittelpuncte der Sonne und des Monds von einander, welche der Summe ihrer Halbmesser gleich ist. Zieht man durch den Mittelpunct des Monds einen gröſsten Kreis senkrecht auf die Ebene der Ecliptic, so entsteht ein rechtwinklichtes sphärisches Dreyek ☉☽B Fig. 53. Taf. VI., in welchem ☉☽ die scheinbare Entfernung der Mittelpuncte, ☉B ein Theil der Ecliptic, B☽ die scheinbare Breite des Monds ist. In diesem Dreyek ist die Hypotenuse ☉☽ gegeben; wäre die scheinbare Breite des Monds B☽ bekannt, so könnte man die Seite ☉B finden. Diese drükt den Unterschied der scheinbaren Längen des Monds und der Sonne aus. Wäre nun noch der Unterschied zwischen der *wahren* Länge des Monds (wie sie aus dem Mittelpunct der Erde erscheint) und zwischen der scheinbaren (wie sie der Beobachter auf der Oberfläche der Erde siehet), gegeben, so könnte man aus dem Unterschied der scheinbaren und wahren Länge des Monds und der Sonne und aus dem Unterschied zwischen der wahren und scheinbaren Länge des Monds (der *Längenparallaxe*) den Unterschied zwischen der *wahren* Länge des Monds und der Sonne in dem Augenblik, da man den Anfang oder

das

das Ende der Finsternifs beobachtete, finden. Ist endlich die Veränderung der Länge des Monds und der Sonne in einer gegebenen Zeit, z. B. in einer Stunde, bekannt, so kennt man die Geschwindigkeit von beyden. Da sich so wohl die Sonne als der Mond von Abend gegen Morgen bewegen, so kennt man auch die Richtung ihrer Bewegung. Aus dieser, aus ihrer Geschwindigkeit und aus ihrem Abstand von einander, könnte man also den Augenblik bestimmen, da die Sonne und der Mond von dem Mittelpunct der Erde aus gesehen einerley Länge hatten, das ist, die Zeit der wahren Zusammenkunft des Monds mit der Sonne oder des *Neumonds* *). Verfährt man ebenso mit der correspondirenden an dem andern Ort gemachten Beobachtung, so findet man auch aus dieser die Zeit des Neumonds. Da nun der absolute Augenblik dieser Erscheinung nicht vom dem Ort des Beobachters auf der Oberfläche der Erde abhängt, indem sich die Mittelpuncte der Sonne, der Erde und des Monds nur in einer auf die Ebene der Ecliptic senkrechten Ebene befinden dürfen, so ist der Unterschied der Zeiten, zu welchen der wahre Neumond nach dem Meridian eines jeden Orts eintraf, der Mittagsunterschied der beyden Oerter.

§. 179.

*) Weil bey der Sonne ebenfalls eine Parallaxe statt findet, so mufs auch diese in Rechnung gebracht werden, indem man statt der Mondsparallaxe allein den Unterschied zwischen den Parallaxen des Monds und der Sonne nimmt.

§. 179.

Um den Unterschied zwischen der wahren und scheinbaren Länge des Monds angeben zu können, muſs der Ort des Beobachters auf der Erde gegeben seyn. Den wahren Ort des Monds findet man aus den Tafeln in Beziehung auf die Ecliptic. Gedenkt man sich die von dem Mittelpunct der Erde an den Ort des Beobachters gezogene gerade Linie bis an die scheinbare Himmelskugel verlängert, so wird dieser Punct eine gewisse Länge und Breite haben. Der Aequator der Himmelskugel fällt mit dem Aequator der Erde zusammen, folglich ist der Winkel, welchen jener Halbmesser der Erde mit der Ebene des Aequators macht, die aus dem Mittelpunct der Erde gesehene *Abweichung* des Orts des Beobachters. Nun dreht sich die Erde um ihre Axe nach derselben Richtung, nach welcher die jährliche scheinbare Bewegung der Sonne geschieht, folglich ist die *gerade Aufsteigung* des Puncts, wo der verlängerte Halbmesser der Erde an dem Ort des Beobachters die Himmelskugel trift = der geraden Aufsteigung der Sonne + dem Winkel, welchen die durch den Mittelpunct der Sonne und durch jenen Punct auf der Oberfläche der Erde gezogene Stundenkreise mit einander machen. Dieser Winkel ist = der wahren Zeit der Beobachtung in Grade verwandelt, wenn man 15° auf eine Stunde rechnet, weil die Erde 24 wahre Sonnenstunden gebraucht, um sich in Beziehung auf die Sonne einmal um ihre Axe zu drehen. Folglich ist die *geocentrische* gerade Aufsteigung

gung des Orts der Erde so groſs, als die Summe der wahren Zeit der Beobachtung in Grade verwandelt und der wahren geraden Aufsteigung der Sonne. Da die Zeitgleichung dem Unterschied zwischen der wahren und mittlern geraden Aufsteigung der Sonne in Zeit verwandelt gleich ist, so ist die gerade Aufsteigung jenes Puncts auch gleich der Summe der *mittlern* Zeit in Grade verwandelt und der *mittlern* geraden Aufsteigung der Sonne. Leztere ist der mittlern Länge der Sonne gleich, weil so wohl die Länge der Sonne als auch ihre gerade Aufsteigung einen gemeinschaftlichen Anfangspunct und Endpunct (0° ♈) haben, und die *mittlern* Bewegungen immer der Zeit proportional gesezt werden, folglich ist die gerade Aufsteigung des Orts des Beobachters auf der Erde, welche gewöhnlich die *gerade Aufsteigung des Mittagskreises* oder *die Mitte des Himmels (Ascensio recta medii coeli)* heiſst, für einen gegebenen Augenblik, gleich *der Summe der in Grade verwandelten mittlern Zeit desselben und der mittlern Länge der Sonne,* oder der in Grade verwandelten *Sternzeit* (15° auf 1 St.).

§. 180.

Wäre die Erde eine vollkommene Kugel, so wäre der Winkel, welchen die aus ihrem Mittelpunct an den Ort des Beobachters gezogene gerade Linie mit der Ebene des Aequators macht, der Breite des Orts gleich (§. 1.), weil in diesem Fall die Verticallinie mit jenem Halbmesser der Kugel zusammenfällt. Allein so sowohl physikalischen Gründen als auch wirklichen Messungen zu folge ist die Erde ein gegen die Pole zusammengedrüktes Sphäroid, das durch die Umdrehung einer Ellipse um ihre kleinere Axe entsteht, wenn man annimmt, die Erde seye anfänglich eine flüssige Kugel gewesen, deren Theile durch die Schwere unter sich zusammenhiengen, wie *Huygens*, *Newton*, *Clairaut* u. a., gezeigt haben, lezterer auch für den Fall, wenn die Erde aus Schichten von verschiedener Dichtigkeit bestünde. Die Messungen geben verschiedene Axenverhältnisse, und lassen die Frage, ob die Erde wirklich ein *elliptisches* Sphäroid seye, unentschieden. Indessen kann man doch das Elliptische Sphäroid als eine der wahren Gestalt der Erde nahe kommende Figur betrachten. Der Punct, wo der Durchmesser des Aequators, und die Erdaxe einander schneiden, heiſst der Mittelpunct der Erde.

§. 181.

Gedenkt man sich die Erde durch eine Ebene geschnitten, welche durch ihre beyden Pole geht, so ist der Schnitt eine Ellipse *ADB* Fig. 54, Taf. VI, deren kleinere halbe Axe *CD* der halben Erdaxe, und deren gröſsere halbe Axe *AC* dem Halbmesser des Aequators der Erde gleich ist. *AMD* ist also ein Quadrant eines Meridians, und eine an einen Punct *M* desselben gezogene Tangente *MT* der Durchschnitt einer Ebene, welche die Oberfläche in dem Punct *M* berührt, mit der

Ebene

Ebene des Mittagskreises durch M. Zieht man die Linie MN auf MT senkrecht oder eine *Normallinie* an den Punct M, so ist MN die Richtung der Schwere an dem Ort M, folglich $ANM =$ der Breite des Orts M, wie man sie aus astronomischen Beobachtungen findet. Mit dem Halbmesser CD beschreibe man in die Ellipse einen Kreis $EmDF$, und fälle aus dem Punct M ein Perpendikel MP auf die kleine Axe CD, welches der Kreis $EmDF$ in dem Punct m schneidet. Zieht man an diesen Punct eine Tangente mT, so liegt nach den bekannten Eigenschaften der Ellipse der Durchschnittspunct der Tangenten MT und mT in der verlängerten kleinen Axe CDT. Man ziehe aus dem Mittelpunct C die geraden Linien CM, Cm, so ist CM der Halbmesser der Erde für den Ort M, ACM der Winkel, welchen dieser Halbmesser mit der Ebene des Aequators macht, oder die *verbesserte Breite* des Orts M. Nun ist $MTP = PMN$ oder $= ANM$, welche beyde Winkel den Winkel PMT zu einem rechten ergänzen, nnd aus demselben Grunde $mTP = PmC = ACm$. Ferner verhält sich

$$\text{(I.)}\quad \operatorname{tang} mTP : \operatorname{tang} MTP = CD : AC$$

$$\text{(II.)}\quad \operatorname{tang} PMC : \left\{\begin{matrix}\operatorname{tang} mTP \\ \operatorname{tang} PmC\end{matrix}\right\} = CD : AC$$

$$\text{folglich}\quad \operatorname{tang} PMC : \operatorname{tang} MTP = (CD)^2 : (AC)^2$$

$$\text{oder}\quad \operatorname{tang} ACM : \operatorname{tang} ANM = (CD)^2 : (AC)^2$$

Heiſst nun die beobachtete Breite ANM, φ, die verbesserte ACM oder geocentrische φ', das Axenverhältniſs $CD : AC = n : m$, so hat man

$$\text{tang}\,\varphi' = \frac{n^2}{m^2}\,\text{tang}\,\varphi.$$

§. 182.

Da man nun die geocentrische gerade Aufsteigung (§. 179.) und die Abweichung *ACM* (φ') des Orts *M* kennt, so wird nur noch der Halbmesser der Erde für den Ort *M*, nemlich *CM* erfordert, um seine Lage gegen den Mittelpunct der Erde zu bestimmen. Dieser wird auf folgende Art können gefunden werden. In dem Dreyek *MCm* verhält sich

$$Cm : CM = \sin PMC : \sin PmC$$

oder $CD : CM = \sin ACM : \sin ACm$

Aus I und II §. 181. folgt

$\text{tang}\, mTP : \text{tang}\, MTP = \text{tang}\, PMC : \text{tang}\, mTP$

also ist $(\text{tang}\, mTP)^2 = \text{tang}\, MTP . \text{tang}\, PMC$

oder $(\text{tang}\, ACm)^2 = \text{tang}\, ANM . \text{tang}\, ACM$

folglich

$(\sin ACm)^2 \cos ACM \cos ANM = (\cos ACm)^2 \sin ANM \sin ACM$

und $(\sin ACm)^2 \cos (ANM - ACM) = \sin ACM \sin ANM$

also verhält sich

$(\sin ACM)^2 : (\sin ACm)^2 = \sin ACM \cos (ANM - ACM) : \sin ANM$

aber $(\sin ACM)^2 : (\sin ACm)^2 = (CD)^2 : (CM)^2$

---

daher

$(CD)^2 : (CM)^2 = \sin ACM \cos (ANM - ACM) : \sin ANM$

$= \sin \varphi' \cos (\varphi - \varphi') : \sin \varphi$

folglich ist $CM = CD . \sqrt{\left(\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi' \cos (\varphi - \varphi')}\right)}$

oder, weil $(CD)^2 = (AC)^2 \frac{\text{tang}\, \varphi'}{\text{tang}\, \varphi}$ (§. 181.)

$$CM = AC \sqrt{\left(\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi' \cos (\varphi - \varphi')}\right)}.$$

§. 183.

Der Unterscied zwischen der wahren und verbesserten Breite, oder der Winkel *MCm* läſst sich auch auf folgende Art durch eine Reihe ausdrüken. Es ist

$$\text{tang}\,\varphi' = \frac{n^2}{m^2}\,\text{tang}\,\varphi \quad (\S.\ 181.)$$

also $\varphi - \varphi' = \varphi - \text{Arc. tang}\,\frac{n^2}{m^2}\,\text{tang}\,\varphi$

folglich

$$d.(\varphi - \varphi') = d\varphi - \frac{\frac{n^2}{m^2}\,d\varphi}{\cos\varphi^2\,(1 + \frac{n^4}{m^4}\,\text{tg}\,\varphi^2)}$$

Sezt man $\frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} = a$, so wird

$$d.(\varphi - \varphi') = \frac{2\,a\,d\varphi\,(a + \cos 2\varphi)}{1 + a(a + 2\cos 2\varphi)}$$

Löst man den Bruch $\frac{a + \cos 2\varphi}{1 + a(a + 2\cos 2\varphi)}$ in eine Reihe auf, so findet er sich $= \cos 2\varphi - a\cos 4\varphi + a^2\cos 6\varphi -$ etc.

also ist

$$d.(\varphi - \varphi') = 2\,a\,d\varphi\cos 2\varphi - 2\,a^2\,d\varphi\cos 4\varphi + 2\,a^3\,d\varphi\cos 6\varphi - \text{etc.}$$

und wenn man integrit

$$\varphi - \varphi' = a\sin 2\varphi - \tfrac{1}{2}a^2\sin 4\varphi + \tfrac{1}{3}a^3\sin 6\varphi - \text{etc.}$$

Diese Formel drükt den Winkel, welchen die Verticallinie mit dem Halbmesser an einem gegebenen Ort *M* macht in Theilen des Halbmessers aus. Um ihn in Secunden zu haben, muſs man ihn mit der Anzahl von Secunden, welche der Halbmesser enthält, (206265) multipliciren.

Nach

Nach *Newton* ist $m = 230, n = 229$, also

$$a = \frac{(230)^2 - (229)^2}{(230)^2 + (229)^2} = \frac{459}{105341}$$ dieses gibt in

Secunden ausgedrükt $\frac{459.206265}{105341}$ oder 898,75

Sec. wie man leicht vermittelst der Logarithmen findet. Auf dieselbige Art findet man die übrigen Coefficienten, und man hat für die Abplattung der Erde $\frac{1}{230}$,

$$\varphi - \varphi' = 898'',75 \sin 2\varphi - 1'',958 \sin 4\varphi.$$

Der Coefficient des dritten Glieds ist schon kleiner als $0'',006$.

§. 184.

Ebenso kann auch der Halbmesser der Erde CM durch eine sehr schnell convergirende Reihe ausgedrükt werden. Man hat

$$(PM)^2 = (CM.\sin PCM)^2 = (CM.\cos\varphi')^2$$

$$(CP)^2 = (CM.\cos PCM)^2 = (CM.\sin\varphi')^2$$

Nach den Eigenschaften der Ellipse ist

$$(PM)^2 = \left(\frac{AC}{CD}\right)^2.((CD)^2 - (CP)^2)$$

folglich ist

$$(CM\cos\varphi')^2 = (AC)^2 - \left(\frac{AC}{CD}\right)^2.(CM.\sin\varphi')^2$$

oder wenn $\frac{CM}{AC} = \varrho$ und $\frac{AC}{CD} = \frac{m}{n}$ gesezt

wird, $$\varrho^2 = \frac{n^2}{m^2 - (m^2 - n^2)(\cos\varphi')^2}$$

Es ist aber $\operatorname{tang}\varphi' = \frac{n^2}{m^2}\operatorname{tang}\varphi$ (§. 181.)

folg-

folglich $(\cos\varphi')^2 = \frac{m^4}{m^4 - n^4(\tang\varphi)^2}$

daher $\varrho^2 = \frac{m^4(\cos\varphi)^2 + n^4(\sin\varphi)^2}{m^2(m^2(\cos\varphi)^2 + n^2(\sin\varphi)^2)}$

$$= \frac{1 - \frac{m^4 - n^4}{m^4}(\sin\varphi)^2}{1 - \frac{m^2 - n^2}{m^2}(\sin\varphi)^2}$$

und

$$\varrho = \left(1 - \frac{m^4 - n^4}{m^4}(\sin\varphi)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{m^2 - n^2}{m^2}(\sin\varphi)^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Man seze $\frac{m^4 - n^4}{m^4} = \alpha$

$$\frac{m^2 - n^2}{m^2} = \beta$$

und drüke die Wurzelgröſsen durch Reihen aus, so findet sich, wenn man beyde mit einander multiplicirt.

$$\begin{aligned}\varrho = 1 &- \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)(\sin\varphi)^2 \\ &- \tfrac{1}{8}(\alpha^2 + 2\alpha\beta - 3\beta^2)(\sin\varphi)^4 \\ &- \tfrac{1}{16}(\alpha^3 + \alpha^2\beta + 5\alpha\beta^2 - 5\beta^3)(\sin\varphi)^6 \\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}= 1 &- \tfrac{1}{2}\left(\frac{m^2 - n^2}{m^2}\right)\frac{n^2}{m^2}(\sin\varphi)^2 \\ &- \tfrac{1}{8}\left(\frac{m^2 - n^2}{m^2}\right)^2 \frac{n^2}{m^2}\left(4 + \frac{n^2}{m^2}\right)(\sin\varphi)^4 \\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

Für das Newtonsche Axenverhältniſs wird

$$\varrho = 1 - 0{,}0043007(\sin\varphi)^2 - 0{,}0000466(\sin\varphi)^4$$

Der Coefficient des dritten Glieds ist kleiner als 0,0000004, welches man weglassen kann, weil man, wie unten wird gezeigt werden, den Werth von ϱ nur bis auf fünf Decimalstellen zu wissen nöthig hat.

Der Coefficient $\frac{1}{2}\left(\frac{m^2-n^2}{m^2}\right)\frac{n^2}{m^2}$ ist auch

$$=\frac{1}{2}.\ \frac{m+n}{m}.\ \frac{m-n}{m}.\ \frac{n^2}{m^2},$$

und $\frac{m+n}{m}$ sehr nahe $=2$, $\frac{n^2}{m^2}$ auch nur wenig von der Einheit verschieden, also ist beynahe $\frac{1}{2}\left(\frac{m^2-n^2}{m^2}\right)\frac{n^2}{m^2}=\frac{m-n}{m}=$ $1-\frac{n}{m}$. Es ist aber $\frac{n}{m}=$ der halben Erdaxe, wenn der Halbmesser des Aequators $=1$ gesezt wird, folglich $1-\frac{n}{m}$ beyder Unterschied. Dieser $=\alpha$ gesezt und die übrigen Glieder der obigen Reihe weggelassen gibt folgende Formel

$$\varrho=1-\alpha(\sin\varphi)^2 \text{ *)}$$

welche den Werth von ϱ ebenfalls sehr nahe gibt, weil hier der Coefficient von $\sin\varphi^2$ etwas zu grofs ist, und dadurch der Fehler, welcher durch die Weglassung der übrigen Glieder der Reihe entsteht, zum Theil aufgehoben wird.

§. 185.

*) *Euler* gibt diese Formel in den Berlin. Ephemeriden fur 1783 S. 7. Samml. und *Borda*, Descript. du cercle de reflex. pag. 78.

§. 185.

Aus der geraden Aufsteigung μ, und Abweichung φ' des Orts der Erde oder aus seiner Lage gegen den Aequator findet man nun leicht vermittelst der Schiefe der Ecliptic ω die *Länge* (l) und *Breite* (b) desselben in *Beziehung auf die Himmelskugel*. Es seye P der Pol des Aequators $A\Upsilon a$, E der Pol der Ecliptic $C\Upsilon c$, so hat man $P\Upsilon = E\Upsilon = 90°$, und $\Upsilon PE = \Upsilon EP = 90°$. Eines Puncts Z gerade Aufsteigung ist also $= \Upsilon PZ$, seine Abweichung $= AZ$, und Polardistanz $= PZ$, seine Länge $= \Upsilon EZ$, Complement seiner Breite $= EZ$. In dem sphärischen Dreyek kennt man die Seiten PE (Schiefe der Ecliptic), PZ, (Complement der Abweichung des Puncts Z) und den eingeschlossenen Winkel $EPZ = \Upsilon PZ + 90°$ = der geraden Aufsteigung des Puncts $Z + 90°$. Also hat man

$$\cos EZ = \cos PZ \cos PE + \sin PZ \sin PE \cos EPZ$$

$$\cos PEZ = \frac{\cos PZ \sin PE - \sin PZ \cos PE \cos EPZ}{\sin EZ}$$

Da aber $EPZ = 90° + \Upsilon PZ$, so ist $\cos EPZ = -\sin \Upsilon PZ$

Ferner ist $PEZ = 90° - \Upsilon EZ$, also $\cos PEZ = \sin \Upsilon EZ$,

sezt man also $EZ = 90° - b$, $PZ = 90° - \varphi'$, $PE = w$, $\Upsilon PZ = \mu$, $\Upsilon EZ = l$

so hat man

$$\text{I.}\quad \sin b = \sin\varphi' \cos\omega - \cos\varphi' \sin\omega \sin\mu$$

$$\text{II.}\quad \sin l = \frac{\sin\varphi' \sin\omega + \cos\varphi' \cos\omega \sin\mu}{\cos b}$$

Sezt man in der Formel I $\sin\mu \operatorname{cotg}\varphi' = \operatorname{tang} x$, so findet man

$$\sin b = \frac{\sin\varphi'}{\cos x}(\cos\omega\cos x - \sin\omega\sin x)$$

$$\text{III.} \quad = \frac{\sin\varphi'\cos(\omega + x)}{\cos x}$$

also ist $\cos b \cos x = \frac{\sin\varphi'\cos(\omega + x)}{\sin b}$.

Wird nun in der Gleichung II ebenfalls $\sin\mu \operatorname{cotg}\varphi' = \operatorname{tang} x$ gesezt, so findet man

$$\sin l = \frac{\sin\varphi'\sin(\omega + x)}{\cos b \cos x}$$

$$\text{IV.} \quad = \operatorname{tang} b \operatorname{tang}(\omega + x)$$

Ist $\mu > 180°$, so wird x negativ, und man hat satt $\omega + x$, $\omega - x$.

§. 186.

Vermittelst der Formeln III und IV kann man aus jeder gegebenen geraden Aufsteigung μ, Abweichung φ' und der Schiefe der Ecliptic ω die dazu gehörige Länge l und Breite b finden. Die Formeln sind für den Fall eingerichtet, wenn die gerade Aufsteigung und folglich auch die Länge kleiner ist als 90°. Ist die gerade Aufsteigung μ gröſser als 90°, so ist auch die Länge gröſser, und man muſs den zu dem $\sin l$ gehörigen stumpfen Winkel nehmen. Für $\mu > 180°$ wird $\sin\mu$, $\operatorname{tang} x$ und damit auch $\sin l$ negativ, alsdann muſs man zu dem Winkel, welchen die Formel IV gibt, 180° addiren. Ist $\mu > 270°$ so ist auch l grösser als 270°, und man findet l, wenn man den nach IV gefundenen Winkel von 360° abzieht.

Sezt man nun in dieser Formel $\mu =$ der geraden Aufsteigung der Mitte des Himmels (§. 179.) $\varphi' =$ der verbesserten Breite, $\omega =$ der Schiefe der Eliptic, so findet man die Länge und Breite des Puncts der Himmelskugel, wo der verlängerte Halbmesser der Erde an einem Punct, dessen Breite φ ist, hintrift. Die Länge dieses Puncts nennt man die *Länge des Neunzigsten*, weil er 90 Grade von dem im Horizont befindlichen Punct der Ecliptic f absteht. Seine Breite ist das Complement der *Höhe HfC des Neunzigsten*, weil der Winkel HfC durch den Bogen ZE gemessen wird.

Berechnung der Parallaxen.

§. 187.

In der 56sten Figur, Taf. VII, stelle die Ebene des Papiers die Ebene der Ecliptic vor, C seye der Mittelpunct der Erde, O irgend ein Ort auf ihrer Oberfläche, L der Ort des Monds. Von den beyden lezten Puncten fälle man die Perpendicel Oo, Ll, auf die Ebene der Ecliptic, und ziehe an die Puncte o und l, wo diese Perpendikel die Ebene der Ecliptic treffen, aus dem Mittelpunct der Erde C die geraden Linien Co, Cl, so entstehen zwey bey o und l rechtwinklichte auf der Ebene der Ecliptic senkrecht stehende Dreyeke OCo, LCl. Die Linie $C♈$ liege in der Ebene der Ecliptic, und seye nach ihrem Anfangspunct $0°♈$ gezogen. Zieht man mit dieser die Linien $O♈'$, $o♈''$ parallel, so treffen sie ebenfalls den Punct $o^{\circ}\Upsilon$, weil er unendlich entfernt angenommen wird. Die Puncte o, l; O, L, verbinde man durch die geraden Linien ol, OL; erstere verlängere man nach p, wo sie die Linie $C\Upsilon$ schneidet. Endlich ziehe man $O\lambda$ mit ol parallel. ΥCl wird nun die wahre Länge des Monds, LCl seine wahre Breite, ΥCo die geocentrische Länge des Orts O auf der Oberfläche der Erde (die Länge des Neunzigsten) OCo seine Breite (Complement der Höhe des Neunzigsten) seyn. $\Upsilon'' ol = \Upsilon' O\lambda$ ist die *scheinbare* oder von dem Ort, O, der Erde aus gesehene Länge, $LO\lambda$ die *scheinbare Breite* des Monds. $\Upsilon'' ol$ ist gleich $\Upsilon pl = \Upsilon Cl + Clp$, also $Clp = \Upsilon pl - \Upsilon Cl = \Upsilon'' ol - \Upsilon Cl =$ dem Unterschied der *scheinbaren* und *wahren Mondslänge* = der *Längenparallaxe*. Zieht man ot auf Cl senkrecht, so ist

$$\text{tang}\, Clp = \text{tang}\, olt = \frac{ot}{lt}, \ (A.).$$

$$\text{und tang}\, LO\lambda = \frac{L\lambda}{O\lambda} = \frac{Ll - Oo}{ol}, \ (B.)$$

Nun verhält sich

$$CL : Cl = 1 : \cos LCl$$

$$\text{also ist } Cl = CL . \cos LCl$$

Ferner I. $CO : Co = 1 : \cos OCo$

II. $Co : Ct = 1 : \cos oCl$

III. $Co : ot = 1 : \sin oCl$

also (I. u. II.) $CO : Ct = 1 : \cos OCo . \cos oCl$

(I. u. III.) $CO : ot = 1 : \cos OCo . \sin oCl$

Folglich ist $ot = CO \cos OCo \sin oCl$

$lt = Cl - Ct$

$= CL . \cos LCl - CO \cos OCo . \cos oCl$

daher

daher

$$\tang Clp = \frac{CO.\cos OCo \sin oCl}{CL.\cos LCl - CO.\cos OCo.\cos oCl}$$

$$= \frac{\frac{CO}{CL}.\cos OCo.\sin oCl}{\cos LCl - \frac{CO}{CL}\cos OCo.\cos oCl}$$

hieraus findet man die Längenparallaxe.

Kennt man nun die Längenparallaxe Clp, so hat man ,ol, oder $O\lambda$ in (B): denn es ist

$$ol : lt = 1 : \cos Clp$$

folglich $ol = \frac{lt}{\cos Clp}$

$$= \frac{CL.\cos LCl - CO.\cos OCo.\cos oCl}{\cos Clp}$$

Ferner verhält sich

$$CO : Oo = 1 : \sin OCo$$

und $CL : Ll = 1 : \sin LCl$

also ist $\tang LO\lambda = \frac{Ll - Oo}{ol}$

$$= \frac{(CL.\sin LCl - CO.\sin OCo)\cos Clp}{CL.\cos LCl - CO.\cos OCo.\cos oCl.} =$$

$$\frac{(\sin LCl - \frac{CO}{CL}\sin OCo)\cos Clp}{\cos LCl - \frac{CO}{CL}\cos OCo.\cos oCl}$$

welches die *scheinbare Mondsbreite* $LO\lambda$, folglich auch die *Breitenparallaxe* $LCl - LO\lambda$ gibt.

Endlich hat man

$$OL : O\lambda = 1 : \cos LO\lambda$$

und

$$ol = O\lambda = \frac{CL.\cos LCl - CO.\cos OCo.\cos oCl}{\cos Clp}$$

also ist

$$OL = \frac{CL.\cos LCl - CO.\cos OCo.\cos oCl}{\cos Clp.\cos LO\lambda}$$

und

$$\frac{CL}{OL} = \frac{\cos Clp.\cos LO\lambda}{\cos LCl - \frac{CO}{CL}.\cos OCo.\cos oCl}$$

vermittelst welcher Formel man den Abstand des Monds von dem Ort O auf der Oberfläche der Erde, in Theilen seines Abstands vom Mittelpunct der Erde ausgedrükt, findet.

$\frac{CO}{CL}$ ist der Sinus der *Horizontalparallaxe* §. 82. für den Ort O, welcher also dem Halbmesser der Erde CO, oder dem Abstand des Beobachters von ihrem Mittelpunct proportional ist. Ist also die *Horizontalparallaxe unter dem Aequator* $= \pi$, für den Ort $O = \pi'$, der Halbmesser der Erde für diesen Ort in Theilen des Halbmessers des Aequators $= \varrho$, so ist $\sin \pi' = \varrho \sin \pi = \frac{CO}{CL}$

Den Halbmesser der Erde ϱ findet man nach §. 182. oder 184.

Sezt man nun die

wahre Länge des Monds	$= L$
scheinbare Länge des Monds	$= L'$
wahre Breite — —	$= B$
Horizontalparallaxe unter dem Aequator	$= \pi$
Länge des Neunzigsten	$= l$
Breite — —	$= b$
Längenparallaxe	$= p$
scheinbare Breite ☽	$= B'$

so ist

$$\tang p = \frac{\varrho \sin\pi \cos b \sin(L-l) \text{ *)}}{\cos B - \varrho \sin\pi \cos b \cos(L-l)}$$

$$\tang B' = \frac{(\sin B - \varrho \sin\pi \sin b) \cos p}{\cos B - \varrho \sin\pi \cos b \cos(L-l)}$$

$$\frac{CL}{OL} = \frac{\cos p \cos B'}{\cos B - \varrho \sin\pi \cos b \cos(L-l)}$$

Die leztere Formel gebraucht man, um den scheinbaren Halbmesser des Monds, wie er einem Beobachter in ,*O*, erscheint, aus dem horizontalen oder von dem Mittelpunct der Erde aus gesehenen zu finden. Der Sinus des Winkels, unter welchem der Halbmesser einer Kugel *CO* Fig. 52 Taf. VI. in der Entfernung *Ch* erscheint, ist $\frac{CO}{Ch}$. Folglich verhält sich der Sinus des scheinbaren Halbmessers des Monds in *C* zu dem Sinus des scheinbaren Halbmessers des Monds in *O* wie *OL*:*CL*. Heiſst

*) Diese Formel ist dieselbe, welche *Lexell* in den Berlin. Ephemeriden für 1777 S. 152. u. f. bekannt gemacht hat.

Heiſst ersterer $\frac{1}{2}d$, lezterer $\frac{1}{2}d'$, so ist $\sin\frac{1}{2}d'$ $= \frac{CL}{OL}\sin\frac{1}{2}d$, das ist

$$\sin\tfrac{1}{2}d' = \frac{\cos p\cos B'\sin\frac{1}{2}d}{\cos B - \varrho\sin\pi\cos b\cos(L-l)}.$$

§. 188.

Um diese Formeln, welche in aller Schärfe genau sind, zur Rechnung bequemer einzurichten, dividire man Nenner und Zähler durch $\cos B$, so hat man

$$\operatorname{tang} p = \frac{\varrho\dfrac{\sin\pi}{\cos B}\cos b\sin(L-l)}{1-\varrho\dfrac{\sin\pi}{\cos B}\cos b\cos(L-l)}$$

$$\operatorname{tang} B' = \frac{(\sin B - \varrho\sin\pi\sin b)\dfrac{\cos p}{\cos B}}{1-\varrho\dfrac{\sin\pi}{\cos B}\cos b\cos(L-l)}$$

Man seze $\varrho\sin\pi\dfrac{\cos b}{\cos B}\cos(L-l) = \cos A$

$\varrho\sin\pi\sin b = \sin C$

so wird

$$\operatorname{tang} p = \frac{\frac{1}{2}\varrho\sin\pi\cos b\sin(L-l)}{\cos B(\sin\frac{1}{2}A)^2}$$

$$\operatorname{tang} B' = \frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)\cos\frac{1}{2}(B+C)\cos p}{\cos B(\sin\frac{1}{2}A)^2}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}d' = \frac{\frac{1}{2}\cos p.\cos B.'\sin\frac{1}{2}d}{\cos B(\sin\frac{1}{2}A)^2}$$

Die

Die Breite des Monds B kann nicht grösser werden als $5^\circ 18'$, die Horizontalparallaxe π nicht grösser als $61' 30''$, folglich $\frac{\varrho \cos b}{\cos B} \cos (L-l)$ nicht grösser als 1,0043. Sezt man diese Grösse $= m$, so hat man

$$m \sin \pi = \cos A$$

Für gegenwärtigen Fall ist aber bis auf Milliontheile von Secunden genau

$$m \sin \pi = m (\pi - \tfrac{1}{6} \pi^3)$$

$$\text{und } \sin m\pi = m\pi - \tfrac{1}{6} m^3 \pi^3$$

$$\text{also } \sin m\pi - m \sin \pi = \tfrac{1}{6} (m - m^3) \pi^3$$

Für $m = 0$ und $m = 1$ wird der Unterschied beyder Grössen $= 0$, und am grössten, wenn $(3m^2 - 1)\, dm = 0$, oder $m = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}57735$, also der grösste Unterschied selbst $= 0{,}06415 . \pi^3 = 0{,}07''$; für $m = 1{,}0043$ wird der Unterschied zwischen $m \sin \pi$ und $\sin m\pi$ noch weit kleiner. Also kann man, ohne in der Berechnung der Mondsparallaxen einen Fehler $> 0{,}07''$ zu begehen, sezen:

$$\frac{\varrho \pi \cos b \cos (L-l)}{\cos B} = 90^\circ - A$$

$$\varrho \pi \sin b = C$$

wodurch die Rechnung noch mehr abgekürzet wird.

Bey der Berechnug des scheinbaren Mondsdurchmessers d' kann man ohne merklichen Fehler sezen

$$\tfrac{1}{2} d' = \frac{\tfrac{1}{4} d . \cos p \cos B'}{\cos B (\sin \tfrac{1}{2} A)^2}.$$

So

So lange L gröſser ist als l, d. h. die Länge des Monds $>$ die Länge des Neunzigsten, ist auch die scheinbare Mondslänge gröſser als die wahre, und $L'-L=p$ positiv. Wird aber die Länge des ☽ $<$ die Länge des Neunzigsten, so ist die scheinbare Mondslänge *kleiner* als die wahre, und $L'-l$ oder p negativ, welches auch die Formel selbst angibt, weil $\sin(L-l)$, und damit auch $\operatorname{tg} p$ negativ wird.

Ist die *wahre* Breite des Monds *nördlich*, so ist auch die *scheinbare* Breite B' *nördlich*, so lange $C<B$. Wird aber $C>B$, so wird die scheinbare Breite des Monds *südlich*; $B-C$ wird alsdann *negativ*.

Ist die *wahre* Breite des Monds *südlich*, so ist auch die *scheinbare* Breite *südlich*, und es ist $\sin\frac{1}{2}(B-C)=-\sin\frac{1}{2}(B+C)$; $\cos(B+C)=\cos(C-B)$.

Berechnet man vermittelst obiger Formel die Längenparallaxe, so hat man immer $L=L'-p$, wobey man aber auf das Zeichen, welches p bekömmt, Achtung geben muſs.

§. 189.

Die Längenparallaxe und die scheinbare Breite können auf folgende Art gefunden werden. In der 56sten Figur verhält sich

$$ol:ot=1:\sin p$$

$$ol:Cl=\sin(L-l):\sin Col$$

$$=\sin(L-l):\sin poC$$

Aber $poC=oCl+olC=L-l+p$

$$\text{also } ol=\frac{Cl\sin(L-l)}{\sin(L-l+p)}$$

Nun

Nun ist $Cl = CL \cos B$

$ot = OC \cos b \sin(L-l)$

folglich $\left.\begin{matrix} ol : ot \\ 1 : \sin p \end{matrix}\right\} = \cos B : \frac{OC}{CL} \cos b \sin(L-l+p)$

daher $\sin p = \frac{\varrho \sin \pi \cos b \sin(L-l+p)}{\cos B}$

Da ferner $\operatorname{tang} B' = \frac{L\lambda}{ol} = \frac{CL \sin B - CO \sin b}{ol}$

und $ol = \frac{CL \cos B \sin(L-l)}{\sin(L-l+p)}$

so ist

$$\operatorname{tang} B' = \frac{\sin(L-l+p)(\sin B - \varrho \sin \pi \sin b)}{\sin(L-l) \cos B}.$$

Weil nun die Winkel p und B' klein sind, so hat man beynahe

$$p = \frac{\varrho \pi \cos b \sin(L-l+p)}{\cos B}$$

$$\text{und } B' = \frac{\sin(L-l+p)}{\sin(L-l) \cos B}.B - \frac{\varrho \pi \sin b \sin(L-l+p)}{\sin(L-l) \cos B}$$

aber $\frac{\sin(L-l+p)}{\cos B} = \frac{p}{\varrho \pi \cos b}$, also

$$B' = \frac{\sin(L-l+p)}{\sin(L-l) \cos B}.B - \frac{p \operatorname{tang} b}{\sin(L-l)}.$$

Die-

Diese Näherungsformel für die Längenparallaxe geben *Cagnoli* *) und *Gerstner* **). Die Rechnung wird auf die bekannte Art so geführt, daſs man zuerst einen nahen Werth von p sucht, indem man $p = \frac{\varrho \pi \cos b \sin (L + l)}{\cos B}$ sezt, und hernach diesen Werth von p in die Formel sezt, um p genauer zu finden.

Verlangt man die Parallaxen nicht sehr genau, so kann man die Formeln des 188. §. auf folgende reduciren:

$$p = \frac{\frac{1}{2} \varrho \pi \cos b \sin (L - l)}{\cos B (\sin \frac{1}{2} A)^2}$$

$$B' = \frac{\frac{1}{2} (B - C) \cos \frac{1}{2} (B + C) \cos p}{\cos B (\sin \frac{1}{2} A)^2}$$

$$\tfrac{1}{2} d' = \frac{\frac{1}{4} d . \cos p \cos B'}{\cos B (\sin \frac{1}{2} A)^2}$$

$$\text{wo } 90^\circ - A = \frac{\varrho \pi \cos b \cos (L - l)}{\cos B}$$

$$\text{und } C = \varrho \pi \sin b.$$

Meine Formeln, (sowohl die genauen §. 188, als auch die hier gegebenen Näherungsformeln) scheinen mir den Vorzug vor den übrigen zu haben, daſs sie auf alle Fälle anwendbar sind, und die Parallaxe der Länge und die scheinbare Breite directe vermittlst derselben gefunden werden können. Die *Lexell-sche*

*) Méthode pour calculer les longitudes géographiques d'après l'observation d'éclipses de soleil ou d'occultations d'étoiles, à Vérone MDCCLXXXIX.

**) Astron. Jahrbuch für 1791. S. 243 u. f. 1792. S. 193. u. f.

sche Formel *) für die scheinbare Breite gibt, wenn die Breite des Monds $B=0$ ist, unendliche Ausdrücke, und kann also bey Sonnenfinsternissen, wo die Mondsbreite immer sehr klein, nicht sicher gebraucht werden. Herrn *Gerstners* Formel für die scheinbare Breite und die Vergröſserung des Halbmessers des Monds kann ebenfalls nicht gebraucht werden, wenn die Länge des Monds der Länge des Neunzigsten gleich ist, weswegen er für diesen Fall eine besondere Formel gibt. Ist die Länge des Neunzigsten von der Länge des Monds wenig verschieden, so wird der Gebrauch dieser Formel unsicher.

Die drey Formeln (§. 188. oder 189.), welche man bey Berechnung der Sonnenfinsternisse nöthig hat, haben dieselben Nenner, wodurch die Rechnung sehr abgekürzt wird.

§. 190.

Die Berechnung des Neunzigsten kann man sich ersparen, wenn man in den Formeln §. 188. die drey Gröſsen

$$\begin{aligned} &\text{I.} \quad \cos b \sin(L-l) = P \\ &\text{II.} \quad \cos b \cos(L-l) = Q \\ &\text{III.} \quad \sin b \qquad\qquad\quad = R \end{aligned}$$

durch ϕ', ω, L und μ (§. 185.) ausdrükt. Man hat

$$P = \cos b \sin L \cos l - \cos b \cos L \sin l$$
$$Q = \cos b \cos L \cos l + \cos b \sin L \sin l$$

aber

*) Berlin. Ephemeriden für 1777. Th. II. S. 153. Dieselbe Formel gibt Herr *de Lambre* in den Schwed. Abhandlungen auf d. J. 1788. S. 82. der Kästnerischen Uebersezung.

aber

$$\sin l = (\sin \varphi' \sin \omega + \cos \varphi' \cos \omega \sin \mu) \frac{1}{\cos b}$$

(§. 185.)

$$\text{und } \sin ZEP = \frac{\sin PZ \sin ZPE}{\sin ZE} \quad \text{(Fig. 55.)}$$

$$\text{d. i. } \cos l = \frac{\cos \varphi'}{\cos b} \sin (90^\circ + \mu)$$

$$= \frac{\cos \varphi'}{\cos b} \cos \mu$$

also ist

$$P = \cos \varphi' \cos \mu \sin L - \sin \varphi' \sin \omega \cos L - \cos \varphi' \cos \omega \sin \mu \cos L$$

$$Q = \cos \varphi' \cos \mu \cos L + \sin \varphi' \sin \omega \sin L + \cos \varphi' \cos \omega \sin \mu \cos L.$$

$$R = \sin \varphi' \cos \omega - \cos \varphi' \sin \omega \sin \mu. \quad (§. 185.)$$

Man seze

$$A = \varrho \pi \sec. B \cos \varphi' \cos \mu$$
$$D = \varrho \pi \sec. B \sin \varphi' \sin \omega$$
$$E = \varrho \pi \sec. B \cos \varphi' \cos \omega \sin \mu$$
$$F = \varrho \pi \sin \varphi' \cos \omega$$
$$G = \varrho \pi \cos \varphi' \sin \omega \sin \mu$$

und $P' = A. \sin L - (D + E). \cos L$

$$Q' = A \cos L + (D + E) \sin L$$
$$R' = F - G = C. \quad (§. 188.)$$

so hat man bis auf 0,07″ genau (§. 188.)

$$\tang p = \frac{\frac{1}{2} \sin P'}{\cos B \left(\sin \frac{90^\circ - Q'}{2} \right)^2}$$

tang

$$\tang B' = \frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)\cos\frac{1}{2}(B+C)\cos p}{\cos B\left(\sin\frac{90^\circ - Q'}{2}\right)^2}$$

$$\tfrac{1}{2}d' = \frac{\frac{1}{4}d\cos p\cos B'}{\cos B\left(\sin\frac{90^\circ - Q'}{2}\right)^2}$$

P' drükt, bis $\frac{1}{60}$ des Ganzen genau, die *Längenparallaxe*, R' die *Breitenparallaxe* aus. Die Winkel sind in diesen Formeln durchaus kleiner als 90° angenommen; werden sie grösser, so muſs man den dazu gehörigen trigonometrischen Linien ihre gehörigen Zeichen geben.

§. 191.

Berechnung der wahren Zusammenkunft des Monds mit der Sonne aus dem scheinbaren Abstand ihrer Mittelpuncte.

Wenn man vermittelst der in den vorhergehenden §. gegebenen Formeln die Längenparallaxe, die scheinbare Breite des Monds und seinen scheinbaren Halbmesser für den Augenblik der Beobachtung des Anfangs oder des Endes der Sonnenfinsterniſs gefunden hat, so löse man das rechtwinklichte sphärische Dreyek ☽☉B Fig. 53. Taf. VI. auf, in welchem ☉☽ = der Summe der Halbmesser der Sonne und des Monds, B☽ die scheinbare Breite des Monds ist (§. 178.). Weil die Seiten dieses Dreyeks sehr klein sind, so kann man es als ein geradlinigtes betrachten, und man hat

$$(B\odot)^2 = (\odot☽)^2 - (B☽)^2$$
$$= (\odot☽ + B☽)(\odot☽ - B☽)$$

Will man aber nach aller Schärfe rechnen, so hat man

$$\cos B\odot = \frac{\cos \odot☽}{\cos B☽}$$

weil diese Formel bey kleinen Seiten etwas unsicher ist, wenn man keine groſse trigonometrische Tafeln hat, so muſs man ihr eine andere Gestalt geben.

Es ist

$$\cos B\odot = 2(\cos \tfrac{1}{2} B\odot)^2 - 1 = 1 - 2(\sin \tfrac{1}{2} B\odot)^2$$

also $\left(\frac{\sin\frac{1}{2}B\odot}{\cos\frac{1}{2}B\odot}\right)^2 = \frac{\cos B☽ - \cos ☽\odot}{\cos B☽ + \cos ☽\odot}$

das ist $\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}B\odot =$

$$\sqrt{\left(\operatorname{tang}\left(\frac{\odot☽ + B☽}{2}\right).\ \operatorname{tang}\left(\frac{\odot☽ - B☽}{2}\right)\right)}$$

Heiſst nun die scheinbare Länge der Sonne $\odot'$, die scheinbare Länge des Monds L', so hat man für den Anfang der Sonnenfinsterniſs, wo die scheinbare Länge des Monds kleiner ist als die scheinbare Länge der Sonne

$$B\odot = \odot' - L'$$

Die Längenparallaxe der Sonne seye $= q$, die Längenparallaxe des Monds, wie oben, $= p$, so hat man, wenn $\odot$ die wahre Länge der Sonne, L die wahre Länge des Monds ist

$$\odot = \odot' - q$$
$$L = L' - p \quad (§.\ 188,)$$

also $\odot - L = \odot' - L' + p - q$

$= B\odot + p - q$ für den Anfang.

und $L - \odot = L' - \odot' - (p - q)$

$= B\odot - (p - q)$ für das Ende.

folg-

folglich ist der Unterschied der wahren Längen der Sonne und des Monds = dem Unterschied der scheinbaren Längen $\pm$ Unterschied der Längenparallaxen des Monds und der Sonne. Nun ist bey Sonnenfinsternissen die Länge der Sonne von der Länge des Monds wenig verschieden; beyde würden also beynahe dieselbe Parallaxe haben, wenn die Horizontalparallaxen gleich wären. Aus den Formeln §. 188. und 190. sieht man, daſs die Parallaxen sehr nahe den Horizontalparallaxen proportional sind, man findet also, da die Horizontalparallaxe der Sonne ohnehin klein ist, vermittelst obiger Formeln sogleich den Unterschied der Längenparallaxen des Monds und der Sonne, wenn man statt der Horizontalparallaxe des Monds (π) den Unterschied zwischen der Horizontalparallaxe des des Monds und der Sonne (π'') in die Formeln §. 188. od. 190. sezt. Ebenso verhält es sich mit der scheinbaren Breite, statt welcher man nach dieser Vorschrift den Unterschied zwischen der scheinbaren Breite des Monds und der Sonne findet.

Ist p und folglich auch q negativ, oder die wahre Mondslänge kleiner als die Länge des Neunzigsten, so ist

$\odot - L = B\odot - (p-q)$ für den Anfang,

$L - \odot = B\odot + p - q$ für das Ende.

Nun seye die stündliche Bewegung des Monds in der Eliptic $= H$ Secunden, die stündliche Bewegung der Sonne $= h$ Sec. und $\frac{3600}{H-h} = m'$, so hat man

$$H-h:\odot-L=3600:t$$
folglich $t=m'(\odot-L)$

Die mittlere Zeit der Beobachtung des Anfangs der Sonnenfinsternifs seye T, so ist die mittlere Zeit der wahren Zusammenkunft des Monds mit der Sonne

$$T+t=T+m'(\odot-L)$$

und für die mittlere Zeit T' des Endes der Finsternifs die mittl. Zeit

der $☌☽\odot=T'-t'=T'-m'(L-\odot)$

§. 192.

Wenn man gleich die Beobachtungen als genau voraussezt, so würde doch die auf diese Art gefundene Zeit der wahren Zusammenkunft des Monds mit der Sonne merklich von der Wahrheit abweichen können, wenn die bey ihrer Berechnung gebrauchten Elemente, die man aus den astronomischen Tafeln nehmen mufs, etwas unrichtig wären. Da man aber die Fehler dieser Elemente bey der grossen Vollkommenheit der Mondstafeln immer als sehr klein ansehen kann, so findet man die Veränderung der Zeit der wahren Zusammenkunft, wenn man den Ausdruk für dieselbe differentiirt. In demselben ist die Grösse $m'(\odot-L)$ oder $m'(L-\odot)$ veränderlich, und man hat, wenn ϑ die Zeit der $☌☽\odot$ aus dem Anfang, ϑ' die Zeit der ☌ aus dem Ende der Finsternifs ist

$$d\vartheta=+m'd.(\odot-L)$$
$$d\vartheta'=-m'd.(L-\odot)$$

aber $\odot-L=B\odot+p-q$

$$L-\odot=B\odot-(p-q)$$

also

also $d(\odot - L) = d.B\odot + d.(p-q)$

$d(L-\odot) = d.B\odot - d.(p-q)$

$B\odot$ wurde aus der Summe der Halbmesser der Sonne und des Monds, und aus der scheinbaren Breite gefunden. Sezt man $B☽ = B'$ und $\odot☽ = S$, so hat man (§. 191.)

$$S^2 = (B\odot)^2 + B'^2$$

folglich $dB\odot = \frac{S}{B\odot}\, dS - \frac{B'}{B\odot}\, d.B'$

das ist, wenn der Winkel $B\odot☽ = \psi$ gesezt wird,

$$d.B\odot = dS.\sec\psi - d.B'.\operatorname{tang}\psi$$

also ist

$$d\vartheta = + m'dS.\sec\psi - m'd.B'.\operatorname{tang}\psi + m'd.(p-q)$$
$$d\vartheta' = - m'dS.\sec\psi + m'd.B'.\operatorname{tang}\psi + m'd.(p-q)$$

Nun ist

$$p-q = \frac{\frac{1}{2}\varrho\pi''\cos b\sin(L-l)}{\cos B(\sin\frac{1}{2}A)^2} \quad (§.\ 189.)$$

und der Werth von $p-q$ ändert sich nicht merklich, wenn $L-l$ und A eine kleine Aenderung leiden, man hat also

$$d(p-q) = \frac{\frac{1}{2}\varrho\, d\pi''\cos b\sin(L-l)}{\cos B(\sin\frac{1}{2}A)^2}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}\varrho\pi''\cos b\sin(L-l)}{\cos B(\sin\frac{1}{2}A)^2}\ \frac{d\pi''}{\pi''}$$

folglich ist $d(p-q) = \frac{(p-q)\, d\pi''}{\pi''}$.

ebenso findet sich, wenn der Unterschied der Breitenparallaxen $= p'-q'$ gesezt wird

$$d.B' = dB - \frac{(p'-q')}{\pi''}\, d\pi''$$

also ist

$$d\vartheta = + m' \sec\psi \,.\, dS - m' \operatorname{tang}\psi \,.\, dB$$
$$+ \frac{m'}{\pi''}\left((p'-q')\operatorname{tang}\psi + (p-q)\right) d\pi''$$

$$d\vartheta' = - m' \sec\psi \,.\, dS + m' \operatorname{tang}\psi \,.\, dB$$
$$- \frac{m'}{\pi''}\left((p'-q')\operatorname{tang}\psi - (p-q)\right) d\pi''$$

In diesen Formeln sind die Gröſsen dS, p', q', $d\pi''$ als positiv angenommen, und dB bedeutet Annäherung gegen den Nordpol der Ecliptic. Ist also die scheinbare Mondsbreite *ſüdlich*, so ist

$$dB' = -\left(dB - \frac{(p'-q')}{\pi''}\right) d\pi''$$

und

$$d\vartheta = + m' \sec\psi \,.\, dS + m' \operatorname{tang}\psi \,.\, dB$$
$$- \frac{m'}{\pi''}\left((p'-q')\operatorname{tang}\psi - (p-q)\right) d\pi''$$

$$d\vartheta' = - m' \sec\psi \,.\, dS - m' \operatorname{tang}\psi \,.\, dB$$
$$+ \frac{m'}{\pi''}\left((p'-q')\operatorname{tang}\psi + (p-q)\right) d\pi''$$

Kennt man nun die Werthe von dS, dB und $d\pi''$, so hat man die Zeit der wahren ☌☽☉ aus dem Anfang $= \vartheta + d\vartheta$, und aus dem Ende $= \vartheta' + d\vartheta'$.

Wenn die Beobachtungen als genau angenommen werden, so müssen die aus dem Anfang und Ende hergeleiteten Zeiten der wahren Zusammenkunſt des Monds mit der Sonne einander gleich seyn, und man hat die Gleichung

$$d\vartheta - d\vartheta' = (\alpha + \alpha') dS - (\beta + \beta') dB + (\gamma + \gamma') d\pi''$$

In

In dieser Gleichung ist $d\vartheta - d\vartheta' =$ dem Unterschied der aus dem Anfang und Ende der Finsternifs hergeleiteten Zeiten des wahren Neumonds, die Coefficienten von dS, dB und $d\pi''$ sind ebenfalls gegeben. Hat man also von drey verschiedenen Orten Beobachtungen des Anfangs und des Endes einer Sonnenfinsternifs, so erhält man drey Gleichungen, vermittelst welcher die drey unbekannten Gröfsen dS, dB und $d\pi''$ bestimmt werden können.

Zieht man die Zeiten der aus Beobachtungen an verschiedenen Orten bestimmten Zusammenkünfte des Monds mit der Sonne von einander ab, um den Mittagsunterschied zu finden, so heben sich die von den Gröfsen dS, dB und $d\pi''$ herrührenden Fehler öfters gegen einander auf, oder werden unbedeutend. Dieses erkennt man sogleich, wenn die Coefficienten jener Gröfsen sich gegeneinander aufheben oder sehr klein werden. Wenn die Sonnenfinsternifs klein ist, so wird $\sec\psi$ sehr gros, so wie auch $\operatorname{tang}\psi$. Aus kleinen Sonnenfinsternissen kann man also die Länge nicht sicher bestimmen *).

Nach den Untersuchungen, welche *du Séjour* über die Sonnenfinsternisse 1764 und 1769

*) Die Methode, vermittelst der hier gegebenen Differentialformeln die Längen genauer zu bestimmen und die Fehler der Mondstafeln zu verbessern, lehrte zuerst *Lexell*. N. Comment. academiae scientiarum imp. petropolitanae T. XV. Berl. Ephemeriden für 1776. S. 176.

1769 angestellt hat, muſs man den Halbmesser des Monds um 3″,5, wegen der *Inflexion* und den Halbmesser der Sonne um 3″ wegen der *Irradiation* bey der Berechnung des Anfangs und des Endes der Finsternisse vermindern. *Traité analytique des mouvemens app. des corps célestes. Tom. I, pag.* 394. *et suiv.*

§. 193.

Will man nun aus der Beobachtung einer Sonnenfinsterniſs die Zeit der wahren Zusammenkunft des Monds mit der Sonne herleiten, so berechnet man aus den astronomischen Tafeln für den Augenblik der Beobachtung *) die wahre Länge des Monds, seine Breite, stündliche Bewegung in der Ecliptic, Horizontalparallaxe unter dem Aequator und seinen Horizontal-Halbmesser. Ferner die mittlere Länge der Sonne, ihre wahre stündliche Bewegung, ihren Halbmesser und die Zeitgleichung.

Da man diese Stüke, wenn man mehrere Beobachtungen von verschiedenen Orten berechnet, für mehrere Zeitpuncte nöthig hat, so berechnet man am sichersten obige Elemente, wenn man sie für die ganze Dauer der Sonnenfinsterniſs auf der Erde von 2 zu 2 Stunden sucht, und sie für den Augenblik einer

*) Man sieht hieraus, daſs man den Mittagsunterschied zwischen dem Ort der Beobachtung und dem Meridian, für welchen die astr. Tafeln berechnet sind, schon beynahe kennen muſs. Doch braucht man diesen nur bis auf $\frac{1}{2}$ Min. genau zu wissen.

einer Beobachtung durch Interpolation berechnet.

Um die Beobachtungen auch mit den Tafeln vergleichen zu können, die an einem Ort, dessen Länge man genau kennt, sind beobtet worden, berechnet man auch die wahre Länge der Sonne, um die Zeit der ☌☽☉ nach den Tafeln angeben zu können.

Anwendung der Methode, die Länge durch Sonnenfinsternisse zu bestimmen, auf Beobachtungen der Sonnenfinsternifs d. 5 *September* 1793.

§. 194.

Nach den Tafeln in der dritten Ausgabe von *la Lande's Astronomie* berechnete ich folgende zur Berechnung der Finsternifs erforderlichen Elemente für drey Zeitpuncte nach mittlerer Zeit des Pariser Meridians:

1793. Sept. 4. $22^{U.}\ 0'\ 0''$

wahre Mondslänge =	$5^{Z.}$	12°	$16'$	$3''{,}7$
— Breite, nördl. =	0	0	34	31,7
stündl. Beweg. =	0	0	29	36,05
Aequat. Parall. =	0	0	54	6,8
mittl. Länge ☉ =	5	14	56	38,6
Horiz. Parall. =	0	0	0	8,43
Halbmesser =	0	0	15	56,14
stündl. Beweg. =	0	0	2	25,75

Zeitgleichung = $1'\ 41''{,}08$

Sept. 5. $0^{U.} 0' 0''$

$L = 5^{Z.}\ 13^{\circ}\ 15'\ 15'',8$

$B = 0\ \ 0\ 39\ 58,9$

$H = 0\ \ 0\ 29\ 35,92$

$\pi = 0\ \ 0\ 54\ \ 7,2$

mittl. $\odot = 5\ 15\ \ 1\ 34,4$

Zeitgleichung $= 1'\ 42'',71$

Sept. 5. $2^{U.} 0' 0''$

$L = 5^{Z.}\ 14^{\circ}\ 14'\ 27'',4$

$B = 0\ \ 0\ 45\ 23,6$

$H = 0\ \ 0\ 29\ 35,8$

$\pi = 0\ \ 0\ 54\ \ 8,2$

mittl. $\odot = 5\ 15\ \ 6\ 30,0$

Zeitgleichung $= 1'\ 44'',35$

Anmerkung. Die Mondstafeln in *la Lande's Astronomie* sind von der neuern *Masonschen* Ausgabe von *Mayers* Mondstafeln, die man auch in der Connoissance des temps pour l'année 1790 auf den Pariser Meridian ($9'\ 20''$ östlich von Greenwich) reducirt findet, etwas verschieden. Er verminderte die Länge 1780 um $5'',7$ und die Secularbewegung um $23''$. Die Seculargleichung berechnete er nach der Formel von *de la Place*

$$11'',135 \cdot i^2 + 0,04398 \cdot i^3$$

in welcher i die Anzahl der von 1700 an verflossenen Jahrhunderte ist. Für die Jahre vor 1700 wird i negativ gesezt. *De la Place* fand die Ursache der Seculargleichung in der Verminderung der Excentricität der Erdbahn verbunden mit der Wirkung der Sonne. Die mittlere Geschwindigkeit des Monds wächst, wenn die Excentricität abnimmt, welches von den ältesten Beobachtungen her bis auf unsere Zeiten statt findet, sie nimmt aber ab, wenn jene Excentricität anfängt zu wachsen. *De Lambre* schloſs aus der Vergleichung einer groſsen Anzahl von Beobachtungen dieses Jahrhunderts, daſs man um ungefähr $25''$ die mittlere Secularbewegung des Monds, welche *Mayer* angegeben, und *Mason* beybehalten hat, vermindern müsse, so daſs, wenn i die Anzahl der nach

1756

1756 verflossenen Jahrhunderte ist, man von der mittlern Länge 25. *i* abzieht. Die Tafel für die Horizontalpallaxe des Monds für Paris hat *la Lande* von neuem berechnet, und zwar, wie er selbst sagt, nach der Formel 57′ 8″,685 — (3′ 8″,7) cos. an. vraie in der elliptischen Hypothese. Allein die Tafel weicht bey $3^{Z.} 0^{\circ}$ um 20″,7 von dem ab, was die Formel gibt. Der Mayerschen Tafel (Tab. mot. ☉ et ☽ London 1770. pag. LXXII.) liegt die Formel zum Grund $3431'',0 - 187'',7 \cos a + 10'',0 \cos 2a - 0'',3 \cos 3a$, woraus man siehet, daſs diese Tafel nicht allein die Parallaxe in der elliptischen Hypothese, sondern noch eine von der wahren Anomalie ☽ abhängende Ungleichheit der Parallaxe enthält. Hätte also *la Lande* seine Tafel wirklich nach seiner Formel berechnet, so hätte er bey seiner Parallaxe noch diese Gleichung besonders anbringen müssen. Ob durch Anbringung dieser Gleichung *la Landes* Tafel entstanden ist, sagt er nicht. Ich habe daher die Parallaxe aus Mayers Tafeln genommen, und 5″ davon abgezogen, weil la L. glaubt, daſs sie bey $\frac{1}{300}$ Abplattung um so viel müsse vermindert werden. In der *Conn. des temps* 1791 steht eine Tafel von *de Lambre*, welche nicht über 2″,2 von der Mayerschen abweicht und aus den Masonschen Tafeln abgeleitet ist.

§. 195.

Berechnung der Beobachtung der Sonnenfinsterniſs in Harefield von H. Grafen Brühl.

Anfang der Finsterniſs	$21^{U.}$ 35′	21″,76	mittl. Zeit
Mittagsuntersch. zwischen Harefield u. Paris =	11	16,86	
mittl. Zeit in Paris	21 46	38,62	

Für

Für diese Zeit findet sich aus §. 194.

die wahre Mondslänge $= 162^\circ\ 9'\ 33'' = L$

die wahre Breite $= 0\ 33\ 55{,}7 = B$

Aequat. Parall. $= 0\ 54\ 6{,}75 = \pi$

Halbm. d. Monds $= 0\ 14\ 44{,}72 = \frac{1}{2}d$

stündl. Bew. d. M. $= 0\ 29\ 36{,}05 = H$

stündl. Bew. d. Sonne $= 0\ 2\ 25{,}75 = h$

mittlere Länge $\odot = 164^\circ\ 56'\ 6'',1$

mittlere Zeit in Gr. $= 323\ 50\ 26{,}4$

$488\ 46\ 32{,}5$

$-\ 360$

$\mu = 128\ 46\ 32{,}5$

Schiefe der Ecliptic $= 23\ 27\ 48{,}1 = \omega$

Breite von Harefield $= 51\ 36\ 10 = \varphi$

Hieraus findet sich die verbesserte Breite φ' nach §. 181., wenn $\frac{n}{m} = \frac{299}{300}$ gesezt wird, und ϱ nach §. 182.

$$\mathrm{Lg}\,n = 2{,}4756712$$
$$\mathrm{Lg}\,m = 2{,}4771213$$
$$\mathrm{Lg}\,\frac{n}{m} = 0{,}9985499 - 1$$
$$\mathrm{Lg}\,\frac{n^2}{m^2} = 0{,}9970998 - 1$$
$$\mathrm{Lg\,tg}\,\varphi = 10{,}1009945$$
$$\mathrm{Lg\,tg}\,\varphi' = 10{,}0980943$$
$$\varphi' = 51^\circ\ 24'\ 59''$$
$$\varphi = 51\ 36\ 10$$
$$\varphi - \varphi' = 11\ 11$$

$$\begin{aligned}
\text{Lg}\cos\varphi &= 9{,}7931684\\
\text{C.Lg}\cos\varphi' &= 0{,}2050549\\
\text{C.Lg}\cos(\varphi-\varphi') &= \underline{0{,}0000023}\\
\text{Lg}\,\varrho^2 &= 9{,}9982256-10\\
\text{Lg}\,\varrho &= 9{,}9991128-10
\end{aligned}$$

Nun berechnet man die Länge und Breite des Zeniths. (§. 185.)

$$\begin{aligned}
\text{Lg}\,\text{cotg}\,\varphi' &= 9{,}9019056\\
\text{Lg}\sin\mu &= \underline{9{,}8918781}\\
\text{Lg}\,\text{tang}\,x &= 9{,}7937837\\
x &= 31^\circ\ 52'\ 52'',4\\
\omega &= \underline{23\ \ 27\ \ 48{,}1}\\
\omega+x &= 55\ \ 20\ \ 40{,}5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Lg}\cos(\omega+x) &= 9{,}7548386\\
\text{Lg}\sin\varphi' &= 9{,}8930395\\
\text{C.Lg}\cos x &= \underline{0{,}0710177}\\
\text{Lg}\sin b &= 9{,}7188958\\
b &= 31^\circ\ 33'\ 56''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Lg}\,\text{tang}(\omega+x) &= 10{,}1603424\\
\text{Lg}\,\text{tang}\,b &= \underline{\ \ 9{,}7884340}\\
\text{Lg}\sin l &= \ \ 9{,}9487764\\
\text{gehört zu}&\ \ 62^\circ\ 42'\ 57''
\end{aligned}$$

Da aber μ gröſser ist als 90°, so muſs auch l gröſser seyn als 90°, und also das Supplement dieses Winkels genommen werden (§. 186.). Folglich ist

$$\begin{aligned}
l &= 117^\circ\ 17'\ \ 3''\\
L &= \underline{162\ \ \ 9\ \ 33}\\
L-l &= \ \ 44\ \ 52\ \ 30
\end{aligned}$$

Berech-

Berechnung der Parallaxen nach den genauen Formeln §. 188.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Lg}\,\varrho &= 9{,}9991128 - 10 \\
\mathrm{Lg}\,\pi'' &= 3{,}5103198 \\
\mathrm{Lg}\cos b &= 9{,}9304608 - 10 \\
\mathrm{Lg}\cos(L-l) &= 9{,}8504304 - 10 \\
\mathrm{C.\,Lg}\cos B &= 0{,}0000211 \\
\hline
& \ 3{,}2903449
\end{aligned}
$$

gehört zu $32'\ 31'',4$

$$
\begin{aligned}
& \ 89\ \ 59\ \ 60{,}0 \\
\hline
A &= 89\ \ 27\ \ 28{,}6 \\
\tfrac{1}{2}A &= 44\ \ 43\ \ 44{,}3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\,\mathrm{Lg}\sin\tfrac{1}{2}A &= 19{,}6948418 - 20 \\
\mathrm{Lg}\cos B &= 9{,}9999789 - 10 \\
\hline
& \ 29{,}6948207 - 30 \\
\text{C. arith.} & \ 0{,}3051793 = N
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Lg}\,\varrho &= 9{,}9991128 - 10 \\
\mathrm{Lg}\,\tfrac{1}{2} &= 0{,}6989700 - 1 \\
\mathrm{Lg}\sin\pi'' &= 8{,}1958768 \\
\mathrm{Lg}\cos b &= 9{,}9304608 - 10 \\
\mathrm{Lg}\sin(L-l) &= 9{,}8485354 - 10 \\
N &= 0{,}3051793 \\
\hline
\mathrm{Lg}\,\mathrm{tg}\,p'' &= 7{,}9781351 \\
\left.\begin{matrix} p-q \\ p'' \end{matrix}\right\} &= 32'\ 41'',31
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Lg}\,\varrho &= 9{,}9991128 - 10\\
\mathrm{Lg}\,\pi'' &= 3{,}5103198\\
\mathrm{Lg}\sin b &= 9{,}7188958 - 10\\
\hline
\mathrm{Lg}\,C &= 3{,}2283284\\
C &= 28'\ 11'',72\\
B &= 33\ 55{,}70\\
\hline
B - C &= 5\ 44{,}0\\
B + C &= 62\ \ 7{,}4\\
\tfrac{1}{2}(B-C) &= 2\ 52{,}0\\
\tfrac{1}{2}(B+C) &= 31\ \ 3{,}7\\
\mathrm{Lg}\sin\tfrac{1}{2}(B-C) &= 6{,}9211033\\
\mathrm{Lg}\cos\tfrac{1}{2}(B+C) &= 9{,}9999823 - 10\\
\mathrm{Lg}\cos p &= 9{,}9999804 - 10\\
N &= 0{,}3051793\\
\hline
\mathrm{Lg}\,\mathrm{tang}\,B' &= 7{,}2262453\\
B' &= 5'\ 47'',28
\end{aligned}
$$

Vermittelst der Näherungsformeln §. 189 findet man die Längenparallaxe und die scheinbare Breite auf folgende Art:

N findet sich wie oben $= 0{,}3051793$, und ebenso $C = 28'\ 11'',72$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Lg}\,\tfrac{1}{2} &= 0{,}6989700 - 1\\
\mathrm{Lg}\,\varrho &= 9{,}9991128 - 10\\
\mathrm{Lg}\,\pi'' &= 3{,}5103198\\
\mathrm{Lg}\cos b &= 9{,}9304608 - 10\\
\mathrm{Lg}\sin(L-l) &= 9{,}8485354 - 10\\
N &= 0{,}3051793\\
\hline
\mathrm{Lg}\,p'' &= 3{,}2925781\\
p'' &= 1961'',45 = 32'\ 41'',45
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
Lg\tfrac{1}{2}(B-C) &= 2{,}2355284\\
Lg\cos\tfrac{1}{2}(B+C) &= 9{,}9999823-10\\
Lg\cos p &= 9{,}9999804-10\\
N &= 0{,}3051793\\
\hline
Lg B' &= 2{,}5406704\\
B' &= 347'',28 = 5'\,47'',28
\end{aligned}$$

Der vergröſserte Halbmesser des Monds ($\frac{1}{2}d'$) findet sich nun leicht nach §. 189.

$$\begin{aligned}
Lg\tfrac{1}{4}d &= 2{,}6457758\\
Lg\cos p &= 9{,}9999804-10\\
Lg\cos B' &= 9{,}9999994-10\\
N &= 0{,}3051793\\
\hline
Lg\tfrac{1}{2}d' &= 2{,}9509349\\
\tfrac{1}{2}d' &= 893'',17 = 14'\,53'',17.
\end{aligned}$$

Um auch den Gebrauch der in dem 190. §. gegebenen Formeln, vermittelst welcher man die Parallaxen, ohne den Neunzigsten vorher zu berechnen, finden kann, seze ich die Berechnung obiger Parallaxen, welche H. Professor *Seyffer* nach der Methode §. 190. geführt hat. Weil μ und $L > 90°$, so wird $\cos\mu$ und $\cos L$ negativ.

$$\begin{aligned}
Lg\varrho &= 9{,}9991128,-10\\
Lg\pi'' &= 3{,}5103198\\
C.Lg\cos B &= 0{,}0000211\\
\hline
& 3{,}5094537\\
Lg\cos\varphi' &= 9{,}7949451-10\\
Lg\cos\mu &= 9{,}7967572-10\\
\hline
Lg A &= 3{,}1011560
\end{aligned}$$

A negativ

$$
\begin{aligned}
& 3{,}5094537 \\
\mathrm{Lg}\sin\varphi' &= 9{,}8930395-10 \\
\mathrm{Lg}\sin\omega &= \underline{9{,}6000598-10} \\
\mathrm{Lg}D &= 3{,}0025530 \\
D &= 1005'',80 \\
& 3{,}5094537 \\
\mathrm{Lg}\cos\varphi' &= 9{,}7949451-10 \\
\mathrm{Lg}\cos\omega &= 9{,}9625185-10 \\
\mathrm{L}\sin\mu &= \underline{9{,}8918781-10} \\
\mathrm{Lg}E &= 3{,}1587954 \\
E &= 1441'',43 \\
\mathrm{Lg}\varrho\pi'' &= 3{,}5094326 \\
\mathrm{Lg}\sin\varphi' &= 9{,}8930395-10 \\
\mathrm{Lg}\cos\omega &= \underline{9{,}9625185-10} \\
\mathrm{Lg}F &= 3{,}3649906 \\
F &= 2317'',34 \\
\mathrm{Lg}\varrho\pi'' &= 3{,}5094326 \\
\mathrm{Lg}\cos\varphi' &= 9{,}7949451 \\
\mathrm{Lg}\sin\omega &= 9{,}6000598 \\
\mathrm{Lg}\sin\mu &= \underline{9{,}8918781} \\
\mathrm{Lg}G &= 2{,}7963156 \\
G &= 625'',62 \\
F &= \underline{2317{,}34} \\
C &= 1691{,}72 \text{ wie oben.} \\
&= R' \\
\mathrm{Lg}A &= 3{,}1011560 \\
\mathrm{Lg}\sin L &= \underline{9{,}4862712-10} \\
\mathrm{Lg}A\sin L &= 2{,}5874272 \\
A\sin L &= -386'',747
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
D &= 1005{,}80 \\
E &= 1441{,}43 \\
\hline
D+E &= 2447{,}23 \\
\mathrm{Lg}(D+E) &= 3{,}3886748 \\
\mathrm{Lg}\cos L &= 9{,}9785944-10 \\
\hline
\mathrm{Lg}(D+E)\cos L &= 3{,}3672692 \\
(D+E)\cos L &= -2329{,}534 \\
A\sin L &= -\ \ 386{,}747 \\
\hline
P' &= +1942{,}787 \\
\mathrm{Lg}\,A &= 3{,}1011560 \\
\mathrm{Lg}\cos L &= 9{,}9785944-10 \\
\hline
\mathrm{Lg}\,A\cos L &= 3{,}0797504 \\
A\cos L &= +\ 1201'',57 \\
\mathrm{Lg}(D+E) &= 3{,}3886748 \\
\mathrm{Lg}\sin L &= 9{,}4862712-10 \\
\hline
\mathrm{Lg}(D+E)\sin L &= 2{,}8749460 \\
(D+E)\sin L &= 749'',80 \\
A\cos L &= 1201{,}57 \\
\hline
Q' &= 1951{,}41 \\
\text{oder} &= 32'\,31'',4 \\
90^{\circ} &= 89\ \ 59\ \ 60{,}0 \\
\hline
A &= 89\ \ 27\ \ 28{,}6 \text{ wie oben}
\end{aligned}$$

Folglich $N = \mathrm{Lg.}\ \dfrac{1}{\cos B\,(\sin\frac{1}{2}A)^2} = 0{,}3051793.$

Der übrige Theil der Rechnung wird ganz wie oben geführt, und man findet dieselbe Längenparallaxe und scheinbare Breite.

Berechnung der Zeit der wahren Zusammenkunft des Monds mit der Sonne nach §. 191.

ver-

$$\begin{aligned}
\text{vergröſs. Halbm. des Monds} &= 893'',17\\
\text{Halbm. der Sonne} &= \underline{956,14}\\
\odot☽ &= 1849,31\\
B☽ = B' &= \underline{347,28}\\
\text{Summe} &= 2196,59\\
\text{Untersch.} &= 1502,03
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Lg Summe} &= 3,3417431\\
\text{Lg Untersch.} &= \underline{3,1766786}\\
\text{Lg}(B\odot)^2 &= 6,5184217\\
\text{Lg}\,B\odot &= 3,2592108\\
B\odot &= 1816'',4
\end{aligned}$$

Betrachtet man das Dreyek ☽$\odot B$ als sphärisch, und rechnet nach der genauen Formel §. 191., so findet sich

$$\begin{aligned}
\text{Lg tang}\tfrac{1}{2}\text{Summe} &= 7,7262978\\
\text{Lg tang}\tfrac{1}{2}\text{Untersch.} &= \underline{7,5613034}\\
\text{Lg}(\text{tang}\tfrac{1}{2}B\odot)^2 &= 15,2876012\\
\text{Lg tg}\tfrac{1}{2}B\odot &= 7,6438006\\
\tfrac{1}{2}B\odot &= 15'\ 8'',28\\
B\odot &= 30\ \ 16,56\\
&= 1816'',56\\
p-q &= \underline{1961,31}\\
\odot - L &= 3777,87\\
H &= 29'\ 36'',05\\
h &= \underline{\ \ 2\ \ 25,75}\\
H-h &= 27\ \ 10,30\\
&= 1630,3
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Lg}\,3600 = 3{,}5563025$$
$$\mathrm{Lg}\,1630{,}3 = 3{,}2122675$$
$$\mathrm{Lg}\,m' = 0{,}3440350$$
$$\mathrm{Lg}(\odot - L) = 3{,}5772471$$
$$3{,}9212821$$

gehört zu $8342'',23$
$= 2^{St.}\,19'\;2'',23$

Anfang um 21 35 21,76 mittl. Z.

☌☽☉ 23 54 23,99 mittl. Z.

Vermindert man aber den Abstand der Mittelpuncte um $6'',5$ wegen der *Irradiation* und *Inflexion* (§. 192.), so erhält man

$$B\odot = 1809''95$$
$$\text{und } m'(\odot - L) = 2^{St.}\,18'\,47'',63$$
$$21\;\;35\;\;21{,}76$$

folglich ☌☽☉ 23 54 9,39 mittl. Zeit.

Anmerkung. Gewöhnlich wird der in Zeit verwandelte Unterschied der wahren Längen zu der *wahren* Zeit des Anfangs addirt oder von der *wahren* Zeit des Endes abgezogen, um die *wahre* Zeit der Zusammenkunft zu erhalten. Da aber die stündliche Bewegung des Monds und der Sonne für *mittlere* Zeit gegeben ist, so kann dieses einen merklichen Fehler in Bestimmung der Zeit der Zusammenkunft machen. In gegenwärtigem Fall würde er $1'',9$ betragen, weil $2^{St.}\,18'\,47'',63$ mittl. Zeit $= 2^{St.}\,18'\,45'',73$ wahrer Zeit. Er kann in gewissen Fällen auf $3''$ gehen.

Berechnung der Zusammenkunft des Monds mit der Sonne aus der Beobachtung des *Endes* der Finsterniſs in *Harefield.*

Mittl. Zeit d. Endes der Finsterniſs	0	40′	45″,50
Mitt. Unt. Harefield und Paris	0	11	16,86
mittl. Zeit in Paris	0	52	2,36

Für diese Zeit findet sich aus den Elementen. §. 194.

die wahre Mondslänge =	163°	41′	0″,0	$= L$
— — Breite ☽ =	0	42	20,0	$= B$
Horiz. Parall. ☽ = unter d. Aeq.	0	54	7,7	$= \pi$
Horiz. Parall. ☉ =	0	0	8,43	
Halbmesser ☽ =	0	14	44,98	$= \frac{1}{2}d$
— ☉ =	0	15	56,14	
stündl. Bew. ☽ =	0	29	35,86	$= H$
— — ☉ =	0	2	25,75	$= h$
mittlere Länge d. ☉ =	165	3	42,90	
— Zeit in Gr. =	10	11	22,5	
$\mu =$	175	15	5,4	
$b =$	44	8	52	
$l =$	150	1	3	
$L =$	163	41	0	
$L - l =$	13	39	57	

Hieraus Unterschied der Längenparallaxen

$p - q$ oder $p'' =$	9′ 14″,09
scheinb. Breite =	4 51,60
vergr. Halbm. d. ☽ =	14 54,82
Halbm. ☉ =	15 56,14
	30 50,96
Irrad. u. Inflex.	— 6,50
	30 44,46
folglich B☉ =	1821″,26
$p - q =$	554,09
$L -$ ☉ =	1267,17

$$\begin{array}{rl}
\text{Lg}\,m' = & 0,3440856 \\
\text{Lg}\,1267,17 = & \underline{3,1028350} \\
& 3,4469206 \\
\text{gehört zu} & 2798'',40 \\
= & 0^{\text{St.}}46'\ 38,4 \\
\text{beob. Ende} & \underline{0\ \ 40\ \ 45,5} \\
\text{mittl. Zeit der} ♂ & 23\ \ 54\ \ \ 7,1
\end{array}$$

Berechnung der Correctionsgleichungen §. 192.

$$\begin{array}{rl}
\text{Lg Abst. d. Mittelp.} = & 3,2654782 \\
\text{Lg}\,B\odot = & \underline{3,2592115} \\
\text{Lg sec.}\,\psi = & 0,0062667 \\
\text{Lg}\,m' = & \underline{0,3440350} \\
\text{Lg}\,m'\,\sec\psi = & 0,3503017 \\
m'\,\text{sec.}\,\psi = & 2,240 \\
\text{Lg}\,B' = & 2,5406704 \\
& \underline{3,2592115} \\
\text{Lg tang}\,\psi = & 9,2814589 - 10 \\
\text{Lg}\,m' = & \underline{0,3440350} \\
\text{Lg}\,m'\,\text{tg}\,\psi = & 9,6254939 - 10 \\
m'\,\text{tang}\,\psi = & 0,422
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\text{Ferner ist}\ B = & 33'\ 55'',7 \\
B' = & \underline{\ \ 5\ \ 47,3} \\
\text{Breitenparall.} = & 28\ \ \ 8,4 \\
= & 1688'',4 \\
\text{Lg}\,1688,4 = & 3,2274753 \\
\text{Lg}\,m'\,\text{tg}\,\psi = & \underline{9,6254939 - 10} \\
& 2,8529692 \\
\text{Lg}\,\pi'' = & \underline{3,5103198} \\
& 0,3426494 - 1
\end{array}$$

$$m' \frac{(p'-q')}{\pi''} \operatorname{tg}\psi = 0{,}220$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Lg}(p-q) &= 3{,}2925781 \\ \operatorname{Lg} m' &= 0{,}3440350 \\ \hline & \ 3{,}6366131 \\ \operatorname{Lg}\pi'' &= 3{,}5103198 \\ \hline & \ 0{,}1262933 \end{aligned}$$

$$m' \frac{(p-q)}{\pi''} = 1{,}337$$

Folglich $d\vartheta = 2{,}24 . dS - 0{,}42 . dB + 1{,}56 . d\pi''$ und die mittlere Zeit des wahren Neumonds aus dem Anfang

$23^{U.}\ 54'\ 9'',39 + 2{,}24 . dS - 0{,}42 . dB + 1{,}56\, d\pi''$.

Für das Ende findet sich auf ähnliche Art

$m' \sec.\psi = 2{,}24$; $m' \operatorname{tang}\psi = 0{,}35$;

$m' \frac{(p'-q')}{\pi''} \operatorname{tang}\psi = 0{,}248$; $m' \frac{(p-q)}{\pi''} = 0{,}38$

also die Zeit der Conjunction aus dem Ende:

$23^{U.}\ 54'\ 7'',1 - 2{,}24 . dS + 0{,}35 . dB + 0{,}13\, d\pi''$.

Nimmt man aus beyden Bestimmungen das Mittel, so erhält man

$23^{U.}\ 54'\ 8'',24 + 0{,}00 . dS - 0{,}03 . dB + 0{,}84\, d\pi''$

Hier ist der Coefficient von $dS = 0$, also heben sich die Fehler, welche von der Ungewiſsheit der Summe der Halbmesser der Sonne und des Monds herrühren, gänzlich gegen einander auf, der Coefficient von dB ist ebenfalls so klein, daſs der Fehler der Mondstafeln in der Breite, wenn man ihn auch $= 20''$ sezen wollte, welches doch schon ein seltener Fall ist, die Zeit der Conjunction nur um $0'',6$ änderte. Endlich kömmt noch die Horizontalparallaxe in Betrachtung, bey welcher

noch

noch eine Ungewiſsheit von 5″ zurükzubleiben scheint (§. 194. Anmerk.). Dieses kann die Zeit der Conjunction noch um 5. 0,84 oder 4″,2 ungewiſs machen.

Die Correctionsgleichungen haben noch die Bequemlichkeit, daſs man so gleich, ohne die ganze Rechnung von neuem zu machen, sehen kann, wie sich die Zeit der Zusammenkunft ändert, wenn die Elemente der Rechnung anders angenommen werden. Um z. B. zu finden, wie die Zeit der Zusammenkunft ausfällt, wenn man die *Irradiation* und *Inflexion* nicht in Rechnung bringt, und die Aequatorialparallaxe nach Mayer um 5″ grösser (§. 194. Anmerk.) angenommen wird, seze man $dS = + 6'',5$; $d\pi'' = + 5''$, so erhält man die Zeit der Conjunction aus dem Anfange um

$$23^{U.}\, 54'\, 9'',39 + 2,24 .\, 6,5'' + 1,56'' .\, 5. = 23^{U.}\, 54'\, 31'',75$$

und aus dem Ende $= 23 \quad 53 \quad 53,\ 19$

Das Mittel kömmt wieder obiger Bestimmung nahe, die Conjunctionen aus dem Anfang und Ende weichen aber so sehr von einander ab, daſs die Nothwendigkeit einer Verbesserung der Summe der Halbmesser wegen der Irradiation und Inflexion dadurch bestätigt wird.

§. 196.

Berechnung der Zeit des wahren Neumonds aus der Beobachtung des Endes eben derselben Finsternifs von H. von Zach auf der Herzogl. Sternwarte bey Gotha.

Herr von Zach beobachtete das Ende der Finsternifs um

$$\begin{array}{l} 1^{U.}\ 44'\ 43'',40 \text{ mittl. Zeit.} \\ -33\ \ 35,0 \\ \hline 1\ \ 11\ \ \ 8,4 \text{ mittl. Zeit in Paris.} \end{array}$$

Für diese Zeit findet sich die

wahre Mondslänge	=	163°	50′	21″,3
— Breite	=	0	43	11,37
Horiz. Parallaxe des Monds u. des Aeq.	=	0	54	7,8
Horiz. Par. d. Sonne	=	0	0	8,43
— Halbm. d. Monds	=	0	14	45,00
— — d. Sonne	=	0	15	56,14
stündl. Bew. d. Monds	=	0	29	35,85
— — d. Sonne	=	0	2	25,75
mittl. Länge d. Sonne	=	165	4	32,12
mittl. Zeit in Gr.	=	26	10	51,00
μ	=	191	15	23
φ	=	50	56	17,0
φ'	=	50	45	2,5
$\mathrm{Lg}\,\varrho$	=	9,9991284 — 10		

$$\begin{array}{rl} x = & -9^\circ\ 3'\ 40'',6 \\ b = & 49\ 25\ 26,0 \\ l = & 162\ 33\ \ 2,5 \\ L = & 163\ 50\ 21,3 \\ \hline L-l = & 1\ 17\ 18,8 \end{array}$$

$p'' =$

$$
\begin{array}{rrrl}
p'' = & 0^\circ & 0' & 47'',79 \\
B' = & 0 & 2 & 17,26 \\
\tfrac{1}{2} d' = & 0 & 14 & 54,18 \\
\text{Halbm.} \odot = & 0 & 15 & 56,14 \\
\hline
\text{Summe} = & & 30 & 50,32 \\
\text{Irrad. und Inflex.} & & - & 6,50 \\
\hline
 & & 30 & 43,82 \\
B\odot = & & 30 & 38,70 \\
p'' = & & 0 & 47,79 \\
\hline
\text{Untersch. d. w. L.} = & & 29 & 50,91 \\
 = & & & 1790'',91
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\text{Lg}\, 1790'',91 = & 3,2530737 \\
\text{Lg}\, m' = & 0,3440883 \\
\hline
 & 3,5971620
\end{array}
$$

gehört zu $3955'',14$

$$
\begin{array}{rrrl}
= & 1^{St.} & 5' & 55'',14 \\
 & 1 & 44 & 43,40 \\
\hline
☌ \text{ um } & 0 & 38 & 48,26 \text{ mittl. Zeit.}
\end{array}
$$

Ferner findet sich nach §. 192.

$m' \sec.\psi = 2,2146$; $m' \operatorname{tang}\psi = 0,1649$;

$\dfrac{m'p'}{\pi''} \operatorname{tang}\psi = 0,1249$; $\dfrac{m'p''}{\pi''} = 0,0326$.

also die mittlere Zeit der Conjunction für den Meridian der Gothaischen grofsen Sternwarte $0^{U.}\, 38'\, 48'',26 - 2,21 .\, dS. + 0,16 .\, dB - 0,09 .\, d\pi''$.

§. 197.

Bestimmung des Mittagsunterschieds zwischen Gotha und Harefield.

Nach §. 195. folgt aus der Beobachtung des Endes der Finsternifs in *Harefield* die Zeit des wahren Neumonds:

$23^{U.}\,54'\,7'',1 - 2,24.\,dS + 0,35.\,dB + 0,13.\,d\pi''.$
aus der Beobachtung des Endes in Gotha nach dem vorhergehenden §.
$0^{U.}\,38'\,48'',26 - 2,21.\,dS + 0,16.\,dB - 0,09.\,d\pi''.$
der Mittagsunterschied ist = dem Unterschied beyder Zeiten (§. 178.), also
$= 44'\,41'',16 + 0,03.\,dS - 0,19.\,dB - 0,22.\,d\pi''$, und zwar liegt Gotha von Harefield gegen *Morgen*, weil die Uhr in Gotha in dem Augenblick der Conjunction mehr zeigte, als die in Harefield. Folglich ist die Länge von Gotha gröfser als die Länge von Harefield.

Hier sind die Coefficienten der Gröfsen dS, dB und $d\pi''$ so klein, dafs die Fehler der Mondstafeln keinen merklichen Einflufs auf die Bestimmung des Mittagsunterschieds haben können, also kann man den Mittagsunterschied zwischen Gotha und Harefield sezen $= 44'\,41'',16$.

Um denMittagsunterschied zu finden, welcher herausgekommen wäre, wenn ich bey der Berechnung die Mondsparallaxe nach Mayer (um 5″ gröfser §. 194. Anmerk.) angenommen, und die Inflexion und Irradiation nicht in Rechnung gebracht hätte, seze man in obiger Gleichung für den Mittagsunterschied $dS = + 6,5$ und $d\pi'' = + 5'',0$, so wird der Mittagsunterschied zwischen Harefield und Gotha $= 44'\,41'',16 + 0'',195 - 1'',10$
$= 44\;\;40,26$

Verbindet man aber die aus der Beobachtung des *Anfangs* der Finsternifs in Harefield hergeleitete Zeit des wahren Neumonds (§. 195.) mit der, welche die Beobachtung des Endes

in

in Gotha gab, so findet man den Mittasunterschied
$= 44' 38'',87 - 4,45 . dS + 0,58 . dB - 1'',65 . d\pi''$.
Hier sind die Coefficienten der unbekannten Grösen dS, dB und $d\pi''$ so gros, dass kleine Fehler der bey der Rechnung zu Grund gelegten Elemente den Mittagsunterschied sehr merklich ändern können. Man sieht hieraus, dass die aus der Verbindung der Beobachtung des Anfangs an dem einen Beobachtungs-Ort mit der Beobachtung des Endes an dem andern, oder umgekehrt, hergeleitete Meridiandifferenz sehr unsicher ist.

Sezt man nun Harefield $11' 16'',86$ *westlich* von Paris, so findet man den Mittagsunterschied zwischen *Gotha* und *Paris* $= 44' 41'',16 - 11' 16'',86 = 33' 24'',3$. H. *von Zach* sezt diesen Mittagsunterschied $= 33' 35''$ (Tab. mot. ☉).

§. 198.

Vergleichung der Mondstafeln mit den Beobachtungen.

Aus den §. 194. gegebenen Stücken kann man leicht die Zeit des wahren Neumonds finden. d. 5. September 1793 um $0^{U.} 0' 0''$ mittlerer Zeit nach dem pariser Meridian war die wahre Länge der Sonne $= 5^{Z.} 13^{\circ} 16' 57'',4$, die wahre Länge des Monds $= 5^{Z.} 13^{\circ} 15' 15'',8$, wovon noch $7'',0$ abgezogen werden müssen, weil die *Nutation* noch nicht angebracht war. Also hat man

die

$$\begin{array}{lr} \text{die wahre Länge der S.} = & 5^{Z.}\ 13^{0}\ 16'\ 57'',4 \\ \text{— — — des M.} = & 5.\ 13\ \ 15\ \ \ 8,8 \\ \hline \text{Unterschied} = & 1\ \ 48,6 \end{array}$$

Hieraus findet man die Zeit des Neumonds, wenn man diesen Längenunterschied von $1' 48'',6$ oder $108'',6$ mit m (§. 191.) multiplicirt. Nun ist

$$\begin{array}{rl} \text{Lg}\,108'',6 = & 2,0358298 \\ \text{Lg}\,m = & 0,3440800 \\ \hline & 2,3799098 \end{array}$$

gehört zu $239'',83$
$= 3' 59'',8$

Folglich fiel der wahre Neumond ein, nach dem pariser Meridian d. 5 Sept. 1793 um
$0^{U.}\ 3'\ 59'',8$ mittl. Zeit.

Nach den Beobachtungen des H. *Grafen von Brühl* ist die Zeit des wahren Neumonds, mit $11' 16'',86$ auf Paris reducirt, (§. 195.)

$$\begin{array}{lr} & 0^{U.}\ 5'\ 25'',1 \\ \hline \text{Unterschied} = & 1\ \ 25,3 \end{array}$$

Folglich gaben die Tafeln die Zeit des Neumonds zu *früh*. Dividirt man $1' 25'',27$ oder $85'',27$ durch m, so findet man (unter der Voraussezung, daſs der Fehler der Sonnentafeln $= 0$) den Fehler der Mondstafeln in der Länge $= 38'',6$, um welchen sie die Länge des Monds zu groſs angaben. Die Beobachtung des Herrn *von Zach* mit $33' 35''$ auf Paris reducirt gibt $33'',25$.

Bestimmung der Zeit der wahren Zusammenkunft durch mikrometrische Messungen.

§. 199.

Die Beobachtungen des Anfangs und des Endes einer Sonnenfinsternifs geben unmittelbar den Abstand der Mittelpuncte des Monds und der Sonne. Durch mikrometrische Messungen kann man diesen Abstand während der Dauer der Finsternifs auf mehrere Arten bestimmen, wovon ich hier nur diejenige anführe, welche mir die bequemsten und sichersten zu seyn scheinen. Man mifst vermittelst eines Objectivmikrometers *) Abstände der Hörner oder Sehnen des verfinsterten Theils ab Fig. 57. Taf. VI. Ist nun S der Mittelpunct der Sonne, L der Mittelpunct des Monds, so findet man aus ihrer gemeinschaftlichen Sehne ab leicht den Abstand der Mittelpuncte SL. Es ist

$$(Se)^2 = (Sa)^2 - \left(\frac{ae}{2}\right)^2$$
$$= (Sa + \tfrac{1}{2}ae)(Sa - \tfrac{1}{2}ae)$$

und $(Le)^2 = (La + \tfrac{1}{2}ae)(La - \tfrac{1}{2}ae)$

aber Sa ist der Halbmesser der Sonne, La der Halbmesser des Monds, folglich kennt man Se, Le, deren Summe dem Abstand der Mittelpuncte gleich ist. Oder man mifst die hellen Theile der Sonne AB oder den Abstand des Mondrandes vom Sonnenrand, so hat man

SL

*) Kästners astronomische Abhandlungen II. Samml. S. 372. u. f.

$$SL = AB + BL - FS$$
$$= AB + La - Sa$$

Hier ist $La - Sa$ der Ueberschuſs des Mondshalbmessers über den Halbmesser der Sonne, welcher zu dem Abstand des Randes der Sonne von dem in der Sonnenscheibe liegenden Rand des Monds AB addirt den Abstand der Mittelpuncte gibt. Ist der Halbmesser des Monds kleiner als der Halbmesser der Sonne, so wird ihr Unterschied von dem Abstand AB abgezogen.

§. 200.

Wegen der *Stralenbrechung* müssen die gemessenen Abstände ab, und AB verbessert werden. Wäre diese für einen Punct der Sonnenscheibe a eben so groſs als für einen andern Punct derselben b, so würde der Abstand ab der wahre seyn. Nun ist aber die Stralenbrechung für einen Punct b in einer kleinern Höhe gröſser, so daſs, wenn bf ein Stük eines Verticalkreises durch b ist, und bb' den Unterschied der Stralenbrechungen für die Puncte a und b ausdrükt, $b'a$ die wahre Sehne des verfinsterten Theils der Sonne seyn wird. Zieht man bd auf ab' senkrecht, so ist $b'd$ die Verkürzung der Sehne durch die Stralenbrechung. Zieht man durch a den Verticalkreis ac, $b'c'$ darauf senkrecht, so kann man ac, $b'c$, bf, welches eigentlich Bogen von gröſsten Kreisen sind, hier als gerade Linien, und ac mit fb parallel betrachten. Da die Höhen der Puncte a und b nicht viel über 30 Min. von einander verschieschieden seyn können, so kann man die Unterschiede der denselben zugehörigen Stralenbrechungen für Höhen, die nicht kleiner als 16 Grade sind, den Höhenunterschieden selbst proportional sezen. Es seye $\Delta\varrho$ der Unterschied der Stralenbrechungen für einen Höhenunterschied $= ab$, ungefähr in der Höhe, welche der Mittelpunct der Sonne hat, so wird der Unterschied der Stralenbrechungen für den Höhenunterschied ac, (bb'), seyn $= \frac{ac}{ab}\Delta\varrho$, oder, weil ab von ab' nur wenig verschieden ist $= \frac{ac}{ab'}\Delta\varrho$. Nun aber sind die Dreyeke acb' und bdb' einander ähnlich, und es verhält sich

$$bb' : b'd = ab' : ac$$

$$\text{aber } \Delta\varrho : bb' = ab' : ac$$

$$\text{folglich } \Delta\varrho : b'd = (ab')^2 : (ac)^2$$

Also hat man die Verbesserung des Abstands ab, d. ist db'

$$= \Delta\varrho\left(\frac{ac}{ab'}\right)^2$$

Aber $\frac{ac}{ab'}$ ist der Cosinus des Winkels cab', welcher beynahe dem Winkel cab gleich, den die Richtung, nach welcher man den Abstand ab genommen hat, mit der Verticallinie macht. Heiſst dieser Winkel u, so hat man

$$db' = \Delta\varrho(\cos u)^2.$$

Es gibt Objectivmicrometer, die so eingerichtet sind, daſs sie den Winkel u angeben *).

Wenn

*) *La Lande* Astronomie. T. II, 2446.

Wenn man keine solche Vorrichtung hat, so findet man den Winkel u am bequemsten durch Zeichnung, weil man ihn nicht sehr genau zu wissen braucht. Man macht einen orthographischen Entwurf *), der Finsterniſs, und bestimmt auf die gewöhnliche Art für den Augenblik der Beobachtung die Lage des Mittelpuncts des Monds gegen den Mittelpunct der Sonne. Zieht man aus dem Mittelpunct des Projectionskreises eine gerade Linie nach der Stunde und Minute des Parallelkreises, zu welcher man den Abstand gemessen hat, so ist der Winkel dieser Linie mit der Linie, welche die Mittelpuncte der Sonne und des Mondes mit einander verbindet, der Winkel u, und ihre Länge gleich dem Sinus des Zenithabstandes der Sonne, wenn man den Halbmesser des Projectionskreises zu Sinus totus annimmt. Auf diese Art findet man alles, was zur Berechnung von db' erfordert wird. Die Verbesserung des Abstands AB findet sich ebenso, wie für den Abstand ab, so daſs, wenn $\Delta\varrho$ der Unterschied der Stralenbrechungen für den Höhenunterschied AB in der Höhe des Mittelpuncts der Sonne ist, der verbesserte Abstand

$$= AB + \Delta\varrho (\cos BAC)^2$$
$$= AB + \Delta\varrho (\cos u)^2.$$

Aus dem Abstand der Mittelpuncte findet man alsdann die Zeit der Conjunction auf dieselbe Art, wie aus dem Anfang und dem Ende der Finsterniſs.

§. 201.

*) §. 177.

§. 201.

Die Sehnen der verfinsterten Theile ändern sich nahe bey dem Anfang und Ende der Finsternifs sehr geschwind, daher man aus denselben den Abstand der Mittelpuncte sehr genau bestimmen kann. Wird der Winkel $aSe = 45^\circ$, so ist die Aenderung der Sehne der Aenderung des Abstands der Mittelpuncte gleich. Wird die Sehne noch gröfser, so ist es vortheilhafter, die Gröfse der hellen Theile der Sonne zu messen, deren Veränderung immer mit derselben Geschwindigkeit geschiehet, mit welcher sich der Abstand der Mittelpuncte verändert.

Mifst man zur Zeit der scheinbaren Zusammenkunft des Monds mit der Sonne den Abstand der Mittelpuncte, so ist dieser der scheinbaren Breite des Monds gleich. Diese mit derjenigen, welche man für *denselben* Augenblik aus astronomischen Tafeln gefunden, und nach §. 188. berechnet hat, verglichen, gibt den Fehler der Mondstafeln in der Breite, wenn man die Parallaxe und die Halbmesser des Monds und der Sonne als richtig annimmt.

Da sich der Abstand der Mittelpuncte zur Zeit der scheinbaren Conjunction nur langsam ändert, so kann man die Zeit derselben aus der Berechnung der Sonnenfinsternifs nach den astronomischen Tafeln nehmen. Genauer findet man sie aus der Beobachtung des Anfangs oder des Endes der Sonnenfinsternifs auf folgende Art. In §. 191. drükt $B\odot$

den

den Abstand von der scheinbaren Zusammenkunft *im Bogen* aus, also ist $m.B\odot$ die Zeit, welche man zu der Zeit der Beobachtung des Anfangs der Finsternifs addiren und von der Zeit des Endes abziehen mufs, um die Zeit der scheinbaren Conjunction zu haben. So war z. B. oben §, 196. für die Zeit des Endes der Finsternifs in Gotha

$$B\odot = 30'38'',7 = 1838'',7$$
$$\text{Lg}\,1838'',7 = 3,2645109$$
$$\text{Lg}\,m = \underline{0,3440883}$$
$$3,6085992$$
gehört zu 4060,68
$$= 1^{\text{St.}}\ 7'\ 40,68$$
$$\underline{1\ \ 44\ \ 43,40}\ \text{Ende der Finsternifs}$$
$$0\ \ 37\ \ \ 2,72\ \text{scheinb.}\ ☌☽\odot.$$

Die Breite des Monds, welche bey dieser Rechnung zu Grund gelegt ist, wird zwar als richtig vorausgesezt; allein der gröste Fehler der Mondstafeln in der Breite wird keinen so grosen Einflufs auf die Bestimmung der Zeit der scheinbaren Conjunction haben, dafs daraus ein beträchtlicher Fehler in der Bestimmung der Mondsbreite aus dem nahe bey der scheinbaren Zusammenkunft gefundenen Abstand der Mittelpuncte entstehen könnte.

Zu mehrerer Sicherheit werden gegen die Zeit der scheinbaren Conjunction hin mehrere Abstände genommen, aus welchen man durch Interpolation denjenigen Abstand findet, welcher zu der scheinbaren Conjunction gehört.

§. 202.

Wenn man von mehreren Orten Beobachtungen des Anfangs und des Endes einer Sonnenfinsternifs hat, so kann man daraus den Fehler der Mondstafeln vermittelst der Correctionsgleichungen bestimmen. So fand H. Prof. *Seyffer* *), welcher verschiedene Beobachtungen der Sonnenfinsternifs d. 5. Sept. 1793 berechnete, (mit 5″ Summe der Inflexion und Irradiation) folgende Zeiten der wahren ☌☽☉:

Für *Harefield*, Anfang:

$$23^{U.}\,54'\,16'',80 + 2,25.\,dS - 0,42.\,dB + 1,55\,d\pi''$$

Ende:

$$\underline{23\quad 53\quad 59,57 - 2,23.\,dS + 0,35.\,dB + 0,13\,d\pi''}$$

$$\text{Untersch.}\quad 17'',23 + 4,48.\,dS - 0,77.\,dB + 1,42\,d\pi''$$

Für *Berlin*, Anfang:

$$0^{U.}\,49'\,28'',58 + 2,22.\,dS - 0,16.\,dB + 1,05.\,d\pi''$$

Ende:

$$\underline{0\quad 49\quad 10,95 - 2,21.\,dS + 0,06.\,dB - 0,04.\,d\pi''}$$

$$\text{Untersch.}\ 17'',63 + 4,43.\,dS - 0,22.\,dB + 1,09.\,d\pi''$$

Diese Unterschiede müssen $= 0$ werden, also hat man zwey Gleichungen, aus welchen sich, wenn $d\pi''$ oder der Fehler der Horizontalparallaxe $= 0$ gesezt wird, $dS = -4'',03$, und $dB = -1'',09$ findet. Man sieht leicht, dafs alle drey unbekannte Gröfsen bestimmt werden, wenn man von *drey* verschiedenen Orten Beobachtungen des Anfangs und des Endes hat.

§. 203.

*) Bestimmung der Länge von Göttingen, Gotha, Danzig etc. Göttingen 1794.

Bestimmung der Länge aus Bedekungen der Fixsterne vom Mond.

§. 203.

Die in den vorhergehenden §§. gezeigten Methoden die Länge zu bestimmen sind von der Art, daſs immer noch eine Ungewiſsheit von einigen Secunden übrig bleibt, wenn man nicht aus mehreren Beobachtungen ein Mittel nimmt, weil man den Augenblick, da sich die zur Längenbestimmung gebrauchten Erscheinungen ereignen, nicht mit der erforderlichen Genauigkeit angeben kann. Diesem Fehler sind die Eintritte der Fixsterne an dem dunkeln Mondrande nicht unterworfen, welche so schnell geschehen, daſs nichts als einige Uebung des Beobachters dazu erfordert wird, um den Augenblik der Erscheinung anzugeben, und es hat weder die verschiedene Güte der Fernröhren noch die Verschiedenheit der Augen einen Einfluſs auf die Beobachtung. Tritt aber der Stern an dem hellen Mondrande ein, so werden schon stärkere Vergröſserungen erfordert, um die Zeit des Eintritts genau angeben zu können. Noch mehrere Aufmerksamkeit erfordert die Beobachtung des Austritts, besonders wenn der Austritt an dem hellen Mondrande geschiehet. Um den Augenblik des Austritts nicht zu verfehlen, kann man den scheinbaren Weg des Monds durch Zeichnung bestimmen, und daraus die Stelle des Mondsrandes suchen, an welcher der Stern austritt. Anleitung dazu findet man in den §. 177. angeführten Schriften.

Was aber diese Methode wieder etwas unsicher macht, ist ihre Reduction auf den Mittelpunct der Erde. Man mufs daher die Beobachtungen so mit einander zu verbinden suchen, dafs die Unrichtigkeiten der zu jener Reduction erforderlichen Elemente keinen merklichen Einflufs auf die Bestimmung des Mittagsunterschieds haben, welches man am leichtesten beurtheilen kann, wenn man, wie oben §. 192. für die Sonnenfinsternisse gezeigt wurde, die Correctionsgleichungen dazu berechnet.

§. 204.

Um aus den Beobachtungen der Fixsternbedekungen den Mittagsunterschied zu finden, bestimmt man auf ähnliche Art wie oben bey den Finsternissen gezeigt wurde, die Zeit der wahren Zusammenkunft des Monds mit dem Stern. Man berechnet hiezu für den Augenblik der Beobachtung die wahre Länge und Breite des Monds, seine stündliche Bewegung in der Ecliptic, Horizontalparallaxe unter dem Aequator und seinen horizontalen Halbmesser. Hieraus die Längenparallaxe, scheinbare Breite des Monds und seinen vergröfserten Halbmesser. Endlich braucht man noch die scheinbare Breite des Sterns, welcher von dem Mond bedekt wurde; seine Länge braucht man nicht zu kennen, aufser wenn man den Fehler der Mondstafeln in der Länge bestimmen will. Um aus der *mittlern* Länge der Fixsterne, wie man sie aus den Fixsternverzeichnissen findet, die *scheinbare*

zu

zu finden, mufs man von jener $17'',85 \sin N$ wegen der Nutation, und $20'' \cos(* - \odot)$ sec. lat. wegen der * Aberration abziehen, wenn * die Länge des Sterns und $\odot$ die Länge der Sonne bezeichnet. Die Nutation nach der Breite ist $= 0$, wegen der Aberration aber mufs man zu der mittlern Breite $20'' \sin(* - \odot)$ sin lat. * addiren.

Aus der scheinbaren Breite des Monds, der scheinbaren Breite des Sterns und dem Abstand des Mittelpuncts des Monds von dem Stern, welcher für die Ein- und Austritte dem vergröfserten Halbmesser des Monds gleich ist, findet man ferner leicht den Unterschied der scheinbaren Längen. Es seye Fig. 53. Taf. VI. der Pol der Ecliptic E; $E\odot$, EB zween durch den Stern S und den Mittelpunct des Monds L gelegte Breitenkreise, so kennt man in dem sphärischen Dreyek ELS die drey Seiten ES (Complement der schein. Breite des Sterns), EL (Compl. der scheinb. Mondsbreite), SL (vergr. Halbmesser des Monds). Hieraus findet sich der Winkel SEL, oder oder der Unterschied der scheinbaren Längen, vermittelst der bekannten Formel

$$(\sin \tfrac{1}{2} SEL)^2 = \frac{\sin(P - ES)\sin(P - EL)}{\sin ES \sin EL}$$

wo P die halbe Summe der drey Seiten des Dreyeks bedeutet.

Zieht man durch den Stern S den Parallelkreis der Ecliptic Sb, so ist Lb der Unterschied der scheinbaren Breiten des Monds und des

 Sterns,

Sterns, und man findet, wenn diese Gröſse in die Formel gesezt wird

$$(\sin \tfrac{1}{2} SEL)^2 = \frac{\sin \frac{1}{2}(SL-Lb) \sin \frac{1}{2}(SL+Lb)}{\sin ES \sin EL}$$

Weil keine Seite des Dreyeks SLb gröſser werden kann als der Halbmesser des Monds, so kann man ohne merklichen Fehler sezen

$$(\tfrac{1}{2} SEL)^2 = \frac{\frac{1}{4}(SL-Lb)(SL+Lb)}{\sin ES . \sin EL} =$$

$$\frac{\frac{1}{4}(SL-Lb)(SL+Lb)}{\cos \text{latit.} {}^{*} . \cos B'}$$

oder weil ES und EL nur wenig von einander verschieden sind

$$(SEL)^2 = \frac{(SL-Lb)(SL+Lb)}{(\sin ES)^2}$$

das heiſst, man sieht das sphärische Dreyek SLb als ein bey b rechtwinklichtes geradliniges Dreyek an, und reducirt den Bogen Sb, welchen die Auflösung desselben gibt, auf die Ecliptic, indem man ihn durch den Cosinus der Breite des Sterns dividirt oder mit ihrer Secante multiplicirt.

Liegen der Mittelpunct des Monds und der Stern auf verschiedenen Seiten der Ecliptic, so wird $Lb =$ der Summe der scheinbaren Breiten des Monds und des Sterns.

Aus dem Unterschied der scheinbaren Längen findet man ferner den Unterschied der wahren Längen vermittelst der Längenparallaxen und hieraus mit der stündlichen Bewegung des Monds die Zeit, welche der Mond gebrauchte, um diesen Bogen zu durchlaulaufen, und die Zeit der wahren Zusammenkunft.

Die Correctionsgleichungen werden auf dieselbe Art, wie §. 192. für die Sonnenfinsternisse gezeigt wurde, berechnet, nur muſs man die Formel für *nördliche* Breiten des Monds gebrauchen, wenn der scheinbare Ort des Monds zwischen dem Stern und dem Nordpol der Ecliptic liegt, für südliche, wenn der Mond zwischen dem Stern und dem Südpol liegt.

Wenn der Unterschied der scheinbaren Breite des Monds von der scheinbaren Breite des Sterns beynahe dem Halbmesser des Monds gleich wird, so hat ein kleiner Fehler in der wahren Breite des Monds oder des Sterns, so wie in dem Halbmesser des Monds, einen sehr merklichen Einfluſs auf die Bestimmung der Zeit der wahren Zusammenkunft. Indessen heben sich doch diese Fehler öfters beynahe gegeneinander auf, wenn man Eintritte mit Eintritten und Austritte mit Austritten verbindet. Um diese Methode durch ein Beyspiel zu erläutern, wende ich sie auf die Bedekung des *Aldebarans* vom Mond d. 27 März 1792 an.

Anwendung der Methode, die Länge durch Beobachtung der Fixsternbedekungen zu bestimmen, auf die Bedekung des Aldebarans vom Mond d. 27 März 1792.

§. 205.

Mechain beobachtete in *Paris* den Eintritt des Aldebarans an dem dunkeln Mondrande d. 27 März um $8^{U.}$ 55′ 55″,4 und den Austritt um $9^{U.}$ 30′ 58″,8 wahrer Zeit. Ich beobachtete den Eintritt um $9^{U.}$ 20′ 31″,42 wahrer Zeit (§. 125.)

Aus den Tafeln in *la Lande's Astronomie* fand ich

1792 März 27. $9^{U.}$ 0′ 0″ mittl. Zeit

die wahre Mondsl. =	67° 27′ 11″,0 = L
— — Breite d. ☽ =	4 45 1,9 südlich.
— ständl. Bew. d. ☽ =	0 30 5,1 = H
Parall. unter d. Aequat. nach la Lande =	0 54 35,00 = π
nach Mayer =	0 54 41,75
Zeitgleichung =	5′ 7″,72

$10^{U.}$ 0′ 0″.

die wahre Mondsl. =	67° 57′ 16″,0 = L
— — Breite =	4 46 14,5 = B
— ständl. Beweg. =	0 30 4,02 = H
Parall. unter d. Aequat. nach la Lande =	0 54 35,80 = π
nach Mayer =	0 54 42,55
Zeitgleichung =	5′ 6″,95

§. 206.

Für die wahre Zeit des Eintritts des Aldebarans in Paris

	$8^{U.}$ 55′ 55″,4	findet sich aus dem vorhergehenden §.
die Zeitgleich.	+ 5 7,72	
	9 1 3,12	mittl. Zeit der Beobachtung.

und für diese Zeit

$L =$

$$
\begin{array}{rl}
L = & 67^{\circ}\ 27'\ 42'',6 \\
B = & -4\ \ 45\ \ \ 3,2 \\
H = & 0\ \ 30\ \ \ 5,10 \\
\pi = & 0\ \ 54\ \ 41,75 \\
\text{hor. Halbm.}\ ☽ = & 0\ \ 14\ \ 52,90 \\
\text{mittl. Länge}\ \odot = & 5\ \ 57\ \ 37,48 \\
\text{mittl. Zeit in Gr.} = & \underline{135\ \ 15\ \ 46,8} \\
\mu = & 141\ \ 13\ \ 24,28 \\
\varphi = & 48\ \ 50\ \ 12
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\text{Lg tang}\,\varphi = & 10,0583375 \\
\text{Lg}\,\dfrac{n^2}{m^2} = & \underline{0,9970998-1} \\
\text{Lg tang}\,\varphi' = & 10,0554373 \\
\varphi' = & 48^{\circ}\ 38'\ 49'',15 \\
\varphi = & \underline{48\ \ 50\ \ 12,00} \\
\varphi-\varphi' = & \quad 11\ \ 22,85
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\text{Lg cos}\,\varphi = & 9,8183631-10 \\
C.\,\text{Lg cos}\,\varphi' = & 0,1799980 \\
C.\,\text{Lg cos}\,(\varphi-\varphi') = & \underline{0,0000024} \\
\text{Lg}\,\varrho^2 = & 9,9983635-10 \\
\text{Lg}\,\varrho = & 9,9991817-10
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\text{Lg cotg}\,\varphi' = & 9,9445627 \\
\text{Lg sin}\,\mu = & \underline{9,7967729} \\
\text{Lg tang}\,x = & 9,7413356 \\
x = & 28^{\circ}\ 51'\ 54'',0 \\
\omega = & \underline{23\ \ 27\ \ 48,0} \\
\omega + x = & 52\ \ 19\ \ 42
\end{array}
$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Lg}\sin\varphi' &= 9{,}8754393\\
\mathrm{Lg}\cos(\omega+x) &= 9{,}7861376\\
C.\,\mathrm{Lg}\cos x &= \underline{0{,}0576151}\\
\mathrm{Lg}\sin b &= 9{,}7191920\\
b &= 31^\circ\,35'\,22'',7\\[1ex]
\mathrm{Lg}\,\mathrm{tang}(\omega+x) &= 10{,}1123274\\
\mathrm{Lg}\,\mathrm{tang}\,b &= \underline{9{,}7888433}\\
\mathrm{Lg}\sin l &= 9{,}9011707\\
\text{gehört zu } & 52^\circ\,47'\,40'',4\\
& \underline{179\quad 59\quad 60{,}0}\\
l &= 127\quad 12\quad 19{,}6\\
L &= \underline{67\quad 27\quad 42{,}6}\\
L-l &= -\quad 59\quad 44\quad 37{,}0\\[1ex]
\mathrm{Lg}\,\tfrac{1}{2}\pi &= 3{,}2150755\\
\mathrm{Lg}\,\varrho &= \underline{9{,}9991817-10}\\
\mathrm{Lg}\,\tfrac{1}{2}\varrho\pi &= 3{,}2142572\\
\mathrm{Lg}\cos b &= 9{,}9303487-10\\
\mathrm{Lg}\cos(L-l) &= 9{,}7023187-10\\
C.\,\mathrm{Lg}\cos B &= \underline{0{,}0014947}\\
& 2{,}8484193\\
\text{gehört zu } & 705{,}37\\
&= 0^\circ\,11'\,45'',37\\
& \underline{44\quad 59\quad 60{,}00}\\
\tfrac{1}{2}A &= 44\quad 48\quad 14{,}63\\
\mathrm{Lg}(\sin\tfrac{1}{2}A)^2 &= 19{,}6959894\\
C.\,\mathrm{Lg}(\sin\tfrac{1}{2}A)^2 &= 0{,}3040106\\
C.\,\mathrm{Lg}\cos B &= \underline{0{,}0014947}\\
N &= 0{,}3055053
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Lg}\,\tfrac{1}{2}\varrho &= 9{,}6981517-10\\
\mathrm{Lg}\sin\pi &= 8{,}2016620\\
\mathrm{Lg}\cos b &= 9{,}9303487-10\\
\mathrm{Lg}\sin(L-l) &= 9{,}9364028-10 \text{ (negativ)}\\
N &= 0{,}3055053\\
\hline
\mathrm{Lg\,tang}\,p &= 8{,}0720705\\
p &= -\ 40'\ 34'',87. \text{ Längenparall.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Lg}\,\tfrac{1}{2}\varrho\pi &= 3{,}2142572\\
\mathrm{Lg}\sin b &= 9{,}7191920-10\\
\hline
\mathrm{Lg}\,\tfrac{1}{2}C &= 2{,}9334492\\
\tfrac{1}{2}C &= 857'',925\\
&= 0^\circ\ 14'\ 17'',92\\
\tfrac{1}{2}B &= -\ 2\ \ 22\ \ 31{,}60\\
\hline
\tfrac{1}{2}(B-C) &= -\ 2\ \ 36\ \ 49{,}52\\
\tfrac{1}{2}(B+C) &= -\ 2\ \ \ 8\ \ 13{,}68
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Lg}\sin\tfrac{1}{2}(B-C) &= 8{,}6589917\\
\mathrm{Lg}\cos\tfrac{1}{2}(B+C) &= 9{,}9996978-10\\
\mathrm{Lg}\cos p &= 9{,}9999697-10\\
N &= 0{,}3055053\\
\hline
\mathrm{Lg\,tang}\,B' &= 8{,}9641645\\
B' &= -\ 5^\circ\ 15'\ 39'',42 \text{ scheinb. Mondsbr. südlich.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Lg}\,\tfrac{1}{4}d &= 2{,}6497728\\
\mathrm{Lg}\cos p &= 9{,}9999697-10\\
\mathrm{Log}\cos B' &= 9{,}9981666-10\\
N &= 0{,}3055053\\
\hline
\mathrm{Lg}\,\tfrac{1}{2}d' &= 2{,}9534144
\end{aligned}$$

vergrös. Halbm. d Monds $= 898'',285$

Die Breite des Aldebarans d. 27 März 1792 ist nach *Bradley* und *Mayer* im Mittel

$= 5^\circ$

$$= 5^\circ\ 29'\ 3'',0 \text{ südlich}$$
$$\text{Aberr.}\ +\ 1,6\ (\S.\ 204.)$$
$$\text{scheinb. Br.} = 5\ 29\ 4,6$$
$$\text{scheinb. Mondsbr.} = 5\ 15\ 39,42$$
$$\text{Untersch.} = 0\ 13\ 25,18$$

Also nach §. 204.

$$SL = 14'\ 58'',28$$
$$Lb = 13\ 25,18$$
$$SL - Lb = 1\ 33,10$$
$$SL + Lb = 28\ 23,46$$
$$\tfrac{1}{2}(SL - Lb) = 0\ 46,55$$
$$\tfrac{1}{2}(SL + Lb) = 14\ 11,73$$

$$\text{Lg}\sin\tfrac{1}{2}(SL - Lb) = 6,3534697$$
$$\text{Lg}\sin\tfrac{1}{2}(SL + Lb) = 7,6158773$$
$$C.\,\text{Lg}\sin ES = 0,0019928$$
$$C.\,\text{Lg}\sin EL = 0,0018334$$
$$\text{Lg}(\sin\tfrac{1}{2}SEL)^2 = 13,9731732$$
$$\text{Hälfte} = 6,9865866$$
$$\tfrac{1}{2}SEL = 3'\ 20'',00$$
$$SEL = 6\ 40,00$$

Berechnet man das Dreyek SLb als ein geradlinigtes, so hat man

$$\text{Lg}(SL - Lb) = 1,9689497$$
$$\text{Lg}(SL + Lb) = 3,2313320$$
$$\text{Lg}(Sb)^2 = 5,2002817$$
$$\text{Hälfte} = 2,6001408$$
$$C.\,\text{Lg}\sin ES = 0,0019928$$
$$\text{Lg}\,SEL = 2,6021336$$
$$SEL = 400,068$$
$$= 6'\ 40'',07$$

$$\begin{aligned} Lg\,3600 &= 3{,}5563025 \\ Lg\,H &= \underline{3{,}2565013} \\ Lg\,m' &= 0{,}2998012 \end{aligned}$$

Nun ist $p = -2434'',87$

$SEL = \underline{\;400{,}00\;}$

Untersch. der
wahr. Längen $= -\ 2034{,}87$

$$\begin{aligned} Lg\,2034{,}87 &= 3{,}3085367 \\ Lg\,m' &= \underline{0{,}2998012} \\ & \ 3{,}6083379 \end{aligned}$$

gehört zu 4058,24
$= 1^{St.}\ 7'\ 38'',24$

Zeit der Beob $\underline{\ 9\ \ 1\ \ 3{,}12\ }$

mittlere Zeit
der ☌☽* $\ 7\ 53\ 24{,}88$ aus dem Eintritt.

Die scheinbare Breite des Monds B' war oben
$= -\ 5^{\circ}\ 15'\ 39'',42$

wahre Br. $= -\ \underline{4\ \ 45\ \ 3{,}20}$

Breitenparall. $= 30\ \ 36{,}22 = p'$

Ferner ist $\sec\psi = \dfrac{LS}{Sb}$; $\tang\psi = \dfrac{Lb}{Sb}$;

folglich nach §. 192.

$m' \sec\psi = 4{,}59$; $m' \tang\psi = 4{,}104$;

$\dfrac{m'p'}{\pi}\tang\psi = 2{,}30$; $\dfrac{m'p}{\pi} = -1{,}48$ (weil die Längenparallaxe negativ) und man hat, weil der Mond dem Nordpol der Ecliptic näher liegt als Aldebaran

$d\vartheta = 4{,}59.\,dS - 4{,}104.\,dB + 2{,}30.\,d\pi - 1{,}48.\,d\pi$

also ist die mittlere Zeit der Zusammenkunft aus dem Eintritt in Paris

$7^{U.}\ 53'\ 24'',88 + 4{,}59.\,dS - 4{,}104.\,dB + 0{,}82.\,d\pi$

§. 207.

§. 207.

Berechnung der Conjunction aus dem Austritt.

wahre Zeit der Beob. $9^{U.}\,30'\,58'',8$
Zeitgleich. $= +\quad 5\;\;7,26$
mittlere Zeit $= \quad 9\;\;36\;\;6,06$

Für diese Zeit ist

$$\begin{aligned}
L &= 67^\circ 45'\; 17'',0\\
B &= -\;4\;\;45\;\;45,58\\
\pi &= \;\;0\;\;54\;\;42,23\\
\tfrac{1}{2}d &= \;\;0\;\;14\;\;53,1\\
\odot m &= \;\;5\;\;59\;\;\;\;3,9\\
\text{mittl. Z. in Gr.} &= 144\;\;\;\;1\;\;30,0\\
\mu &= 150\;\;\;\;0\;\;34\\
b &= \;\;33\;\;51\;\;17,4\\
l &= 133\;\;33\;\;21,7\\
p &= -0\;\;41\;\;42,0\\
\tfrac{1}{2}d' &= \;\;0\;\;14\;\;57,17\\
B' &= -5\;\;17\;\;44,4\\
m'\,\mathrm{sec.}\,\psi &= 3,08\\
m'\,\mathrm{tang}\,\psi &= 2,35\\
\frac{m'p'}{\pi}\,\mathrm{tang}\,\psi &= 1,37\\
\frac{m'p}{\pi} &= -1,52
\end{aligned}$$

Also ist die mitttlere Zeit der Conjunction des Monds mit dem Aldebaran aus dem Austritt in Paris

$7^{U.}\,53'\,24'',11 - 3,08.\,dS + 2,35.\,dB - 2,89.\,d\pi$

§. 208.

Berechnung der Conjunction des Monds mit dem Aldebaran aus der Beobachtung des Eintritts in Altburg.

Die wahre Zeit des Eintritts ist

	$9^{U.}\,20'\,31'',42$ (§. 125.)
Zeitgleichung	$+\ 5\ \ 7,72$
mittl. Zeit	$9\ 25\ 39,14$
Mittagsuntersch. von Paris	$=25\ 29,80$ *)
mittl. Zeit in Paris	$9\ \ 0\ \ 9,34$

Für diese Zeit findet sich vermittelst der §. 205. gegebenen Elemente

$L = 67^\circ\,27'\,15'',6$
$\pi = 0\ 54\ 41,75$
$B = -4\ 45\ 2,1$
$\frac{1}{2}d = 0\ 14\ 52,9$
$H = 0\ 30\ 5,1$
$\odot m = 5\ 57\ 35,3$
mittl. Z. in Gr. $= 141\ 24\ 27,0$
$\mu = 147\ 22\ 2,3$
$\varphi = 48\ 43\ 26,0$
$\varphi' = 48\ 32\ 2,8$
$\mathrm{Lg}\rho = 9,9991845 - 10$
$b = 33\ 2\ 21,7$
$l = 131\ 41\ 55,6$
$p = -0\ 41\ 36,67$
$B' = -5\ 16\ 28,73$
$\frac{1}{2}d' = 0\ 14\ 57,32$

*) Diesen Mittagsunterschied bestimmte ich durch die Bedekung von 1 und 2 δ im Stier vom Mond d. 7 April, 1791.

$$m' \sec\psi = 3,70$$
$$m' \operatorname{tang}\psi = 3,12$$
$$\frac{m'p'}{\pi} \operatorname{tang}\psi = 1,80$$
$$\frac{m'p}{\pi} = -1,52$$

Hieraus ergibt sich die mittlere Zeit der Conjunction
$8^{U.} 18' 48'',36 + 3,70 . dS - 3,12 . dB + 0,28 . d\pi.$
die Zeit der Conjunction aus dem Eintritt in Paris ist (§. 206.)
$7^{U.} 53\ 24,88 + 4,59 . dS - 4,10 . dB + 0,82 . d\pi$
also *Altburg* östlicher als *Paris* um
$25' 23'',48 - 0'',89 . dS + 0'',98 . dB - 0'',54 . d\pi.$

§. 209.

Die zulezt gefundene Gleichung für den Mittagunterschied zeigt, wie schon oben §. 204. erinnert wurde, daſs diejenigen Occultationen nicht sicher zur Längenbestimmung gebraucht werden können, wo die scheinbare Breite des Monds von der scheinbaren Breite des Sterns viel verschieden ist. Die Coefficienten der Gleichung sind noch so groſs, daſs kleine Fehler in dem Mondshalbmesser, der Breite des Monds und des Sterns, und in der Horizontalparallaxe des Monds, den Mittagsunterschied merklich ändern können. Wird z. B. die Horizontalparallaxe nach *la Lande* um 6″,75 kleiner (§. 205.) angenommen, und von dem Mondshalbmesser für die Inflexion 3″,5 abgezogen, so wird obiger Mittagsunterschied = 25′ 30″,34, wie man sogleich findet,

wenn

wenn $dS = -3'',5$ und $d\pi = -6'',75$ gesezt wird. Alsdann fallen aber die aus dem Eintritt und Austritt in Paris hergeleiteten Zeiten der Conjunction sehr verschieden aus. Man findet, wenn in dem Ausdruk für dieselbige (§. 206. u. 207.) $dS = -3'',5$ und $d\pi = -6'',75$ gesezt wird, die Zeit der Conjunction aus dem

$$\begin{array}{lrrl} \text{Eintritt} & 7^{U.}\ 53' & 3'',28 & -\ 4{,}104.\,dB \\ \text{Austritt} & 7\quad 53 & 54{,}40 & +\ 2{,}350.\,dB \\ \hline \text{Unterschied} = & & 51{,}12 & +\ 6{,}454.\,dB \end{array}$$

Dieser Unterschied verschwindet, wenn $dB = -7'',92$ gesezt wird, weil $\frac{51,12}{6,454} = 7'',92$.

Wenn also die Parallaxe nach la Lande und die Gröſse $3'',5$ für die Inflexion richtig sind, und in den Beobachtungen selbst kein Fehler vorgefallen ist, so müſste man die südliche Mondsbreite um $8''$ gröſser annehmen. Da aber auch die Breite des Sterns hiebey in Rechnung kommt, so kann der Fehler zum Theil auch in der Breite des Aldebarans liegen. *Mayer* und *Bradley* geben die Breite desselben um $2''$ verschieden an.

Wie unsicher in solchen Fällen die Längenbestimmung ist, wenn man Beobachtungen der Eintritte mit Beobachtungen der Austritte, oder umgekehrt, verbindet, siehet man, wenn man die Gleichung für die Conjunction aus dem Austritt in Paris mit der für Altburg verbindet. Man findet den Mittagsunterschied =

$$25'\,24'',25 + 6{,}78.\,dS - 5{,}47.\,dB + 3{,}17.\,d\pi$$

hier könnten kleine Fehler der Mondstafeln den Mittagsunterschied um ganze Minuten ändern.

Auch die Unebenheiten des Monds können, wenn der Stern so schief an dem Mondrand eintritt, die Zeit des Eintritts um mehrere Secunden ändern.

Über den Einfluſs, welchen verschiedene Voraussezungen der Abplattung der Erde auf die Längenbestimmung haben.

§. 210.

Die Parallaxen der Länge und Breite hängen aus einer gedoppelten Ursache von dem Verhältniſs ab, welches zwischen dem Halbmesser des Äquators und der halben Erdaxe statt findet. Einmal, weil der Halbmesser der Erde für einen gegebenen Ort (§. 182.) und also auch die Horizontalparallaxe für denselben (§. 187.) sich nach jenem Verhältniſs richtet, hernach, weil der Winkel, welchen die Verticallinie des Orts mit dem Halbmesser der Erde macht, durch das Axenverhältniſs der Erde bestimmt wird (§. 181.), folglich die verbesserte Breite des Orts (φ') verschieden ausfällt, je nachdem die Abplattung der Erde anders angenommen wird.

Um die Veränderungen zu bestimmen, welche die Längen- und Breitenparallaxen leiden, wenn ein anderes Axenverhältniſs angenommen wird, kann man sich der Differentialformeln bedienen. Differentiirt man also obige Formel für die verbesserte Breite (§. 181.)

181.) indem man $\frac{n}{m}$ als veränderlich betrachtet, so erhält man

$$d\varphi' (\sec.\varphi')^2 = \frac{2n}{m} \tang\varphi \; d.\frac{n}{m}$$

oder, weil φ' von φ wenig verschieden ist

$$d\varphi' = \frac{2n}{m} \sin\varphi \cos\varphi.\, d.\frac{n}{m}$$

$$= \frac{n}{m} \sin 2\varphi \; d.\frac{n}{m}$$

und in Secunden (§. 85. S. 124.) indem man mit e dividirt

$$d\varphi' = \frac{206265.\,n}{m} \sin 2\varphi \; d.\frac{n}{m}.$$

Will man $d\varphi'$ durch die verbesserte Breite φ' ausdrüken, so seze man oben statt $\frac{n}{m} \tang\varphi$ die Gröſse $\frac{m}{n}.\frac{n^2}{m^2} \tang\varphi$ oder $\frac{m}{n} \tang\varphi'$, so wird

$$d\varphi' (\sec\varphi')^2 = \frac{2m}{n} \tang\varphi'.\, d.\frac{n}{m}$$

$$d\varphi' = \frac{m}{n} \sin 2\varphi'.\, d.\frac{n}{m}$$

und in Secunden

$$d\varphi' = \frac{206265.\,m}{n} \sin 2\varphi'.\, d.\frac{n}{m}$$

Beyspiel. Oben §. 206. wurde für die Breite der Pariser Sternwarte 48° 50′ 12″ gefunden $\varphi' = 48° 38' 49'',15$ unter der Voraussezung $\frac{n}{m} = \frac{299}{300}$. Sezt man $\frac{n}{m} = \frac{229}{230}$, so wird $\varphi' = 48^\circ\, 35'\, 20'',81$, also um $3'\, 28'',3$ kleiner. Nach der Differentialformel wird die Rechnung auf folgende Art geführt. Es ist $\frac{299}{300} = 0,9966667$, und $\frac{229}{230} = 0,9956522$, kleiner als $\frac{299}{300}$ um $0,0010145$. Also ist hier

$$d.\frac{n}{m} = -\,0,0010145,\ 2\varphi = 97^\circ\, 40'\, 24''$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Lg}\,\frac{n}{m} &= 0,9985499 - 1 \\
\mathrm{Lg}\,\frac{1}{e} &= 5,3144251 \\
\mathrm{Lg}\sin 2\varphi &= 9,9960936 - 10 \\
\mathrm{Lg}\,d.\frac{n}{m} &= 0,0062521 - 3 \\
\hline
\mathrm{Lg}\,d\varphi' &= 2,3153207 \\
d\varphi' &= -\,206'',7 = -\,3'\, 26'',7
\end{aligned}$$

Die zweyte Formel $d\varphi' = \frac{206265.\,m}{n} \sin 2\varphi'.\ d.\frac{n}{m}$, welche genauer ist, gibt

$$d\varphi' = -\,3'\, 28'',25$$

Nach §. 184 ist ϱ sehr nahe $=$

$$1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right)(\sin\varphi)^2$$

$$\text{also } d\varrho = d.\frac{n}{m}\,(\sin\varphi)^2$$

folglich ist die Veränderung der Horizontalparallaxe oder $d\pi'$

$$= \pi(\sin\varphi)^2\, d.\frac{n}{m}$$

§. 211.

Wenn sich die Horizontalparallaxe um $d\pi$ ändert, so ändert sich die Längenparallaxe um $\frac{p}{\pi} d\pi$ und die Breitenparallaxe um $\frac{p'}{\pi} d\pi$ (§. 192.), also ist hier $dp = p(\sin\varphi)^2 d.\frac{n}{m}$ und $dp' = p'(\sin\varphi)^2 d.\frac{n}{m}$. Hieraus findet sich der erste Theil der Veränderung, welche die Parallaxen leiden, wenn $\frac{n}{m}$ sich ändert. Um auch den zweyten Theil zu finden, welcher von der Veränderung der verbesserten Breite abhängt, differentiire man die Formeln §. 190. indem man φ' als veränderlich betrachtet, so findet man sehr nahe

$$\begin{aligned}\frac{dp}{d\varphi'} = &- \varrho\pi \sec B \cos\mu \sin\varphi' \sin L \\ &- \varrho\pi \sec B \sin\omega \cos\varphi' \cos L \\ &+ \varrho\pi \sec B \cos\omega \sin\mu \sin\varphi' \cos L\end{aligned}$$

und $$\begin{aligned}\frac{dp'}{d\varphi'} = &\ \varrho\pi \sec B \cos\omega \cos\varphi' \\ &+ \varrho\pi \sec B \sin\omega \sin\varphi' \sin\mu\end{aligned}$$

In diesen Formeln mufs π in Theilen des Halbmessers ausgedrükt, oder der $\sin\pi$ genommen werden.

Drükt man aber π in Secunden aus, und sezt

$$\begin{aligned}P'' = &\ \varrho\pi \sec.B \cos\omega \sin\mu \sin\varphi' \cos L \\ &- \varrho\pi \sec.B \sin\omega \cos\varphi' \cos L \\ &- \varrho\pi \sec.B \cos\mu \sin\varphi' \sin L \\ R'' = &\ \varrho\pi \sec.B \cos\omega \cos\varphi' \\ &+ \varrho\pi \sec.B \sin\omega \sin\varphi' \sin\mu\end{aligned}$$

so findes man

$$dp = \frac{mP''}{n} \sin 2\phi' . d. \frac{n}{m}$$

$$dp' = \frac{mR''}{n} \sin 2\phi' . d. \frac{n}{m}$$

also ist die ganze Veränderung der Längenparallaxe, wenn sich $\frac{n}{m}$ um $d. \frac{n}{m}$ ändert, oder $dp = (p(\sin\phi)^2 + \frac{mP''}{n} \sin 2\phi') d. \frac{n}{m}$ und die Veränderung der Breitenparallaxe dp'

$$= (p'(\sin\phi)^2 + \frac{mR''}{n} \sin 2\phi') d. \frac{n}{m}$$

Kennt man nun dp und dp', so findet man nach §. 192.

$$d\vartheta = m'. dp' \operatorname{tang} \psi + m'. dp$$

$$d\vartheta' = -m'. dp' \operatorname{tang} \psi + m' dp$$

Ist der scheinbare Ort des Monds zwischen dem Südpol der Ecliptic und dem Stern, welcher bedekt wird, so bekömmt in beyden Formeln das erste Glied das entgegengesezte Zeichen.

Bey dem Aufsuchen der trigonometrischen Linien in den Differentialformeln braucht man nicht auf Secunden zu sehen, und es dürfen also keine Proportionaltheile genommen werden. Zur Abkürzung der Rechnung kann man die beyden lezten Ziffern der Logarithmen weglassen.

§. 212.

Wendet man die Formeln des vorhergehenden §. auf die obige Berechnung des Eintritts

tritts (§. 206.) an, so findet man die Differentialgleichung wegen der verschiedenen Angaben des Axenverhältnisses auf folgende Art:

$$\begin{aligned} \text{Lg}\,\rho &= 9{,}99918-10 \\ \text{Lg}\,\pi &= 3{,}51610 \\ \text{C. Lg}\cos B &= \underline{0{,}00149} \\ \text{Lg}\,\rho\pi\,\text{sec.}B &= 3{,}51677 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 3{,}51677 \\ \text{Lg}\sin\omega &= 9{,}60012-10 \\ \text{Lg}\cos\phi' &= 9{,}82000-10 \\ \text{Lg}\cos L &= \underline{9{,}58355-10} \\ & 2{,}52044 \end{aligned}$$

geh. zu 331.

$$\begin{aligned} & 3{,}51677 \\ \text{Lg}\cos\omega &= 9{,}96251-10 \\ \text{Lg}\cos\phi' &= \underline{9{,}82000-10} \\ & 3{,}29928 \end{aligned}$$

gehört zu 1992.

also ist $P'' = 1988$
$R = 2607$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \text{Lg}\,\frac{m}{n} &= 0{,}00145 \\ \text{Lg}\sin 2\phi' &= \underline{9{,}99647-10} \\ \text{Lg}\,\frac{m}{n}\sin 2\phi' &= 9{,}99792-10 \\ \text{Lg}\,P'' &= \underline{3{,}29848} \\ & 3{,}29640 \end{aligned}$$

gehört zu 1979

$$\begin{aligned} & 3{,}51677 \\ \text{Lg}\cos\omega &= 9{,}96251-10 \\ \text{Lg}\sin\mu &= 9{,}79678-10 \\ \text{Lg}\sin\phi' &= 9{,}87544-10 \\ \text{Lg}\cos L &= \underline{9{,}58355-10} \\ & 2{,}73505 \end{aligned}$$

gehört zu 543.

$$\begin{aligned} & 3{,}51677 \\ \text{Lg}\cos\mu &= 9{,}89186-10 \\ \text{Lg}\sin\phi' &= 9{,}87544-10 \\ \text{Lg}\sin L &= \underline{9{,}96549-10} \\ & 3{,}24956 \end{aligned}$$

geh. zu — 1776.

$$\begin{aligned} & 3{,}51677 \\ \text{Lg}\sin\omega &= 9{,}60012-10 \\ \text{Lg}\sin\phi' &= 9{,}87544-10 \\ \text{Lg}\sin\mu &= \underline{9{,}79678-10} \\ & 2{,}78911 \end{aligned}$$

gehört zu 615.

$$\begin{aligned} \text{Lg}\,\frac{m}{n}\sin 2\phi' &= 9{,}99792-10 \\ \text{Lg}\,R'' &= \underline{3{,}41619} \\ & 3{,}41411 \end{aligned}$$

geh. zu 2595

Die Längenparallaxe p wurde oben (§. 206.) gefunden $= -40'34'',87$, die Breitenparallaxe $p' = 30'36'',22$, also ist $p(\sin\phi)^2 = -1380$ und $p'(\sin\phi)^2 = 1041$.

 Hier-

Hieraus findet sich

$$dp = -1380.d.\frac{n}{m} + 1979.d.\frac{n}{m} = 599\,d.\frac{n}{m}$$

und $dp' = 1041.d.\frac{n}{m} + 2595.d.\frac{n}{m} =$

$$3636.d.\frac{n}{m}$$

Sezt man $d.\frac{n}{m} = -0{,}0010145$, (§. 210.)

so wird

$$p = -40'34'',87 - 0'',61 = -40'35'',48$$
$$p' = \quad 30'36'',22 - 3'',69 = \quad 30\ 32{,}53$$

Man würde diese Parallaxen gefunden haben*), wenn man bey der Rechnung §. 206. das Newtonsche Axenverhältnifs 229 : 230 angenommen hätte. Nach §. 206. ist m' tang $\psi = 4{,}104$ und $m' = 1{,}994$, also die Zeit der Conjunction aus dem Eintritt

$$7^{U.}\,53'\,24'',88 + 1184.d.\frac{n}{m} + 14922\,d.\frac{n}{m}$$

oder

$$7\quad 53\quad 24{,}88 + 16106.d.\frac{n}{m}$$

Sezt man $d.\frac{n}{m} = -0{,}0010145$, so erhält man die Zeit der Conjunction für $\frac{1}{230}$ Abplattung $7^{U.}\,53'\,8'',54$, also $16'',34$ früher, als mit $\frac{1}{300}$ Abplattung. Auf dieselbe Art findet sich für

*) Durch unmittelbare Berechnung der Parallaxen nach §. 188. fand ich mit $\frac{1}{230}$ Abplattung die Längenparallaxe $= -40'\,35'',47$, die scheinbare Breite $= -5°\,15'\,35'',74$, also die Breitenparall. $= 30'\,32'',54$.

für die Zeit der Conjunction aus meiner Beobachtung (§. 208.)

$$P'' = 2050$$
$$R'' = 2525$$
$$\left.\begin{array}{l} p = -2496,67 \\ p' = 1886,63 \end{array}\right\} \text{§. 208.}$$

folglich

$$dp = (2050 - 1410)\, d.\frac{n}{m} = 6040.\, d.\frac{n}{m}$$

und

$$dp' = (2525 + 1065)\, d.\frac{n}{m} = 3590.\, d.\frac{n}{m}$$

ferner ist nach §. 208. $m' = 1,994$ und $m' \tang \psi = 3,12$, also die Zeit der Conjunction aus dem Eintritt in *Altburg*

$$8^{U.}\ 18'\ 48'',36 + 12405.\, d.\frac{n}{m} + 1204.\, d.\frac{n}{m}$$

oder

$$8\ \ 18\ \ 48,36 + 12405.\, d\frac{n}{m}$$

für *Paris*

$$\underline{7\ \ 53\ \ 24,88 + 16106.\, d.\frac{n}{m}}$$

$$25\ \ 23,48 - 3701.\, d.\frac{n}{m}$$

folglich ist, wenn $d.\frac{n}{m} = -0,0010145$ gesetzt wird, der Mittagsunterschied zwischen Altburg und Paris

$$= 25'\ 27'',22$$

Man

Man sieht, daſs sich hier die Fehler, welche von der Ungewiſsheit der Abplattung herrühren, zum Theil gegeneinander aufheben.

Man erhält also folgende Mittagsunterschiede zwischen der Pariser Sternwarte und Altburg:

Mayers Parall. ohne Inflex.	$\frac{1}{300}$ Abpl.	§. 208.	25′	23″,48
l. Lande's Parall. mit Inflex.	$\frac{1}{300}$ Abpl.	§. 209.	25	30,34
— — — —	$\frac{1}{230}$ Abpl.		25	34,08
Mayers Parall. ohne Inflex.	$\frac{1}{230}$ Abpl.		25	27,22
Mayers Parall. mit Inflex.	$\frac{1}{230}$ Abpl.		25	30,33

§. 213.

Wenn der Mittagsunterschied zweyer Orte genau bestimmt ist, so kann man aus Bedekungen von Fixsternen, die an beyden Oertern sind beobachtet worden, die Abplattung der Erde bestimmen. Denn es wird diejenige Abplattung die richtigste seyn, welche den aus Occultationen hergeleiteten Mittagsunterschied mit dem auf andere Art schon bestimmten am besten übereinstimmend darstellt. Es wird zwar bey dieser Untersuchung die Breite des Monds, sein Halbmesser, seine Parallaxe und die Breite des Sterns als richtig angenommen, allein die kleinen Fehler, welche hier noch statt haben können, heben sich, wenn aus vielen Beobachtungen ein Mittel genommen wird, gegeneinander auf. Herr *von Zach* hat zuerst diese Methode vorgeschlagen *), und H. *Triesnecker* **) ähnliche Untersuchungen über diejenige Abplattung, welche

*) Astron. Jahrbuch für 1794. S. 202. u. f.

**) Ephemerides astronomicae anni 1791. Viennae 1790. pag. 387. et seq.

che die aus dem Anfang und Ende der Sonnenfinsternifse hergeleiteten Zeiten der wahren Conjunction des Monds mit der Sonne mit einander übereinstimmend macht, angestellt. Er berechnete die Zeit der wahren Conjunction nach drey Hypothesen, indem er die Abplattung zu $\frac{1}{230}$ und $\frac{1}{335}$ annahm, und die Irradiation und Inflexion $-6'',5$ in Rechnung brachte, mit der Abplattung $\frac{1}{335}$ auch ohne Irradiation und Inflexion. Nach der §. 211. gegebenen Formel kann diese Untersuchung viel kürzer gemacht werden, weil man durch dieselbe die Zeit der Conjunction, die man nach einer gewissen Hypothese berechnet hat, sogleich auf eine andere reduciren kann. Der Mittagsunterschied Δ wird durch eine Formel von der Form ausgedrükt

$$\Delta' \pm \varepsilon . d . \frac{n}{m} \text{ (§. 212.)}$$

in welcher Δ' und ε gegeben ist. Ist nun der Mittagsunterschied beyder Orte bekannt, so hat man

$$\pm \varepsilon . d . \frac{n}{m} = \Delta - \Delta'$$

also $$d . \frac{n}{m} = \pm \frac{\Delta - \Delta'}{\varepsilon}$$

folglich das Axenverhältnifs, welches beyde Bestimmungen miteinander übereinstimmend macht $= \frac{n}{m} \pm d . \frac{n}{m}$, wenn $\frac{n}{m}$ das bey der Rechnung zum Grund gelegte Axenverhältnifs ist.

Be-

Bestimmung der Länge durch Abstände des Monds von der Sonne und von Fixsternen.

§. 214.

Wenn man die Mondstafeln als richtig voraussezt, so kann man für eine jede gegebene Zeit den wahren Abstand des Monds von der Sonne oder einem Fixstern, dessen Länge und Breite bekannt ist, finden. Der Augenblik, da der Mond einen solchen Abstand erreicht, wird die Zeit nach dem Meridian desjenigen Orts seyn, für welchen man den Abstand berechnet hat. Aus dem wahren Abstand des Monds von der Sonne oder einem Fixstern kann man also finden, wie viel Uhr es in dem Augenblik, da man den Abstand beobachtete, an dem Ort war, für welchen der Abstand voraus ist berechnet worden. Hat nun der Beobachter die wahre Zeit nach dem Meridian seines Orts bestimmt, da der Abstand genommen wurde, so ist der Unterschied der wahren Zeit der Beobachtung und der Zeit, für welche der Abstand berechnet wurde, der Mittagsunterschied beyder Orte.

Der Abstand, welchen man durch Beobachtung findet, muſs wegen der Stralenbrechung und Parallaxe auf den wahren, wie er in dem Mittelpunct der Erde erscheinen würde, reducirt werden. Wie die wahre Zeit der Beobachtung bestimmt wird, ist schon oben (§. 109. u. f. §. 169. u. f.) gezeigt worden.

§. 215.

Den Abstand des Monds von der Sonne oder einem Fixstern zu messen.

Das beste Instrument zu dieser Absicht ist der Spiegelsextant, und die Art, wie man damit Abstände miſst, von der Art, wie Höhen gemessen werden (§. 78.), im Wesentlichen nicht verschieden. Weil das Licht der Sonne weit stärker ist als das Licht des Monds, so ist es vortheilhafter, durch die Fernröhre gerade zu nach dem Mond zu sehen, und das Bild der Sonne durch gedoppelte Reflexion in das Sehefeld der Fernröhre zu bringen, nachdem man die Blendungsgläser bey *Z* Fig. 29. Taf. VI. vorgeschoben hat, wie dieses an dem Glas *a b* gezeit ist. Wird der Abstand des Monds von der Sonne gegen Abend genommen, so muſs der Sextant verkehrt gehalten werden. Um das Bild des Monds helle genug zu machen, wird die Fernröhre vermittelst der Schraube *S* in die Höhe geschraubt, wodurch ein gröſserer Theil des Objectivs Stralen gerade zu erhält. Miſst man Abstände des Monds von Fixsternen, so richtet man die Fernröhre nach lezteren, und bringt das Bild des Monds durch Reflexion in das Sehefeld, nachdem man, um das Licht des Monds etwas zu schwächen, das hellste grüne Glas bey *Z* vorgeschoben hat. Es gehört viele Uebung dazu, den Sextanten in die Ebene der beyden Puncte zu bringen, zwischen welchen man die Abstände messen will. Wenn man den Abstand beynahe kennt, so kann man die Alhidade vorher auf diesen Abstand stellen. Sieht man nun durch die Fernröhre gerade zu nach der Sonne, so darf man nur den Sextanten um die Axe der Fernröhre drehen, so daſs man die Sonne immer in dem Sehefeld behält, um das Bild des Monds ebenfalls in das Sehefeld zu bringen. Nun ist es leicht die einander nächsten Ränder der Sonne und des Monds vermittelst der Mikrometerschraube K zur Berührung zu bringen, wobey alles das zu bemerken ist, was bereits oben §. 78. und 79. bey Höhenmessungen erinnert worden ist.

§. 216.

Bestimmung des wahren Abstands aus dem scheinbaren.

Es seye Fig. 58. Taf. VII. Z das Zenith, L der scheinbare Ort des Monds, L' der wahre, also LL' die Wirkung der Höhenparallaxe und Refraction; S die scheinbare Lage des Gestirns, von welchem man den Abstand gemessen hat, und S' der wahre Ort desselben, so ist LS der scheinbare und $L'S'$ der wahre Abstand des Monds von dem Gestirn S. Es seye

die scheinbare Höhe des Monds	$= h$
— wahre — — —	$= h'$
— scheinbare Höhe des Gestirns	$= H$
— wahre — — —	$= H'$
der scheinbare Abstand LS	$= D$
— wahre — $L'S'$	$= D'$

so hat man, weil der Winkel LZS beyden Dreyeken LZS und $L'ZS'$ gemeinschaftlich ist

$$\text{I. } \cos LZS = \frac{\cos D - \sin h \sin H}{\cos H \cos h}$$

$$\text{II. } \qquad = \frac{\cos D' - \sin h' \sin H'}{\cos H' \cos h'}$$

Es ist aber $\cos(H+h) = \cos H \cos h - \sin h \sin H$

folglich $\frac{\cos(H+h)}{\cos H \cos h} = 1 - \frac{\sin h \sin H}{\cos h \cos H}$

daher $\frac{\sin h \sin H}{\cos h \cos H} = 1 - \frac{\cos(H+h)}{\cos h \cos H}$

und ebenso $\frac{\sin h' \sin H'}{\cos h' \cos H'} = 1 - \frac{\cos(H'+h')}{\cos h' \cos H'}$

folglich

$$\frac{\cos D + \cos(H+h)}{\cos h \cos H} = \frac{\cos D' + \cos(H'+h')}{\cos h' \cos H'}.$$

ferner ist

$$\cos(H+h) + \cos D = 2 \cos \tfrac{1}{2}(H+h+D) . \cos \tfrac{1}{2}(H+h-D)$$

$$\cos D' = 1 - 2(\sin \tfrac{1}{2} D')^2$$

$$\cos(H'+h') = 2(\cos \tfrac{1}{2}(H'+h'))^2 - 1$$

folglich $\cos D' + \cos(H'+h') =$

$$2(\cos \tfrac{1}{2}(H'+h'))^2 - 2(\sin \tfrac{1}{2} D')^2$$

also

$$\frac{\cos h' \cos H'}{\cos h \cos H} \cos \tfrac{1}{2}(H+h+D) . \cos \tfrac{1}{2}(H+h-D)$$

$$= (\cos \tfrac{1}{2}(H'+h'))^2 - (\sin \tfrac{1}{2} D')^2$$

daher ist $(\sin \tfrac{1}{2} D')^2 = (\cos \tfrac{1}{2}(H'+h')^2$

$$- \frac{\cos h' \cos H'}{\cos h \cos H} \cos \tfrac{1}{2}(H+h+D) . \cos \tfrac{1}{2}(H+h-D)$$

Man seze

$$\frac{\cos h' \cos H' \cos \tfrac{1}{2}(H+h+D) . \cos \tfrac{1}{2}(H+h-D)}{\cos h \cos H \, (\cos \tfrac{1}{2}(H'+h'))^2} = (\sin A)^2$$

so hat man

$$(\sin\tfrac{1}{2}D')^2 = (\cos\tfrac{1}{2}(H'+h'))^2\,(1-\sin A^2)$$

folglich

$$\sin\tfrac{1}{2}D' = \cos\tfrac{1}{2}(H'+h')\cos A.\ ^{*})$$

§. 217.

Da $\cos(H-h) = \cos H\cos h + \sin H\sin h$ so ist auch $\dfrac{\sin H\sin h}{\cos H\cos h} = \dfrac{\cos(H-h)}{\cos H\cos h} - 1$

und ebenso

$$\frac{\sin H'\sin h'}{\cos H'\cos h'} = \frac{\cos(H'-h')}{\cos H'\cos h'} - 1$$

folglich, wenn man diese Werthe in die Gleichungen I. u. II. des vorhergehenden §. sezt

$$\frac{\cos D - \cos(H-h)}{\cos H\cos h} = \frac{\cos D' - \cos(H'-h')}{\cos H'\cos h'}$$

also $\cos D' = \cos(H'-h')$

$$-\frac{\cos H'\cos h'}{\cos H\cos h}(\cos(H-h) - \cos D)$$

Nun ist H' die wahre, H die scheinbare Höhe der Sonne oder des Sterns, und man findet für

H	$\dfrac{\cos H'}{\cos H}$
10	1,000268
20	1,000272
30	1,000274
40	1,000276
50	1,000277
60	1,000277
70	1,000278

Man

*) Diese Formel gibt *Borda*, *Descript. et us. du cercle de reflex.* pag. 76. et 77.

Man kann also für Höhen der Sonne oder des Sterns über 10° $\frac{\cos H'}{\cos H}$ als beständig an-nehmen, und die Werthe von $\frac{\cos h' \cos H'}{\cos h \cos H}$ in eine Tafel bringen, welche die scheinbare Höhe und Horizontalparallaxe des Monds zu Argumenten hat. Eine solche Tafel findet man in den *Requisite Tables* pag. 8. et seq. die man auch bey der *Borda'schen* Formel ge-brauchen kann. Um nach der in diesem §. gegebenen Formel, welche *Dunthorn* vorge-schlagen hat, den wahren Abstand zu berech-nen, ziehe man von dem Cosinus des Unter-schieds der scheinbaren Höhen den Cosinus des scheinbaren Abstands ab, (ist dieser $> 90°$ so wird der Cosinus desselben addirt) und mul-tiplicire den Rest mit $1{,}000275. \frac{\cos H'}{\cos H}$, welche Gröſse man mit der scheinbaren Monds-höhe und seiner Horizontalparallaxe in der Tafel findet. Der Unterschied zwischen die-sem Product und dem Cosinus des Unter-schieds der wahren Höhen ist der Cosinus des wahren Abstands.

§. 218.

Für den Augenblik der Beobachtung muſs also die wahre und scheinbare Höhe des Monds und der Sonne oder des Fixsterns be-kannt seyn. Diese Stüke erhält man, wenn drey Beobachter zugleich die Höhe des Monds, die Höhe der Sonne oder des Sterns und den

Abstand messen. Die Sonnen- oder Sternhöhe gibt die wahre Zeit der Beobachtung, (§. 169.) und man hat keine Uhr zu diesen Beobachtungen nöthig. Will aber nur *ein* Beobachter die Länge durch Monddistanzen bestimmen, so muſs er mit einer Secundenuhr versehen seyn, mit der Messung einer Sonnenhöhe oder Sternhöhe und der Höhe des Monds den Anfang machen, dann einen Abstand nehmen, hierauf wieder eine Sonnenhöhe oder Sternhöhe beobachten, und endlich die Höhe des Monds messen; bey jeder Beobachtung wird die Zeit der Uhr bemerkt. Da man nun die scheinbare Höhe der Sonne und des Monds für eine gewisse Zeit der Uhr und ihre Veränderung in der Zwischenzeit der Beobachtungen kennt, so kann man durch Interpolation die Höhe der Sonne oder Sterns und des Monds für die Zeit finden, welche die Uhr in dem Augenblik zeigte, da der Abstand genommen wurde, und auf diese Art die Beobachtungen auf drey *gleichzeitige* reduciren.

Zu Land, wo man diese Beobachtungen mit mehrerer Bequemlichkeit als zur See machen kann, wird folgende Methode die vorzüglichste seyn. Die Uhr wird durch correspondirende Höhen oder auf andere Art berichtigt, um die wahre Zeit der Beobachtungen angeben zu können. Man nimmt mehrere Abstände, und bemerkt bey jeder Beobachtung die Zeit der Uhr. Da man in kleinen Zwischenzeiten die Veränderungen des Abstands der Zeit proportional sezen kann, so nimmt man aus den Abständen und aus den

Zei-

Zeiten der Beobachtungen ein Mittel, um für eine gewisse Zeit den scheinbaren Abstand des Monds von der Sonne oder dem Fixstern mit mehrerer Genauigkeit zu erhalten. Vermittelst der geschäzten Länge sucht man aus Ephemeriden für den Augenblik der Beobachtung die gerade Aufsteigung und Abweichung der Sonne und des Monds, so kann man für die bekannte wahre Zeit der Beobachtung die wahre Höhe der Sonne und des Monds berechnen. Hieraus findet man vermittelst der Tafeln für die Stralenbrechung und Parallaxe die scheinbaren Höhen, indem man zuerst die Höhenparallaxen von den wahren Höhen abzieht, diese Höhen als wahre betrachtet, und die ihnen zugehörigen Stralenbrechungen dazu addirt. Hiebey ist zu bemerken, daſs man, weil die Tafeln für die Stralenbrechungen und Parallaxen gewöhnlich auf scheinbare Höhen gestellt sind, zuerst mit der wahren Höhe die Parallaxe, vermittelst dieser und der wahren Höhe eine *genäherte* scheinbare Höhe suchen muſs, um die Höhenparallaxe genau zu finden. Ist die Höhenparallaxe groſs, so muſs man die Operation noch einmal wiederholen. Dasselbe ist bey der Stralenbrechung zu bemerken. Um die scheinbare Höhe des Monds leichter zu finden, hat man Tafeln berechnet, welche die Unterschiede der Höhenparallaxen und Refractionen enthalten.

§. 219.

Anwendung der Methode, die Länge durch Abstände des Monds von der Sonne zu bestimmen.

Herr *von Zach* beobachtete d. 10. Sept. 1792. *) früh auf der Sternwarte auf dem Seeberg folgende 4 Abstände des Monds von der Sonne:

8U. 1′ 15,″5	wahrer Zeit	67° 32′ 0″
– 2 50,5	— —	— 31 30
– 4 13,5	— —	— 31 0
– 5 37,5	— —	— 30 30
8 3 29,2	— —	— 31 15
Mittel.	Error ind	+ 5 35
scheinb. Abst. der Ränd. ☽☉ =		67 36 50

Um 8U. 3′ 29″,2 wahrer Zeit in Gotha war es 7U. 29′ 54″ w. Z. in Paris, und man findet für diese Zeit aus der *Connoissance des temps* für 1792

die gerade Aufsteig. d. ☉ =	169° 9′ 15″
— — — d. ☽ =	100 41 30
Unterschied =	68 28 45

die

*) Astron. Jahrbuch für 1795. S. 254.

die Abweich. d. ☽ = 17° 59′ 50″ nördlich
— — d. ☉ = 4 40 15 —
die Horiz. Parall. ☽
für Paris = 0 54 11 = π
für Gotha = 0 54 10,6 mit $\frac{1}{300}$ Abpl
Horiz. Halbm. ☽ = 0 14 48
Halbm. ☉ = 0 15 57,4
wahre Zeit in Gr. = 59 7 42
Untersch. der ger. Aufsteig. des ☽ und der ☉ = 68 28 45
Stundenw. des ☽ = 9 21 3 gegen Abend
Breite von Seeberg = 50 56 17

Berechnung der Höhen des Monds und der Sonne nach §. 171.

I. Höhe des Monds.

$$\mathrm{Lg\,cotang}\,\varphi = 9{,}9093290$$
$$\mathrm{Lg\,cos}\,t = 9{,}9941904$$
$$\mathrm{Lg\,tang}\,M = 9{,}9035194$$
$$M = 38°41'\,15''$$
$$\text{Abw. d. ☽} = 17\ 59\ 50$$
$$M + \delta = 38\ 41\ \ 5$$
$$\mathrm{Lg\,sin}\,(M+\delta) = 9{,}9220301$$
$$\mathrm{Lg\,sin}\,\varphi = 9{,}8901221$$
$$\mathrm{C.\,Lg\,cos}\,M = 0{,}1075900$$
$$\mathrm{Lg\,sin}\,H' = 9{,}9197422$$
$$\text{wahre Höhe des ☽} = 56°\ 13'\ 46'' = H'$$

Die zu der wahren Höhe H' gehörige Höhenparallaxe q findet man, wenn man keine Tafeln hiezu hat, vermittelst der Formel §. 82. S. 117.

$$\operatorname{tang} q = \frac{\sin\pi \cos H'}{1 - \sin\pi \sin H'}$$

oder, wenn $90^\circ - \pi \sin H' = A$ gesezt wird

$$\operatorname{tang} q = \frac{\sin\pi \cos H'}{2(\sin\tfrac{1}{2}A)^2}$$

oder beynahe

$$q = \frac{\tfrac{1}{2}\pi \cos H'}{(\sin\tfrac{1}{2}A)^2}$$

Hier ist $\mathrm{Lg}\,\frac{\pi}{2} = 3{,}2109335$

$\mathrm{Lg}\sin H' = \underline{9{,}9197422}$

$3{,}1306757$

gehört zu $= 1351''$

$= 0^\circ\ 22'\ 31''$

$\underline{44\ \ 59\ \ 60}$

$\tfrac{1}{2}A = 44\ \ 37\ \ 29$

$\mathrm{Lg}(\sin\tfrac{1}{2}A)^2 = \underline{19{,}6932436}$

C. ar. $= 0{,}3067564$

$\mathrm{Lg}\,\tfrac{1}{2}\pi = 3{,}2109335$

$\mathrm{Lg}\cos H' = \underline{9{,}7449721}$

$\mathrm{Lg}\,q = 3{,}2626620$

$q = 1831'' = 0^\circ 30' 31''$

$H' = \underline{56\ \ 13\ \ 46}$

$55\ \ 43\ \ 15$

Refr. $+$ 39

scheinb. Höhe d. ☽ $= 55\ \ 43\ \ 54 = H$

II. Höhe der Sonne.

$$\begin{aligned}
\text{Lg cotg}\,\varphi &= 9{,}9093290\\
\text{Lg cos}\,t &= 9{,}7102163\\
\hline
\text{Lg tang}\,M &= 9{,}6195453\\
M &= 22^\circ\,36'\,30''\\
\text{Abw. der}\,\odot &= 4\;\;40\;\;15\\
\hline
M+\delta &= 27\;\;16\;\;45\\
\text{Lg sin}\,(M+\delta) &= 9{,}6611749\\
\text{Lg sin}\,\varphi &= 9{,}8901221\\
\text{C. Lg cos}\,M &= 0{,}0347257\\
\hline
\text{Lg sin}\,h' &= 9{,}5860227\\
\text{wahre Höhe der}\,\odot &= 22^\circ 40'\,29'',0\\
\text{Taf. V. Parall.} & \quad -0\;\;\;7{,}8\\
\hline
& \quad 22\;\;40\;\;21{,}2\\
\text{Refract.} & + \;\;\;\;2\;\;15{,}6\\
\hline
\text{scheinb. Höhe d.}\,\odot &= 22\;\;42\;\;37 = h\\
\text{Horiz. Halbm. des}\,☽ &= 14'\;48''\\
\text{Vergröſs.} &= \quad\;\;12\\
\hline
\text{vergr. Halbm. des}\,☽ &= 15\;\;\;0\\
\text{Halbm. d.}\,\odot &= 15\;\;57\\
\hline
& \quad 30\;\;57\\
\text{Abst. d. Ränder} &= 67\;\;36\;\;50\\
\hline
\text{scheinb. Abst. der Mittelpuncte} & \quad 68\;\;\;7\;\;47 = D
\end{aligned}$$

Hieraus findet sich der wahre Abstand der Mittelpuncte der Sonne und des Monds nach der *Borda'schen* Formel §. 216.

$D=$	$68^\circ\ 7'\ 47''$		
$h=$	22 42 37	C. Lg cos $=$	0,0350483
$H=$	55 43 54	C. Lg cos $=$	0,2494381
$S=$	146 34 18		
$\frac{1}{2}S=$	73 17 9	Lg cos $=$	9,4587848
$\frac{1}{2}S-D=$	5 9 22	Lg cos $=$	9,9982391
$h'=$	22 40 29	Lg cos $=$	9,9650644
$H'=$	56 13 46	Lg cos $=$	9,7449721
$H'+h'=$	78 54 15	Summe $=$	39,4515468
		Halfte $=$	19,7257734
$\frac{H'+h'}{2}=$	39 27 7	Lg cos $=$	9,8877061
		Lg sin $A=$	9,8380673
		$A=$	$43^\circ\ 31'\ 45''$
		Lg cos $A=$	9,8603523
		$\text{Lg}\cos\left(\frac{H'+h'}{2}\right)=$	9,8877061
		Lg sin $\frac{1}{2}D'=$	9,7480584
		$\frac{1}{2}D'=$	$34^\circ\ 2'\ 39'',25$
		$D'=$	68 5 18,5

Nun muſs man noch bestimmen, wie viel Uhr es an einem Ort, dessen Länge bekannt ist, in dem Augenblik war, da der wahre Abstand des Monds von der Sonne $68^\circ\ 5'\ 18'',5$ betrug.

Nach der *Connoissance des temps* war d. 10 Sept. 1792 Morg. der Abstand der Sonne und des Mondes um

	$6^{U.}\ 0'$ wahrer Zeit $=$	$68^\circ\ 45'\ 50''$
	9 0 — — $=$	67 24 28
Untersch.	$3^{St.}\ 0$	1 21 22
	oder $10800''$.	oder $4882''$.

Der Abstand 68° 5′ 18″,5 fällt zwischen diese beyde, und ist von dem ersten um 40′ 31″,5 oder 2431″,5 verschieden, folglich ist die Zeit x in Secunden ausgedrükt, welche man zu der Zeit des ersten Abstands addiren muſs, um die Zeit zu haben, da der Abstand = 68° 5′ 18″,5 war, $= \frac{10800 \cdot 2431,5}{4882}$

$$\begin{aligned} Lg\,10800 &= 4,0334238 \\ Lg\,4882 &= \underline{3,6885978} \\ & 0,3448260 \\ Lg\,2431,5 &= \underline{3,3858743} \\ Lg\,x &= 3,7307003 \\ x &= 5379'',0 \\ &= 1^{St.}\ 29'\ 39'',0 \end{aligned}$$

Zeit d. erst. Abstands 6 0 0,0

Folglich ist 7 29 39,0 die Zeit nach dem Pariser Meridian, da nach den astronomischen Tafeln der Abstand des Monds von der Sonne = 68° 5′ 18″,5 war. Die wahre Zeit der Beobachtung in Gotha ist:

$8^{U.}$ 3 29

Mittagsunterschied = 33 50

Verbesserung wegen der abgeplatteten Gestalt der Erde.

§. 220.

Es ist schon oben §. 181. gezeigt worden, daſs die Verlängerung einer geraden Linie aus dem Mittelpunct der Erde an den Ort des Beobachters nicht den Punct der scheinbaren Him-

Himmelskugel trift, wo die Richtung der Schwere hinfällt. Es seye also HO Fig. 59. Taf. VII. der Horizont des Beobachters, Z der Scheitelpunct, wo die Richtung der Schwere hintrift, Z' der Punct, wo der verlängerte Halbmesser der Erde an dem Ort des Beobachters hintrift, so ist ein durch die Puncte Z, Z' gelegter gröſster Kreis der Meridian des Orts (§. 181.), und der Punct Z' liegt von dem Scheitelpunct Z gegen *Süden*, wenn der Beobachter sich auf der nördlichen Halbkugel befindet, gegen *Norden*, wenn der Beobachter auf die südliche Halbkugel gesezt wird.

Nun seye L' der wahre Ort des Monds, und ZL' ein gröſster Kreis, so liegt der scheinbare Ort des Monds in diesem Kreis in L, und man hat, wenn π die Horizontalparallaxe für den Aequator, und ϱ der Halbmesser der Erde an dem Ort des Beobachters in Theilen des Halbmessers des Aequators ausgedrükt ist

$$\sin L'L = \varrho \sin \pi \sin Z'L \text{ (§. 82. u. 187.)}$$

Zieht man die Scheitelkreise ZL' und ZL, so ist ZL' der wahre, ZL der scheinbare Abstand des Monds vom Scheitel. HZL' das wahre Azimuth des Monds (von Mittag an gerechnet), HZL das scheinbare. Folglich wird der Mond durch die Parallaxe aus dem Scheitelkreis gerükt um den Winkel $L'ZL$, welcher die Azimuthalparallaxe ist. Man mache $Zl = ZL'$, so ist Ll die Höhenparallaxe. Zieht man $Z'p$ auf ZL senkrecht, so hat man, weil der Bogen ZZ' klein ist (§. 181.)

Zp

$$Z'p = ZZ' \sin HZL = \Delta\varphi \sin a$$
$$Zp = ZZ' \cos HZL = \Delta\varphi \cos a$$

wenn $\Delta\varphi =$ dem Winkel, welchen der Halbmesser der Erde mit der Richtung der Schwere macht, und $a =$ dem Azimuth.

Weil nun $Z'p$ klein ist, so hat man sehr nahe $Z'L = pL = ZL - Zp$
folglich $\sin L'L = \varrho \sin\pi \sin(ZL - Zp)$
$$= \varrho \sin\pi \sin ZL \cos Zp - \varrho \sin\pi \sin Zp \cos ZL$$
da nun Zp nicht gröſser werden kann als ZZ' oder ungefähr ein Viertheilsgrad, so kann der Fehler, welcher aus der Voraussezung $\cos Zp = 1$ in der Höhenparallaxe entsteht, nicht über $0'',05$ betragen, und man hat
$$\sin L'L = \rho \sin\pi \sin ZL - \rho \sin\pi \sin Zp \cos ZL$$
$$= \rho \sin\pi \sin ZL - \rho \sin\pi \cos ZL.\ \Delta\varphi \cos a$$
das ist, wenn die scheinbare Mondshöhe $= H$ gesezt wird
$$\sin L'L = \varrho \sin\pi \cos H - \varrho \sin\pi \sin H.\ \Delta\varphi \cos a$$
oder beynahe
$$LL' = \varrho\pi \cos H - \pi.\ \Delta\varphi \sin H \cos a$$
Der Winkel $Z'LZ$ bleibt beständig klein, weil mit der Höhe des Monds das Azimuth HZL abnimmt, und gegen dem Aequator hin, wo der Mond beynahe vertical aufsteigt, der Bogen ZZ' sehr klein und unter dem Aequator selbst $= 0$ wird, folglich hat man die *Höhenparallaxe* $Ll = \varrho\pi \cos H - \pi.\ \Delta\varphi \sin H \cos a$, wo $\Delta\varphi$ in Theilen des Halbmessers ausgedrukt ist. Man muſs also von der Höhenparallaxe wie man sie vermittelst der Horizontalparallaxe für den Ort der Beobachtung und mit dem Abstand des Monds vom Scheitel findet,

(§. 219.)

(§. 219.) abziehen $\pi.\Delta\varphi \sin H \cos a$ Secunden, indem man $\Delta\varphi$ in Theilen des Halbmessers, und π in Secunden ausdrükt.

Um die *Azimuthalparallaxe* $L'ZL$ zu finden, suche man den Winkel $Z'LZ$; dieser findet sich durch die Proportion

$$1 : \sin pL = \operatorname{tang} Z'LZ : \operatorname{tang} Z'p$$

und man hat sehr nahe

$$Z'LZ = \frac{Z'p}{\sin pL} = \frac{\Delta\varphi \sin a}{\sin(H - \Delta\varphi \cos a)}$$

Ferner ist beynahe

$$L'l = \frac{L'L.Z'p}{\sin ZL} = \frac{L'L.\Delta\varphi \sin a}{\cos H}$$

$$\text{und } L'ZL = \frac{L'l}{\sin ZL'} = \frac{L'L.\Delta\varphi \sin a}{\cos H \cos H'}$$

$$\text{aber } \varrho\pi = \frac{L'L}{\cos H}$$

folglich ist die Azimuthalparallaxe

$$L'ZL = \frac{\varrho\pi\Delta\varphi \sin a}{\cos H'}$$

oder, weil ϱ beynahe $= 1$, und $L'ZL$ sehr klein ist

$$L'ZL = \frac{\pi\Delta\varphi \sin a.}{\cos H'}$$

Weil man hier $\Delta\varphi$ nicht sehr genau zu wissen braucht, so kann man in der Reihe für $\varphi - \varphi'$ oder $\Delta\varphi$ (§. 183.) die Glieder, welche das Quadrat und höhere Potenzen von a enthalten, weglassen, und man hat $\Delta\varphi = a \sin 2\varphi$ $= \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \sin 2\varphi = \frac{(m+n)(m-n)}{m^2 + n^2} \sin 2\varphi.$

Aber m und n sind wenig von der Einheit verschieschieden, also hat man beynahe $\Delta \varphi = \left(1 - \frac{n}{m}\right) \sin 2\varphi = \alpha \sin 2\varphi$, wenn α die Abplattung der Erde ist. Folglich ist

die Höhenparallaxe $= \rho\pi \cos H - \alpha\pi \sin 2\varphi \sin H \cos a$

die Azimuthalparallaxe $= \frac{\alpha\pi \sin 2\varphi \sin a}{\cos H'}$

Mayer gab diese Formeln in seinen *Tabulis motuum* ☉ et ☽ pag. CII. Edit. 1770.

§. 221.

Man sieht aus dem bisherigen, daſs der wahre Abstand, den man unter der Voraussezung der Kugelgestalt der Erde berechnet, aus zwey Ursachen von demjenigen verschieden ist, welcher wirklich bey der sphäroidischen Gestalt der Erde statt findet. Die Höhenparallaxe wird zu *groſs* gefunden, wenn das Azimuth a von Mittag an gerechnet *kleiner* ist als 90°, und zu *klein*, wenn das Azimuth *gröſser* ist, und die Voraussezung, welche oben bey der Berechnung des wahren Abstands angenommen wurde, daſs der Winkel $L'ZS'$ Fig. 58. durch die Parallaxe nicht geändert werde, ist ebenfalls nicht in aller Schärfe wahr. Dem ersten Fehler wird abgeholfen, wenn man bey der Berechnung der scheinbaren Höhe aus der wahren von der nach §. 219. oder 82. berechneten Höhenparallaxe $\alpha\pi \sin 2\varphi \sin H \cos a$ Sec. abzieht, und diese verbesserte Höhenparallaxe zur Bestimmung der scheinbaren Höhe gebraucht. Um die Veränderung zu berechnen, welche der Abstand durch die Veränderung des Winkels $L'ZS'$ leidet, kann

kann man sich der Differentialformeln bedienen. Man hat nach §. 216.

$$\cos LZS = \frac{\cos D - \sin h \sin H}{\cos H \cos h}$$

also $$-d.LZS.\sin LZS = \frac{-d.D \sin D}{\cos H \cos h}$$

folglich $$d.D = \frac{d.LZS.\sin LZS \cos H \cos h}{\sin D}$$

Da nun das Azimuth von Mittag an gerechnet durch die Parallaxe immer kleiner wird, so ist $d.LZS$ negativ, wenn der Mond und die Sonne oder der Fixstern auf verschiedenen Seiten des Mittagskreises liegen, oder wenn der Mond weiter von dem Meridian absteht, als die auf derselben Seite des Meridians liegende Sonne, und positiv, wenn beyde Himmelskörper auf derselben Seite des Mittagskreises liegen, der Mond aber dem Meridian näher ist als die Sonne oder der Fixstern. Heiſst nun das Azimuth des Monds a, das Azimuth der Sonne oder des Fixsterns a', so ist $LZS = a \pm a'$, wenn die Azimuthe von Mittag gegen Abend oder Morgen gerechnet werden. Also ist $$d.D = \frac{-\alpha\pi \sin 2\varphi \sin a \sin(a \pm a') \cos H \cos h}{\sin D \cos H'}$$

Weil die Parallaxe der Sonne sehr klein ist, so ist die von der Azimuthalparallaxe der Sonne herrührende Veränderung unmerklich.

Für die mittlere Horizontalparallaxe des Monds $= 57'$ und $\alpha = \frac{1}{300}$ wird $\alpha\pi = 11'',4$ also hat man, da $\alpha\pi$ so klein ist,

$$dD = -\frac{11'',4 \sin 2\varphi \sin a \sin(a \pm a') \cos h}{\sin D}$$

Da

Da man die Abweichung, Stundenwinkel und Höhe des Monds und der Sonne schon kennt, so findet man daraus leicht die Azimuthe.

In der 46. Figur Taf. IV ist Z der Scheitelpunct, P der Pol, S der Ort der Sonne, und es verhält sich

$$\sin ZS : \sin ZPS = \sin PS : \sin PZS$$
$$\cos h' : \sin t = \cos \delta : \sin a'$$

also ist $\sin a' = \dfrac{\sin t \cos \delta}{\cos h'}$

Ebenso findet man, wenn T' der Stundenwinkel des Monds, H' seine wahre Höhe und Δ seine Abweichung ist, das Azimuth des Monds a durch die Formel

$$\sin a = \frac{\sin T' \cos \Delta}{\cos H'}$$

§. 222.

Die Borda'sche Formel für die Verbesserung des wahren Abstands.

Es seye p die Horizontalparallaxe für einen Ort, dessen Breite $= \lambda$, so ist der Halbmesser der Erde für diesen Ort $= 1 - \alpha \sin \lambda^2$ (§. 184.) so ist die Horizontalparallaxe π unter dem Aequator $= \dfrac{p}{1 - \alpha \sin \lambda^2}$ (§. 187.). Die Breite des Orts der Beobachtung seye $= L$, so ist die Horizontalparallaxe für denselben $=$ $\pi (1 - \alpha \sin L^2) = p . \dfrac{1 - \alpha \sin L^2}{1 - \alpha \sin \lambda^2} =$ $= p (1 + \alpha \sin \lambda^2 - \alpha \sin L^2)$.

AE Fig. 60. Taf. VII. seye der Halbmesser des Aequators, AQ die halbe Axe der Erde, de, OA der Halbmesser der Erde an dem Ort des Beobachters, OZ die verlängerte Richtung der Schwehre, also Z des Beobachters Scheitelpunct; $Z'O$ der verlängerte Halbmesser der Erde, folglich ZZ' ein Stük des Meridians $= \alpha \sin 2L$ (§. 220.) L der Ort des Monds, allein durch die Stralenbrechung verbessert, S der wahre Ort des Gestirns, mit welchem man den Mond vergleicht. Aus den Puncten Z und Z' ziehe man die Bogen ZL und ZS, $Z'L$ und $Z'S$. Trägt man auf den Bogen ZL den Bogen $Lp =$ dem Product der Horizontalparallaxe für den Ort O in den $\sin Z'L$, und zieht den Bogen Sp, so ist Sp der wahre Abstand beyder Gestirne, wenn man auf die abgeplattete Gestalt der Erde Rüksicht nimmt. Man mache auf dem Bogen ZL den Bogen $LL' = p(1 + \alpha \sin\lambda^2 + \alpha \sin L^2) \sin ZL$ und ziehe SL', so ist klar, daſs, wenn man den wahren Abstand nach §. 216. unter der Voraussezung der Kugelgestalt der Erde mit der Horizontalparallaxe $= p(1 + \alpha \sin\lambda^2 + \alpha \sin L^2)$ berechnet hätte, man für den wahren Abstand $L'S$ würde gefunden haben. Zieht man aus S die Bogen opn und $L'm$, so ist $L'o = L'S - pS$.

Es seye $LZ = a;\ SZ = b;\ LS = D$
$LZ' = a';\ SZ' = b';\ L'S = D'$
$pS = D''$

so wird man haben $D' - D'' = Lo$, oder $D'' = D' - Lo$; statt Lo kann man mn, welches sehr wenig davon verschieden ist, nehmen. Man wird also haben

$$D'' = D' - mn = D' - Ln + Lm$$

Nun

Nun hat man $Ln = Lp . \cos Z'LS$, aber

$$Lp = p(1 + \alpha \sin \lambda^2 - \alpha \sin L^2) \sin a'$$

und $$\cos Z'LS = \frac{\cos Z'S - \cos LZ' \cos LS}{\sin LZ' \sin LS}$$

$$= \frac{\cos b' - \cos a' \cos D}{\sin a' \sin D}$$

folglich ist

$$Ln = p(1 + \alpha \sin \lambda^2 - \alpha \sin L^2)\left(\frac{\cos b' - \cos a' \cos D}{\sin D}\right)$$

Auf dieselbe Art findet man $Lm = LL' \cos ZLS$, und da nach der Voraussezung

$$LL' = p(1 + \alpha \sin \lambda^2 + \alpha \sin L^2) . \sin a,$$ und

$$\cos ZLS = \frac{\cos b - \cos a \cos D}{\sin a \sin D}$$

so erhält man

$$Lm = p(1 + \alpha \sin \lambda^2 + \alpha \sin L^2)\left(\frac{\cos b - \cos a \cos D}{\sin a \sin D}\right)$$

Nimmt man den Unterschied zwischen Ln und Lm, und sezt für a', $a + da$, und für b', $b + db$, so findet sich

$$Ln - Lm = -2p\alpha \sin L^2 \left(\frac{\cos b - \cos a \cos D}{\sin D}\right)$$
$$+ p\left(\frac{da \sin a \cos D - db \sin b}{\sin D}\right)$$

Man mache $LZ = Lq$ und ziehe Zq, so hat man $da = qZ' = ZZ' \cdot \cos ZZ'q = \alpha \sin 2L \cos ZZ'q$. Um den $\cos ZZ'q$ zu finden, ziehe man aus dem Pol P den Bogen PZ, welcher der Aequatorshöhe, und den Bogen PL, welcher der Polardistanz des Monds gleich seyn wird $= N$. PZL ist wenig von $ZZ'L$ verschieden, also kann man ohne merklichen Fehler sezen $qZ' = \alpha \sin 2L \cos PZL$.

Aber $\cos PZL = \frac{\cos PL - \cos PZ \cos ZL}{\sin PZ \sin ZL}$

$= \frac{\cos N - \sin L \cos a}{\cos L \sin a}$

folglich $da = \alpha \sin 2 L \left(\frac{\cos N - \sin L \cos a}{\cos L \sin a} \right)$

Ebenso erhält man, wenn die Polardistanz PS des Gestirns $S = M$ gesezt wird,

$$db = \alpha \sin 2 L \left(\frac{\cos M - \sin L \cos b}{\cos L \sin b} \right)$$

Sezt man endlich diese Werthe in den oben gefundenen Ausdruk für D'', so ergibt sich

$$D'' = D + 2 p \alpha \sin L^2 \left(\frac{\cos b - \cos a \cos D}{\sin D} \right)$$

$$+ p \alpha \sin 2 L \left(\frac{\cos M - \sin L \cos b}{\cos L \sin D} \right)$$

$$- p \alpha \sin 2 L \cos D \left(\frac{\cos N - \sin L \cos a}{\cos L \sin D} \right)$$

$$= D' + 2 p \alpha \sin L \left(\frac{\cos N - \cos D \cos M}{\sin D} \right)$$

$$= D' + 2 p \alpha \sin L \left(\frac{\cos N}{\sin D} - \operatorname{cotg} D \cos M \right)$$

$$= D' + 2 p \alpha \sin L \left(\frac{\cos N}{\sin D} + \operatorname{tang} (D - 90^\circ) \cos M \right)$$

Man berechne also den Abstand D' nach §. 216. oder 217. mit der Horizontalparallaxe $p(1 + \alpha \sin \lambda^2 + \alpha \sin L^2)$, oder, wenn die Aequatorialparallaxe π heisst, mit der Horizontalparallaxe $\pi(1 + \alpha \sin L^2)$ und addire zu dem gefundenen Abstand D'

$$2p\alpha \sin L\left(\frac{\cos N}{\sin D} = \operatorname{cotg} D \cos M\right)$$

Da sich die Gröſse $p\alpha$ nicht merklich ändert, so nehme man statt p die mittlere Mondsparallaxe $= 57'$; man wird alsdann haben

$2p\alpha = 34''$ für $\frac{1}{200}$ Abplattung
$= 29'',5$ — $\frac{1}{230}$ —
$= 22,8$ — $\frac{1}{300}$ —

§. 223.

Anwendung auf das §. 219. gegebene Beyspiel.

Mit $\frac{1}{300}$ Abplattung findet man, da $\lambda = 48^\circ 50'$ und $L = 50\ 56$,

$$\begin{array}{rr} p\alpha \sin \lambda^2 = & 6'',5 \\ p\alpha \sin L^2 = & 6,9 \\ \hline & 13'',4 \\ \text{Horiz. Par. für Paris} = & 54\ \ 11,0 \\ \hline & 54\ \ 24,4 \end{array}$$

Hienach ist die Höhenparallaxe LL' (Fig. 60.) $= 30'\ 38'',4$ und die scheinbare Höhe $H = 55^\circ 43'\ 46''$, woraus man nach §. 219. findet

$$D' = 68^\circ\ 5'\ 4'',4$$

Ferner ist

Lg 22,8	. . . .	1,35793
Lg sin. der Breite.	50° 56′ . . .	9,89012 − 10
Lg sin. d. Abweich. ☉	4 40 . . .	8,91040 − 10
C. Lg sin. d. Abstands.	68 5 . . .	0,03258
	Summe =	0,19103
	Zahl =	1″,5

Lg 22,8 1,35793
Lg sin. d. Breite . . . . 9,89012 − 10
Lg sin d. Abw. d. ☽. 18° 0′ . . . 9,48998 − 10
Lg tang (90° − D), od. − 21° 55′ . . . 9,60459 − 10

Summe = 0,34262
Zahl = − 2,2
Verbess. = − 0,7
wahrer Abstand = 68° 5′ 3″,7

Hieraus erhält man den Mittagsunterschied zwischen der Sternwarte auf dem Seeberg bey Gotha und Paris nach §. 219.

Abstand um $6^{U.}$ 0′ 0″ = 68° 45′ 50″,0
beob. Abst. = 68 5 3,7
Untersch. = 40 46,3
= 2446,3

Lg. $\frac{10800}{4882}$ = 0,3448260. (§. 219.)
Lg 2446,3 = 3,3885097
3,7333357
5411″,7
= $1^{St.}$ 30′ 11″,7
6 0 0,0
7 30 11,7
Zeit der Beob. 8 3 29,2
Mittagsuntersch. 33 17,5

Dieser weicht nur 17″ von Herrn v. Zachs Bestimmung 33′ 35″ ab *).

§. 224.

*) H. *Nieuwland* fand (Jahrb. für 95. S. 254.) den wahren Abstand = 68° 5′ 3″ und daraus die Länge, wie es dort heifst, bis auf 7″. Da mein Abstand mit jenem sehr nahe zutrift, und ich nach dem Nautical Almanac dieselbe Länge (Paris und Greenwich 9′ 20″) gefunden habe, so ist dies wahrscheinlich ein Drukfehler.

§. 224.

Da bey dieser Methode, die Länge zu bestimmen, der wahre Ort des Monds nach den Tafeln als richtig vorausgesezt wird, so kann der Fehler der Mondstafeln einen merklichen Einfluſs auf die Längenbestimmung haben. Macht man aber viele Bestimmungen zu verschiedenen Zeiten, so kann man, wenn ein Mittel aus allen genommen wird, schon gewiſs so genaue Resultate erhalten, als durch die Verfinsteruugen der Jupiterstrabanten. Diese Methode ist auch deswegen bequem, weil man Mondsabstände zu allen Zeiten (nur wenige Tage in jedem Mcnat ausgenommen) beobachten kann.

Die Abstände des Monds von der Sonne können weit genauer beobachtet werden, als Abstände von Fixsternen, weil man das Berühren der Ränder mit vieler Schärfe wahrnehmen kann. Aus diesem Grunde sind jene vorzüglich zur Längenbestimmung zu empfehlen.

§. 225.

Nach aller Schärfe könnte man den wahren Abstand aus dem scheinbaren unter der Voraussezung der sphäroidischen Gestalt der Erde auf folgende Art herleiten. Die berechneten *) wahren Höhen verwandle man in schein-

*) Die wahren Höhen werden vermittelst der Breite, so wie man sie aus den Beobachtungen findet, auf die schon oben gezeigte Art berechnet.

scheinbare, indem man allein die Stralenbrechung in Rechnung bringt, und berechne nach §. 216 den reducirten Abstand, welchen man allein von der Stralenbrechung befreyt erhalten wird. Nun berechne man mit der *verbesserten* oder *geocentrischen* Breite, dem Stundenwinkel und Abweichung die wahren Abstände des Monds und der Sonne vom Zenith; diese werden $Z'p$ und $Z'S$ Fig. 60 seyn. Vermittelst dieser Zenithdistanzen suche man, indem man die Horizontalparallaxe für den Ort des Beobachters gebraucht, die Höhenparallaxe Lp, so hat man auch den scheinbaren Abstand vom Zenith $Z'L$. Ebenso suche man auch die Höhenparallaxe und den scheinbaren Abstand der Sonne vom Zenith Z'. Berechnet man nun mit diesen leztern wahren und scheinbaren Höhen und dem schon wegen der Stralenbrechung verbesserten Abstand noch einmal den reducirten Abstand nach §. 216, so erhält man den *auch von der Parallaxe befreyten* Abstand, und man hat genau den wahren Abstand pS, wie er in dem Mittelpunct der Erde erscheinen würde.

Bestimmung der Länge durch tragbare Uhren.

§. 226.

Es erhellt aus den bisherigen Untersuchungen, daſs weder die Finsternisse des Monds und der Jupiterstrabanten noch die Bedekungen der Fixsterne vom Mond und Abstänstände des Monds von der Sonne und von Fixsternen eine so genaue Bestimmung der Länge verstatten, als man die Breite eines Orts, wenn man auch nicht mit sehr vorzüglichen Instrumenten versehen seyn sollte, bestimmen kann. Die grofse Vollkommenheit, mit welcher jezo tragbare Uhren verfertigt werden, hilft den Schwürigkeiten, welchen die Längenbestimmung sonst unterworfen war, gröfstentheils ab, und die Methode, die Länge durch genaue tragbare Uhren zu bestimmen, ist nicht allein die genaueste, sondern auch die leichteste und bequemste unter allen bisher bekannten. Ausser der Längen-Uhr hat man nichts als ein Instrument zum Höhenmessen nöthig, um die Uhr berichtigen zu können. Dieses Instrument dient zugleich zur Bestimmung der Breite, und so kann man einen Ort in kurzer Zeit mit wenigen Werkzeugen nach Länge und Breite bestimmen. Nur Schade, dafs der hohe Preis diese Uhren nicht in so vieler Beobachter Hände kommen läfst, als für die Verbesserung der Geographie zu wünschen wäre.

Will man durch eine Uhr die Länge bestimmen, so mufs sie nach der Zeit eines Orts, mit dem man andere in Absicht auf die Länge vergleichen will, berichtigt seyn, welches nach den oben angezeigten Methoden geschiehet. Um vermittelst dieser Uhr zu jeder andern Zeit die Zeit des Orts, mit der man sie verglichen hat, angeben zu können, mufs ihr *Gang* bekannt seyn, das heifst, man mufs wissen, wie viel sie sich täglich von der mittlern Zeit entfernt. Dieser Gang mufs, ehe noch mit der Längenbestimmung der Anfang gemacht wird, sehr sorgfältig untersucht werden, indem man sich der Methoden bedient, welche schon oben bey der Berichtigung der Pendeluhren gezeigt wurden. Man sezt die Beobachtungen wenigstens einen Monat hindurch fort, um den *mittlern* täglichen Gang der Uhr mit der gehörigen Genauigheit (welche von der Gröſse des Zeitraums, durch den man die Beobachtungen fortgesezt hat, abhängt) festsezen zu können. Ich wähle, um dieses durch ein Beyspiel zu erläutern, folgende von Herrn Graf v. *Brühl* im Jahr 1793 gemachte Beobachtungen eines von *Mudge* verfertigten *Timekeeper* *).

May.	Abw. v. d. mittl. Zeit im Mittag	
12	3′ 56″,06	
13	3 57,33	+ 1″,270
21	4 8,60	1,409
23	4 15,15	3,275
30	4 29,93	2,111

Die erste Columne enthält die Tage der Beobachtungen, die zweyte der Uhr Abweichungen von der mittlern Zeit im wahren Mittage, die dritte enthält die Unterschiede derselben durch die Anzahl der zwischen zwey auf einander folgenden Beobachtungen verflossenen Tage dividirt. Die Uhr wich z. B. den 12 May von der mittlern Zeit ab

3′ 56″,06

*) Man findet diese in einer von H. Gr. v. *Brühl* herausgegebenen Schrift *on the investigation of astronomical Circles. London* 1794. *Register of one of Mr. Mudge's timekeepers.* pag. 10.

$$\begin{array}{rrr} & 3' & 56'',06 \\ \text{d. } 13 & 3 & 57,33 \\ \hline \text{Untersch.} = & & 1,27 \end{array}$$

folglich eilte die Uhr in einem Tag der mittlern Zeit vor 1″,27. Der Unterschied der Abweichungen der Uhr von der mittlern Zeit den 13ten und 21sten May ist = 11″,27, die Anzahl der zwischen beyden Beobachtungen verflossenen Tage = 8, folglich die Voreilung der Uhr in 8 Tagen = 11″,27 und in einem Tag $\frac{11,27}{8} = 1'',409$. Aus allen Bestimmungen nimmt man zulezt ein Mittel, und man findet z. B. hier die mittlere tägliche Voreilung der Uhr = 2″,01625. Gesezt nun, man wollte die Abweichung der Uhr von der mittlern Zeit den 10 Jun. 1793 im Mittag bestimmen, so verfährt man auf folgende Art: die Anzahl der von der lezten Beobachtung d. 30 May bis auf den 10 Jun. verflossenen Tage ist = 11, und also die Voreilung der Uhr in dieser Zeit = 11. (2,01625) = 22″, 179.

$$\begin{array}{rrr} \text{Abweich. v. d. mittl. Zeit d. 30 May} = & 4' & 29'',93 \\ \text{Voreil. in 11 T.} = & & 22,179 \\ \hline \text{Summe} = & 4 & 52,109 \end{array}$$

folglich wäre der Uhr Abweichung von der mittlern Zeit d. 10 Jun. im Mittag = 11′ 52″,11, welche nur um 1″, 14 gröſser ist, als die wirklich durch Beobachtung am 10 Jun. gefundene, wie man in dem oben angeführten Register findet.

§. 227.

§. 227.
Beyspiel einer Längenbestimmung durch Uhren.

Im Jahr 1786 d. 29 May wurde eine von *Mudge* verfertigte Uhr auf der Sternwarte des H. Grafen von *Brühl* (*London Doverstreet* 33″,6 gegen Abend von Greenwich) durch H. v. *Zach* das lezte mal vor seiner Abreise mit der durch Beobachtung an der Mittagsfernröhre gefundenen Zeit verglichen *). Sie gieng für mittlere Zeit der Sternwarte zu spät um 2″,1. Vom 28 Febr. bis 29 May wurde sie durch 41 Beobachtungen mit der Sonne verglichen; 17 derselben gaben die Summe der Voreilungen = 6″,873, die übrigen 24 gaben die Summe der Verspätigungen = 13″,905, woraus der mittlere tägliche Gang der Uhr = − 0″,1715 hergeleitet wurde, um welches sie täglich gegen mittlere Zeit zurükblieb. Bald nach seiner Ankunft in *Gotha* bestimmte H. von *Zach* durch 8 correspondirende Sonnenhöhen mit einem Spiegelsextanten die Zeit der Uhr im wahren Mittag d. 27 Jun. 1786 11$^{U.}$ 19′ 3″,40. Vom 29 May bis 27 Jun., in 29 Tagen, blieb die Uhr gegen mittlere Zeit zurük um 29. (0″,1715)

	= 4″,9735
die Uhr zu spät für mittl. Zeit in London d. 29 May	= 2,10
d. 27 Jun. für mittl. Zeit in London zu spät um	7,0735

mittl.

*) *De Zach* tabulae motuum Solis, pag. 4.

mittl. Zeit im w. Mittag d. 27 Jun.	=	$0^{U.}\ 2'\ 34'',3$
Zeit d. im w. Mittag in London		0 2 27,2265
— — in Gotha		11 19 3,40
Mittagsunterschied	=	0 43 23,8265

Da nun die Uhr in Gotha zu spät gieng, so liegt Gotha von London gegen Morgen. *Doverstreet* ist westlicher als Paris um $9'\ 53'',6$, also ist der Mittagsunterschied zwischen der Pariser Sternwarte und der Gothaischen auf *Fridenstein* $= 33'\ 30'',2$; zwischen ersterer und der Sternwarte auf dem *Seeberg* $= 33'\ 30'',2 + 6'',5 = 33'\ 36'',7$, weil der *Seeberg* um $6'',5$ östlicher liegt als *Fridenstein*.

Bestimmung der Länge durch irdische Signale.

§. 228.

Wenn zwey Örter so nahe beyeinander liegen, daſs man von dem einen nach dem andern hinsehen, oder an beyden Örtern ein auf einem Berg gegebenes Zeichen bemerken kann, so kann ihr Mittagsunterschied so genau, als durch die zur Längenbestimmung vieltauglichsten Himmelsbegebenheiten, und vielleicht noch genauer, bestimmt werden. Man siehet leicht, daſs das Signal, welches die Stelle einer Himmelsbegebenheit vertreten soll, nicht allein leicht muſs bemerkt werden können, sondern auch die Dauer der Erscheinung so kurz als möglich seyn muſs. Man fand hiezu die Entzündung von Schieſspulver

pulver vorzüglich bequem. Die Feuerraketen haben noch den Vorzug, daſs sie auf eine beträchtliche Höhe steigen, und also der Augenblik ihres Plazens an entfernten Örtern desto leichter bemerkt werden kann. Die schnelle Bedekkung einer Flamme erfordert schon umständlichere Vorrichtungen. Picard bestimmte auf diese Art den Mittagsuntershied zwischen der Sternwarte in *Copenhagen* und *Uranienburg*. *De la Condamine* gebrauchte Schieſspulver; auch *Cassini* bediente sich desselben, einen Grad der Länge in der Breite von $43\frac{1}{2}°$ zu messen. Die Flamme von 10 Pf. Pulver, das an einem Ort unweit des Ufers der mittelländischen See, von welchem aus man zwey Einsiedeleyen, die eine in den Gebürgen *S. Victorie* in *Provence*, die andere auf den Gebürgen von *Sette* in *Languedoc*, sehen konnte, angezündet wurde, war an beyden leztern Orten schon mit dem blosen Auge bemerkbar, und zeigte sich wie ein Bliz, der keine halbe Secunde dauerte *). Längenbestimmungen mit Feuerraketen führt H. *v. Zach* an in der *Canzler- und Meisnerischen Quartalschrift* 3 Jahrg. 5 Heft.

Das Verfahren selbst hat sonst keine Schwierigkeit, und ist von den oben beschriebenen Methoden durch Mondsfinsternisse und Verfinsterungen der Jupiterstrabanten nicht verschieden. Man kat hier den gedoppelten Vortheil einer *augenbliklichen* und von dem Ort des Beobachters auf der Erde *unabhängichen*

*) *Cassini de thury* la Meridiene de Paris.

gichen Erscheinung, so daſs man den Mittagsunterschied bis auf $\frac{1}{2}$ Sec. sicher bestimmen kann, besonders, wenn aus mehreren Beobachtungen ein Mittel genommen wird.

Bestimmung der Länge durch Beobachtung der Culminationen des Monds.

§. 229.

Wenn man an verschiedenen Orten die Zeiten beobachtet, welche zwischen der Culmination des Monds und eines gewissen Fixsterns verflieſsen, so werden diese Zeiten nicht gleich seyn, wenn die Orte nicht gleiche Länge haben, weil die gerade Aufsteigung des Monds sich sehr schnell ändert. Ein Beobachter, der den Mond zween Tage nacheinander mit einem Fixstern vergleicht, wird finden, daſs der Mond bey seiner zweyten Culmination ungefähr 50 Min. später in den Mittagskreis kommt; in der Zwischenzeit der Beobachtungen hat sich die Erde in Beziehung auf den Mond einmal um ihre Axe gedreht. Gesezt nun, ein Beobachter unter einem andern Meridian hätte an demselben Tage zwischen der Culmination des Monds und desselben Fixsterns 10 Minuten mehr gezählt, so wäre die Länge des leztern Orts um $\frac{10}{50}$. 360 oder 72° kleiner als des erstern. Hierauf gründet sich die von *Ed. Pigott* *) vorgeschlagene Methode, die Länge aus Durchgängen des Monds durch die Mittagsfläche zu finden. Herr *von Zach* bestimmte auf

*) Philos. Transactions for the Year 1786.

auf diese Art den Mittagsunterschied zwischen *Gotha* und *Manheim* *). Die Culmination des zweyten Mondsrandes wurde beobachtet in *Gotha* um

	$13^{U.}$	$47'$	$32'',45$	Sternzeit
der Spica	13	14	17,87	
Untersch. =		33	14,58	

Herr *Barry* beobachtete in *Manheim* die Culmination des zweyten Mondrandes um

	$13^{U.}$	$47'$	$53'',0$	Sternzeit
der Spica	13	14	17,2	Sternzeit
Untersch. =		33	35,8	
obig. Untersch. =		33	14,58	
			21,22	

folglich war die gerade Aufsteigung des Monds zur Zeit der Beobachtung in Manheim schon um $21'',22$ in Zeit oder $5'\,18'',3$ im Bogen gröfser, als zur Zeit der Culmination in Gotha. Um die Länge zu bestimmen, mufs die Veränderung der geraden Aufsteigung des Monds in einer gewissen Zeit gegeben seyn. Hat man diese nicht aus Beobachtungen, so mufs man sie aus den Ephemeriden nehmen. Herr *von Zach* sezte die 12stündliche Veränderung der geraden Aufsteigung des Monds = $6^{\circ}\,57'$. Nun macht man die Proportion

$$6^{\circ}\,57' : 5'\,18'',3 = 12^{St.} : x^{St.}$$

oder $25020'' : 3819'',6 = 12 : 0,15266^{St.}$

also $x = 9'\,9'',57$ = Mittagsuntersch.

Wenn man keine correspondirende Beobachtungen hat, so kann man statt derselben die Zeit der Culmination des Monds aus Ephemeriden

*) Jahrbuch für 1795, S. 250.

riden nehmen, so findet man den Mittagsunterschied zwischen dem Ort der Beobachtung und dem, für welchen die Ephemeriden berechnet sind. Allein hier kann der Fehler der Mondstafeln die Meridiandifferenz unsicher machen. Am sichersten ist es, wenn man correspondirende Beobachtungen hat, und auch die Veränderung der geraden Aufsteigung des Monds aus Beobachtungen herleitet. Herr *von Zach* hält diese Methode vor ebenso genau, als die der Jupiterstrabanten.

Das Azimuth eines Objects durch astronomische Beobachtungen zu bestimmen.

§. 230.

Wenn man, wie bereits oben gezeigt worden ist, einen Quadranten in die Mittagsfläche stellt, so kann man, nachdem man die Fernröhre horizontal gestellt hat, einen Punct auf der Erde finden, wo die verlängerte Mittagslinie hintrift. Findet sich in dem Meridian kein deutlicher Gegenstand, so kann man ein Zeichen aufrichten lassen, welches von dem Fadenkreuz der Fernröhre bedekt wird, wenn der Quadrant in der Mittagsfläche steht. Man sieht leicht, daſs der Quadrant sehr genau vertical stehen und die Fernröhre genau einen gröſsten Kreis beschreiben muſs, welches nicht leicht zu erhalten ist. Hat man einmal einen Gegenstand in der

Mittagsebene, so kann man alsdann Winkel zwischen ihm und zwischen andern Gegenständen messen: die, auf den Horizont reducirt, wenn die Schenkel des Winkels nicht horizontal seyn sollten, die Azimuthe erwähnter Puncte geben. Ohne mich in die verschiedene Methoden einzulassen, wie man vermittelst der Quadranten die Azimuthe von irdischen Objecten bestimmen kann, will ich hier noch zeigen, wie man nach der von Herrn *v. Zach* vorgeschlagenen Methode *) diese für die Geographie so nüzliche Aufgabe vermittelst des *Spiegelsextanten* auflösen kann.

§. 231.

Man messe, wenn die Sonne einige Grade hoch stehet, mit dem Sextanten den Abstand des nächsten Sonnenrandes von dem Gegenstand, dessen Azimuth man bestimmen will. Da die Fernröhre des Sextanten astronomisch ist, so liegt der Gegenstand immer zwischen der Sonne und ihrem Bild in der Fernröhre des Sextanten, wenn man den Abstand von dem nächsten Sonnenrande beobachtet. Das Sonnenbild wird durch die gefärbten Gläser *Z* Fig. 29 geblendet, wenn man nach dem irdischen Gegenstand geradezu siehet. Bey jeder Beobachtung bemerke man die Zeit der Uhr, deren Abweichung von der wahren Zeit bekannt seyn muſs. Läge so wohl der Gegenstand, als auch die Sonne in dem Horizont, so wäre die Summe des beobachteten Winkels und des Halbmessers der Son-

*) Astronom. Jahrbuch für 1793. S. 167. u. f.

Sonne, nachdem man auch den Error indicis angebracht hat, der Unterschied des Azimuths der Sonne und des irdischen Objects. Für den Augenblik der Beobachtung berechne man die Abweichung der Sonne, so kennt man in dem sphärischen Dreyek *PZS*, Fig. 46. das Complement der Breite *PZ*, die Polardistanz der Sonne *PS* und aus der wahren Zeit den Stundenwinkel *ZPS*. Hieraus findet sich der Winkel *PZS* oder das Azimuth der Sonne, folglich auch das Azimuth des irdischen Objects, weil beyder Unterschied aus der Beobachtung bekannt ist.

Liegen aber die Sonne und das Object nicht in dem Horizont, so müssen ihre Erhöhungswinkel bekant seyn. Die Höhe der Sonne kann man aus der Polardistanz, Breite und Stundenwinkel berechnen, und die gefundene wahre Höhe durch Strahlenbrechung uud Parallaxe in scheinbare verwandeln.

Diese Beobachtungen können nach einer Secundentaschenuhr gemacht werden, die nur etwa $\frac{1}{4}$ Stunde gleichförmig gehen darf. Man beobachtet in diesem Fall abwechselnd Höhen der Sonne und Abstände. Erstere dienen zur Bestimmung der Abweichung der Uhr von der wahren Zeit, um die wahre Zeit der beobachteten Abstände angeben zu können.

Mit dem §. 75. beschriebenen und Fig. 39 abgebildeten künstlichen Horizont können noch Höhen beobachtet werden, die nicht unter 2 Graden sind. Allein da man hier nicht mehr, wie bey der Sonne, Linien von der Mitte des künstlichen Horizonts und dem Mittelpunct des Sextanten nach dem irdischen Gegenstand, dessen Höhe man messen will, gezogen als parallel ansehen kann, so muſs folgende Verbesserung der beobachteten gedoppelten Erhöhungswinkel vorgenommen werden.

§. 232.

Verbesserung der mit dem künstlichen Horizont beobachteten Höhen irdischer Objecte.

Es seye Fig. 61 Taf. VII, AB der künstliche Horizont, O ein Object dessen Höhe über der Ebene des künstlichen Horizonts OCG man bestimmen will. Macht man den Winkel $OCG = ACF$, so muſs man die Axe der Fernröhre des Sextanten in die Lage DFC bringen, um das Bild O' des Objects O in dem künstlichen Horizont zu sehen. E seye der Mittelpunct des Sextanten, ab der grosse, cd der kleine Spiegel. Hat man nun die Axe der Fernröhre in die Richtung des zurükgeworfenen Strals DC, und den Sextanten in eine verticale Lage gebracht, so wird man, um auch das von dem groſsen und kleinen Spiegel reflectirte Bild in das Sehefeld der Fernröhre zu bringen, den groſsen Spiegel ab vermittelst der Alhidade so lange bewegen müssen, bis der halbe Neigungswinkel beyder Spiegel dem Winkel ODO', unter welchem die Verlängerung einer von dem Object O nach den Mittelpunct des Sextanten

ten

ten gezogenen geraden Linie OED den zurükgeworfenen Lichtstrahl CD schneidet, beynahe gleich ist. Bringt man alsdann durch eine kleine Bewegung des grofsen Spiegels die beyden Bilder zur Bedekung, so ist der halbe Neigungswinkel beyder Spiegel dem Winkel ODO' gleich (§. 36. S. 63.) Den Winkel ODO' erhält man also, wenn man den gemessenen gedoppelten Erhöhungswinkel durch den Collimationsfehler, wie man ihn durch die Sonne oder einen andern sehr entfernten Gegenstand gefunden hat, verbessert. Nun ist aber der wahre gedoppelte Erhöhungswinkel =

$$OCO' = ODO' + DOC$$

Es kömmt also nur darauf an, die von der Nähe des Gegenstands O herrührende Parallaxe DOC zu bestimmen. Den Abstand FC des Mittelpuncts des kleinen Spiegels von der Mitte des künstlichen Horizonts, oder dem Punct, wo die verlängerte Axe der Fernröhre die Ebene des Horizonts trift, kann man messen. Der Abstand EF der Mittelpuncte beyder Spiegel und der Winkel DFE sind aus dem Bau des Sextanten gegeben. (Bey obigem Sextanten ist $EF = 2$ Z. 11 Lin. und $DFE = 30°$. §. 64. S. 86.) In dem Dreyek DEF verhält sich

$$DF : \sin DEF = EF : \sin ODO'$$

also ist $DF = \dfrac{EF . \sin DEF}{\sin ODO'} = \dfrac{EF \sin OEF}{\sin ODO'}$

aber $OEF = ODO' + DFE$

daher $DF = \dfrac{EF \sin (ODO' + DFE)}{\sin ODO'}$

 End-

Endlich muſs noch der Abstand des Gegenstands CO ungefähr bekannt seyn, und man hat alsdann

$$DC : CO = \sin DOC : \sin ODO'$$

also

$$\sin DOC = \frac{DC}{CO} \sin ODO'$$

$$= \frac{FC}{CO} \sin ODO' + \frac{DF}{CO} \sin ODO'$$

$$= \frac{FC}{CO} \sin ODO'$$

$$+ \frac{FE}{CO} \sin (ODO' + DFE)$$

In den meisten Fällen werden FC und FE in Vergleichung mit CO sehr klein seyn, alsdann wird auch der Winkel DOC klein, und man kann für den Sinus den Bogen selbst sezen; da wird also in Secunden ausgedrükt

$$DOC = \frac{206265 . FC}{CO} \sin ODO'$$

$$+ \frac{206265\, FE}{CO} \sin (ODO' + DFE)$$

Dicser Winkel zu dem beobachteten gedoppelten Erhöhungswinkel addirt, gibt also die gedoppelte Höhe des Gegenstands über die Ebene des künstlichen Horizonts.

Beyspiel. Es seye der beobachtete gedoppelte Erhöhungswinkel $ODO' = 15° 30'$, $OC = 1375$ Fuſs; $FC = 15$ Z. $= 1,25$ Fuſs; FE wie oben $= 2$ Z, 11 Lin. $= 0,243$ F. und $DFE = 30°$, also $ODO' + DFE = 45° 30'$

$$\begin{aligned}
\text{Lg}\,206265 &= 5{,}3144251 \\
\text{Lg}\,FC &= 0{,}0969100 \\
\text{Lg}\sin ODO' &= \underline{9{,}4268988 - 10} \\
& \quad 4{,}8382339 \\
\text{Lg}\,CO &= \underline{3{,}1383027} \\
& \quad 1{,}6999312 \\
\text{I Theil} &= 50'',11 \\
\text{Lg}\,206265 &= 5{,}3144251 \\
\text{Lg}\,FE &= 0{,}3856063 - 1 \\
\text{Lg}\sin(ODO' + DFE) &= \underline{9{,}8532421 - 10} \\
& \quad 4{,}5532735 \\
\text{Lg}\,CO &= \underline{3{,}1383027} \\
& \quad 1{,}4149708 \\
\text{II Theil} &= \underline{26'',00} \\
\text{Summe} &= 76{,}11 = 1'\,16'',11
\end{aligned}$$

Folglich ist der gedoppelte Erhöhungswinkel über die Ebene des künstlichen Horizonts $= 15^\circ\ 31'\ 16'',11$, und die Höhe $OCG =$ $7^\circ\ 45'\ 38'',05$.

§. 233.

Wenn der Höhenwinkel unter 2 Graden ist, so kann man den §. 75 beschriebenen künstlichen Horizont nicht mehr gebrauchen, weil die Stralen zu schief auffallen, und die Spiegelebene sehr schmal erscheint. Herr Inspector *Köhler* in *Dresden* schlägt alsdann eine kleine mit einem Micrometer versehene Probierfernröhre vor (Man sehe den 36 §. S. 46), welche auf den nivellirten künstlichen Horizont gelegt mit dem Durchschnitt ihres Fadenkreuzes auf Puncte zeigt, die in dem Horizont liegen. Mit dem Micrometer kann man die Höhenwinkel oder auch Tiefen unter dem Horizont messen, die das halbe Sehefeld nicht übersteigen. Man kann der Fernröhre, ohne die Vergrösserung zu sehr zu schwächen, ein Sehefeld von 4 Graden geben, um die Lüke, welche der Sextant übrig läßt, auszufüllen.

§. 234.

Noch eine Art, mit dem Sextanten Höhen- und Tiefenwinkel zu messen, beruhet auf folgendem. Aus §. 65 wird begreiflich, wie man die Absehenslinie eines Visirlineals auf die Ebene eines Spiegels senkrecht richten kann. Gedenkt man sich nun einen horizontal gelegten Spiegel, und an dem Sextanten statt der Fernröhre ein Diopterlineal, so wird, wenn seine Absehenslinie nach §. 65 auf die Spiegelebene senkrecht gestellt wird, das Diopterlineal gegen das *Nadir* gerichtet seyn. Gegenstände, die nahe am Horizont liegen, wird man nur durch gedoppelte Reflexion von den beyden Spiegeln des Sextanten sehen können, wenn die Alhidade nahe bey 90° stehet, und man erhält, wenn man das Bild des Gegenstands an das Fadenkreuz der Fernröhre bringt, des leztern Abstand vom *Nadir;* zieht man von diesem 90° ab, so erhält man den Erhöhungswinkel; ist der Abstand vom Nadir kleiner als 90°, so wird der Erhöhungswinkel negativ, oder der Gegenstand liegt unter dem Horizont.

Das Visirlineal an dem Sextanten bestehet aus zwey Dioptern, die in eine Röhre eingesezt sind, welche statt der Fernröhre aufgeschraubt wird. Die Augendiopter ist eine elfenbeinerne Scheibe, wodurch die Röhre auf der einen Seite geschlossen wird. Auf ihre von dem Auge abgekehrte Seite sind 2 sich rechtwinklicht in dem Mittelpunct der Scheibe, welcher durchbohrt ist, durchkreuzende schwarze Linien. Die an dem andern Ende der Röhre angebrachte Diopter bestehet aus dem Fadenkreuz, dessen Fäden mit den Kreuzlinien auf der elfenbeinernen Scheibe parallel sind. Um leztere beleuchten zu können, ist die Röhre auf der Seite mit einer länglichten Öfnung versehen. Eine andere kurze Röhre schiebt sich über erstere, und trägt einen in einem Gewinde auf und nieder beweglichen Planspiegel, den man also stellen kann, daſs er das auf ihn fallende Licht durch die Seitenöfnung der Röhre auf die untere Fläche der elfenbeinernen Scheibe wirft. Sieht man nun durch die Öfnung der elfenbeinernen Platte in einen horizontal liegenden Spiegel, so wird man die Röhre so richten können, daſs ihr Fadenkreuz auf das Bild der Kreuzlinien, welche auf die untere Fläche der elfenbeinernen Scheibe gezeichnet sind, fällt. In diesem Fall steht die Absehenslinie vertical, und man siehet gerade gegen dem Nadir hin. Um einen horizontalen Planspiegel zu erhalten, kann man hier wieder Queksilber gebrauchen. Englische Künstler verfertigen hiezu einen eigenen künstlichen Horizont, den man bequem bey sich führen kann. *AB* Fig. 62 Taf. VII ist eine cylindrische hölzerne Büchse. In die cylindrische Hölung *CD* paſst genau der mit feinem Leder überzogene Zapfen *GH*, dessen untere Grundfläche ebenfalls mit einer ledernen Scheibe *ab* überzogen ist, welche eine kleine Öfnung *i* hat, und dem Queksilber einen Weg durch den Canal *IK* in die cylindrische Hölung *NPOQ* offen läſst. *RS* ist ein rundes Planglas, dessen Durchmesser etwas kleiner ist als der Durchmesser der Hölung *NO*. Der Boden *QO* ist gegen die Öfnung *K* hin etwas vertieft. Will man den Horizont gebrauchen, so legt man das Planglas *RS* auf den Boden *QO* und füllt das Gefäſs *CD* beynahe ganz mit Queksilber. Nun stekt man den Zapfen *GH* in die Hölung *CD* und drükt ihn nach und nach hinein, so wird das Queksilber genöthigt, durch die Öfnung *I*, welche so klein ist, daſs alle Unreinigkeiten zurükbleiben, in das Gefäſs *QP* aufzusteigen. Das Glas wird, wenn eine hinlängliche Menge Queksilber aufgestiegen ist, auf lezterem schwimmen und einen horizontalen Planspiegel abgeben. Nach dem Gebrauch wird alles Queksilber in die Büchse *CD* gegossen. Das Verbindungstük *TU* wird mit der Schraube *np* bey *NP* aufgeschraubt. Die andere Schraube *ef* paſst in *EF* und der mit Leder übezogene Theil *cd* drükt sich auf den bey *C* vorspringenden Rand an, um das Queksilber ganz in die Büchse *AB* zu verschlieſsen. Damit das Glaſs *RS* nicht beschädigt

digt werde, wird der in der Hölung *NPQO* noch übrig bleibende Raum mit feinem Papier ausgefüllt. Der ganze Apparat macht nun ein Stük aus, und kann, weil das Planglas nur etwa 15 Lin. im Durchmesser haben darf, bequem in der Tasche getragen werden.

Wenn man den Error indicis an der Stelle, wo man den Höhenwinkel messen will, vermittelst des Gegenstands selbst bestimmt, dessen Höhe über dem Horizont man sucht, so erhält man genau die Höhe über eine durch den Mittelpunct des Sextanten gezogene Horizontallinie. Gebraucht man aber den durch Beobachtungen der Sonne bestimmten Collimationsfehler, so muſs man zu dem beobachteten Abstand vom Nadir noch den Winkel addiren, welchen Linien an den groſsen und kleinen Spiegel von dem Object aus gezogen mit einander machen.

§. 235.

Reduction der Winkel auf den Horizont.

Durch die beyden Gegenstände und durch den Standpunct des Beobachters lege man ein Paar Verticalebenen, so ist beyder Ebenen Neigungswinkel der auf den Horizont reducirte Winkel beyder Objecte; ihre Abstände vom Scheitel des Beobachters und der beobachtete schiefe Winkel werden durch Bogen gröſster Kreise gemessen, welche ein sphärisches Dreyek bilden. Der Bogen, welcher den schiefen Winkel miſst, steht dem sphärischen Winkel gegenüber, der dem horizontalen

talen Winkel gleich ist. Heiſst nun der beobabtete shiefe Winkel W, der horizontale H und die beyden Erhöhungswinkel (die Complemente der Seiten, welche den horizontalen Winkel einschlieſsen) a und b, so hat man die bekannte Gleichung:

$$\cos W = \cos H \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

also $$\cos H = \frac{\cos W - \sin a \sin b}{\cos a \cos b}$$

oder, wie oben bey der Bestimmung des Stundenwinkels aus der Breite, Höhe und Polardistanz der Sonne gezeigt wurde

$$(\sin \tfrac{1}{2} H)^2 = \frac{\sin \frac{1}{2}(W + a - b) \sin \frac{1}{2}(W - a + b)}{\cos a \cos b}$$

Ist aber H beynahe $= 180°$, so kann man sicherer folgende Formel gebrauchen:

$$(\cos \tfrac{1}{2} H)^2 = \frac{\cos \frac{1}{2}(W + a + b) \cos \frac{1}{2}(W - a - b)}{\cos a \cos b}$$

Näherungsformeln, die man gebrauchen kann, wenn die Winkel a und b klein sind, findet man in H. Hofrath *Kästners astron. Abhandlungen, I Samml.* S. 41 u. f.

Liegt der eine Gegenstand im Horizont, oder ist $b = 0$, so hat man

$$\cos H = \frac{\cos W}{\cos a}$$

oder $$(\sin \tfrac{1}{2} H)^2 = \frac{\sin \frac{1}{2}(W + a) \sin \frac{1}{2}(W - a)}{(\cos a)^2}$$

und $$(\cos \tfrac{1}{2} H)^2 = \frac{\cos \frac{1}{2}(W + a) \cos \frac{1}{2}(W - a)}{(\cos a)^2}$$

§. 236.

Erläuterung der Methode, das Azimuth eines irdischen Objects zu bestimmen durch ein Beyspiel.

Den 17 Jul. 1792 beobachtete ich in *Altburg* folgende Abstände der Sonne von einer gegen Süd-Süd-Ost auf einem kegelförmigen $5\frac{1}{2}$ Meilen entfernten Berge liegenden Capelle. Die Zeiten wurden nach einer Secundentaschenuhr beobachtet.

	Vormitt.	Abstände
I.	$4^{U.}\ 41'\ 18''$	$83^\circ\ 43'\ 58''$
II.	-- 45 45	82 54 12
III.	-- 48 30	82 24 41
IV.	-- 58 28	80 39 8

Die Abstände sind schon wegen des Collimationsfehlers verbessert und um $15'\ 47''$ (Halbmesser der Sonne) vermindert, weil die Abstände des entferntesten Sonnenrandes genommen wurden. Dazwischen hinein nahm ich zur Berichtigung der Uhr folgende Sonnenhöhen:

		wahre Höhen.
A.	$4^{U.}\ 43'\ 18''$	$3^\circ\ 11'\ 23''$
B.	-- 47 23	3 46 35
C.	-- 51 16	4 20 55
D.	5 0 20	5 40 13

Aus der Höhe und Abweichung der Sonne findet man mit Zuziehung der Breite auf oben gezeigte Art den Stundenwinkel der Sonne, folglich die wahre Zeit jeder Beobachtung. Die Sonnenhöhen gaben nun folgende Resultate:

Zeit

Zeit d. Uhr	berechnete w. Zeit	Abw. v. d. w. Zeit
$4^{U.}\ 43'\ 18''$	$4^{U.}\ 38'\ 6''$	$5'\ 12''$
-- 47 23	-- 42 9	5 14
-- 51 16	-- 46 4	5 12
5 0 20	-- 55 1	5 19

Die Abweichungen der Uhr von der wahren Zeit sollten einander gleich seyn, wenn die Beobachtungen genau wären. Allein da die Uhr vom 16 auf den 17 Jul. der wahren Zeit in 24 St. um $8'\ 53''$ voreilte, so kommt noch der Gang der Uhr in der Zwischenzeit der Beobachtungen in Betrachtung. Man erhält, wenn man das Mittel aus den Zeiten der Uhr und aus ihren Abweichungen von der wahren Zeit nimmt, um $4^{U.}\ 50'\ 28'',25$ Zeit de Uhr ihre Abweichung von der w. Zeit $= 5'\ 14'',25$ Nun wurde die erste Beobachtung $7'\ 10'',25$ vor dem so eben gefundenen mittleren Zeitpunct gemacht, folglich ist die eigene Voreilung der Uhr ihrem oben angegebenen Gang zufolge in dieser Zwischenzeit $= 1'',75$, also ihre Abweichung von der wahren Zeit im Augenblik der ersten Beobachtung $= 5'\ 14'',25 - 2'',6 = 5'\ 11'',6$. Auf diese Art fanden sich der Ordnung nach folgende Abweichungen der Uhr: $5'\ 11'',6$; $5'\ 13'',0$; $5'\ 14'',5$; $5'\ 18'',0$, welche schon besser mit obigen aus den Beobachtungen selbst hergeleiteten stimmen.

Ist der Gang der Uhr nicht bekannt, so muſs man sämmtliche Beobachtungen in zwo ungefähr gleich groſse Classen theilen, und aus den in jeder Classe befindlichen Resultaten ein Mittel nehmen, um für zwey mittlere Zeitpuncte der Uhr Abweichung von der

wah-

wahren Zeit zu bekommen, woraus man sodann den Gang der Uhr herleiten kann.

	$4^{U.}\ 43'\ 18''$	$5'\ 12''$
	4 47 23	5 14
Summe	9 30 41	10 26
Mittel	4 45 20,5	5 13

Ebenso findet sich aus den beyden lezten Beobachtungen im Mittel um

	4 55 48,0	5 15,5
Untersch.	10 27,5	2,5

Hienach wäre die Voreilung der Uhr in $10'\ 27'',5$ $= 2'',5$. Man sehe hierüber *Lamberts Beyträge zum Gebrauch der Mathematik, I Th.* S. 431 u. f. Man mufs aber dieses Mittel, den Gang der Uhr zu bestimmen, nur alsdann gebrauchen, wenn man keine andere Beobachtungen hat.

Lege ich obige Abweichung der Uhr von der wahren Zeit $= 5'\ 14'',25$ um $4^{U.}\ 50'\ 28'',25$ Zeit der Uhr, und ihren täglichen Gang $+$ $8'\ 53''$ zum Grunde, so finde ich folgende wahre Zeiten der beobachteten Abstände:

I.	$4^{U.}\ 36'\ 8''$
II.	-- 40 33
III.	-- 43 17
IV.	-- 53 11

und aus der nun bekannten wahren Zeit, Abweichung der Sonne und Polhöhe folgende dazu gehörige wahre Sonnenhöhen:

$2^{\circ}\ 54'\ 24''$
3 32 40
3 56 58
5 23 38

Um

Um die den beobachteten Abständen gegenüber stehenden Winkel (die horizontalen Winkel zwischen der Sonne und dem irdischen Object) zu berechnen, muſs man aus den wahren Sonnenhöhen die *scheinbaren* herleiten, indem die Stralenbrechung addirt die Parallaxe abgezogen wird.

Der irdische Gegenstand lag beynahe in dem Horizont, also kann man $b = 0$ sezen, und man hat, wenn die scheinbare Sonnenhöhe a, der beobachtete Abstand W heiſst

$$\cos H = \frac{\cos W}{\cos a} \quad (\S. 235.)$$

Die erste Höhe in scheinbare verwandelt ist $= 3^{\circ}\ 8'\ 25'' = a$ und $W = 83^{\circ}\ 43'\ 58''$, also

$$\begin{aligned} Lg \cos W &= 9{,}0380860 \\ C.\ Lg \cos a &= 0{,}0006526 \\ \hline Lg \cos H &= 9{,}0387386 \\ H &= 83^{\circ}\ 43'\ 24'' \end{aligned}$$

Da man für den Augenblik der Beobactung die wahre Sonnenhöhe, ihre Abweichung und den Stundenwinkel kennt, so findet man leicht das Azimuth der Sonne. Es verhält sich in dem sphärischen Dreyek PZS Fig. 46 Taf. IV

$$\sin PZS : \sin ZPS = \sin PS : \sin ZS$$

also ist, wenn die wahre Sonnenhöhe $= h$, Stundenwinkel $= t$ und die Abweichung der Sonne $= \delta$ gesezt wird, der Sinus des Azimuths α

$$= \frac{\sin t \cos \delta}{\cos h}$$

Für

Für die erste Beobachtung ist $t = 110^\circ\, 58'\, 0''$; $\delta = 21^\circ\, 7'\, 39''$; und $h = 2^\circ\, 54'\, 24''$, also

$$\begin{aligned} \text{Lg}\sin t &= 9{,}9702486 \\ \text{Lg}\cos\delta &= 9{,}9697795 \\ \text{C. Lg}\cos h &= 0{,}0005591 \\ \hline \text{Lg}\sin\alpha &= 9{,}9405872 \\ \alpha &= 60^\circ\, 42'\, 30'',7 \end{aligned}$$

oder von Mittag an gerechnet

$$\begin{array}{lr} & 119^\circ\, 17'\, 29'',3 \\ \text{oben war } H = & 83\ \ 43\ \ 24,0 \\ \hline \text{Azimuth der Capelle} = & 35\ \ 34\ \ \ 5,3 \end{array}$$

Die übrigen drey Beobachtungen gaben

$$\begin{array}{lr} & 35^\circ\, 35'\, 35'' \\ & 35\ \ 35\ \ 29 \\ & 35\ \ 34\ \ 24 \\ \hline \text{Mittel aus allen} & 35\ \ 34\ \ 53 \end{array}$$

Theils um den Gebrauch der Formel §. 235 zur Reduction der Winkel auf den Horizont zu erläutern, theils um zu zeigen, daſs man in solchen Fällen, wo der Erhöhungswinkel des einen Objects sehr klein, und der schiefe Winkel nicht sehr klein oder nahe bey 180 Gr. ist, die Formel $\cos H = \frac{\cos W}{\cos a}$ ohne merklichen Fehler gebrauchen könne, will ich noch den ersten schiefen Winkel $= 83^\circ\, 43'\, 58''$ auf den horizontalen reduciren, wen man auch auf den Erhöhungswinkel des irdischen Objects, welcher $= 0^\circ\, 2'\, 30''$, Rüksicht nimmt. Hier ist also

 $W =$

$$
\begin{array}{rlll}
W = & 83^\circ\ 43'\ 58'' & & \\
a = & 3\quad 8\ 25 & \text{C.Lg}\cos = 0{,}0006526 & \\
b = & 0\quad 2\ 30 & \text{C.Lg}\cos = 0{,}0000001 & \\
\hline
a-b = & 3\quad 5\ 55 & & \\
\frac{1}{2}(a-b) = & 1\quad 32\ 57{,}5 & & \\
\frac{1}{2}W = & 41\quad 51\ 59 & & \\
\text{Summe} = & 43\quad 24\ 56{,}5 & \text{Lg}\sin = 9{,}8371378 & \\
\text{Untersch.} = & 40\quad 19\quad 1{,}5 & \text{Lg}\sin = 9{,}8109158 & \\
 & & \overline{19{,}6487063} & \\
 & & \text{Lg}\sin\frac{1}{2}H = 9{,}8243531 & \\
\text{also}\ \frac{1}{2}H = & 41^\circ\ 51'\ 46'' & & \\
H = & 83\quad 43\ 32 & &
\end{array}
$$

folglich um 8″ gröſser als der oben gefundene horizontale Winkel.

Man erhält, wenn die Rechnung durchaus genau geführt wird, für das Azimuth obiger Capelle von Mittag an gegen Morgen gerechnet.

$35^\circ\ 34'\ 46''$

Z u s ä z e.

Zu §. 40.

Bestimmung des Collimationsfehlers eines Quadranten durch den künstlichen Horizont.

Man stelle den Quadranten in die Mittagsfläche (§. 139.) und beobachte die Mittagshöhe eines Sterns, die nicht über mehrere Grade betragen darf, wenn der Quadrant,

wie

wie gewöhnlich, nur einige Grade jenseits des Nullpuncts hat. Nahe bey dem Mittelpunct des Quadranten seze man vor das Objectiv hin einen künstlichen Horizont (§. 71 u. f.), der genau nivellirt seyn muſs, wenn man nicht die Oberfläche des Queksilbers hiezu gebraucht, so daſs man durch die Fernröhre, die nun unter den Horizont geneigt wird, das reflectirte Bild des culminirenden Sterns sehen kann. Stellt man den horizontalen Faden der Fernröhre auf den Stern, so gibt der Quadrant des Sterns Tiefe unter dem Horizont an, die genau so groſs seyn muſs, als seine Höhe über dem Horizont, indem man die Fernröhre geradezu auf ihn richtete, wenn der Collimationsfehler = o ist. Der zwischen beyden Lagen der Fernröhre enthaltene Winkel ist des Sterns gedoppelte Höhe; also die halbe Summe der Höhen- und Tiefenwinkel des Sterns verbesserte scheinbare Höhe, ihr halber Unterschied der Collimationsfehler.

Da sich die Höhen der Sterne nahe am Mittag nur wenig ändern, wenn sie, wie hier erfordert wird, so niedrig durch den Meridian gehen, so kann man beyde Beobachtungen während desselben Durchgangs durch den Mittagskreis machen. Am sichersten ist es, die Zeiten der Beobachtungen nach einer berichtigten Uhr zu bemerken, um allenfalls die Höhen auf den Mittag reduciren zu können (§. 133 u. f.). Steht der Quadrant in dem Mittagskreis unbeweglich, so wird man beyde Höhen, oder wenigstens eine derselben nehmen müssen, wenn der Stern von dem Mittagsfaden absteht. Der Unterschied zwischen den beobachteten Höhen und den Mittagshöhen oder Tiefen kann aber hier nach §. 135 u. f. berechnet werden.

Die eine Beobachtung an diesem, die andere am folgenden Tage zu machen, ist wegen der Veränderung der Stralenbrechung, die in so kleinen Höhen sehr beträchtlich seyn kann, nicht zu rathen.

Statt des Sterns könnte man auch einen deutlichen Gegenstand auf der Erde gebrauchen. Nur müſste in diesem Fall eine ähnliche Verbesserung angebracht werden, als §. 232. bey dem Gebrauch des Sextanten gezeigt wurde.

Diese Art, den Collimationsfehler zu bestimmen, kann bey Halbkreisen, dergleichen an geometrischen Werkzeugen angebracht sind, mit Vortheil gebraucht werden, zumal da die oben §. 40 gezeigte Berichtigung durch Umkehrung hier nicht angeht. Herr Professor *Tralles* in *Bern* *) gebrauchte bey seinem Theodolit ebenfalls diese Methode und *Boscovich* **) bey der Berichtigung eines Mauerquadranten.

Weil man leichter den Stern geradezu als sein Bild in dem künstlichen Horizont finden kann, so kann man mit lezterer Beobachtung den Anfang machen. Kennt man den Collimationsfehler schon beynahe, so kann man die

*) Bestimmung der Höhen der bekanntern Berge des Canton Bern. S. 75.

**) *Boscovichii* Opera pertinentia ad Opticam et Astronomiam &c. Tom. IV.

die Fernröhre schon im voraus auf die berechnete scheinbare Mittagstiefe stellen, und den künstlichen Horizont in seine gehörige Lage bringen, welches die Beobachtung erleichtern und die dazu erforderliche Zeit abkürzen wird. Sind in der Fernröhre auf beyden Seiten des Mittagsfadens zween andere in gleichen Abständen von ersterem und mit ihm parallel ausgespannt, so kann man die eine Beobachtung machen, wenn der Stern an den ersten Faden kommt, die andere, wenn er am lezten Faden ist. Beyde Höhen sind um gleiche und auf derselben Seite liegende Grössen von der Mittagshöhe verschieden (§. 135 u. f.), also hat man hier keine Reduction auf den Mittag nöthig, wenn man nur den Collimationsfehler verlangt.

Zu §. 69.

Untersuchung der gefärbten Gläser am Sextanten.

Zur Erläuterung des 69. §. wähle ich folgende Beobachtungen, die ich mit einem 4zolligen Sextanten machte *). Ausser den gefärbten Gläsern an den beyden Spiegeln gehört zu dem Sextanten noch ein dunkelbraunes Glas, welches vor dem Ocular der Fernröhre angebracht werden kann. Ich schob

*) Diesen Sextanten erhielt ich von *Troughton* in *London*. Er hat einen silbernen Gradbogen und ist von 20 zu 20 Minuten eingetheilt. Der Vernier gibt 30 Secunden, wie an dem oben §. 22 beschriebenen 5zolligen Sextanten.

schob alle gefärbten Gläser zurük, und blendete die beyden Sonnenbilder zugleich durch das dunkle Glas am Ocular. D. 26 Jul. 1794 fand ich auf diese Art den Durchmesser der Sonne

$$\begin{array}{rl} & 31'\ 30'' \\ & 31\ \ 45\ \text{Exced.} \\ \hline \text{Diff.} = & 15 \\ \text{Error ind.} = & 7,5\ \text{add.} \end{array}$$

Nun nahm ich das dunkle Glas am Ocular weg, und blendete die Sonnenbilder, indem ich bey jedem Spiegel das dunkelste Glas vorschob. Der Durchmesser der Sonne fand sich

$$\begin{array}{rl} = & 31'\ 15'' \\ & 32\ \ \ 0\ \text{Exced.} \\ \hline \text{Diff.} = & 45 \\ \text{Error ind.} = & 22,5\ \text{add.} \end{array}$$

Man sieht hieraus, daſs die gefärbten Gläser an den Spiegeln den Collimationsfehler um 15 Secunden änderten, und also wenigstens eines derselben etwas prismatisch war.

Die gefärbten Gläser des Sextanten liessen sich in ihren Fassungen gedrang umdrehen. Ich machte daher an dem Rande eines jeden Glases, so wie an dem anliegenden und diametraliter gegenüber stehenden Punct der Fassung Zeichen, an welchen ich sehen konnte, wenn das Glas um 180° umgedreht war.

Zuerst drehte ich das dunkelste Glas zwischen dem groſsen und kleinen Spiegel um 180°, blendete durch dieses und durch das dunkelste Glas hinter dem kleinen Spiegel die Sonnenbilder, und fand den Sonnendurchmesmesser wieder = 31′ 15″ disseits des Nullpuncts wie oben. Der Fehler mufste nun in dem Glase hinter dem kleinen Spiegel liegen. Nachdem ich dieses um 180° gedreht hatte, fand ich den Sonnendurchmesser disseits des Nullpuncts = 31′ 45″, also um 30″ gröfser als in der erstern Lage des Glases. Die Hälfte davon = 15″ ist der Winkel, um welchen die Stralen von ihrer Richtung abgelenkt werden bey dem Durchgang durch das gefärbte Glas. Folglich mufs man für die erste Lage des Glases 15″ zu dem vermittelst der gefärbten Gläser am grofsen und kleinen Spiegel gefundenen Collimationsfehler addiren, und für die zweyte Lage 15″ abziehen, um den Collimationsfehler zu bekommen, welchen man würde gefunden haben, wenn die Lichtstralen in den gefärbten Gläsern keine Brechung gelitten hätten. Nun gab der Sextant die Winkel disseits des Nullpuncts um 22″,5 zu klein, 15″ hievon rührten von der Brechung des gefärbten Glases her, also würde der Sextant ohne gefärbte Gläser die Winkel nur um 22″,5 − 15″ = 7″,5 zu klein angegeben haben, wie auch würklich durch den Gebrauch des dunkeln Glases vor dem Ocular gefunden wurde.

Hätte ich nun einen Abstand des Monds von der Sonne gemessen, und bey dieser Beobachtung das Sonnenbild durch gedoppelte Reflexion in die Fernröhre gebracht, also leztere geradezu nach dem Mond gerichtet, so hätte ich nur 7″,5 zu den gemessenen Abständen addiren dürfen, weil das dunkle Glas zwi-

zwischen dem groſsen und kleinen Spiegel den Collimationsfehler nicht änderte. Dasselbe ist bey Beobachtungen zur Bestimmung des Azimuths eines irdischen Objects (§. 231.) zu bemerken.

Zu §. 81.

Simpson's Formel für die mittlere astronomische Stralenbrechung läſst sich im allgemeinen so ausdrüken:

$$\varrho = \frac{1}{m}(z - \text{Arc.}\sin(\sin(90^\circ - mR)\sin z))$$

wo $R =$ der horizontalen Stralenbrechung. Simpson sezt $m = \frac{11}{2}$. Sezt man die beständige Gröſse $\sin(90^\circ - mR) = n$, so wird

$\sin(z - m\varrho) = n\sin z$, und es verhält sich

$\sin z : \sin(z - m\varrho) = 1 : n$, also

$$\sin z - \sin(z - m\varrho) : \sin z + \sin(z - m\varrho) = 1 - n : 1 + n$$

aber $\sin a - \sin b : \sin a + \sin b =$

$$\text{tang}\left(\frac{a-b}{2}\right) : \text{tang}\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

daher

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}m\varrho : \text{tang}(z - \tfrac{1}{2}m\varrho) = 1 - n : 1 + n$$

ferner

$$\begin{aligned} 1 - n : 1 + n &= 1 - \sin(90^\circ - mR) : 1 + \sin(90^\circ - mR) \\ &= 2\left(\sin\frac{mR}{2}\right)^2 : 2\left(\cos\frac{mR}{2}\right)^2 \\ &= \left(\text{tang}\,\frac{mR}{2}\right)^2 : 1 \end{aligned}$$

folg-

folglich

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}m\varrho : \operatorname{tang}(z-\tfrac{1}{2}m\varrho) = \left(\operatorname{tang}\frac{mR}{2}\right)^2 : 1$$

oder, weil ϱ nicht viel über einen halben Grad beträgt

$$\tfrac{1}{2}m\varrho : \operatorname{tang}(z-\tfrac{1}{2}m\varrho) = \left(\operatorname{tang}\frac{mR}{2}\right)^2 : 1$$

für die scheinbare Zenithdistanz z' seye die Stralenbrechung $= \varrho'$, so verhält sich

$$\tfrac{1}{2}m\varrho' : \operatorname{tang}(z'-\tfrac{1}{2}m\varrho') = \left(\operatorname{tang}\frac{mR}{2}\right)^2 : 1$$

also $\varrho : \varrho' = \operatorname{tang}(z-\tfrac{1}{2}m\varrho) : \operatorname{tang}(z'-\tfrac{1}{2}m\varrho')$

und nach Simpson

$\varrho : \varrho' = \operatorname{tang}(z-\tfrac{11}{4}\varrho) : \operatorname{tang}(z'-\tfrac{11}{4}\varrho')$

welches die in der Anmerkung zu dem 81 §. angeführte Formel ist. Nun sezt *Bradley* 3. statt $\frac{11}{4}$, und die Stralenbrechung für 45° scheinbare Höhe $= 57''$, also verhält sich

$\operatorname{tang} 3.57'' : \operatorname{tang}(45^\circ - 3.57'') = (\operatorname{tang} 3R)^2 : 1$

und man hat $(\operatorname{tang} 3R)^2 = \dfrac{\operatorname{tang}(2'\,51'')}{\operatorname{tang}(44^\circ\,57'\,9'')}$

$$= \operatorname{tang}(2'\,51'')\operatorname{cotang}(44^\circ\,57'\,9'')$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Lg}\operatorname{tang}(2'\,51'') &= 6{,}9185711\\
\mathrm{Lg}\operatorname{cotang}(44^\circ\,57'\,9'') &= \underline{10{,}0007201}\\
\mathrm{Lg}(\operatorname{tang}3R)^2 &= 16{,}9192912\\
\mathrm{Lg}\operatorname{tang}3R &= 8{,}4596456\\
3R &= 1^\circ\,39'\,2'',24\\
R &= 0\;\;33\;\;0{,}74
\end{aligned}$$

also die horizontale Stralenbrechung $= 33'\,0'',74$. In der Bradleyschen Tafel ist sie $= 33'\,0''$.

Wird die horizontale Stralenbrechung = 33′ 0″ gesezt, so findet man die Stralenbrechung für 45° scheinbare Höhe durch die Formel

$$\text{tang}\, 3\varrho = (\text{tang}\,(1°\,39'))^2\, \text{tang}\,(45° - 3\varrho)$$

oder weil man ϱ schon beynahe kennt

$$\text{tang}\, 3\varrho = (\text{tang}\,(1°\,39'))^2\, \text{tang}\,(44°\,57'\,9'')$$

$$\begin{aligned} 2.\,\text{Lg tang}\,(1°\,39') &= 16{,}9189628 \\ \text{Lg tang}\,(44°\,57'\,9'') &= \underline{9{,}9992799} \\ \text{Lg tang}\, 3\varrho &= 6{,}9182427 \\ 3\varrho &= 2'\,50'',87 \\ \varrho &= 56'',956 \;{}^{*)} \end{aligned}$$

Sezt man nun die horizontale Stralenbrechung = 33′ 0″, so wird $\sin(90° - mR) = \sin(90° - 6.\,33') = 0{,}9983418$; gebraucht man aber die aus der Stralenbrechung für 45° Höhe = 57″ hergeleitete horizontale Stralenbrechung = 33′ 0″,74, so erhält man $\sin(90° - mR) = 0{,}9983407$, und man hat folgende beyde Formeln

$$\sin(z - 6\varrho) = 0{,}9983418 \sin z$$

$$\sin(z - 6\varrho) = 0{,}9983407 \sin z$$

Bey der Mayerschen Formel für die wahre Stralenbrechung in dem 81 §. ist von dem Thermometer die Rede, welches Mayer bey seinen Beobachtungen gebrauchte. Dieses Thermometer wurde von *de Luc* nach England genommen, daselbst mit einem Queksilberthermometer des H. *Cavendish* verglichen, an welchem der Siedpunct bey 29,8 engl. Z. (27,94 par. Z.) Barometerhöhe bestimmt

*) *H. v. Zach* hat wirklich in seiner Tafel nur 56″,9. *Tab. mot.* ☉ Tab. XLI.

stimmt war *), und hernach wieder nach Göttingen gebracht, wo es noch auf der Sternwarte aufbewahrt wird. Die Vergleichung gab folgende übereinstimmende Puncte

Fahrenheit. Cavendish	Fahrenh. bey Mayers Thermom.
212	215,2
210	213,5
190	195,9
170	175,9
150	155,8
130	135,5
110	114,4
90	93,4
70	72,5
50	51,2
30	30,4
15	14,9
10	9,7

In schmelzendem Eis zeigte das Thermometer des H. *Cavendish* 32 (etwas sehr weniges darüber), Mayers Thermometer 32,5. Man sieht hieraus, daſs der Gang des Thermometers nicht ganz gleichförmig war, doch waren die Fehler an den Stellen, welche bey den gewöhnlichen Lufttemperaturen gebraucht werden, nur geringe, und man findet (da Mayer 82,5 bey 212 seiner Fahrenheitschen Scale sezte)

36 Mayersche Grade = 75 Fahrenheitschen **)

Da

*) Journal des Savans pour l'année 1791 Fevrier.

**) Man findet, wenn man die Grade von 15 bis 90 nimmt, 75 Fahrenh. Cav. = 78,5 Fahrenh. May. = 35,979 der Mayerschen Scale von 82,5 zwischen dem Siedpunct und Eispunct.

Da nun 9 Fahrenheitsche Grade $=$ 4 Gr. des 80theiligen Queksilberthermometers sind, so machen 36 May. Gr. $33\frac{1}{3}$ Gr. der leztern Scale. Heifst nun die Anzahl Grade des Mayerschen Thermometers t, des 80theiligen Queksilberthermometers r, so hat man

$$t = 1,08 . r$$

Hienach wird in der Formel S. 113, wenn statt t Grade des 80theil. Queksilberthermom. gesezt werden, der Coefficient von $r =$ $0,0046 . 1,08 = 0,004968$.

Hienach verhielten sich die Räume, welche ein gewisses Volumen von Luft bey dem Eispunct und Siedpuncte einnimmt $=$ 1000 : 1397

nach Amontons hat man	1400 *)
Lambert	1375
de Luc	1403
Shuckburgh	1437,4
Roy	1484,21
Kramp	1381
de Saussure	1339
Mittel	1402,8

welches obigem Verhältnifs ziemlich nahe kommt, und den Coefficienten von r gleich 0,005035 gibt; oben wurde durch die Berichtigung des Mayerschen Thermometers gefunden 0,004968, wofür man der Kürze halber 0,005 sezen kann.

Gebraucht man also bey den Beobachtungen ein Queksilberthermometer, an welchem der Siedpunct bey 29,8 engl. Zollen Barome-

*) *Gehlers* physikalisches Wörterbuch 3 Th. S. 20.

rometerhöhe bestimmt und der Raum zwischen ersterem und dem Eispunct in 80 gleiche Theile getheilt ist, so hat man, wenn r die Anzahl Grade über dem Eispunct ist,

$$\text{Refract.} = \frac{70'',71 . b \sin\delta}{\sqrt{(1 + 0{,}005 . r)}} \times$$
$$\left(\sqrt{\left(1 + \frac{(16{,}5 \cos\delta)^2}{1 + 0{,}005 . r}\right)} - \frac{16{,}5 \cos\delta}{\sqrt{(1 + 0{,}005 . r)}}\right)$$

Bradley berechnete seine Tafel der mittlern Stralenbrechung für die Barometerhöhe 29,6 engl. Zolle (27,775 par. Z.) und für 50 Gr. des Fahrenheitschen Thermometers. Um also die Mayersche Stralenbrechungen mit erstern zu vergleichen, seze man in Mayers Formel $b = 27{,}775$ und $r = + 8$, so hat man nach S. 113.

$$\text{Tang}\,\omega = \frac{0{,}0618061}{\cos\delta}$$
$$\text{Refract.} = 1851'',78 \sin\delta \,\text{tang}\, \tfrac{1}{2}\omega$$
$$\text{Lg}\, 0{,}0618061 = 8{,}7910327 - 10$$
$$\text{Lg}\, 1851{,}78 = 3{,}2675890$$

So findet man für 80° scheinb. Abstand vom Zenith.

$$\begin{aligned}
\text{Lg}\, 0{,}0618061 &= 8{,}7910327 \\
\text{C. Lg} \cos\delta &= \underline{0{,}7603298} \\
\text{Lg tang}\,\omega &= 9{,}5513625 \\
\omega &= 19^\circ\, 35'\, 51'',5 \\
\tfrac{1}{2}\omega &= 9 \;\; 47 \;\; 45{,}75 \\[1ex]
\text{Lg}\, 1851'',78 &= 3{,}2675890 \\
\text{Lg} \sin\delta &= 9{,}9933515 - 10 \\
\text{Lg tang}\, \tfrac{1}{2}\omega &= \underline{9{,}2371878 - 10} \\
\text{Lg Refr.} &= 2{,}4981283
\end{aligned}$$

Re-

Refract. = 314″,868
= 5′ 14″,868
nach *Bradley* 5 14,8 Taf. III.

Unterschied = 0,068

Hienach ist folgende Tafel berechnet:

Z. D.	Stralenbr.		Z. D.	Stralenbr.	
90	30′	51″,8	62	1′	47″,2
89	23	21,1	61	1	42,8
88	18	0,3	60	1	38,7
87	14	17,3	59	1	34,9
86	11	40,6	58	1	31,2
85	9	47,7	57	1	27,8
84	8	23,7	56	1	24,6
83	7	19,4	55	1	21,5
82	6	28,9	54	1	18,5
81	5	48,2	53	1	15,8
80	5	14,9	52	1	13,1
79	4	47,1	51	1	10,5
78	4	23,5	50	1	8,1
77	4	3,4	49	1	5,6
76	3	45,9	48	1	3,4
75	3	30,6	47	1	1,2
74	3	17,1	46	0	59,2
73	3	5,1	45	0	57,1
72	2	54,4	44	0	55,1
71	2	44,7	40	0	47,9
70	2	36,0	35	0	40,0
69	2	28,0	30	0	33,0
68	2	20,7	25	0	26,6
67	2	14,0	20	0	20,8
66	2	7,8	15	0	15,3
65	2	2,1	10	0	10,1
64	1	56,7	5	0	5,0
63	1	51,8	0	0	0,0

Mayers Formel gibt also die Stralenbrechungen von 81 — 90 Z. Dist. kleiner, und von 80 — 0 gröfser als die Bradleysche, zwischen 80 u. 81 ist der Unterschied $= 0$. Von 82 — 0 beträgt der Unterschied nie über eine halbe Secunde. Diese Übereinstimmung hat schon *de Luc* bemerkt, welcher auf folgende Art die Bradleysche und Mayersche Formel auf denselben Zustand der Luft reducirte. Er sagt a. a. O. «Um diese beyden Formeln auf denselben beständigen Zustand der Luft zu reduciren, mufs man in der Mayerschen machen $b = 27{,}77$ par. Zollen, welche mit den von Bradley vestgesezten 29,6 engl. Z. correspondiren: und um sie auf dieselbe Temperatur zu bringen, da Bradley sie 18 Fahrenheitsche Grade höher sezt als Mayers Nullpunct, brachte ich sie darauf durch die *Gleichung des leztern*, indem ich $\frac{4}{100}$ zu den mit der Bradleyschen Formel gefundenen Stralenbrechungen addirte.» De Luc sezt also in der Mayerschen Formel $b = 27{,}77$ und $t = 0$, erhält daher die Refraction für $+ 32$ Fahrenh. Daher mufste er zu den Bradleyschen Stralenbrechungen $\frac{4}{100}$ addiren. (wovon $\frac{4}{100}$ genommen werden müssen sagt de Luc nicht). Sezt man in obiger Formel $r = 0$, $b = 27{,}775$ und $\delta = 80^\circ$, so findet man die

$$\begin{array}{rr} \text{Stralenbrechung} = & 5'\ 27'',82 \\ \text{oben für } r = +8^\circ & 5\ \ 14,87 \\ \hline \text{Unterschied} = & 12,95 \end{array}$$

und

und es ist $\frac{12'',95}{5'\ 27'',82} = \frac{12,95}{327,82} = 0,0395$ folglich ändert sich die Mayersche Stralenbrechung bey einer Barometerhöhe von 27,775 p. Z. und bey der Temperatur des schmelzenden Eises sehr nahe um $\frac{4}{100}$ *ihrer Gröſse*, wenn das Thermometer um 8 sogenannte Reaumursche Grade steigt. Wahrscheinlich hat de Luc auf diese Art seine $\frac{4}{100}$ gefunden. Ich hielt es für sicherer, in die Mayersche Formel selbst Bradleys Barometer- und Thermometerstand zu sezen, da aus jener Formel erhellet, daſs de Luc's Gleichung nach aller Schärfe nicht statt finden kann.

Die horizontale Stralenbrechung nach Mayer ist $= 30'\ 51'',78$, folglich um $2'\ 8'',22$ kleiner als die Bradleysche. Ebenso fand es de Luc. Da die Stralenbrechungen in kleinen Höhen noch sehr unsicher sind, so bleibt man zweifelhaft darüber, welche von beyden richtiger seye.

Zu §. 103.

Berthoud *) fand, daſs die Schwünge eines auf einer Schneide spielenden Pendels von 10 Graden auf $\frac{1}{4}$ Grad reducirt wurden, wenn es 24 St. 13 Min. geschwungen hatte. Dasselbe Pendel an einer Feder aufgehängt machte anfangs Schwünge von 10 Gr., die auf $\frac{1}{4}$ Gr. gebracht wurden in 21 St. 0'. Überdies bemerkt er, es könne sehr leicht geschehen,

*) Essai sur l'horlogerie. T. II. pag. 60. n. 1546 et 1547.

hen, daſs der Aufhängepunct sich nach der gröſsern oder kleinern Elasticität der Federn (welche sich mit der Temperatur der Luft ändern) verändere; die Verlängerung oder Verkürzung der Federn könne durch die Pendelstange nicht compensirt werden, weil die Luft schneller auf sie wirke, als auf die Stange; endlich haben die Federn noch den Fehler, daſs sie nicht um eben so viel durch die Kälte wieder verkürzt werden, als sie durch die Wärme seyen verlängert worden, weil das Gewicht der Linse die Wirkung der leztern vermindere und die der erstern vergrösſsere, so daſs die Uhr immer langsamer und langsamer gehe. Er verwirft daher die Aufhängung mit der Feder ganz, und gibt der *Aufhängung mit der Schneide* den Vorzug.

Zu §. 176.

Zu finden, wie viel eine Fernröhre vergröſsert.

Bey der Beobachtung des Anfangs und des Endes der Sonnenfinsternisse kommt sehr viel auf die Vergröſserung der Fernröhren an, deren man sich bedient, und man kann bey der Bestimmung des Mittagsunterschieds aus Sonnenfinsternissen die Beobachtungen nicht wohl so miteinander verbinden, daſs sich die von der Verschiedenheit der Fernröhren herrührenden Fehler gegeneinander aufheben, wie oben §. 174 u. 175. bey Mondsfinsternissen und Verfinsterungen der Jupiterstrabanten gezeigt wurde. Man muſs daher die Vergröſserung der zu den Beobachtungen gebrauchten Fernröhren angeben.

Ist die Fernröhre astronomisch mit einem Ocular, so findet man die Vergröfserung, wenn man die Brennweite des Objectivs durch die Brennweite des Oculars dividirt. Die Brennweite des Oculars wird am leichtesten gefunden, wenn man das Bild, welches es von der Sonne macht, mit einem Blatt Papier auffängt und seinen Abstand von der Linse mifst, wenn das Sonnenbild am deutlichsten erscheint. Bey den Objectivgläsern geht diese Methode nicht mehr wohl an, weil man ihre Entfernung von dem Papier sehr merklich ändern kann, ohne eine Undeutlichkeit in dem Sonnenbild zu bemerken. Genauer ist die von H. Hofrath *Kästner* vorgeschlagene Methode *). Man bringt nemlich einen feinen Faden an die Stelle des Bildes, welches das Objectiv von der Sonne oder einem andern sehr entfernten Gegenstand macht (§. 35. S. 44), so kann man den Abstand des Fadens von dem Objectiv genau messen, welcher der Brennweite gleich ist. Begreiflich mufs die Fernröhre schon ganz fertig seyn. Will man die Brennweite eines Objectivs nur beynahe bestimmen, um darnach die Länge der Röhre angeben zu können, so kann man sich mit Vortheil der Methode bedienen, welche *Maskelyne* vorgeschlagen hat. Man nehme eine kleine Fernröhre und stelle die Ocularröhre so, dafs man die Sonne oder einen Stern

*) Astronomische Abhandlungen IIte Samml. S. 248. u. 45 u. 46.

Stern deutlich siehet. Nun halte man, ohne an der Fernröhre etwas zu ändern, vor das Objectiv derselben hin das Glas, dessen Brennweite man messen will. Betrachtet man nun einen Gegenstand, der von lezterem Glas genau um seine Brennweite absteht, so wird man ihn deutlich sehen, weil er in diesem Fall die von dem Gegenstand herkommenden Stralen dem Objectiv der Fernröhre parallel zuschikt. Sieht man den Gegenstand nicht deutlich, so muſs man seine Entfernung so lange ändern, bis der Gegenstand deutlich erscheint. Nun kann man den Abstand des Objectivs, dessen Brennweite man bestimmen will, von jenem Gegenstand messen, welcher der gesuchten Brennweite gleich ist. *Maskelyne* schlägt vor, man solle ein mit kleiner Schrift gedruktes Buch vor das Objectiv hinsezen, und die Stelle suchen, wo die Schrift am deutlichsten erscheint.

Eine andere Methode, die Vergröſserung zu finden, schlägt *Wolf* vor. (Elementa Matheseos universae Element. Diopt. Problema 39. pag. 334 edit. novae.) Man richte die Fernröhre nach dem Dache eines Gebäudes, und betrachte durch dieselbe mit dem einen Auge die obere Reihe von Ziegeln, mit dem andern unbewafneten Auge betrachte man dieselben Ziegel, und bewege die Fernröhre so lange, bis das Ende eines Ziegels, den man durch die Fernröhre siehet, auf das Ende desselben Ziegels, den man mit dem blosen Auge betrachtet, fällt. Nun zähle man die Anzahl der mit dem unbewafneten

Auge gesehenen Ziegel, welche von einem oder mehreren durch die Fernröhre gesehenen bedekt werden, so ist die Vergröſserung gleich der Summe der erstern dividirt durch die Summe der leztern.» Auf diese Art findet man aber die Vergröſserung für Gegenstände, die sich in eben der Entfernung befinden, in welcher das beobachtete Gebäude ist. Die Ziegel werden von gleicher Gröſse angenommen, welches gewöhnlich der Fall ist, wenigstens bey neuen Dächern, da sie alle in einem Model gemacht werden.

Diese Methode, welche bey allen dioptrischen und catoptrischen Fernröhren gebraucht werden kann, läſst sich so abändern, daſs man die Vergröſserung genau bestimmen kann. Man betrachte einen entfernten Gegenstand, dessen scheinbare Gröſse bekannt ist, z. B. die Sonne, durch die Fernröhre mit dem einen Auge und mit dem andern vergleiche man das vergröſserte Sonnenbild mit einem Gegenstand in bekannter Entfernung von dem Auge. Hiezu kann man eine in bekannter Entfernung ausgestekte Scale gebrauchen, auf welcher man bemerkt, wie viel Theile derselben auf das vergröſserte Sonnenbild gehen. Hieraus und aus dem Abstand der Scale vom Auge findet man den Winkel, unter welchem das vergröſserte Sonnenbild dem Auge erschien, welcher durch den scheinbaren Durchmesser der Sonne, (den man mit einer hiezu hinlänglichen Genauigkeit aus astronomischen Tafeln oder Ephemeriden findet) dividirt, die Vergröſserung gibt.

gibt. Sind Vergröſserung und der Winkel, unter welchem der Gegenstand durch die Fernröhre erscheint, gegeben, so findet man daraus umgekehrt des Gegenstands scheinbare Gröſse für das blose Auge, worauf sich *Herschel's Lampenmikrometer* gründet. Umständlichere Anweisung zu dieser Methode, die Vergröſserung zu bestimmen, findet man in H. Oberamtmann *Schröters Beyträgen zu den neuesten astronomischen Entdekungen*.

Für eine astronomische Fernröhre mit zwey Ocularen, wovon das eine zwischen dem Objectiv und seinem Brennpunct steht (das *Collectivglas*), findet man die Vergrösserung m, wenn des Objectivs Brennweite $= L$, die des Collectivglases $= l$, des zweyten Oculars $= \lambda$, der Abstand beyder Oculare $= d$ gesezt wird

$$m = \frac{L(l + \lambda - d)}{l\lambda}$$

oder wenn der Abstand des Collectivs von der Stelle des wirklichen Bildes, wo die Mikrometerfäden angebracht sind, $= \delta$ ist

$$m = \frac{L(l - \delta)}{l\lambda}$$

Bey der zu oben beschriebenem Sextanten gehörigen Fernröhre ist nach §. 64. S. 86 u. 87 für die stärkere Vergröſserung $l = 7{,}0$ Lin. $\delta = 2{,}0$ Lin. $\lambda = 4{,}5$ Lin. und $L = 6$ Z. $= 72$ Lin.

$$\text{also } m = \frac{72 . 5}{7 . 4{,}5} = 11{,}4 + \ldots$$

Stehen beyde Ocularglåser zwischen dem Brennpunct des Objectivs und dem Auge (welcher Einrichtung *Ramsden* den Vorzug vor obiger gibt), so hat man, wenn die Brennweite des Oculars, welches dem Brennpunct des Objectivs am nächsten ist, $= l$, die Brennweite des zweyten $= \lambda$, ihr Abstand von einander $= d$ gesezt wird,

$$m = \frac{L(l + \lambda - d)}{l\lambda} \text{ wie oben *)}.$$

Das aus beyden Gläsern zusammengesezte Ocular vertritt die Stelle eines einfachen, dessen Brennweite $= \frac{l\lambda}{l + \lambda - d}$ wäre. Das am nächsten bey dem Brennpunct des Objectivs stehende Ocular steht von demselben ab um $\frac{l(\lambda - d)}{l + \lambda - d}$.

An meinem 4zolligen Sextanten ist die Ocularröhre zu der stärkern Vergröſserung auf leztere Art eingerichtet. Ich fand $l = 9$ Lin. $\lambda = 8$ Lin. $d = 6{,}5$ Lin. $L = 68$ Lin. hienach wäre

$$m = \frac{68(9 + 8 - 6{,}5)}{8 . 9} = 9{,}91$$

Hat die Fernröhre mehr als zwey Oculare, so wird man die Vergröſserung durch Versuche, wie oben gezeigt wurde, genauer bestimmen können als durch Rechnung, weil die kleinen Fehler, denen man bey der Bestim-

*) Wenn die Brennweiten der Gläser für beyde Einrichtungen dieselben bleiben, so gibt leztere immer eine stärkere Vergröſserung als die erstere, weil im ersten Fall $d > \lambda$, im zweyten $d < \lambda$ seyn muſs, um deutlich zu sehen.

stimmung der Brennweiten ausgesezt ist, sich hier zu sehr anhäufen können.

Ramsden hat ein eigenes Instrument zur Bestimmung der Vergröſserung einer Fernröhre erfunden, das sich auf folgenden Saz gründet: Wenn die Fernröhre so gestellt ist, daſs man entfernte Gegenstände deutlich siehet, so machen die Oculargläser von einem an der Stelle des Objectivs befindlichen Object ein Bild, das hinter das dem Auge am nächsten stehende Ocular fällt, und sich zu ersterem verhält $= 1 : m$ (wenn $m =$ der Vergröſserung). Die Stelle des Objects am Objectivglas kann die kreisförmige Fassung oder Bedekung desselben selbst vertreten, in welchem Fall man hinter dem lezten Ocular eine kleine helle Scheibe siehet, welche das Bild der Öfnung des Objectivs ist. Ein solches Bild entsteht (die holländische Fernröhre ausgenommen) bey allen dioptrischen und catoptrischen Fernröhren (bey leztern vertritt die Öfnung des groſsen Spiegels die Stelle der Öfnung des Objectivs bey erstern), und fällt immer dahin, wo dioptrischen Säzen zu folge die vortheilhafteste Stelle des Auges hintrift. Man nehme z. B. eine astronomische Fernröhre mit einem Ocular. Die Öfnung des Objectivs seye $= O$, ihr Bild hinter dem Ocular $= o$, ihre Abstände vom Ocular $= D$ und d, die Brennweite des Objectivs $= L$, des Oculars $= l$, so ist

$$O : o = D : d$$

und $D : d = (D - l) : l$

aber hier $D = L + l$

 folg-

folglich $D : d = L : l$

$$O : o = m : 1$$

$$d = \frac{D.l}{D-l} = \frac{(L+l)l}{L}$$

$$= l + \frac{l^2}{L}$$ wo die Stelle des Auges hintrift.

Bey zusammengeseztern Fernröhren und Spiegeltelescopen fällt der Beweis weitläufiger aus, weswegen ich ihn hier übergehen mufs.

La Lande macht bey der Beschreibung von *Ramsden's Dynameter* in der französischen Übersezung von Ramsdens Theilungsmaschine, eine Anmerkung, wodurch man veranlafst wird zu glauben, dafs die Voraussezung $m = \frac{O}{o}$ nur so weit richtig seye, als man annehmen könne, das Bild der Öfnung des Objectivs falle in den Brennpunct des Oculars. Aus obigem siehet man, dafs $m = \frac{O}{o}$ ebenso richtig ist als $m = \frac{L}{l}$.

Ramsden's Dynameter besteht nun aus drey kleinen Röhren. Die erste, welche eine convexe Linse von ungefähr 8 Lin. Brennweite enthält, läfst sich in die zweyte hinein schieben, bis man die darinn befindliche Scale auf einer durchsichtigen Scheibe von Horn *), die in Hunderttheile von Zollen getheilt ist, deut-

*) Scalen auf Glas, dergleichen *Brander* verfertigte, und die auch bey H. *Tiedemann* in *Stutgart* in grosser Vollkommenheit zu haben sind, scheinen mir zu diesem Gebrauch vorzüglicher zu seyn.

deutlich siehet. Leztere Röhre läſst sich in einer dritten, welche an die Ocularröhre hingehalten wird, so lange verschieben, bis man die Scale und das helle Bild von der Öfnung des Objectivs zugleich deutlich siehet. (Um die Scale genau an die Stelle des Bilds zu bringen, kann man sich der Methode (§. 35) bedienen). Man zählt nun die Anzahl von Theilen, welche das Bild auf der Scale einnimmt, drükt die Öfnung des Objectivs in Hunderttheilen desselben Zolles aus, und dividirt die Anzahl der leztern durch die der erstern, so hat man die Vergröſserung.

Man könnte hier die Einwendung machen, daſs kleine Fehler, die man in der Messung der Öfnung des Objectivs und des Bildes von ihm begehen kann, diese Methode unsicher machen, weil jene Gröſsen selbst klein sind. Allein man wird sie weit genauer messen können als die Brennweiten der Gläser, und die gefundene Vergröſserung wird man bey einiger Aufmerksamkeit immer der Wahrheit sehr nahe finden. *Ramsden* hat noch eine andere Art von Dynameter angegeben, die sich von obigem nur durch die Vorrichtung unterscheidet, welche zur Messung des Bildes von der Öfnung des Objectivs dient, und durch Revolutionen einer Schraube geschiehet, welche die Mittelpuncte einer durch ihren Mittelpunct zerschnittenen Linse einander näher bringt oder sie voneinander entfernt, bis die beyden Bilder, welche jede Hälfte der Linse macht, einander berühren, wo alsdann durch die Anzahl von Schraubenrevolutionen und

Theile derselben die Gröſse des Bilds von der Öfnung des Objectivs bestimmt wird.

Zu §. 197.

Da der aus den Beobachtungen dieser Finsterniſs hergeleitete Mittagsunterschied zwischen *Gotha* und *Paris* um 10″,7 von den genauen chronometrischen und durch Fixsternbedekungen bestätigten Bestimmungen des H. *v. Zach* abweicht, so kann dieſs leicht von der Verschiedenheit der von beyden Beobachtern gebrauchten Fernröhren oder der Heiterkeit des Himmels herkommen. Übrigens kommen öfters Unterschiede von 10 Secunden hervor, wenn man aus verschiedenen Sonnenfinsternissen oder aus Beobachtungen des Anfangs und Endes und micrometrischen Messungen (§. 199.) die Mittagsunterschiede derselben Orte herleitet. Daſs aber dennoch diese Erscheinungen den Jupiterstrabantenverfinsterungen vorzuziehen seyen, erhellet daraus, daſs schon eine beträchtliche Anzahl von Beobachtungen der leztern dazu erfordert wird, um die Meridiandifferenz innerhalb obiger Gränzen zu bestimmen.

Zu §. 210.

Bey dem ersten Anblik scheinen die Differentialformeln zur Bestimmung des Einflusses, welchen verschiedene Voraussezungen der abgeplatteten Gestalt der Erde auf die Längenbestimmung haben, so verwikelt zu seyn, daſs man glauben könnte, ebenso leicht den

den Zwek zu erreichen, wenn man die ganze Rechnung der Parallaxen von neuem unter der Voraussezung einer andern Abplattung machte. Allein die Rechnung wird dadurch sehr abgekürzt, daſs man die trigonometrischen Functionen nur bis auf Minuten genau in den Differentialformeln gebraucht, und sie also aus den gewöhnlichen Tafeln geradezu nehmen darf. Sind einmal die Coefficienten von $d.\frac{n}{m}$ bestimmt, so kann man sehr leicht die Zusammenkunft für jede beliebige Abplatung angeben, welches noch eine besondere Bequemlichkeit dieser Differentialformeln ist.

Zu §. 215.

Durch die Beobachtung erhält man den scheinbaren Abstand der Ränder des Monds und der Sonne. Um den scheinbaren Abstand der Mittelpuncte zu erhalten muſs man daher zu dem beobachteten Abstand die Summe der Halbmesser der ☉ und des ☽ addiren, wenn man den Abstand der nächsten Ränder genommen hat. Der Halbmesser des Monds hängt nicht allein von seiner horizontalen Parallaxe, sondern auch von seiner Höhe über dem Horizont ab, weil er bey unverändertem Abstand vom Mittelpunct der Erde dem auf der Oberfläche derselben befindlichen Beobachter desto näher kömmt, je mehr er sich dem Zenith nähert. Der Abstand des Monds vom Mittelpunct der Erde verhalte sich zu seinem Abstand vom Beobachter $= r : 1$, so ist,

ist, den horizontalen Durchmesser des Monds $= d$, den, welcher zum Abstand des Beobachters vom Mond gehört $= d'$ gesezt

$$\sin \tfrac{1}{2} d' = r \sin \tfrac{1}{2} d \quad (\text{§. 187. S. 345 u. 346})$$

Man gedenke sich die Mittelpuncte der Erde und des Monds und den Ort des Beobachters durch gerade Linien verbunden, so ist der Winkel am Mittelpunct der Erde = der wahren Zenithdistanz des Monds, der Winkel am Mond die Höhenparallaxe des ☽, und der dritte, oder vielmehr dessen Nebenwinkel, der scheinbare Abstand des Monds vom Zenith. Ist also des Monds wahre Höhe $= h'$, seine scheinbare $= h$, so verhält sich

$$r : 1 = \cos h : \cos h'$$

$$\text{also ist } r = \frac{\cos h}{\cos h'}$$

Es seye des Monds Höhenparallaxe für die Höhe $h = p$, so ist

$$h = h' - p$$

$$\text{folglich } r = \frac{\cos h' \cos p + \sin h' \sin p}{\cos h'}$$

$$= \cos p \, (1 + \tang h' \tang p)$$

$$\text{aber } \tang p = \frac{\sin \pi \cos h'}{1 - \sin \pi \sin h'} \quad (\text{§. 82.})$$

$$\text{also } r = \frac{\cos p}{1 - \sin \pi \sin h'}$$

$$\text{man seze } \tfrac{1}{2} \pi \sin h' = C$$

so ist bis auf Tausendtheile von Secunden genau

$$\sin \tfrac{1}{2} d' = \frac{\sin \tfrac{1}{2} d . \cos p}{2 . (\sin (45^\circ - C))^2}$$

oder,

oder, weil d nicht viel über $\frac{1}{2}$ Grad, sehr nahe

$$d' = \frac{\frac{1}{2}d.\cos p}{(\sin(45^\circ - C))^2}$$

Wenn des Monds scheinbare Höhe $h = 0$, so ist seine wahre Höhe $h' = \pi =$ der Horizontalparallaxe, also der Durchmesser des Monds am Horizont $= d' = d. \sec. \pi$. Ist aber des Monds wahre Höhe $= 0$, so wird die scheinbare Höhe $h = -\pi$, und $d' = d \cos \pi$. Der horizontale Halbmesser des Monds ist also immer von demjenigen verschieden, wie er in dem Mittelpunct der Erde erscheinen würde, und ist gröſser als der leztere, wenn sich der Mond in dem scheinbaren, kleiner wenn er sich in dem wahren Horizont befindet. Beyde werden einander gleich, wenn $h' = \frac{1}{2}\pi$, folglich $h = -\frac{1}{2}\pi$.

Sezt man den $\cos p = 1$, so wird r beynahe $= 1 + \sin\pi \sin h$ aber $\pi = \frac{11}{6} d$ nach *Mayer*, also $\sin\pi = \sin\frac{11}{6} d$, beynahe $= \frac{11}{6} \sin d$

$$d' = d(1 + \tfrac{11}{6} \sin d \sin h')$$

folglich die Vergröſserung des Durchmessers des Monds für die wahre Höhe h' bis auf 0,3 Sec. genau

$$= \frac{11.d.}{6} \sin d \sin h'$$

Da man bey der Reduction der Abstände des Monds von der Sonne ohnehin die Höhenparallaxe des Monds nöthig hat, so wird hier die Formel $d' = \dfrac{d \cos h}{\cos h'}$ die bequemste seyn. Nur in sehr groſsen Höhen wird ihr Gebrauch etwas unsicher.

Nach

Nach §. 219 S. 423 war die wahre Höhe des Monds

$h' = 56°\ 13'\ 46''$ C. Lg cos $= 0,2550279$
$p = \ \ 0\ \ 30\ \ 31$
$h = 55\ \ 43\ \ 15$ Lg cos $= 9,7506824 - 10$
$\frac{1}{2}d = \ \ 0\ \ 14\ \ 48$ Lg $= 2,9484130$
$= \ \ 888''$ Lg $\frac{1}{2}d' = 2,9541233$
$\frac{1}{2}d' = 899'',75$
$\frac{1}{2}d = 888,00$

Vergröſs. d. ☽ Halbm. $= 11,75$

Durch die Näherungsformel findet man folgendes:

$d = 29'\ 36''$. Lg sin $= 7,9350125 - 10$
Lg $\frac{11}{6} = 0,2632415$
Lg $d = 3,2494430$
Lg sin $h' = 9,9197422 - 10$
$1,3674392$

Vergröſs. d. Durchm. $= 23,30$

— — Halbm. $= 11,65$ nur $0'',1$ weniger als durch die genaue Formel.

Erklärung und Gebrauch der Tafeln.

I. *Tafel.*

Mit einem Quadranten, der in 96 gleiche Theile getheilt ist, wovon jeder vier Unterabtheilungen hat, die durch einen Vernier in 16 gleiche Theile getheilt werden, hat man eine Höhe gemessen und gefunden 54 + 1 Unterabtheilung + 4 Theile des Vernier. Wie viel beträgt dieſs in gewöhnlichen Graden, Minuten und Secunden? In der Tafel findet man

96 Theile	54 =	50°	37′	30″,00
Unterabth.	1 =	0	14	3,75
Th. des Vern.	4 =		3	30,94
		50	55	4,69

Wäre jedes 96 Theil in 60 gleiche Theile durch Unterabtheilungen und einen Vernier getheilt, so fände man leicht aus ebendieser Tafel die dazu gehörigen Grade, Minuten und Secunden, weil in diesem Fall $\frac{1}{96} = 56' \, 15''$; $\frac{1}{60} \cdot \frac{1}{96} = 56'' \, 15''' = 56'',25$ u. s. w. Z. B.

61 =	57°	11′	15″
25 =		23	26,25
	57	34	41,25

II. *Tafel.*

Wenn man bey Winkelmessungen mit dem Spiegelsextanten die beyden Bilder nicht in der Mitte des Sehefeldes zur Berührung bringt, so wird der Winkel immer zu groſs gefunden (§. 86). In dem Sehefeld der Fernröhre (an der Stelle der Blendung) sind zween Fäden in gleichem Abstand von der Axe der Fernröhre und mit der Ebene des Sextanten parallel ausgespannt, welche dazu dienen, die Gröſse der *Deviation* zu bestimmen.

Gesezt, man hätte mit obigem Sextanten (§. 22 u. f.) einen Winkel von 115° 23′ gemessen und die Bilder an einer Stelle des Sehefelds zur Berührung gebracht, welche $\frac{1}{5}$ des ganzen Abstands der beyden Fäden von einem derselben abstund (welches durch Schäzen mit hinlänglicher Genauigkeit bestimmt wer-

werden kann). Wie viel muſs von dem beobachteten Winkel abgezogen werden?

Der Abstand der Fäden ist (§. 86) $1^\circ 24' 30''$ und $\frac{1}{5}$ davon $= 16' 54''$. Also die Deviation $= \frac{1}{2}(1^\circ 24' 30'') - 16' 54'' = 25' 21''$. Nun findet man in der zweyten Tafel für 25′ *Deviation* und für einen Winkel von 110° die Verbesserung $= 16''$. Bey einer Zunahme des Winkels von 10° wächst die Verbesserung um 3″, also bey einem Wachsthum von 5° 23′ oder 5°,4 um $\frac{5,4 . 3''}{10} = 1'',6$. Ferner für 5′ Zunahme der Deviation wächst die Verbesserung um 7″, also für 21″ oder 0′,35 um $\frac{0,35 . 7''}{5} = 0'',49$. Also hat man unmittelbar aus der Tafel

$$\begin{array}{lrl} \text{Verbesserung} = & 16'',0 & \text{für } 110^\circ \text{ und Dev. } 25'. \\ \text{I. Prop. th. } \frac{5,4 . 3}{10} = & +\ 1,6 & \\ \text{II. Prop. th. } \frac{0,35 . 7}{5} = & +\ 0,5 & \\ \hline & 18'',1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrr} \text{beob. Winkel} = & 115^\circ & 23 & 0,0 \\ \hline \text{Verbess. Winkel} = & 115 & 22 & 41,9 \end{array}$$

III. *Tafel.*

Diese Tafel enthält die mittlere astronomische Stralenbrechung nach *Bradley* für die Barometerhöhe = 29,6 engl. Zollen (27,775 par. Z.) und für den Thermometerstand + 50°

50° Fahrenheit (+ 8° des 80theil. Queksilberthermom.)

Es seye die scheinb. Höhe = 12° 11′ 15″, so findet man

für 12° 0′ Refract. =		4′ 23″,2
Prop. th. $\frac{11,25.7,1}{20}$ =		— 4,0
		4 19,2
scheinb. Höhe =	12 11	15,0
wahre Höhe =	12 6	55,8

Ist die wahre Höhe gegeben, so muſs man mit dieser wahren Höhe (als scheinb. betrachtet) zuerst die Refraction beynahe suchen, diese zu der wahren Höhe addiren, um die scheinbare beynahe zu erhalten, vermittelst welcher man sodann die Refraction genauer findet.

Es seye die wahre Höhe = 12° 6′ 55″,8, so findet man aus der Tafel

für 12° scheinb. Höhe Refr. =		4 23,2
	12 11	18,0
Prop. th. für 11′,3 = $\frac{11,3.7,1}{20}$ =		4″,06
obige Refract.	4	23,20
verbess. Refract. =	4	19,14

sehr nahe wie oben.

Finden sich merkliche Unterschiede, so muſs man mit dieser verbesserten Refraction noch einmal die scheinbare Höhe suchen und die Rechnung wiederholen.

Da man bey der Reduction der Mondsdistanzen und Berechnung des Azimuths öfters wahre Höhen in scheinbare verwandeln muſs, so hat H. *v. Zach* *) hiezu eine besondere Tafel für kleine Höhen, wo die Rechnung am beschwerlichsten ist, nach *Bradley* berechnet, welche ich ihrer Brauchbarkeit wegen herseze.

wahre Höhe		Refract.		wahre Höhe		Refract.	
− 0°	20′	31′	16″	4°	40	10′	8″
+ 0	0	28	35	5	0	9	36
0	20	26	10	5	20	9	8
0	40	24	1	5	40	8	42
1	0	22	6	6	0	8	18
1	20	20	20	6	20	7	56
1	40	18	45	6	40	7	34
2	0	17	20	7	0	7	13
2	20	16	3	7	20	6	55
2	40	14	54	7	40	6	39
3	0	13	54	8	0	6	24
3	20	13	0	8	20	6	10
3	40	12	11	8	40	5	57
4	0	11	27	9	0	5	45
4	20	10	46	10	0	5	12

IV. *Tafel.*

Zur Verwandlung der mittlern Stralenbrechung in die wahre dient die IVte Tafel, welche den Stand des Barometers und Thermometers für die Zeit der Beobachtung als bekannt voraussezt. Die Barometerhöhen sind nach pariser Zollen und Duodecimallinien angegeben. Mit der scheinbaren Höhe in der ersten Columne und dem Thermometerstand

*) Tab. motuum ☉ pag. 113.

stand in der obern Horizontalreihe findet man die Verbesserung der Stralenbrechung wegen des Thermometerstands, welche, wie die Aufschrift der Tafel lehrt, abgezogen wird von der mittlern Stralenbrechung, wenn das Thermometer über 12, und addirt, wenn es unter 12 stehet. Ebenso findet man mit der scheinb. Höhe und der Höhe des Barometers in der lezten Horizontalreihe die Verbesserung wegen des Barometerstands. Oben wurde für die scheinbare Höhe $12^\circ\ 11'\ 15''$ die mittlere Stralenbrechung gefunden $= 4'\ 19'',2$. Der Thermometerstand seye $+ 5^\circ$ Reaum. die Barometerhöhe $= 27$ Zollen 3 Lin. Man verlangt die wahre Stralenbrechung.

Mit der scheinb. Höhe 10° und Thermometerstand 5 findet man $+ 10'',0$ die Verbesserung nimmt für 5 Grad Höhenänderung um $3'',3$ ab, also für $2^\circ\ 11' = 2^\circ,2$ um $\frac{3'',3.\ 2,2}{5} = 1'',46$, mithin ist die Verbesserung wegen des Thermometerstands $= + 10'',0 - 1'',46 = + 8'',54$.

Mit der scheinbaren Höhe 10° und dem Barometerstand 27 Z. 3 Lin. findet man die Verbesserung $= - 11,4$. Der Proportionaltheil ist $\frac{3'',8.\ 2,2}{5} = 1,67$, folglich ist, weil die Verbesserung mit der Höhe abnimmt, die zu $12^\circ\ 11'$ gehörige $= - (11'',4 - 1'',67) = - 9'',73$, also die Summe von beyden $= + 8'',54 - 9'',73 = - 1'',19$, und die wahre Stralenbrechung $= 4'\ 19'',2 - 1''2, = 4'\ 18'',0$.

Scheinb. Höhe 10° Therm. + 5 } Verbess. =	† 10″,0	
I. Prop. theil = $\frac{3,3.\ 2,2}{5}$ =		− 1″46
Sch. Höhe 10° Barom. 27 Z. 3 } Verbess. =		− 11,40
II. Prop. th. = $\frac{3,8.\ 2,2}{5}$ =	† 1,67	
	† 11,67	− 12,86
		† 11,67
		− 1,19

Die Tafel ist nicht auf Grade unter dem Gefrierpunct ausgedehnt, weil man bey so grossen Veränderungen der Temperatur der Luft die Stralenbrechung nicht mehr mit Sicherheit durch die gewöhnliche Mayersche Regel auf die wahren reduciren kann. In diesem Fall muſs man sich der Mayerschen Formel (§. 81 S. 113. u. Zusaz zu §. 81) bedienen.

V. *Tafel.*

Wegen der Parallaxe der Sonne müssen ihre Höhen ausser der Stralenbrechung noch durch die Höhenparallaxe verbessert werden, welche zu den wegen der Refraction schon verbesserten Höhen addirt werden muſs, um die wahren Höhen zu erhalten. Die Tafel hat gedoppelte Eingänge, weil die Höhenparallaxe sowohl von der Sonnenhöhe als auch von ihrem Abstand von der Erde (oder, weil sich die Erdferne nur langsam bewegt, von der

der Jahrszeit) abhängt. Hätte man z. B. im September die Höhe der Sonne $= 12^\circ\ 11'\ 15''$ gefunden, so wäre die durch Stralenbrechung verbesserte Höhe $= 12^\circ\ 6'\ 55'',8$. Hat man den obern Sonnenrand genommen, so muſs der Halbmesser der Sonne ($15'\ 55''$) abgezogen werden, und man erhält $11^\circ\ 51'\ 0'',8$. Nun ist im September für 12° Höhe die Höhenparallaxe $= 8'',2$, also die wahre Sonnenhöhe $= 11^\circ\ 50'\ 52'',6$.

VI. *Tafel.*

Diese Tafel dient zur Abkürzung der Rechnung bey der Reduction der Höhen auf den Mittag, wenn sie nahe bey demselben sind beobachtet worden. Mit den Formeln §. 134 S. 224 findet man leicht die Höhenänderung in einer Minute vor oder nach der Culmination. Diese kann man ebenfalls in eine Tafel mit gedoppelten Eingängen bringen, welche die Breite und Abweichung zu Argumenten hat. Wenn man aber die Höhenänderung genau verlangt, so muſs die Tafel nicht blos für einzelne Grade der Breite und Abweichung berechnet werden, wodurch sie ziemlich weitläufig wird. Auch ist das Interpoliren wegen der gedoppelten Eingänge beschwerlich, so daſs man die Höhenänderung in einer Minute beynahe ebenso leicht durch die Formel selbst findet. Wenn die Breite φ, die nördliche Abweichung δ (die südliche $-\delta$) heiſst, so ist die Höhenänderung in einer Minute vor oder nach der Culmination $= \dfrac{1,96345.\ \cos\varphi\ \cos\delta}{\sin(\varphi\mp\delta)}$ und der Logarithme von $1,96345 = 0,2930199$. Es seye $\varphi = 51^\circ\ 32'$; $\delta = 11^\circ\ 20'$. So wird die Rechnung auf folgende Art geführt:

$$\begin{array}{rlrl} \varphi = & 51^\circ\ 32' & \text{Lg}\cos = & 9,7938317-10 \\ \delta = & 11\quad 20 & \text{Lg}\cos = & 9,9914477-10 \\ \hline \varphi-\delta = & 40\quad 12 & \text{C.Lg}\sin = & 0,1901322 \\ & & \text{Lg const.} = & 0,2930199 \\ \hline & & & 0,2684315 \end{array}$$

Höhenänd. in 1 Min. $= 1'',855$

Diese Höhenänderung mit dem Quadrat der Anzahl von Minuten vor oder nach der Culmination multiplicirt gibt die Höhenänderung für dieselbige. Die Höhe seye $5'\ 23''$ vor oder nach der Culmination genommen, so findet man in der VIten Tafel das Quadrat von $5'\ 22'' = 28,80$ und von $5'\ 24'' = 29,16$, also von $5'\ 23'' = \dfrac{28,80 + 29,16}{2} = 28,98$ und $(1,855)\ (28,98) = 53'',7$. Um so viel wäre die Höhe $5'\ 23''$ vor oder nach der Culmination kleiner als die Mittagshöhe.

Eine andere Höhe seye $8'\ 40''$ von dem Mittag entfernt, so findet man $(8'\ 40'')^2 = 75,1$ und die Höhenänderung in $8'\ 40'' = 1'',855.\ 75,1 = 139'',3 = 2'\ 19'',3$ = dem Unterschied zwischen jener Höhe und der Mittagshöhe.

Bey der Reduction der Sonnenhöhen muſs auch die Veränderung der Abweichung der Sonne in Rechnung gebracht werden. Es

seye

seye die Mittagshöhe $= H$, eine Höhe n Minuten vor oder nach Mittag $= h$, die Höhenänderung in einer Minute (nach obiger Formel berechnet) $= \Delta h$, die Veränderung der Abweichung der Sonne in 1 Minute, in Secunden ausgedrükt, $= \Delta \delta$; so hat man, wenn die Sonne in den *aufsteigenden* Zeichen ist (die nördliche Abweich. wächst, die südliche abnimmt)

$$\left.\begin{aligned} H-h &= n^2.\Delta h + n.\Delta\delta. \text{ vormittäg.} \\ &= n^2.\Delta h - n.\Delta\delta. \text{ nachmittäg.} \end{aligned}\right\} \text{Höhen.}$$

und wenn die Sonne in den niedersteigenden Zeichen ist

$$\left.\begin{aligned} H-h &= n^2.\Delta h - n.\Delta\delta. \text{ vormitt.} \\ &= n^2.\Delta h + n.\Delta\delta. \text{ nachmitt.} \end{aligned}\right\} \text{Höhen.}$$

Die *Mittagsverbesserung* für correspondirende Höhen, die nicht über 10 Minuten vom Mittag entfernt sind, in Minuten ausgedrükt ist

$$= \mp \frac{\Delta\delta}{2\Delta h}$$

— für aufsteigende, + für niedersteigende Zeichen.