Drittes Buch.

Von den Gesetzen der Bewegung.

Mitten unter der unendlichen Mannichfaltigkeit der Erscheinungen, die auf unserer Erde beständig auf einander folgen, ist man zur Entdeckung einer kleinen Zahl allgemeiner Gesetze gelangt, welchen die Erde bey ihren Bewegungen folgt. Alles in der Natur gehorcht ihnen, alles fliefst daraus eben so nothwendig her, als die Wiederkunft der Jahrszeiten; und die von einem leichten Atome, den die Winde ganz aufs Blinde hin fortzuführen scheinen, beschriebene Curve ist auf eine eben so sichere Art vorgeschrieben, als die Planetenbahnen.

Die Wichtigkeit dieser Gesetze, wovon wir ohne Aufhören abhangen, hätte die Forschbegierde zu allen Zeiten rege machen müssen; aber, durch eine dem menschlichen Geiste nur zu gewöhnliche Gleichgültigkeit, blieben sie bis zum Anfange des vorigen Jahrhunderts unbekannt, da Galilei die ersten Gründe zu der Wissenschaft von der Bewegung, durch seine schönen Entdeckungen über den Fall der Körper, legte.

Die Geometer, welche die Fuſstapfen dieses groſsen Mannes verfolgten, haben endlich die ganze Mechanik auf allgemeine Formeln gebracht, welche, ausser einer gröſsern Vervollkommnung der Analysis, nichts weiter zu wünschen übrig lassen.

Erstes Kapitel.

Von den Kräften und ihrer Zusammensetzung.

Ein Körper scheint uns in Bewegung zu seyn, wenn er seine Lage, in Beziehung auf ein System von Körpern, von welchen wir annehmen, daſs sie in Ruhe seyen, ändert. So scheinen uns, in einem mit gleichförmiger Bewegung fortgehenden Schiffe, die Körper sich zu bewegen, wenn sie nach und nach mit den verschiedenen Theilen desselben zusammengehören. Diese Bewegung ist bloſs relativ; denn das Schiff bewegt sich auf der

Oberfläche des Meers, welches sich um die Achse der Erde drehet, deren Mittelpunkt sich um die Sonne bewegt, welche selbst wiederum, sammt der Erde und den Planeten im Weltraume fortgeführt wird. Um bey diesen Bewegungen eine Gränze zu gedenken, und endlich zu vesten Punkten zu gelangen, von welchen an man die absolute Bewegung der Körper rechnen könne, bildet man sich einen unbegränzten, unbeweglichen, und von der Materie durchdringlichen Raum ein. Auf die Theile dieses, wirklichen oder eingebildeten, Raums beziehen wir in Gedanken die Lage der Körper, und gedenken sie in Bewegung, wenn sie nach und nach mit verschiedenen Oertern dieses Raums zusammentreffen.

Die Natur dieser sonderbaren Modification, vermöge welcher ein Körper aus einem Orte in einen andern versetzt wird, ist bis jetzt unbekannt, und wird es ferner bleiben. Man hat sie mit dem Namen der *Kraft* bezeichnet, aber man kann bloſs ihre Wirkungen, und die Gesetze ihrer Wirkungsart bestimmen.

Die Wirkung einer Kraft auf einen materiellen Punkt, ist, ihn in Bewegung zu sezzen, wofern sich dieser nichts widersetzt. Die

Richtung der Kraft ist die gerade Linie, welche sie ihn zu beschreiben treibt. Man übersieht leicht, daſs, wenn zwey Kräfte in der nämlichen Richtung wirken, sie sich mit einander verbinden, und daſs, wenn sie in entgegengesetzter Richtung wirken, der Punkt sich nur nach Maaſsgabe ihres Unterschieds bewegt, so daſs er, wenn sie gleich wären, ganz in Ruhe bleiben würde.

Wenn die Richtungen zweyer Kräfte einen Winkel mit einander machen, so wird ihr Resultat, die mittlere Kraft, eine mittlere Richtung annehmen, und man beweiſst, bloſs durch die gemeine Geometrie, daſs, wenn man auf den Richtungen der beyden Kräfte, von dem Punkte an, wo sie einander schneiden, zwey Linien nimmt *(die sich wie die Kräfte verhalten)*, um sie darzustellen, und das Parallelogramm unter diesen Linien vollendet, die Diagonale desselben ihr Resultat, die mittlere Kraft, der Richtung und Gröſse nach, vorstellen werde.

Man kann für zwey zusammensetzende *(äussere)* Kräfte ihre mittlere, und umgekehrt, für jede Kraft zwey andere setzen, für deren mittlere sie angesehen werden kann; man kann daher eine Kraft in zwey andere zerlegen, die zwey in der Ebene von jener liegenden Achsen parallel, und auf einander lothrecht sind. Dazu braucht man nur durch den einen Endpunkt der geraden Linie, welche diese Kraft vorstellt, zwey diesen Achsen parallele Linien zu ziehen, und das Rechteck unter diesen zu vollenden, das diese gerade Linie zur Diagonale hat, so werden dessen Seiten die Kräfte vorstellen, in welche die vorgegebene, in paraller Richtung mit den Achsen, sich zerlegen läſst.

Wenn die Kraft gegen eine, der Lage nach gegebene Ebene geneigt ist, und man nimmt auf ihrer Richtung, von dem Punkte an, wo sie der Ebene begegnet, eine gerade Linie, um sie darzustellen; so wird das von dem Endpunkte dieser Linie auf die Ebene gefällte Loth, die anfängliche Kraft in lothrechter Richtung auf diese Ebene, die gerade Linie aber, welche die Endpunkte der die anfängliche Kraft vorstellenden Linie und des Loths in der Ebene verbindet, wird eben diese Kraft, in paralleler Richtung mit dieser Ebene zerlegt vorstellen. Diese zweyte Partialkraft kann nun selbst wiederum in zwey andere, zwey in der Ebene liegenden Achsen parallele, und auf einander lothrechte Kräfte zerlegt werden. Folglich läſst sich jede Kraft in drey andere, eben so vielen auf einander lothrechten Achsen parallele, zerlegen.

Daraus ergiebt sich ein einfaches Mittel, das Resultat jeder beliebigen Zahl von Kräften, die auf einen materiellen Punkt wirken, zu erhalten. Denn wenn man jede derselben in drey andere eben so vielen der Lage nach gegebenen Achsen parallele, und auf einander lothrechte zerlegt, so ist klar, daſs alle der nämlichen Achse parallelen Kräfte sich auf eine einzige zurückführen lassen, welche gleich ist der Summe derer, die nach einerley Richtung, weniger der Summe derer, die nach der entgegengesetzten Richtung wirken. So wird also der Punkt von drey auf einander lothrechten Kräften getrieben werden; und wenn man auf jeder von den Richtungen derselben, von dem Punkte an, wo sie einander schneiden, drey gerade Linien nimmt, um sie darzustellen, und das rechtwinklichte Parallelepipedon unter diesen Linien vollendet, so wird die Diagonale dieses Körpers das Resultat aus allen Kräften, die auf diesen Punkt wirken, der Gröſse und Richtung nach, darstellen.

Zweytes Kapitel.

Von der Bewegung eines materiellen Punkts.

Ein in Ruhe befindlicher Punkt kann sich selbst keine Bewegung geben, weil in ihm kein Grund liegt, sich vielmehr nach der einen als nach einer andern Richtung zu bewegen. Wenn er durch eine Kraft getrieben, und sofort sich selbst überlassen wird, so bewegt er sich, wofern er keinen Widerstand findet, beständig auf eine gleichförmige Art, das heiſst so, daſs für jeden Augenblick seine Kraft, und die Richtung seiner Bewegung die nämlichen sind. Dieſs Bestreben der Materie, in ihrem Zustande der Ruhe oder der Bewegung zu beharren, hat man *Trägheit* genannt. Und dieſs ist das erste Bewegungsgesetz der Körper.

Die geradlinigte Richtung der Bewegung folgt offenbar daraus, daſs kein Grund vorhanden ist, warum der Punkt vielmehr zur Rechten als zur Linken von seiner anfänglichen Richtung abweichen sollte; aber die Gleichförmigkeit seiner Bewegung ist nicht von gleicher Evidenz. Da die Natur der bewegenden Kraft unbekannt ist, so ist es unmöglich, a priori zu wissen, ob diese Kraft sich ohne Aufhören erhalten müsse.

In der That, da ein Körper unfähig ist, sich selbst eine Bewegung zu geben, so scheint er eben so unfähig zu seyn, die erhaltene zu verändern, so daſs also das Gesetz der Trägheit wenigstens das natürlichste und einfachste ist, das man sich denken kann. Es ist überdieſs durch die Erfahrung bestätiget; denn wir bemerken auf der Erde, daſs die Bewegungen in eben dem Maaſse länger fortdauern, als die Hindernisse, die sich ihnen widersetzen, vermindert werden, und dieſs veranlaſst uns zu glauben, daſs sie, ohne diese Hindernisse, beständig fortdauern würden. Aber besonders merkwürdig ist die Trägheit der Materie bey den himmlischen Bewegungen, welche seit einer groſsen Zahl von Jahrhunderten keine merkliche Veränderung erlitten haben. Wir werden also die Trägheit als ein Naturgesetz betrachten, und wo wir bey der Bewegung eines Körpers eine Veränderung bemerken werden, annehmen, daſs solche der Wirkung einer äussern Ursache zuzuschreiben sey.

Bey der gleichförmigen Bewegung sind die durchloffenen Räume den Zeiten proportionirt. Aber die zu Beschreibung eines bestimmten Raums angewandten Zeiten, sind, nach der Gröſse der bewegenden Kraft, mehr oder weniger lang. Diese Unterschiede haben den Begriff von Geschwindigkeit erzeugt, welcher, bey der gleichförmigen Bewegung, das Verhältniſs des Raums zu der auf dessen Zurücklegung verwandten Zeit ist. Um nicht ungleichartige Gröſsen, dergleichen Raum und Zeit sind, mit einander zu vergleichen, nimmt man einen Zeittheil, z. B. die Secunde, für die Einheit der Zeit, und wählt dazu eine Einheit des Raums, z. B. den Fuſs, alsdann sind Raum und Zeit abstrakte Zahlen, welche ausdrücken, wie viele Einheiten ihrer Art sie enthalten, und man kann sie daher mit einander vergleichen. So wird also die Geschwindigkeit das Verhältniſs zweyer abstracten Zahlen, und ihre Einheit ist die Geschwindigkeit eines Körpers, welcher einen Fuſs in einer Secunde durchläuft. Wenn man auf solche Art, den Raum, die Zeit und die Geschwindigkeit auf abstracte Zahlen bringt, so sieht man, daſs der Raum dem Produkte aus der Geschwindigkeit durch die

Zeit, und mithin die Zeit dem Quotienten aus dem durch die Geschwindigkeit dividirten Raume gleich ist.

Da die Kraft nur durch den Raum bekannt ist, welchen sie den Körper in einer bestimmten Zeit zurückzulegen treibt, so ist es natürlich, diesen Raum für ihr Maaſs anzunehmen. Dieſs setzt aber voraus, daſs mehrere nach einerley Richtung wirkende Kräfte, während einer Zeiteinheit, einen Raum zu durchlaufen treiben werden, welcher der Summe der Räume gleich ist, die jede von ihnen besonders würde zu durchlaufen getrieben haben, oder, was auf eben das hinausläuft, daſs die Kraft der Geschwindigkeit proportionirt ist.

Allein dieses können wir, aus Mangel an Kenntniſs von der Natur der bewegenden Kraft, nicht a priori wissen, und müssen daher auch noch über diesen Gegenstand die Erforschung zu Rathe ziehen. Denn alles, was nicht eine nothwendige Folge aus den wenigen Bestimmungen ist, die uns über die Natur der Dinge gegeben sind, ist für uns bloſs ein Resultat der Beobachtung.

Die Kraft kann durch eine unendliche Menge von Funktionen der Geschwindigkeit, welche

welche nichts widersprechendes enthalten, ausgedrückt werden. Es liegt aber nichts dergleichen in der Voraussetzung, daſs sie dem Quadrate der Geschwindigkeit proportionirt sey. Bey dieser Voraussetzung ist es leicht, die Bewegung eines durch jede beliebige Zahl von Kräften, deren Geschwindigkeiten bekannt sind, getriebenen Punkts zu bestimmen. Denn wenn man auf den Richtungen dieser Kräfte, von dem Punkte an, da sie zusammentreffen, gerade Linien nimmt, um ihre Geschwindigkeiten darzustellen, und man nimmt ferner auf den nämlichen Richtungen, und von dem nämlichen Punkte an, andere gerade Linien, die sich zusammen verhalten, wie die Quadrate der erstern, so können diese Linien die Kräfte selbst vorstellen. Setzt man sie sofort auf die oben beschriebene Art zusammen, so erhält man die Richtung ihres Resultats, so, daſs die Linie, die diese ausdrückt, zu dem Quadrate der zugehörigen Geschwindigkeit sich verhalten wird, wie die Linie, welche eine der zusammensetzenden Kräfte vorstellt, zu dem Quadrate ihrer Geschwindigkeit. Man sieht hieraus, wie man die Bewegung eines Punkts bestimmen kann, welches auch immer, unter allen mathematisch möglichen Functionen, die Function der Geschwindigkeit seyn mag, die die Kraft ausdrückt. Wir wollen nun untersuchen, welches die in der Natur wirklich Statt habende sey.

Man bemerkt auf der Erde, daſs ein durch eine Kraft getriebener Körper sich auf einerley Art bewegt, wie auch immer der Winkel beschaffen seyn mag, den die Richtung dieser Kraft mit der Richtung der dem Körper und dem mit ihm zusammengehörigen Theile der Erdoberfläche gemeinschaftlichen Bewegung einschlieſst. Eben dieſs ist der Fall bey einem Schiffe, dessen Bewegung gleichförmig ist; ein beweglicher Körper, der der Wirkung einer Feder, der Schwere oder jeder andern Kraft ausgesetzt wird, bewegt sich in Beziehung auf die Theile des Schiffs, auf einerley Art, wie auch immer die Geschwindigkeit des Schiffs und seine Richtung beschaffen seyn mag. Man kann daher den Satz, daſs, wenn man in einem Systeme von Körpern, die mit einer gemeinschaftlichen Bewegung fortgeführt werden, einem derselben irgend eine Kraft eindrückt, seine relative oder scheinbare Bewegung die nämliche seyn werde, wie auch immer die allgemeine Bewegung des Systems, und der Winkel, den ihre Richtung mit der der eingedrückten Kraft macht, beschaffen seyn mögen, als ein allgemeines Bewegungsgesetz der Erdkörper aufstellen.

Setzt man dieses Gesetz als genau voraus, so folgt daraus die Proportionalität der Kraft mit der Geschwindigkeit. Denn wenn man sich zwey Körper gedenkt, die sich auf einerley geraden Linie mit gleichen Geschwindigkeiten bewegen, so daſs, wenn einem von ihnen eine Kraft eingedrückt wird, die sich mit der erstern vereinigt, seine Geschwindigkeit in Ansehung des andern Körpers die nämliche ist, wie wenn die beyden Körper anfänglich in Ruhe gewesen wären, so ist offenbar, daſs alsdann der von dem Körper, vermöge seiner anfänglichen und der ihm zugesetzten Kraft, durchloffene Raum der Summe der Räume gleich ist, durch welche jede derselben besonders ihn in der nämlichen Zeit würde geführt haben. Dieſs setzt aber voraus, daſs die Kraft der Geschwindigkeit proportionirt sey.

Umgekehrt, wenn die Kraft der Geschwindigkeit proportionirt ist, so sind die relativen Bewegungen eines Systems von Körpern, die von bewegenden Kräften getrieben werden, die nämlichen, wie auch immer ihre gemeinschaftliche Bewegung beschaffen seyn mag. Denn wenn diese Bewegung in drey andere, eben so vielen unbeweglichen Achsen parallele zerlegt wird, so vermehrt sie bloſs die partialen Geschwindigkeiten jedes Körpers, in paralleler Richtung mit diesen Achsen, um einerley Göſse; und da die relative Geschwindigkeit bloſs von dem Unterschiede dieser partialen Geschwindigkeiten abhängt, so ist sie die nämliche, wie auch immer die allen Körpern gemeinschaftliche Bewegung beschaffen seyn mag. Daher ist es alsdann unmöglich, von der absoluten Bewegung eines Systems, wovon man selbst einen Theil ausmacht, nach den Erscheinungen, die man in demselben bemerkt, zu urtheilen. Und eben dieses ist das Merkmal dieses Gesetzes, vor dessen Kenntniſs man das wahre Weltsystem nicht kennen lernen konnte, wegen der Schwierigkeit, die relativen Bewegungen geworfener Körper über der Oberfläche der Erde, bey einer doppelten Bewegung der letztern, nämlich der Umdrehung um sich selbst und dem Umlaufe um die Sonne sich vorzustellen.

Aber wegen der äussersten Kleinheit auch der beträchtlichsten Bewegungen, die wir den Körpern ertheilen können, in Vergleichung mit der Bewegung, die sie mit der Erde fortführt, braucht es, um die Erscheinungen eines Systems von Körpern von der Richtung dieser Bewegung unabhängig zu machen, nichts weiter, als daſs ein kleiner Zuwachs der Kraft, von welcher die Erde getrieben wird, zu der ihm zugehörigen Zunahme ihrer Geschwindigkeit in dem Verhältnisse eben dieser Grössen stehe. Unsere Erfahrungen beweisen also nur die Realität dieser Proportion, welche, wenn sie Statt hätte, wie auch immer die Geschwindigkeit der Erde beschaffen seyn möchte, das Gesetz der der Kraft proportionirten Geschwindigkeit geben würde. Sie würde dieses Gesetz auch dann noch geben, wenn die Function der Geschwindigkeit, welche die Kraft ausdrückt, nur aus einem einzigen Gliede bestünde. Man müſste also, wenn die Geschwindigkeit nicht der Kraft proportionirt wäre, annehmen, daſs in der Natur die Function der Geschwindigkeit, welche die Kraft ausdrückt, aus mehrern Gliedern bestehe, was nicht wahrscheinlich ist. Man müſste ferner voraussetzen, daſs die Geschwindigkeit der Erde genau diejenige sey, die der vorigen Proportion gemäſs ist, was gegen alle Wahrscheinlichkeit ist. Ausserdem ist die Geschwindigkeit der Erde zu verschiedenen Jahrszeiten verschieden; sie ist im Winter ungefähr um ein Dreyſsigstel gröſser, als im Sommer, diese Veränderung ist noch beträchtlicher, wenn, wie es alles anzuzeigen scheint, das Sonnensystem im Weltraume in Bewegung ist. Denn je nachdem dieſs Fortrücken mit der Bewegung der Erde nach einerley oder nach entgegengesetzter Richtung erfolgt, müssen im Verlaufe des Jahrs groſse Veränderungen in der absoluten Bewegung der Erde daraus entstehen; welches die erwähnte Proportion, und das Verhältniſs der eingedrückten Kraft zu der daraus entstehenden relativen Geschwindigkeit ändern müſste, wenn diese Proportion und dieses Verhältniſs nicht von der Bewegung der Erde unabhängig wäre. Indessen lassen die genauesten Versuche dabey keine merkliche Veränderung gewahrnehmen.

Alle himmlischen Erscheinungen verstärken diese Beweise. Die Geschwindigkeit des Lichts, wie sie durch die Verfinsterungen der Jupiterstrabanten bestimmt wird, verbindet sich mit der Erde genau so, wie bey dem Gesetze der Proportionalität der Kraft mit der Geschwindigkeit und alle nach diesem Gesetze berechneten Bewegungen des Sonnensystems stimmen vollkommen mit den Beobachtungen überein.

Hier sind also zwey Bewegungsgesetze, nämlich das Gesetz der Trägheit, und das der Proportionalität der Kraft mit der Geschwindigkeit, die durch die Beobachtung gegeben sind. Sie sind die natürlichsten und einfachsten, die man sich denken kann, und ohne Zweifel fliefsen sie aus der Natur der Materie selbst her; da aber diese Natur unbekannt ist, so sind diese Gesetze für uns blofs beobaachtete Thatsachen, übrigens die einzigen, welche die Mechanik von der Erfahrung entlehnt.

Da die Geschwindigkeit der Kraft proportionirt ist, so kann von diesen zwey Gröfsen jede durch die andere dargestellt werden; man wird also, nach dem Vorhergehenden, die Geschwindigkeit eines zur Bewegung getriebenen Punkts durch eine Zahl von Kräften, deren Richtungen und Geschwindigkeiten man kennt, erhalten.

Wenn der Punkt durch stetig wirkende Kräfte getrieben wird, so wird er mit eine stets veränderlichen Bewegung eine Curve beschreiben, deren Natur von den Kräften, die ihn durch dieselbige führen, abhängt. Um sie zu bestimmen, muſs man die Curve in ihren Elementen betrachten, sehen, wie diese aus einander entstehen, und von dem Gesetze des Wachsthums der Coordinaten auf ihren endlichen Ausdruck zurückgehen. Hier wird die Infinitesimalrechnung unentbehrlich, und man erfährt es, wie nützlich es sey, dieſs wichtige Werkzeug des menschlichen Geistes zu vervollkommnen.

Wir haben an der Schwere ein tägliches Beyspiel von einer Kraft, die ununterbrochen zu wirken scheint. In der That wissen wir zwar nicht, ob nicht ihre auf einander folgenden Wirkungen durch Zeittheile getrennt sind, deren Dauer unmerklich ist; da aber bey dieser Voraussetzung die Erscheinungen sehr nahe die nämlichen sind, wie bey der einer stetigen Wirkung, so haben die Geometer die letztere, als die bequemere und einfachere, angenommen. Wir wollen nun die Gesetze dieser Erscheinungen entwickeln.

Die Schwere scheint auf gleiche Art im Zustande der Ruhe, wie in dem der Bewegung auf die Körper zu wirken. Im ersten

Augenblicke erhält ein ihrer Wirkung überlassener Körper einen unendlich kleinen Grad der Geschwindigkeit; im zweyten Augenblicke kommt zu dem vorigen ein neuer Grad von Geschwindigkeit hinzu, und so fort in den übrigen, so daſs die Geschwindigkeit im Verhältnisse der Zeiten wächst.

Gedenkt man sich ein rechtwinklichtes Dreyeck, dessen eine Seite die Zeit vorstellt, und mit ihr wächst, so wird die andere Seite die Geschwindigkeit vorstellen können. Da das Element der Fläche des Dreyecks dem Produkte aus dem Elemente der Zeit durch die Geschwindigkeit gleich ist, so wird es das Element des Raums vorstellen, durch welchen die Schwere den Körper führt; dieser ganze Raum wird also durch die ganze Fläche des Dreyecks dargestellt werden, die, indem sie, wie das Quadrat von einer ihrer Seiten wächst, uns zeigt, daſs bey der durch die Wirkung der Schwere beschleunigten Bewegung die Geschwindigkeiten wachsen, wie die Zeiten, und die Höhen, von welchen der Körper fällt, nachdem er den Zustand der Ruhe verläſst, wie die Quadrate der Zeiten, oder der Geschwindigkeiten. Wenn man daher den Raum, durch welchen ein Körper in der ersten Secunde fällt, durch die Einheit ausdrückt, so wird er in zwey Secunden durch vier, in drey Secunden durch neun Einheiten, und so weiter, fallen, so daſs er in jeder Secunde Räume beschreiben wird, die wie die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 etc. etc. wachsen.

Der Raum, den ein Körper, vermöge der am Ende seines Falls erlangten Geschwindigkeit, in einer, der Dauer des Falls gleichen Zeit beschreiben würde, würde das Produkt dieser Zeit durch seine Geschwindigkeit seyn; dieſs Produkt aber ist das Doppelte von der Fläche des Dreyecks; folglich würde ein sich gleichförmig bewegender Körper, vermöge seiner erlangten Geschwindigkeit in einer der Dauer seines Falls gleichen Zeit, den doppelten Raum von dem, welchen er durchloffen hat, zurücklegen.

Das Verhältniſs der erlangten Geschwindigkeit zu der Zeit ist für einerley beschleunigende Kraft beständig; es wächst, oder nimmt ab, je nachdem solche mehr oder weniger groſs sind, und kann also dienen, sie auszudrücken. Da das Doppelte des durchloffenen Raums das Produkt aus der Zeit durch die Geschwindigkeit ist, so ist die beschleunigende Kraft diesem doppelten Raume, dividirt durch das Quadrat der Zeit, gleich. Es ist aber auch dem Quadrate der Geschwindigkeit, dividirt durch diesen doppelten Raum, gleich. Diese drey verschiedene Arten, die beschleunigenden Kräfte auszudrücken, sind unter verschiedenen Umständen nützlich; sie geben nicht die absoluten Werthe dieser Kräfte, sondern blos ihre Verhältnisse, sowohl unter einander, als mit einer von ihnen, die für die Einheit angenommen worden; und in der Mechanik hat man blos diese Verhältnisse nöthig.

Auf einer schiefen Ebene läfst sich die Wirkung der Schwere in zwey andere zerlegen; wovon die eine auf der Ebene lothrecht ist, und durch ihren Widerstand aufgehoben wird, die andere aber der Ebene parallel ist, und sich zur ursprünglichen Schwere verhält, wie die Höhe der Ebene zu ihrer Länge. Die Bewegung wird daher auf den schiefen Ebenen gleichförmig beschleunigt; aber die Geschwindigkeiten und die durchloffenen Räume verhalten sich zu den Geschwindigkeiten und zu den in der nämlichen Zeit durchloffenen Räumen, bey der lothrechten Bewegung, wie die Höhe der Ebene zu ihrer Länge.

Daraus folgt, daſs alle Chorden eines Kreises, die einen Endpunkt mit dem lothrechten Durchmesser desselben gemein haben, durch die Wirkung der Schwere in der nämlichen Zeit, wie dieser Durchmesser, zurückgelegt werden.

Ein nach einer geraden Linie geworfener Körper entfernt sich von dieser ohne Aufhören, und beschreibt eine gegen den Horizont zu hohle Curve, von welcher diese gerade Linie die erste Tangente ist. Seine Bewegung, durch Lothe auf diese gerade Linie bezogen, ist gleichförmig; aber sie wird nach diesen Lothen, den eben erläuterten Gesetzen gemäſs, beschleunigt. Fällt man daher, von jedem Punkte der Curve, Lothe auf die erste Tangente, so werden sie den Quadraten der zugehörigen Theile dieser Tangente proportionirt seyn; und diese Eigenschaft ist ein Merkmal der Parabel.

Wenn die Kraft des Wurfs nach der lothrechten Linie selbst gerichtet ist, so verwandelt sich die Parabel in diese; die Formeln für die parabolische Bewegung geben also diejenigen für die beschleunigte oder verminderte lothrechte Bewegung.

Dieſs sind die von Galilei entdeckten Gesetze des Falls schwerer Körper. Heutzutage scheint es uns, als ob es leicht gewesen wäre; dazu zu gelangen. Da sie aber den Nachforschungen der Philosophen, ungeachtet der Erscheinungen, die sie ohne Aufhören wieder hervorbringen, entgangen waren, so war ein seltener Geist dazu erforderlich, sie aus diesen Erscheinungen herauszufinden.

Wir haben im ersten Buche gesehen, daſs ein schwerer Punkt an dem einen Ende einer nicht schweren geraden Linie, deren anderes Ende bevestiget ist, aufgehängt, das einfache Pendel abgiebt. Wird dieses Pendel von der lothrechten Linie entfernt, so strebt es, vermöge seiner Schwere, wieder in dieselbige zurückzukommen, und dieſs Bestreben ist jener Entfernung, wenn sie nicht beträchtlich ist, sehr nahe proportionirt. Wir wollen uns nun zwey Pendeln von gleicher Länge gedenken, die im nämlichen Augenblicke und mit sehr kleinen Geschwindigkeiten, von der lothrechten Richtung ausgehen. Im ersten Augenblicke werden sie Bogen beschreiben, die diesen Geschwindigkeiten proportionirt sind. Im Anfange eines zweyten, dem ersten gleichen, Augenblicks werden diese Geschwindigkeiten im Verhältnisse der beschriebenen Bogen und der anfänglichen Geschwindigkeiten vermindert werden; die in diesem Augenblicke beschriebenen Bogen werden daher noch diesen Geschwindigkeiten proportionirt seyn. Eben so wird es sich mit den im dritten, im vierten und den weiter folgenden Augenblicken beschriebenen Bogen verhalten. Folglich werden in jedem Augenblicke die Geschwindigkeiten und die Bogen von der Verticallinie an genommen, den anfänglichen Geschwindigkeiten proportionirt seyn, und daher die Pendeln im nämlichen Augenblicke in Ruhe kommen. Hierauf werden sie mit einer, nach den nämlichen Gesetzen, nach welchen ihre Geschwindigkeit vermindert worden war, beschleunigten Bewegung wieder zu der Verticallinie zurückgehen, und werden im nämlichen Augenblicke und mit ihrer anfänglichen Geschwindigkeit bey derselben eintreffen. Nun werden sie auf der andern Seite der Verticallinie auf die nämliche Art eine Schwingung machen, und diese Schwingungen würden sie ins Unendliche fortsetzen, wenn sie dabey keinen Widerstand fänden. Es ist offenbar, daſs die Gröſse ihrer Schwingungen ihrer anfänglichen Geschwindigkeit proportionirt ist, aber die Dauer dieser Schwingungen ist immer die nämliche, und folglich von ihrer Gröſse unabhängig. Da die Kraft, welche das Pendel beschleuniget, nicht genau in dem Verhältnisse des von der Verticallinie an beschriebenen Bogens steht, so findet dieser Isochronismus in Ansehung der kleinen Schwingungen eines schweren Körpers, der sich in einem Kreise bewegt, nur beynahe Statt. Er ist völlig genau bey der Curve, auf welcher der der Tangente parallele Theil der zerlegten Schwere dem von dem niedrigsten Punkte an gerechneten Bogen proportionirt ist, welches unmittelbar ihre Differentialgleichung giebt. Huygens, dem man die Anwendung des Pendels auf die Uhren zu danken hat, lieſs sich angelegen seyn, diese Curve, und die Art, ein Pendel durch sie zu führen, kennen zu lernen. Er fand, daſs es eine lothrecht stehende Cykloide ist, so daſs ihr Scheitelpunkt die niedrigste Stelle einnimmt, und daſs man, um einen an dem Ende eines undehnbaren Fadens aufgehängten Körper durch sie zu führen, nur dessen anderes Ende in dem gemeinschaftlichen Anfangspunkte zweyer Cykloiden zu bevestigen braucht, die derjenigen, welche man von ihm beschrieben haben will, gleich, und nach entgegengesetzter Richtung lothrecht gestellt sind, so daſs der Faden, bey seinen Schwingungen, sich wechselsweise um einen Theil von jeder dieser Curven wickelt. So sinnreich auch diese Untersuchungen sind, so hat doch die Erfahrung dem kreisförmigen Pendel, wegen seiner viel gröſseren Einfachheit, und in der Anwendung zureichenden Genauigkeit, den Vorzug gegeben. Aber die Theorie der Evoluten, wozu sie die Veranlassung gegeben haben, ist durch ihre Anwendungen auf das Weltsystem sehr wichtig geworden.

Die Zeit der sehr kleinen Schwingungen eines kreisförmigen Pendels verhält sich zu der Zeit, die ein schwerer Körper brauchen würde von einer, der doppelten Länge des Pendels gleichen Höhe zu fallen, wie die halbe Peripherie zum Durchmesser. Folglich verhält sich die Zeit des Falls eines Körpers längst einem kleinen, durch einen lothrechten Durchmesser begränzten Kreisbogen, zur Zeit des Falls längst diesem Durchmesser,

ser, oder, was eben so viel ist, durch die Chorde des Bogens, wie der vierte Theil der Peripherie zum Durchmesser; die gerade Linie zwischen zwey gegebenen Punkten ist daher nicht die Linie des schnellsten Falls vom einen zum andern. Die Untersuchung dieser Linie hat die Forschbegierde der Geometer gereitzt, und sie haben gefunden, daſs es eine Cykloide ist, die zum Anfangspunkte den höchsten Punkt hat.

Die Länge des einfachen Pendels, das Secunden schwingt, verhält sich zur doppelten Höhe, von welcher die Körper, vermöge der Schwere, in der ersten Secunde fallen, wie das Quadrat des Durchmessers zum Quadrate der Peripherie. Wir haben in dem ersten Buche gesehen, daſs sehr genaue Versuche die Länge des Secundenpendels zu Paris 2,28386 Fuſs groſs gegeben haben. Daraus folgt, daſs die Schwere daselbst die Körper in der ersten Secunde durch 11,2704 Fuſs treibt. Dieser Uebergang der Schwingungsbewegung, deren Dauer man mit grosser Genauigkeit beobachten kann, zur geradlinigten Bewegung der schweren Körper ist eine sinnreiche Bemerkung, die man auch **Huygens** zu danken hat.

Die Zeiten der Schwingungen von Pendeln, deren Längen unterschieden sind, die aber von der nämlichen Schwere getrieben werden, verhalten sich bey sehr kleinen Schwingungen, wie die Quadratwurzeln aus diesen Längen. Wenn die Pendeln einerley Länge haben, aber von verschiedenen Schweren getrieben werden, so verhalten sich die Schwingungszeiten umgekehrt, wie die Quadratwurzeln aus den Schweren.

Vermittelst dieser Lehrsätze hat man die Veränderung der Schwere an der Erdfläche und auf dem Gipfel der Berge bestimmt. Eben so haben die Beobachtungen des Pendels gelehrt, daſs die Schwere weder von der Oberfläche, noch von der Gestalt der Körper abhängt, sondern daſs sie die innersten Theile durchdringt, und ihnen in gleichen Zeiten gleiche Geschwindigkeiten einzudrücken strebt. Um sich davon zu versichern, lieſs Newton eine groſse Zahl Körper von einerley Gewichte, aber von verschiedener Gestalt und Materie schwingen, die er, um einerley Widerstand der Luft zu erhalten, in einerley Gefäſs brachte. So groſs auch die Genauigkeit war, womit er bey diesen Versuchen zu Werke gieng, so konnte er doch zwischen den Schwingungszeiten dieser Körper keinen merklichen Unterschied finden. Daraus folgt, daſs, ohne den Widerstand, den sie leiden, ihre durch die Wirkung der Schwere erlangte Geschwindigkeit in gleicher Zeit gleich groſs seyn würde.

An der Kreisbewegung haben wir auch noch ein Beyspiel einer stetig wirkenden Kraft.

Da die Bewegung der Materie, wenn sie sich selbst überlassen wird, gleichförmig und gerädlinigt ist, so ist klar, daſs ein in einem Kreise sich bewegender Körper ohne Aufhören strebt, sich vom Mittelpunkte nach der Richtung der Tangente zu entfernen. Sein dahin gerichtetes Bestreben nennt man die *Centrifugalkraft*, hingegen die ganze, nach einem Mittelpunkte gerichtete Kraft, wird die *Centripetalkraft* oder *Centralkraft* genannt. Bey der Kreisbewegung ist die Centripetalkraft der Centrifugalkraft gleich und gerade entgegengesetzt; sie ist ohne Aufhören bestrebt, die Körper von der Peripherie nach dem Mittelpunkte zu führen, und in einem sehr kleinen Zeittheile läſst sich ihre Wirkung durch den Quersinus des beschriebenen kleinen Bogens messen.

Vermittelst dieses Resultats kann man die von der Umdrehung der Erde herrührende Centrifugalkraft mit der Schwere vergleichen.

Am Aequator beschreiben die Körper, vermöge dieser Umdrehung, in jeder Zeitsecunde einen Bogen von 40″,1095 der Peripherie des Erdäquators. Da der Halbmesser dieses Aequators sehr nahe 19634778 Fuſs groſs ist, so ist der Quersinus dieses Bogens 0,0389704 Fuſs.

Die Schwere macht, daſs die Körper am Aequator in einer Secunde durch 11,23585 Fuſs fallen; folglich verhält sich am Aequator die zur Zurückhaltung der Körper an der Erdfläche nöthige Centralkraft, und mithin die von ihrer Umdrehung herrührende Centrifugalkraft, zu der Schwere, wie 1 zu 288,3.

Die Centrifugalkraft vermindert die Schwere, und die Körper fallen am Aequator nur vermöge des Unterschieds dieser beyden Kräfte.

Nennt man daher die ganze Erscheinung, wie sie ohne diese Verminderung Statt haben würde, Schwere (gravité), so ist die Centrifugalkraft am Aequator sehr nahe $\frac{1}{289}$ der Schwere.

Wäre die Umdrehung der Erde siebzehnmal schneller, so würde der in einer Secunde beschriebene Bogen siebzehnmal, und sein Quersinus 289 mal gröſser seyn. Alsdann wäre die Centrifugalkraft der Schwere gleich und die Körper würden am Aequator aufhören, gegen die Erde schwer zu seyn.

Ueberhaupt ist der Ausdruck einer beständigen beschleunigenden Kraft, welche immer nach einerley Richtung wirkt, dem doppelten Raume, durch welchen sie die Körper führt, durch das Quadrat der Zeit dividirt, gleich. Jede beschleunigende Kraft kann in einem sehr kurzen Zeittheile als beständig, und nach einerley Richtung wirhend angesehen werden. Ferner ist der Raum, durch welchen die Centralkraft bey der Kreisbewegung die Körper führt, und der Quersinus des beschriebenen kleinen Bogens, und dessen Sinus dem Quadrate des Bogens, durch den Durchmesser dividirt, sehr nahe gleich; der Ausdruck dieser Kraft ist daher das Quadrat des beschriebenen Bogens, dividirt durch das Quadrat der Zeit, und durch den Halbmesser des Kreises. Der Bogen, dividirt durch die Zeit, ist die Geschwindigkeit des Körpers; die Centripetalkraft und die Centrifugalkraft sind daher dem Quadrate der Geschwindigkeit, durch den Halbmesser dividirt, gleich.

Vergleichen wir dieses Resultat mit dem vorhin gefundenen, nach welchem die Schwere dem Quadrate der erlangten Geschwindigkeit, dividirt durch das Doppelte des durchloffenen Raums, gleich ist, so sehen wir, daſs die Centrifugalkraft der Schwere gleich ist, wenn die Geschwindigkeit des bewegten Körpers einerley ist mit der, welche ein schwerer Körper durch den Fall von einer dem halben Radius des beschriebenen Kreisbogens gleichen Höhe erlangen würde.

Die Geschwindigkeiten mehrerer in kreisförmiger Bewegung befindlichen Körper verhalten sich zusammen, wie die Peripherien die sie beschreiben, dividirt durch ihre Umlaufszeiten; die Peripherien aber verhalten sich wie Halbmesser; folglich verhalten sich auch die Quadrate der Geschwindigkeiten wie die Quadrate der Halbmesser, dividirt durch die Quadrate dieser Zeiten; und mithin verhalten sich die Centrifugalkräfte wie die Halbmesser der Peripherien, dividirt durch die Quadrate der Umlaufszeiten. Daraus folgt, daſs unter verschiedenen Erdparallelen die von der Umdrehung der Erde herrührende Centrifugalkraft den Halbmessern dieser Parallele proportionirt ist.

Diese schönen von Huygens entdeckten Lehrsätze haben Newton auf die allgemeine Theorie der Bewegung in krummen Linien und auf das Gesetz der allgemeinen Schwere geführt.

Ein Körper, der eine Curve beschreibt, ist bestrebt, sich nach der Richtung der Tangente von ihr zu entfernen. Nun kann man sich immer einen Kreis gedenken, der durch zwey angränzende Elemente der Curve geht, und den man den *Krümmungskreis* (*cercle osculateur*) nennt. In zwey auf einander folgenden Augenblicken bewegt sich der Körper in der Peripherie dieses Kreises, seine Centrifugalkraft ist daher dem Quadrate seiner Geschwindigkeit, dividirt durch den Krümmungshalbmesser, gleich; aber die Lage und Gröſse dieses Kreises ändern sich beständig.

Wenn die Curve, vermöge einer nach einem vesten Punkte gerichteten Kraft, beschrieben wird, so kann man diese Kraft in zwey zerlegen, wovon die eine mit dem Krümmungshalbmesser, die andere mit dem

Elemente der Curve gleiche Richtung hat. Die erste hält der Centrifugalkraft das Gleichgewicht, die andere vermehrt oder vermindert die Geschwindigkeit der Körper. Diese Geschwindigkeit ist daher stets veränderlich; aber sie ist immer so beschaffen, daſs *die durch den Radius Vector um den Ursprung der Kraft beschriebenen Flächen den Zeiten proportionirt sind.* Umgekehrt, *wenn die durch den Radius Vector um einen vesten Punkt beschriebenen Flächen wie die Zeiten wachsen, so ist die Kraft, welche den Körper treibt, beständig gegen diesen Punkt gerichtet.*

Diese Sätze, die der Theorie des Weltsystems zur Grundlage dienen, lassen sich leicht auf folgende Art beweisen.

Von der beschleunigenden Kraft kann man annehmen, daſs sie nur im Anfange eines jeden Zeittheils wirke, während dessen die Bewegung des Körpers gleichförmig ist; alsdann beschreibt der Radius Vector ein kleines Dreyeck. Wenn die Kraft im folgenden Augenblicke zu wirken aufhörte, so würde der Radius Vector in diesem neuen Augenblicke ein neues, dem vorigen gleiches, Dreyeck beschreiben. Denn weil diese beyden Dreyecke ihre gemeinschaftliche Spitze in dem vesten Punkte, von welchem aus die Kraft wirkt, und ihre Grundlinien in der nämlichen geraden Linie hätten, so würden sie gleich seyn, da sie mit der nämlichen Geschwindigkeit, in Zeittheilen, die, nach der Voraussetung gleich sind, beschrieben wären. Aber im Anfange des neuen Zeittheils vereinigt sich die beschleunigende Kraft mit der Tangentialkraft des Körpers, und führt ihn durch die Diagonale des Parallelogramms, dessen Seiten diese Kräfte vorstellen. Das Dreyeck, welches der Radius Vector vermöge dieser vereinigten Kraft beschreibt, ist demjenigen gleich, das er ohne die Wirkung der beschleunigenden Kraft beschrieben haben würde; denn diese beyden Dreyecke haben zur gemeinschaftlichen Grundlinie den Radius Vector von dem Ende des ersten Zeittheils, und ihre Spitzen liegen in einer Parallele von dieser Grundlinie. Die durch den Radius Vector beschriebene Fläche ist also in zwey auf einander folgenden gleichen Zeittheilen gleich, und mithin wächst der durch diesen Radius beschriebene Sector wie die Zahl dieser Zeittheile, oder wie die Zeit. Es ist klar, daſs dieſs nur in so weit Statt hat, als die beschleunigende Kraft gegen einen vesten Punkt gerichtet ist; sonst würden die vorhin betrachteten Dreyecke nicht einerley Höhe und Grundlinie haben; folglich beweiſst die Proportionalität der Flächen mit den Zeiten, daſs die beschleunigende Kraft beständig gegen den Anfangspunkt des Radius Vectors gerichtet ist.

Wenn man sich in diesem Falle einen sehr kleinen Sector gedenkt, der in einem sehr kleinen Zeittheile beschrieben worden, und man zieht von dem einen Ende dieses Sectors eine Tangente an die Curve, und verlängert den von dem Anfangspunkte der Kraft an das andere Ende des Sectors gezogenen Radius Vector bis an diese Tangente, so wird der zwischen der Curve und der Tangente eingeschlossene Theil dieses Radius offenbar der vermöge der Centralkraft beschriebene Raum seyn. Dividirt man das Doppelte dieses Raums durch das Quadrat der Zeit, so erhält man den Ausdruck der Kraft. Nun ist der Sector der Zeit proportionirt. Die Centralkraft verhält sich also wie der zwischen der Curve und der Tangente eingeschlossene Theil des Radius Vectors, dividirt durch das Quadrat des Sectors.

Genau genommen ist zwar die Centralkraft in den verschiedenen Punkten der Curve diesem Quotienten nicht proportionirt; sie ist es aber um so viel näher, je kleiner die Sectoren sind, so daſs sie der Gränze dieser Quotienten völlig genau proportionirt ist. Die Differentialrechnung giebt diese Gränze durch eine Function des Radius Vectors, wenn die Natur der Curve bekannt ist, und alsdann hat man die Function der Entfernung, welcher die Centralkraft proportionirt ist.

Wenn das Gesetz der Kraft gegeben ist, so hat die Untersuchung der Curve, durch welche sie ihn führt, mehr Schwierigkeiten. Wie aber auch immer die Kräfte beschaffen seyn mögen, von welchen ein Körper getrieben wird, so wird man die elementarischen Veränderungen seiner Bewegung auf folgende Art leicht bestimmen können. Wir wollen uns drey unbewegliche und auf einander lothrechte Achsen gedenken, so wird die Lage des Körpers für jeden Augenblick durch drey diesen Achsen parallele Coordinaten bestimmt werden. Zerlegt man nun jede der Kräfte, die auf den Punkt wirken, in drey andere, eben diesen Achsen parallele, so wird das

Produkt des Resultats aus allen, einer von den Coordinaten parallelen, Kräften durch das Element der Zeit, während dessen sie wirkt, die Zunahme der Geschwindigkeit des Körpers in paralleler Richtung mit dieser Coordinate ausdrücken. Nun kann diese Geschwindigkeit, während dieses Elements, als gleichförmig, und dem Elemente der Coordinate, durch das Element der Zeit dividirt, gleich, angesehen werden; die elementarische Veränderung dieses Quotienten ist daher dem vorigen Produkte gleich. Die Betrachtung der zwey andern Coordinaten giebt zwey ähnliche Ausdrücke; und so wird die Bestimmung der Bewegung des Körpers eine Untersuchung der bloſsen Analysis, wobey es auf die Integration dieser Differentialgleichungen ankommt.

Diese Integration ist leicht, wenn die Kraft gegen einen vesten Punkt gerichtet ist, oft aber macht die Natur der Kräfte sie unmöglich. Indessen führt die Betrachtung der Differentialgleichungen auf einige merkwürdige Sätze der Mechanik, dergleichen der folgende ist. *Die elementarische Veränderung des Quadrats der Geschwindigkeit eines der Wirkung von beschleunigenden Kräften aus-*

gesetzten Körpers ist gleich der doppelten Summe des Produkts von jeder Kraft durch den kleinen Raum, um welchen der Körper in einem Augenblicke nach der Richtung dieser Kraft fortrückt. Es ist leicht daraus zu schliefsen, dafs die von einem schweren Körper längst einer krummen Linie oder Fläche erlangte Geschwindigkeit die nämliche ist, als wenn er von der nämlichen Höhe in lothrechter Richtung gefallen wäre.

Mehrere Philosophen, veranlafst durch die zur Bewunderung hinreifsende Ordnung, welche in der Natur herrscht, und die Fruchtbarkeit ihrer Mittel in Hervorbringung der Erscheinungen, sind auf den Gedanken gerathen, sie gelange immer auf den einfachsten Wegen zu ihrem Ziele. Diese Vorstellungsart dehnten sie auf die Mechanik aus, und suchten die Oekonomie, die die Natur bey der Anwendung der Kräfte zum Zwecke gehabt hätte. Nach verschiedenen fruchtlofen Versuchen fanden sie endlich, dafs ein Körper, unter allen krummen Linien, die er von einem Punkte zum andern durchlaufen kann, immer diejenige wählt, bey welcher das Integral des Produkts seiner Masse durch seine Geschwindigkeit und durch das Element der Curve ein

Minimum ist. Da also die Geschwindigkeit eines Körpers, der sich auf einer krummen Oberfläche bewegt, und durch keine Kraft sollicitirt wird, beständig ist, so gelangt er durch die kürzeste Linie von einem Punkte zum andern. Das vorerwähnte Integral hat man die *Wirkung* des Körpers, und den Inbegriff ähnlicher, auf jeden Körper eines Systems sich beziehender Integrale, die Wirkung des Systems gerannt. Die Oekonomie der Natur besteht also, nach diesen Philosophen, darin, daſs sie diese Wirkung spart, so, daſs sie die kleinste mögliche ist. Dieſs ist es, was *das Gesetz der kleinsten Wirkung ausmacht.*

Dieser Grundsatz ist in der That nichts anders als ein sonderbares Resultat der ursprünglichen Gesetze der Bewegung, welche, wie wir gesehen haben, die natürlichsten und einfachsten sind, die man sich denken kann, und daher aus dem Wesen der Materie selbst herzuflieſsen scheinen. Alle mathematisch möglichen Gesetze würden ähnliche Resultate darbieten. Man muſs ihn daher nicht zu einer Endursache erheben; und er hat so wenig den Bewegungsgesetzen ihre Entstehung gegeben, daſs er nicht einmal zu ihrer Entdeckung etwas beygetragen hat, ohne welche man noch darüber streiten würde, was man unter der kleinsten Wirkung der Natur zu verstehen habe.

Drittes Kapitel.

Vom Gleichgewichte eines Systems von Körpern.

Der einfachste Fall des Gleichgewichts mehrerer Körper ist der von zwey materiellen Punkten, die einander mit gleichen und gerade entgegensetzten Geschwindigkeiten begegnen. Ihre gegenseitige Undurchdringlichkeit, diese Eigenschaft der Materie, vermöge welcher zwey Körper nicht zu gleicher Zeit den nämlichen Raum einnehmen können, vernichtet offenbar ihre Geschwindigkeiten, und bringt sie in den Stand der Ruhe. Wenn aber zwey Körper von ungleichen Massen mit entgegengesetzten Geschwindigkeiten auf einander stoſsen, was ist dann das Verhältniſs der Geschwindigkeiten zu den Massen im Falle des Gleichgewichts? Um diese Aufgabe aufzulösen, wollen wir uns ein System angränzender in einer geraden Linie liegender, und mit einer gemeinschaftlichen Geschwindigkeit nach der Richtung dieser geraden Linie getriebener materieller Punkte gedenken; eben so wollen wir ein zweytes System angränzender, in der nämlichen geraden Linie liegender, und mit einer gemeinschaftlichen, aber der vorigen entgegengesetzten, Geschwindigkeit getriebener materieller Punkte gedenken, so, daſs diese beyden Systeme, wenn sie auf einander stoſsen, sich das Gleichgewicht halten.

Es ist klar, daſs, wenn das erste System nur aus einem einzigen materiellen Punkte bestünde, jeder Punkt des zweyten Systems in dem stoſsenden Punkte einen der Geschwindigkeit dieses Systems gleichen Theil seiner Geschwindigkeit vernichten würde. Die Geschwindigkeit des stoſsenden Punkts muſs also im Falle des Gleichgewichts, dem Produkte der Geschwindigkeit des zweyten Systems durch die Zahl seiner Punkte gleich seyn, und man kann für das erste System einen eineinzigen, mit einer, diesem Producte gleichen Geschwindigkeit getriebenen, Punkt sezzen. Auf ähnliche Art kann man für das zweyte System einen materiellen Punkt sezzen, der mit einer Geschwindigkeit getrieben

wird,

wird, die dem Producte der Geschwindigkeit des ersten Systems durch die Zahl seiner Punkte gleich ist. So erhält man, anstatt zweyer Systeme, zwey Punkte, die sich mit entgegengesetzten Geschwindigkeiten, wovon die eine das Product der Geschwindigkeit des ersten Systems durch die Zahl seiner Punkte, die andere das Product der Geschwindigkeit der Punkte des zweyten Systems durch ihre Anzahl ist, das Gleichgewicht halten werden. Diese Producte müssen also, im Falle des Gleichgewichts, einander gleich seyn.

Die Masse eines Körpers ist die Summe seiner materiellen Punkte. Das Product der Masse in die Geschwindigkeit nennt man die *Gröſse der Bewegung*, und eben das versteht man auch unter der *Kraſt eines Körpers.* Zum Gleichgewichte zweyer Körper oder zweyer Systeme von materiellen Punkten, die nach entgegengesetzter Richtung auf einander stossen, wird erfordert, daſs die Gröſsen der Bewegung, oder die entgegengesetzten Kräfte einander gleich, und mithin die Geschwindigkeiten den Massen umgekehrt proportionirt seyn müssen.

Zwey materielle Punkte können offenbar nicht anders auf einander wirken, als nach der geraden Linie, die sie verbindet; die Wirkung die der eine auf den andern äussert, theilt ihm eine Gröſse der Bewegung mit; nun kann man sich den zweyten Körper, als durch diese Gröſse, und durch eine andere gleiche und gerade entgegengesetzte sollicitirt vorstellen; die Wirkung des ersten Körpers besteht also darin, diese letztere Gröſse der Bewegung zu vernichten; dazu muſs er aber eine gleiche und entgegengesetzte Gröſse der Bewegung anwenden, welche vernichtet werden wird. Man sieht also, daſs überhaupt bey der gegenseitigen Wirkung der Körper auf einander, die Gegenwirkung immer der Wirkung gleich und entgegengesetzt ist. Man sieht ferner, daſs diese Gleichheit keine besondere Kraft in der Materie voraussetzt, sondern daraus folgt, daſs ein Körper durch die Wirkung eines andern keine Bewegung erhalten kann, ohne ihn deren zu berauben, eben so wie ein Gefäſs, auf Kosten eines andern vollen, das ihm mittheilt, angefüllt wird.

Die Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung zeigt sich bey allen Wirkungen der Natur. Das Eisen zieht den Magnet an, wie es von ihm angezogen wird; das nämliche bemerkt man bey den elektrischen Anziehungen und Abstoſsungen, bey der Entwickelung der elastischen und selbst bey der der thierischen Kräfte; denn, was auch immer das bewegende Princip des Menschen und der Thiere seyn mag, so ist das der beständige Erfolg, daſs sie durch die Gegenwirkung der Materie eine Kraft erhalten, die derjenigen, welche sie ihr mittheilen, gleich und entgegengesetzt ist, und daſs sie also, in dieser Beziehung, den nämlichen Gesezzen, wie die lebloſsen Wesen, unterworfen sind.

Das umgekehrte Verhältniſs der Geschwindigkeiten mit den Massen, im Falle des Gleichgewichts dient zur Bestimmung des Verhältnisses der Massen bey verschiedenen Körpern. Die der gleichartigen Körper sind ihren Räumen, welche die Geometrie auszumessen lehrt, proportionirt. Aber alle Körper sind nicht gleichartig, und die Unterschiede, welche sowohl in Absicht auf ihre kleinsten Bestandtheile, als auf die Zahl und Gröſse der Zwischenräume oder Poren, welche diese Theilchen von einander trennen, Statt finden, verursachen sehr groſse Verschiedenheiten zwischen ihren im nämlichen Raume eingeschlossenen Massen. Die Geometrie reicht alsdann nicht zu, das Verhältniſs dieser Massen zu bestimmen, und es ist unumgänglich nöthig, sich deswegen an die Mechanik zu wenden.

Wenn man sich zwey Kugeln von verschiedenen Materien gedenkt, und man läſst ihre Durchmesser sich so lange ändern, bis sie, wenn man ihnen gleiche und entgegengesetzte Geschwindigkeiten ertheilt, einander das Gleichgewicht halten, so kann man versichert seyn, daſs sie eine gleiche Anzahl materieller Punkte, und mithin gleiche Massen enthalten werden. Man wird also auf solche Art das Verhältniſs der Räume dieser Substanzen, bey gleichen Massen, erhalten, und daraus weiter, mit Hülfe der Geometrie das Verhältniſs der Massen von jeden zwey andern Räumen eben dieser Substanzen herleiten können. Aber dieses Verfahren würde, wegen der zahlreichen Vergleichungen, welche die Bedürfnisse des Handels jeden Augenblick fordern, in der Ausübung sehr beschwerlich seyn. Glücklicherweise bietet uns die Natur in der Schwere der Körper ein sehr einfaches Mittel, ihre Massen zu vergleichen, dar.

Wir haben im vorhergehenden Kapitel gesehen, daſs jeder materielle Punkt, an einerley Orte der Erde, vermöge der Wirkung der Schwere bestrebt ist, sich mit einerley Geschwindigkeit zu bewegen. Die Summe dieser Bestrebungen macht das Gleichgewicht eines Körpers aus; folglich sind die Gewichte den Massen proportionirt. Hieraus folgt, daſs, wenn zwey an den Enden eines über eine Rolle gehenden Fadens aufgehängte Körper einander das Gleichgewicht halten, und die beyden Theile des Fadens auf beyden Seiten der Rolle gleich sind, auch die Massen dieser Körper gleich groſs seyen, weil sie, vermöge der Wirkung der Schwere, bestrebt sind, sich mit gleicher Geschwindigkeit zu bewegen, und eben so auf einander wirken, als ob sie mit gleichen und gerade entgegengesetzten Geschwindigkeiten aneinander stieſsen. Ferner kann man die beyden Körper vermittelst einer Waage, deren Arme und Schaalen vollkommen gleich sind, ins Gleichgewicht bringen, und alsdann von der Gleichheit ihrer Massen versichert seyn. Auf solche Art erhält man das Verhältniſs der Massen verschiedener Körper vermittelst einer genauen und empfindlichen Waage, und einer groſsen Anzahl kleiner, einander gleicher, Gewichte, indem man bestimmt, wie vielen dieser Gewichte sie die Waage halten.

Die Dichtigkeit eines Körpers hängt von der Zahl seiner in einem gegebenen Raume eingeschlossenen materiellen Punkte ab, und ist daher dem Verhältnisse der Masse zu dem Volumen proportionirt. Wenn es eine Substanz gäbe, die keine Poren hätte, so würde ihre Dichtigkeit die gröſste mögliche seyn, und wenn man mit ihr die Dichtigkeit anderer Körper vergliche, so erhielte man die Gröſse der Materie, die diese enthalten. Da wir aber keine solche Substanz kennen, so können wir auch nur relative Dichtigkeiten der Körper erhalten. Diese Dichtigkeiten stehen, bey einerley Volumen, in dem Verhältnisse der Gewichte, weil die Gewichte den Massen proportionirt sind. Nimmt man also die Dichtigkeit irgend einer Substanz, z. B. des destillirten Regenwassers bey der Temperatur des schmelzenden Eises, für die Einheit der Dichtigkeit an, so wird die Dichtigkeit eines Körpers das Verhältniſs seines Gewichts, zu dem eines gleichgroſsen Raums Wasser seyn. Dieses Verhältniſs nennt man die *specifische Schwere*.

Das, was wir so eben gesagt haben, scheint vorauszusetzen, dafs die Materie gleichartig sey, und die Körper nur in Absicht auf die Figur und auf die Gröfse ihrer Zwischenräume und ihrer kleinsten Bestandtheile, unterschieden seyen. Es ist indessen möglich, dafs auch wesentliche Unterschiede in der Natur dieser Theilchen selbst Statt finden. Diefs ist aber für die Mechanik gleichgültig, da sie die Körper blofs in Hinsicht auf ihre Bewegungen betrachtet. Da kann man also, ohne Gefahr eines Irrthums, die Gleichartigkeit der Materie annehmen, wenn man nur unter gleichen Massen solche versteht, die, wenn sie mit gleichen und entgegengesetzten Geschwindigkeiten getrieben werden, einander das Gleichgewicht halten.

Bey der Theorie des Gleichgewichts und der Bewegung der Körper sieht man nicht auf die Zahl und Gestalt der Poren, von welchen sie durchdrungen sind. Man kann auf den Unterschied ihrer respectiven Dichtigkeiten Rücksicht nehmen, so, dafs man annimmt, sie bestehen aus materiellen Punkten, die mehr oder weniger dicht, bey flüssigen Körpern völlig frey, und mit einander durch immaterielle gerade Linien verbunden seyen, welche bey harten Körpern unbiegsam, bey elastischen und weichen aber biegsam und dehnbar seyen. Es ist klar, daſs die Körper, bey diesen Voraussetzungen, die nämlichen Erscheinungen darbieten würden, die sie uns wirklich zeigen.

Die Bedingungen des Gleichgewichts eines Systems von Körpern können immer nach dem Gesetze der Zusammensetzung der Kräfte, das im ersten Kapitel dieses Buchs erklärt worden ist, bestimmt werden. Denn man kann die Kraft, wovon ein jeder materieller Punkt getrieben wird, als in dem Punkte ihrer Richtung angebracht ansehen, in welchem die Richtungen der Kräfte zusammentreffen, die sie aufheben, oder die, wenn man sie mit ihr zusammensetzt, eine mittlere Kraft geben, die, im Falle des Gleichgewichts, durch die vesten Punkte des Systems aufgehoben wird. Wir wollen z. B. zwey an den Enden eines unbiegsamen Hebels bevestigte materielle Punkte betrachten, und annehmen, diese Punkte werden von Kräften getrieben, deren Richtungen in der Ebene des Hebels liegen. Gedenken wir uns diese Kräfte in dem Punkte vereinigt, wo ihre Richtungen zusammentreffen, so muſs, um ein Gleichgewicht zu erhalten, die aus ihrer Zusammensetzung entstehende mittlere Kraft, durch den Unterstützungspunkt gehen, welcher sie allein aufheben kann, und, nach dem Gesetze der Zusammensetzung der Kräfte, müssen alsdann die zwey zusammensetzenden Kräfte sich umgekehrt verhalten, wie die von dem Unterstützungspunkte auf ihre Richtungen gefällten Lothe.

Gedenkt man sich in den Endpunkten eines geradlinigten unbiegsamen Hebels, dessen Masse in Vergleichung mit der der Körper für unendlich klein angesehen werden kann, zwey schwere Körper bevestigt, so kann man sich die parallelen Richtungen der Schwere, als in einer unendlichen Entfernung vereinigt, vorstellen; in diesem Falle müssen die Kräfte, von welchen jeder schwere Körper getrieben wird, oder, was eben so viel ist, ihre Gewichte, für den Fall des Gleichgewichts, sich umgekehrt verhalten, wie die von dem Unterstützungspunkte auf die Richtungen dieser Kräfte gefällten Lothe; diese Lothe aber sind den Hebelarmen proportionirt; folglich sind, beym Gleichgewichte, die Gewichte der Körper, den Hebelarmen, an welchen sie bevestigt sind, umgekehrt proportionirt.

Ein sehr kleines Gewicht kann daher vermittelst des Hebels und der Maschinen, die sich darauf gründen, einem sehr beträchtlichen Gewichte die Waage halten, und man kann auf solche Art eine ungeheure Last mit einer kleinen Kraft heben; aber um dieses zu bewerkstelligen, muſs der Hebelarm, an welchem die Kraft angebracht wird, in Vergleichung mit dem, welcher die Last hält, sehr lang seyn, und die Kraft einen groſsen Raum durchlaufen, um die Last auf eine kleine Höhe zu heben. Alsdann verliert man an Zeit, was man an Kraft gewinnt, und dieſs hat durchgängig bey den Maschinen Statt.

Man kann aber oft nach Willkühr über die Zeit verfügen, während man nur eine eingeschränkte Kraft anwenden kann. Unter andern Umständen, wo man sich eine groſse Geschwindigkeit verschaffen muſs, kann man vermittelst des Hebels dazu gelangen, wenn man die Kraft an den kürzern Arm anbringt. Eben in dieser Möglichkeit, die Masse, oder die Geschwindigkeit der zu bewegenden Körper, je nachdem es die Umstände erfordern, zu vermehren, besteht der Hauptvortheil der Maschinen.

Durch eine in sehr vielen Fällen angestellte aufmerksame Untersuchung der Bedingungen des Gleichgewichts eines Systems von Körpern, und der Verhältnisse jeder Kraft zu der Geschwindigkeit, die der Körper, an welchen sie angebracht ist, annimmt, wenn das Gleichgewicht des Systems aufgehoben zu werden anfängt, ist man auf folgenden Grundsatz gekommen, welcher die Bedingungen des Gleichgewichts eines Systems durch Kräfte getriebener materieller Punkte in der höchsten Allgemeinheit enthält.

Wenn man die Lage des Systems unendlich wenig ändert, auf eine Art, die mit den Bedingungen der Verbindung seiner Theile bestehen kann, so wird jeder materielle Punkt in der Richtung der ihn sollicitirenden Kraft, um eine Gröſse fortrücken, die dem Theile dieser Richtung gleich ist, welcher zwischen der ersten Lage des Punkts, und dem von der zweyten Lage desselben auf diese Richtung gefällten Lothe liegt.

Dieſs vorausgesetzt, ist, *im Falle des Gleichgewichts, die Summe der Producte einer jeden Kraft durch die Gröſse, um welche der*

Punkt, an dem sie angebracht ist, in ihrer Richtung fortrückt, gleich Null. Darin besteht der Grundsatz der virtualen Geschwindigkeiten, den man Johann Bernoulli zu danken hat. Um ihn aber anzuwenden, muſs man bemerken, daſs die eben erwähnten Producte, in Ansehung der Punkte, welche bey der Veränderung der Lage des Systems in einer der Richtung ihrer Kräfte entgegengesetzten Richtung fortrücken, negativ zu nehmen sind; auch muſs man sich erinnern, daſs die Kraft das Product der Masse eines materiellen Punkts in die Geschwindigkeit ist, welche sie ihm ertheilen würde, wenn er frey wäre.

Gedenkt man sich die Lage eines jeden Punkts des Systems durch drey rechtwinklichte Coordinaten bestimmt, so wird die Summe der Producte einer jeden Kraft durch die Gröſse, um welche der Punkt, den sie sollicitirt, in ihrer Richtung fortrückt, wenn man das System sich durch einen unendlich kleinen Raum bewegen läſst, durch eine lineare Function der Veränderungen aller Coordinaten dieser Punkte ausgedrückt werden. Diese Veränderungen stehen zu einander in Verhältnissen, die aus der Verbindung der

Theile des Systems hervorgehen. Bringt man daher in der vorigen Summe, die für den Fall des Gleichgewichts gleich Null werden muſs, vermittelst der Bedingungen dieser Verbindung die willkührlichen Veränderungen auf die kleinste mögliche Zahl, so wird man, um nach jeder Richtung ein Gleichgewicht zu erhalten, den Coefficienten von jeder der übrig bleibenden Veränderungen besonders gleich Null setzen müssen; dadurch wird man eben so viele Gleichungen erhalten, als dieser willkührlichen Veränderungen seyn werden. Diese Gleichungen, mit denjenigen, welche die Verbindung der Theile des Systems giebt, zusammengenommen, enthalten alle Bedingungen seines Gleichgewichts.

Wir wollen z. B. ein System von schweren Punkten, die auf eine unveränderliche Art mit einander verbunden sind, betrachten, und uns solches als an einem unbeweglichen Punkte bevestigt vorstellen, um welchen es sich nach jeder Richtung ungehindert drehen könne. Wir wollen uns ferner drey durch den vesten Punkt gehende und auf einander lothrechte Achsen vorstellen; und sezzen, die Lage eines jeden Punkts des Systems sey durch drey diesen Achsen parallele Coordinaten bestimmt, und die Wirkung seiner Schwere nach den Richtungen dieser Coordinaten zerlegt. Wenn man nun das System um die erste Achse sich unendlich wenig bewegen läſst, so ist klar, daſs die Gröſse, um welche jeder Punkt in der Richtung der mit dieser Achse parallelen Kraft fortrückt, gleich Null ist. Die Gröſse, um welche er in der Richtung der der zweyten Achse parallelen Kraft fortrückt, ist gleich dem Producte der Winkelbewegung der Rotation des Systems durch die der dritten Achse parallele Coordinate; und die Gröſse, um welche er in der Richtung der der dritten Achse parallelen Kraft fortrückt, ist gleich dem Producte der Winkelbewegung von der Umdrehung des Systems durch die der zweyten Achse parallele Coordinate. Folglich wird, nach dem obigen Grundsatze, das System um die erste Achse im Gleichgewichte seyn, wenn die Summe der Producte der Masse eines jeden Punkts durch seine der zweyten Achse parallele Kraft, und durch die der dritten Achse parallele Coordinate der Summe der Producte der Masse eines jeden Punkts durch seine der dritten Achse parallele Kraft und durch seine der zweyten Achse parallele Coordinate gleich ist.

Um das System in allen seinen Lagen um die erste Achse ins Gleichgewicht zu bringen, wird erfordert, daſs die vorige Gleichheit Statt habe, wie auch immer die der zweyten und dritten Achse parallelen Kräfte beschaffen seyn mögen; weil sie von der Richtung der Schwere, in Beziehung auf diese Achsen unabhängig seyn muſs.

Man muſs daher alsdann jede der beyden vorigen Summen besonders gleich Null sezzen; und da die partialen Wirkungen des einer Achse parallelen Theils der zerlegten Schwere für alle Punkte des Systems die nämlichen sind, so ist die Summe der Produkte von jedem dieser Punkte durch seine der zweyten oder dritten Achse parallele Coordinate gleich Null. Wenn die nämliche Gleichheit in Ansehung der der ersten Achse parallelen Coordinaten Statt hat, so ist es leicht, einzusehen, daſs sie in Ansehung einer jeden andern durch den vesten Punkt gehenden Achse bestehen werde. Daraus folgt, daſs, was für eine Lage um diesen Punkt man auch dem Systeme geben mag, es sich um keine Achse werde drehen können; es wird also, vermöge der Wirkung der Schwere, im Gleichgewichte bleiben. Den merkwürdigen Punkt, der diese Eigenschaft hat, nennt man den *Schwerpunkt* des Systems; er ist derjenige, durch welchen, in allen Lagen des Systems das Resultat aller Bestrebungen der Schwere beständig geht.

Um ihn zu bestimmen, wollen wir seine Lage, und die der Punkte des Systems auf drey unbewegliche auf einander lothrechte Achsen beziehen. Eine jede der Coordinaten dieses Mittelpunkts, multiplicirt durch die ganze Masse des Systems, wird der Summe der Produkte von der Masse eines jeden Punkts durch die ihm zugehörige Coordinate gleich seyn. So ist die Bestimmung des Schwerpunkts, dessen Begriff die Schwere erzeugt hat, von ihr unabhängig. Die Betrachtung dieses Punkts auf ein System von schweren oder nicht schweren, freyen, oder auf was immer für eine Art mit einander verbundenen Körpern angewandt, ist in der Mechanik sehr nützlich.

Viertes Kapitel.

Vom Gleichgewichte flüssiger Körper.

Wir haben im ersten Buche gesehen, dafs die elastischen Flüssigkeiten, wie die Luft, diesen Zustand durch die Wärme, und dafs die nicht zusammendrückbaren Flüssigkeiten, wie das Wasser, ihren Zustand durch den Druck und die Wärme erhalten. Aber um die Gesetze ihres Gleichgewichts zu bestimmen, brauchen wir nur sie als durch eine unendliche Zahl unter einander vollkommen beweglicher Theilchen gebildet anzusehen, so dafs sie dem kleinsten Drucke, den sie von einer Seite mehr, als von einer andern, leiden, nachgeben.

Aus diesem unterscheidenden Merkmale der flüssigen Körper folgt es, dafs die Kraft, die sich in jedem Theilchen der freyen Oberfläche eines im Gleichgewichte stehenden flüssigen Körpers äussert, auf dieser Oberfläche lothrecht steht. Die Schwere ist folglich auf der Oberfläche des stehenden Wassers lothrecht, und mithin die letztere waagrecht.

Vermöge der Beweglichkeit seiner Theile kann ein flüssiger Körper einen Druck ausüben, der viel grösser ist, als sein Gewicht. So drückt z. B. eine dünne Wassersäule, die sich in eine breite waagrechte Fläche endigt, die Grundfläche, auf welcher sie steht, eben so stark, als eine cylindrische Wassersäule von der nämlichen Grundfläche und Höhe. Um die Wahrheit dieses paradoxen Satzes anschaulich zu machen, wollen wir uns ein vestes cylindrisches Gefäſs mit einem beweglichen horizontalen Boden gedenken, und setzen, dieses Gefäſs sey mit Wasser gefüllt, und sein Boden werde durch eine dem Drucke, den er leidet, gleiche und entgegengesetzte Kraft im Gleichgewichte erhalten, so ist klar, daſs das Gleichgewicht immerfort bestehen würde, wenn ein Theil des Wassers in den vesten Zustand übergienge, und sich an den Seitenwänden des Gefäſses ansetzte. Denn das Gleichgewicht eines Systems von Körpern wird überhaupt nicht gestört, wenn man setzt, daſs in diesem Zustande mehrere von ihnen sich mit einander vereinigen, oder an veste Punkte anschlieſsen. Man kann also auf solche Art eine unendliche Menge Gefäſse von verschiedenen Gestalten bilden, die alle einerley Boden und einerley Höhe mit dem cylindrischen Gefäſse haben werden, und in welchen das Wasser den nämlichen Druck auf den beweglichen Boden äuſsern wird.

Der Druck, den ein flüssiger Körper auf eine Fläche ausübt, ist auf jedem ihrer Elemente lothrecht, sonst würde das ihr zunächst liegende flüssige Theilchen wegen der Zerlegung des Drucks, den es leidet, ausglitschen. Wenn ein flüssiger Körper nur durch sein Gewicht wirkt, so ist sein ganzer Druck dem Gewichte eines Prisma von dieser Flüssigkeit gleich, dessen Grundfläche der gedrückten Oberfläche gleich, und dessen Höhe die Entfernung des Schwerpunkts dieser Fläche von der waagrechten Ebene des flüssigen Körpers ist.

Ein Körper, der in eine Flüssigkeit getaucht wird, verliert darin einen Theil seines Gewichts, der dem Gewichte des Volumens der aus der Stelle getriebenen Flüssigkeit gleich ist. Denn vor dem Eintauchen würde die umgebende Flüssigkeit dem Gewichte von diesem Volumen des flüssigen Körpers die Waage halten, von welchem man, ohne das Gleichgewicht zu stören, annehmen könnte, daſs es eine veste Masse bilde; das Resultat aller Wirkungen der umgebenden Flüssigkeit auf diese Masse muſs daher ihrem Gewichte die Waage halten, und durch ihren

Schwerpunkt gehen. Nun ist es klar, daſs diese Wirkungen auf den Körper, der ihren Platz einnimmt, die nämlichen sind; die Wirkung der Flüssigkeit hebt also einen Theil von dem Gewichte dieses Körpers auf, der dem Gewichte des Volumens der aus der Stelle getriebenen Flüssigkeit gleich ist. Die Körper wiegen also in der Luft mehr, als im luftleeren Raume; der bey dem gröſsten Theile derselben kaum merkliche Unterschied darf bey feineren Versuchen nicht vernachläſsiget werden.

Man kann vermittelst einer Waage, die am Ende des einen ihrer Arme einen Körper trägt, den man in eine Flüssigkeit taucht, den Gewichtsverlust, welchen der Körper bey diesem Eintauchen leidet, genau messen, und seine specifische Schwere, oder seine Dichtigkeit im Verhältnisse zu der von dieser Flüssigkeit bestimmen. Diese Schwere ist das Verhältniſs von dem Gewichte des Körpers im leeren Raume zu dem Verluste an diesem Gewichte, wenn der Körper ganz in die Flüssigkeit eingetaucht ist. Auf solche Art hat man die specifischen Schweren der Körper in Vergleichung mit dem destillirten Wasser bestimmt.

Soll ein Körper, der leichter ist, als ein flüssiger, auf dessen Oberfläche im Gleichgewichte seyn, so mufs sein Gewicht dem des Volumens der aus der Stelle getriebenen Flüssigkeit gleich seyn. Ferner müssen die Schwerpunkte dieses Theils der Flüssigkeit und des Körpers in einerley lothrechten Linie liegen, denn das Resultat der Wirkungen der Schwere auf alle Theilchen des Körpers geht durch seinen Schwerpunkt, und das Resultat aller Wirkungen der Flüssigkeit auf diesen Körper geht durch den Schwerpunkt, der aus der Stelle getriebenen Flüssigkeit; da diese Resultate, um sich aufzuheben, in der nämlichen Linie liegen müssen, so liegen die Schwerpunkte in einerley lothrechten Linie.

Es giebt zwey sehr verschiedene Zustände des Gleichgewichts; bey dem einen machen alle Körper des Systems, wenn man das Gleichgewicht ein wenig stört, nur kleine Schwingungen um ihre anfängliche Lage, und alsdann ist das Gleichgewicht *vest* oder *beständig*. Diese Beständigkeit ist absolut, wenn sie Statt hat, wie auch immer die Schwingungen des Systems beschaffen seyn mögen; sie ist aber blos relativ, wenn sie nur in Beziehung auf eine gewisse Art der

Schwingungen Statt findet. Im andern Zustande des Gleichgewichts entfernen sich die Körper immer mehr und mehr von ihrer anfänglichen Lage, wenn man macht, daſs sie einmal davon abweichen. Man wird eine richtige Vorstellung von diesen beyden Zuständen haben, wenn man eine auf einer waagrechten Ebene lothrecht stehende Ellipse betrachtet. Wenn die Ellipse auf ihrer kleinen Achse im Gleichgewichte ist, so ist klar, daſs wenn man sie ein wenig von dieser Lage entfernt, sie wieder in dieselbige zurückzukommen strebt, durch Schwingungen, welche die Reibung und der Widerstand der Luft bald aufheben werden; ist aber die Ellipse auf ihrer groſsen Achse im Gleichgewichte, so strebt sie, wenn man sie einmal aus dieser Lage bringt, sich immer weiter davon zu entfernen, und endigt damit, daſs sie wieder auf ihre kleine Achse zurückkommt. Die Beständigkeit des Gleichgewichts hängt also von der Natur der kleinen Schwingungen ab, welche das auf irgend eine Art gestörte System um diesen Zustand macht. Oft hat diese Untersuchung viele Schwierigkeiten; aber in mehreren Fällen, und besonders in dem der schwimmenden Körper, braucht man, um über die Beständigkeit des Gleichgewichts zu urtheilen, nur zu wissen, ob die das System sollicitirende Kraft, solches, wenn es ein wenig aus diesem Zustande verrückt worden, wieder in denselbigen zurückzuführen bestrebt ist. In Ansehung der auf dem Wasser oder auf jeder andern Flüssigkeit schwimmenden Körper gelangt man dazu durch folgende Regel.

Wenn man sich durch den Schwerpunkt des in der Oberfläche des Wassers liegenden Durchschnitts eines schwimmenden Körpers eine waagrechte Achse gedenkt, so daſs die Summe der Produkte von jedem Elemente des Durchschnitts durch das Quadrat seiner Entfernung von dieser Achse kleiner ist, als in Ansehung einer jeden andern, durch den nämlichen Mittelpunkt gezogenen, waagrechten Achse, so ist das Gleichgewicht nach jeder Richtung beständig, wenn diese Summe gröſser ist, als das Produkt des Volumens des aus der Stelle getriebenen flüssigen Körpers durch die Höhe des Schwerpunkts des Körpers über dem Schwerpunkte des Volumens.

Diese Regel ist besonders nützlich bey der Construction der Schiffe, wobey es darauf ankommt, ihnen einen hinreichend vesten

Stand zu geben, um der Gewalt der Stürme, welche sie unterzutauchen streben, zu widerstehen. Bey einem Schiffe ist die von dem Hintertheile nach dem Vordertheile gezogene Achse diejenige, in Ansehung deren die vorerwähnte Summe ein Minimum ist; es ist daher leicht, seinen vesten Stand durch die vorhergehende Regel kennen zu lernen und zu messen.

Zwey in einem Gefäſse eingeschlossene flüssige Körper setzen sich so über einander, daſs der schwerere den unteren Theil des Gefäſses einnimmt, und die Fläche, welche beyde trennt, waagrecht ist.

Wenn zwey Flüssigkeiten vermittelst einer gekrümmten Röhre in Gemeinschaft stehen, so ist die Oberfläche, welche sie trennt, im Zustande des Gleichgewichts waagrecht, und ihre Höhen über dieser Oberfläche verhalten sich umgekehrt wie ihre specifischen Dichtigkeiten. Nimmt man also für die ganze Atmosphäre die Dichtigkeit der Luft bey der Temperatur des schmelzenden Eiſses und bey dem Drucke einer Quecksilbersäule von $2\frac{1}{3}$ Fuſs Höhe an, so wird ihre Höhe 23690 Fuſs betragen. Da aber die Dichtigkeit der atmosphärischen Schichten in eben dem Maaſse abnimmt, als man sich über der Oberfläche der Erde erhebt, so ist die Höhe der Atmosphäre viel gröſser.

Um die allgemeinen Gesetze des Gleichgewichts einer durch was immer für Kräfte getriebenen flüssigen Masse zu erhalten, wollen wir bemerken, daſs jeder Punkt im Innern dieser Masse einen Druck leidet, welcher bey der Atmosphäre durch die Barometerhöhe gemessen wird, und den man für jede andere Flüssigkeit auf eine ähnliche Art bestimmen kann. Betrachtet man jedes Theilchen als ein unendlich kleines rechtwinklichtes Parallelepipedon, so wird der Druck der umgebenden Flüssigkeit auf die Seitenflächen dieses Parallelepipedons lothrecht seyn, welches bestrebt seyn wird, sich, vermöge des Unterschieds der Pressungen, welche die Flüssigkeit auf zwey entgegengesetzte Flächen ausübt, in einer auf jede Fläche lothrechten Richtung zu bewegen. Aus diesen Unterschieden der Pressungen gehen drey auf einander lothrechte Kräfte hervor, die man mit den übrigen Kräften, welche das flüssige Theilchen sollicitiren, zusammen verbinden muſs. Da also dieses Theilchen, vermöge aller dieser Kräfte, im Gleichgewichte seyn mufs, so wird der Grundsatz der virtualen Geschwindigkeiten, was für eine Lage es immer in der ganzen Masse haben mag, die allgemeinen Gleichungen für sein Gleichgewicht geben. Die Bedingungen der Integrabilität dieser Differentialgleichungen werden die Verhältnisse bekannt machen, die zwischen den Kräften, von welchen die Flüssigkeit getrieben wird, Statt finden müssen, wenn ein Gleichgewicht möglich seyn soll; ihre Integration aber wird den Druck geben, den jedes flüssige Theilchen erfährt, und dieser Druck wird, wenn der flüssige Körper elastisch ist, und sich zusammendrücken läfst, den Grad seiner Elasticität und seine Dichtigkeit bestimmen.

Fünftes Kapitel.

Von der Bewegung eines Systems von Körpern.

Wir wollen zuerst die Wirkung zweyer materiellen Punkte von verschiedenen Massen betrachten, die sich auf einerley gerade Linie so bewegen, dafs sie einander begegnen. Man kann unmittelbar vor dem Stofse ihre Geschwindigkeiten als so zerlegt ansehen, dafs sie eine gemeinschaftliche und zwey entgegengesetzte Geschwindigkeiten hätten, und blos vermöge der letzteren einander die Waage hielten. Die den Punkten gemeinschaftliche Geschwindigkeit wird durch ihre gegenseitige Wirkung nicht gestört, nur sie allein mufs also nach dem Stofse noch bestehen. Um sie zu bestimmen, wollen wir bemerken, dafs die Gröfse der Bewegung zweyer Punkte, vermöge dieser gemeinschaftlichen Geschwindigkeit, sammt der Summe der den aufgehobenen Geschwindigkeiten zugehörigen Gröfsen der Bewegung, die Summe der Grössen der Bewegung vor dem Stofse darstellt, wenn nur die den entgegengesetzten Geschwindigkeiten zugehörigen Gröfsen der Bewegung in entgegengesetzter Bedeutung genommen werden. Aber nach der Bedingung des Gleichgewichts ist die Summe der den aufgehobenen Geschwindigkeiten zugehörigen Gröfsen der Bewegung gleich Null; folglich ist die der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit zugehörige Gröfse der Bewegung derjenigen gleich, die anfänglich in den beyden Punkten vorhanden war, und mithin ist diese Geschwindigkeit der Summe der Gröfsen der

Bewegung, dividirt durch die Summe der Massen, gleich.

Wenn die Punkte vollkommen elastisch sind, so muſs man, um ihre Geschwindigkeit nach dem Stoſse zu haben, die Geschwindigkeit, die sie, wenn sie unelastisch wären, erlangen oder verlieren würden, zu der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit, die sie unter dieser Vosaussetzung annehmen würden, hinzusetzen, oder davon wegnehmen; denn die vollkommene Elasticität verdoppelt diese Wirkungen durch Wiederherstellung der Lage der elastischen Theile, welche der Stoſs zusammendrückt. Man wird also die Geschwindigkeit eines jeden Punkts nach dem Stoſse erhalten, wenn man seine Geschwindigkeit vor dem Stoſse von dem Doppelten dieser gemeinschaftlichen Geschwindigkeit abzieht.

Hieraus kann man leicht schlieſsen, daſs die Summe der Producte einer jeden Masse durch das Quadrat ihrer Geschwindigkeit vor und nach dem Stoſse der beyden Punkte die nämliche ist; und dieſs hat überhaupt bey dem Stoſse vollkommen elastischer Körper Statt, wie viel ihrer seyen, und wie sie immer auf einander wirken mögen.

Der Stoſs zweyer materiellen Punkte ist zwar bloſs eingebildet, aber der Stoſs jeder zwey Körper läſst sich leicht darauf zurückführen, wenn man bemerkt, daſs, wenn diese Körper nach einer durch ihre Schwerpunkte gehenden, und auf ihrer Berührungsfläche lothrechten Linie sich stoſsen, sie so auf einander wirken, als wenn ihre Massen in diesen Punkten vereinigt wären; die Bewegung theilt sich daher ihnen alsdann eben so mit, wie zwey materiellen Punkten, deren Massen diesen Körpern stückweise gleich wären.

Dieſs sind die Gesetze der Mittheilung der Bewegung, welche die Erfahrung bestätigt, und welche aus den beyden im zweyten Kapitel dieses Buchs erklärten Grundgesetzen der Bewegung mathematisch herflieſsen. Mehrere Philosophen haben versucht, sie durch die Betrachtung der Endursachen zu bestimmen. Descartes, der sich überredete, daſs die Gröſse der Bewegung im Weltall immer die nämliche bleiben müsse, zog aus dieser falschen Voraussetzung falsche Gesetze für die Mittheilung der Bewegung, die ein Beyspiel von den Irrthümern sind, denen man sich aussetzt, wenn man die Gesetze der Natur aus den Absichten, die man ihr leihet, zu errathen sucht.

Wenn ein Körper nach einer durch seinen Schwerpunkt gehenden Richtung gestoſsen wird, so bewegen sich alle seine Theile mit einer gleichen Geschwindigkeit; wenn aber diese Richtung den Schwerpunkt seitwärts vorbeygeht, so haben die verschiedenen Theile des Körpers ungleiche Geschwindigkeiten, und aus dieser Ungleichheit der Geschwindigkeiten erfolgt eine Umdrehungsbewegung des Körpers um seinen Schwerpunkt in der nämlichen Zeit, in welcher dieser Punkt mit der Geschwindigkeit fortrückt, die er würde angenommen haben, wenn die Richtung des Stosses durch diesen Punkt gegangen wäre. Dieſs ist der Fall bey der Erde und den Planeten. Um also die doppelte Bewegung der Umdrehung und des Fortrückens der Erde zu erklären, braucht man nur anzunehmen, daſs sie anfänglich einen Stoſs erhalten habe, dessen Richtung ihren Schwerpunkt nahe vorbeygieng, in einer Entfernung, die, bey der Voraussetzung der Gleichartigkeit dieses Planeten, ungefähr der hundert und sechzigste Theil ihres Halbmessers ist. Die Wahrscheinlichkeit, daſs die Planeten, Trabanten und

Kometen ursprünglich nach einer genau durch ihre Schwerpunkte gehenden Richtung geworfen worden seyen, ist unendlich klein; folglich müssen sich alle diese Körper um sich selbst drehen.

Aus einem ähnlichen Grunde muſs die Sonne, die sich um sich selbst dreht, einen Stoſs erhalten haben, der, da er nicht durch ihren Schwerpunkt gieng, sie mit dem Planetensysteme im Weltraume fortführt, wofern nicht ein entgegengesetzter Stoſs diese Bewegung aufgehoben hat, was nicht wahrscheinlich ist.

Ein Stoſs, der einer gleichartigen Kugel nach einer Richtung, die nicht durch ihren Mittelpunkt geht, beygebracht wird, macht, daſs sie sich beständig um den Durchmesser dreht, welcher auf der durch ihren Mittelpunkt und durch die Richtung der eingedrückten Kraft gehenden Ebene lothrecht ist.

Neue Kräfte, welche alle ihre Punkte sollicitiren, und deren Resultat durch ihren Mittelpunkt geht, ändern den Parallelismus ihrer Umdrehungsachse nicht. Auf solche Art bleibt die Achse der Erde bey ihrem Umlaufe um die Sonne, immer sehr nahe sich selbst parallel, ohne daſs man nöthig hätte, eine jährliche Bewegung der Erdpole um die Pole der Ekliptik mit dem *Copernicus* anzunehmen.

Wenn der Körper irgend eine andere Figur hat, so kann seine Umdrehungsachse jeden Augenblick sich ändern. Die Untersuchung dieser Veränderungen, wie auch immer die auf den Körper wirkenden Kräfte beschaffen seyn mögen, ist wegen ihrer Beziehung auf das Vorrücken der Nachtgleichen und das Schwanken des Monds die wichtigste Aufgabe in der Mechanik der vesten Körper. Durch ihre Auflösung ist man auf folgendes sonderbare und sehr nützliche Resultat geführt worden, dafs nämlich in jedem Körper drey auf einander lothrecht stehende Achsen vorhanden sind, um welche er sich gleichförmig drehen kann, wenn er nicht durch fremde Kräfte sollicitirt wird. Diese Achsen hat man daher *Hauptachsen der Umdrehung* genannt.

Ein schwerer Körper oder ein System von schweren Körpern, von was immer für einer Figur, das um eine veste und waagrechte Achse schwingt, stellt ein zusammengesetztes Pendel vor. In der Natur giebt es gar keine andere, und die einfachen Pendeln,

woven

wovon wir oben gesprochen haben, sind blofs geometrische, zur Vereinfachung der Gegenstände dienliche, Vorstellungsarten. Es ist leicht, die zusammengesetzten Pendeln, deren sämmtlichen Punkte vest an einander anschliefsen, auf solche zu beziehen. Wenn man die Länge des einfachen Pendels, dessen Schwingungen mit denen eines zusammengesetzten von gleicher Dauer sind, mit der ganzen Masse des letztern, und mit der Entfernung seines Schwerpunkts von der Achse des Schwungs multiplicirt, so ist das Product gleich der Summe der Producte von jedem Theilchen des zusammengesetzten Pendels in das Quadrat seiner Entfernung von der nämlichen Achse. Vermittelst dieser von Huygens erfundenen Regel hat man durch Versuche mit zusammengesetzten Pendeln, die Länge des einfachen Pendels, das Secunden schwingt, kennen gelernt.

Wir wollen uns ein Pendel gedenken, das sehr kleine Schwingungen macht, und setzen, dafs in dem Augenblicke, wo es von der lothrechten Linie am weitesten entfernt ist, eine kleine, auf der Ebene seiner Bewegung lothrechte Kraft eingedrückt werde; so wird es um die lothrechte Linie eine Ellipse beschreiben. Um sich seine Bewegung vorzustellen, kann man sich ein eingebildetes Pendel gedenken, welches fortfährt zu schwingen, wie es das wirkliche Pendel, ohne die neue Kraft, die ihm eingedrückt wurde, gethan haben würde, während das letztere Pendel auf beyden Seiten des eingebildeten schwingt, wie wenn dieses unbeweglich lothrecht wäre. Die Bewegung des wirklichen Pendels ist also das Resultat von zwey einfachen Schwingungen, welche zugleich erfolgen, und leicht zu bestimmen sind.

Diese Art, die kleinen Schwingungen der Körper zu betrachten, läſst sich auf jedes System ausdehnen. Wenn man setzt, das System sey durch sehr kleine Stöſse aus dem Zustande des Gleichgewichts gebracht, und man ertheilt ihm sofort neue Stöſse, so wird es in Ansehung der Zustände, die es, vermöge der ersten Stöſse, nach einander angenommen haben würde, eben so schwingen, wie es in Absicht auf seinen Zustand des Gleichgewichts schwingen würde, wenn die neuen Stöſse ihm allein in diesem Zustande eingedrückt worden wären. Sehr kleine Schwingungen eines Systems von Körpern, so zusammeugesetzt sie auch immer seyn mögen, können daher als durch einfache, denen des Pendels völlig ähnliche Schwingungen gebildet angesehen werden. In der That, wenn man sich das System nur wenig aus dem Zustande des Gleichgewichts gebracht gedenkt, so daſs die Kraft, welche jeden Körper treibt, gegen den Punkt gerichtet ist, welchen er in diesem Zustande einnahm, und daſs sie überdieſs seiner Entfernung von diesem Punkt proportionirt ist, so ist klar, daſs dieſs während des Schwungs des Systems Statt haben werde, und daſs in jedem Augenblicke die Geschwindigkeiten der verschiedenen Körper ihren Entfernungen von der Lage des Gleichgewichts proportionirt seyn werden; sie werden daher alle im nämlichen Augenblicke in diese Lage kommen, und auf die nämliche Art schwingen, wie ein einfaches Pendel. Aber der bisher bey dem Systeme angenommene Zustand der Störung des Gleichgewichts ist nicht der einzige. Wenn man einen von den Körpern von seiner Lage des Gleichgewichts entfernt, und die Lagen der andern Körper, welche den vorigen Bedingungen Genüge thun, sucht, so kommt man auf eine Gleichung von einem Grade, welcher der Zahl der Körper des Systems gleich ist, welches eben so viele Schwingungen giebt, als man Körper hat

Wir wollen uns bey dem Systeme die erste dieser Schwingungen gedenken, und alle Körper, nach dem Verhältnisse der auf die zweyte einfache Schwingung sich beziehenden Gröſsen, in Gedanken auf einen Augenblick von ihrer Lage entfernen. Vermöge der Gleichzeitigkeit der Schwingungen wird das System in Ansehung der Zustände, in welche es durch die erste einfache Schwingung nach einander gekommen seyn würde, eben so schwingen, wie es vermöge der zweyten allein um seinen Zustand des Gleichgewichts geschwungen haben würde; seine Bewegung wird also durch die zwey ersten einfachen Schwingungen bestimmt werden. Auf ähnliche Art kann man mit dieser Bewegung die dritte einfache Schwingung verbinden, und wenn man alle diese Schwingungen so mit einander zu verbinden fortfährt, so wird man alle möglichen Bewegungen des Systems auf die allgemeinste Art darstellen.

Hieraus ergiebt sich ein leichtes Mittel, die absolute Beharrlichkeit seines Gleichgewichts kennen zu lernen. Wenn nämlich in allen auf jede einfache Schwingung sich beziehenden Lagen die Kräfte, welche die Körper sollicitiren, bestrebt sind, sie in den Zustand des Gleichgewichts zurückzuführen, so wird dieser Zustand beharrlich seyn; er wird es aber nicht seyn, oder er wird nur eine relative Beharrlichkeit haben, wenn in einer dieser Lagen die Kräfte bestrebt sind, die Körper davon zu entfernen.

Es ist sichtbar, daſs diese Art, sehr kleine Bewegungen eines Systems zu betrachten, sich auch auf flüssige Körper erstreckt, deren Schwingungen das Resultat von gleichzeitigen und oft unzählig vielen einfachen Schwingungen sind.

Ein sichtbares Beyspiel von der Gleichzeitigkeit sehr kleiner Schwingungen hat man an den Wellen. Wenn man einen Punkt der Oberfläche eines stehenden Wassers leicht bewegt, so sieht man kreisförmige Wellen um ihn her sich bilden und erweitern. Bewegt man die Oberfläche in einem andern Punkte, so bilden sich neue Wellen, und vermischen sich mit den ersten; sie legen sich über die durch die ersten Wellen erschütterte Fläche her, wie sie sich über eben diese Fläche im Ruhestande würden verbreitet haben, so daſs man sie in ihrer Mischung vollkommen unterscheidet. Was das Auge in Ansehung der Wellen gewahr nimmt, eben das empfindet das Ohr in Ansehung der Töne, oder der Schwingungen der Luft, die sich gleichzeitig fortpflanzen, ohne sich zu verändern, und sehr unterschiedene Eindrücke zu machen.

Der Grundsatz der Gleichzeitigkeit der einfachen Schwingungen, den man dem Daniel Bernoulli zu danken hat, ist eins von den allgemeinen Resultaten, welche durch die Leichtigkeit, die sie der Einbildungskraft gewähren, die Erscheinungen und ihre auf einander folgenden Veränderungen sich vorzustellen, für sich einnehmen. Man kann ihn leicht aus der analytischen Theorie der kleinen Schwingungen eines Systems ableiten.

Diese hangen von linearen Differentialgleichungen ab, deren vollständige Integrale die Summe der besondern Integrale sind.

Die einfachen Schwingungen legen sich also eben so über einander her, um die Bewegung des Systems zu bilden, wie die besondern Integrale, die sie darstellen, mit einander verbunden werden, um die vollständigen Integrale zu geben. Es ist sehr anziehend auf solche Art in den sinnlichen Erscheinungen der Natur die intellectuellen Wahrheiten der Analysis aufzusuchen. Diese Uebereinstimmung, wovon das Weltsystem uns zahlreiche

Beyspiele aufstellen wird, hat für die Freunde mathematischer Speculationen einen der gröfsten Reitze.

Es ist natürlich, die Bewegungsgesetze der Körper auf einen allgemeinen Grundsatz zurückzuführen, wie man die Gesetze ihres Gleichgewichts in dem einzigen Grundsatze der virtualen Geschwindigkeiten zusammengefafst hat. Um dazu zu gelangen, wollen wir die Bewegung eines Systems von Körpern betrachten, die auf einander wirken, ohne durch beschleunigende Kräfte sollicitirt zu werden. Ihre Geschwindigkeiten ändern sich jeden Augenblick; aber man kann jede dieser Geschwindigkeiten für jeden Augenblick als aus derjenigen, welche im folgenden Augenblicke Statt hat, und aus einer andern, welche im Anfange dieses zweyten Augenblicks aufhören mufs, zusammengesetzt betrachten. Wäre diese aufgehobene Geschwindigkeit bekannt, so wäre es leicht nach dem Gesetze der Zerlegung der Kräfte die Geschwindigkeit der Körper im zweyten Augenblicke daraus zu schliefsen. Nun ist aber klar, dafs, wenn die Körper nur mit den aufgehobenen Geschwindigkeiten getrieben worden wären, sie einander im Gleichgewichte gehalten haben würden. Folglich werden die Gesetze des Gleichgewichts die Verhältnisse der verlornen Geschwindigkeiten geben, und es wird leicht seyn, daraus die übrigbleibenden Geschwindigkeiten und deren Richtungen herzuleiten; man wird also durch die Infinitesimalrechnung die successiven Veränderungen der Bewegung des Systems und seine Lage für jeden Augenblick erhalten.

Es ist klar, daſs wenn die Körper von beschleunigenden Kräften getrieben werden, man immer die nämliche Zerlegung der Geschwindindigkeiten vornehmen kann; aber alsdann muſs zwischen den aufgehobenen Geschwindigkeiten und diesen Kräften ein Gleichgewicht Statt finden.

Diese Art, die Gesetze der Bewegung auf die des Gleichgewichts zurückzuführen, die man hauptsächlich dem D'Alembert zu danken hat, ist allgemein und sehr lichtvoll. Man würde Ursache haben, sich zu wundern, daſs sie den Geometern, die sich vor ihm mit der Dynamik beschäftiget hatten, entgangen war, wenn man es nicht wüſste, daſs die einfachsten Ideen fast immer diejenigen sind, welche sich dem menschlichen Geiste zuletzt darbieten.

Es wäre nun noch übrig, den bisher erläuterten Grundsatz mit dem der virtualen Geschwindigkeiten zu vereinigen, um der Mechanik alle die Vollkommenheit zu ertheilen, deren sie empfänglich scheint. Dieſs hat Lagrange gethan, und durch dieses Mittel hat er die Untersuchung der Bewegung eines jeden Systems von Körpern auf die Integration von Differentialgleichungen gebracht; alsdann ist der Zweck der Mechanik erfüllt, und es ist die Sache der reinen Analysis, die Auflösung der Aufgaben zu Stande zu bringen. Hier folgt die einfachste Art, diese Gleichungen zu bilden.

Wenn man sich drey veste auf einander lothrechte Achsen gedenkt, und man zerlegt für einen Augenblick die Geschwindigkeit von jedem materiellen Punkte eines Systems von Körpern in drey andere, diesen Achsen parallele, so wird man jede partiale Geschwindigkeit während dieses Augenblicks als gleichförmig betrachten können; man wird sich ferner vorstellen können, der Punkt werde, am Ende des Augenblicks, einer dieser Achsen parallel, von drey Geschwindigkeiten getrieben, nämlich von seiner Geschwindigkeit in diesem Augenblicke, von der kleinen Veränderung, die er im folgenden Augenblicke erhielt, und von eben dieser Veränderung in entgegengesetzter Richtung genommen. Die zwey ersten dieser Geschwindigkeiten dauren im folgenden Augenblicke fort, die dritte muſs folglich durch die den Punkt sollicitirenden Kräfte, und durch die Wirkung der andern Punkte des Systems aufgehoben werden. Gedenkt man sich also die augenblicklichen Veränderungen der partialen Geschwindigkeiten von jedem Punkte des Systems an diesem Punkte in entgegengesetzter Richtung angebracht, so muſs das System vermöge aller dieser Veränderungen, und der Kräfte, die es treiben, im Gleichgewichte seyn.

Man wird also nach dem Grundsatze der virtualen Geschwindigkeiten die Gleichungen für dieses Gleichgewicht erhalten, und wenn man diese mit denen für die Verknüpfung der Theile des Systems verbindet, so wird man die Differentialgleichungen für die Bewegung eines jeden seiner Punkte erhalten.

Es ist sichtbar, daſs man auf eben diese Art die Gesetze der Bewegung der flüssigen Körper auf die ihres Gleichgewichts zurückführen kann. In diesem Falle beruhen die Bedingungen in Ansehung der Verbindung der Theile des Systems darauf, daſs das Volumen eines jeden Theilchens des flüssigen Körpers immer das nämliche bleibt, wenn der flüssige Körper incompressibel ist, und daſs es von dem Drukke nach einem gegebenen Gesetze abhängt, wenn der flüssige Körper elastisch und compressibel ist. Die Gleichungen, welche diese Bedingungen, und die Veränderungen der Bewegung des flüssigen Körpers ausdrücken, enthalten die partialen Differenzen der Coordinaten des Theilchens, entweder nach dem Verhältnisse der Zeit, oder nach dem Verhältnisse der ursprünglichen Coordinaten genommen.

Die Integration der Gleichungen dieser Art hat groſse Schwierigkeiten, und man hat noch nicht dazu gelangen können, ausser in einigen besonderen Fällen, die sich auf die Bewegung der schweren flüssigen Körper in Gefäſsen, auf die Theorie des Schalls und auf die Schwingungen des Meers und der Atmosphäre beziehen.

Die Betrachtung der Differentialgleichungen der Bewegung eines Systems von Körpern hat zur Entdeckung mehrerer allgemeinen sehr nützlichen Grundsätze der Mechanik geleitet, welche eine Erweiterung derjenigen sind, die wir im zweyten Kapitel dieses Buchs über die Bewegung eines Punkts beygebracht haben.

Ein materieller Punkt bewegt sich gleichförmig in gerader Linie, wenn er keine Einwirkung fremder Ursachen erfährt. In einem Systeme von Körpern, die auf einander wirken, ohne die Wirkung äuſserer Ursachen zu erfahren, bewegt sich der gemeinschaftliche Schwerpunkt gleichförmig in gerader Linie, und seine Bewegung ist die nämliche, wie wenn alle Körper in diesem Punkte vereinigt angenommen, und alle Kräfte, die sie treiben, unmittelbar in demselben angebracht wären; so daſs die Richtung und Gröſse ihres Resultats beständig die nämlichen bleiben.

Wir haben gesehen, daſs der Radius Vector eines Körpers, der durch eine gegen einen vesten Punkt gerichtete Kraft sollicitirt wird, Flächen beschreibt, die den Zeiten proportionirt sind. Wenn man ein System von Körpern setzt, die auf was immer für eine Art auf einander wirken, und von einer gegen einen vesten Punkt gerichteten Kraft sollicitirt werden, und man zieht von diesem Punkte an jeden derselben einen Radius Vector, den man auf eine unveränderliche durch diesen Punkt gehende Ebene projicirt, so ist die Summe der Producte der Masse eines jeden Körpers in die von dem Entwurfe seines Radius Vectors beschriebene Fläche der Zeit proportionirt. Darin besteht der Grundsatz der *Erhaltung der Flächen.*

Die *lebendige Kraft* eines Systems von Körpern nennt man die Summe der Producte der Masse eines jeden Körpers in das Quadrat seiner Geschwindigkeit. Wenn sich ein Körper auf einer Linie oder Fläche bewegt, ohne eine fremde Einwirkung zu leiden, so ist seine lebendige Kraft immer die nämliche, weil seine Geschwindigkeit beständig ist. Wenn die Körper eines Systems keine andere Wirkungen leiden, als ihre gegenseitigen Züge und Pressungen, entweder unmittelbar, oder vermittelst undehnbarer und unelastischer Stäbe und Fäden, so wird die lebendige Kraft des Systems beständig seyn, selbst in dem Falle, wenn mehrere dieser Körper genöthiget würden, sich in krummen Linien oder Flächen zu bewegen. Dieſs ist der Grundsatz der Erhaltung der lebendigen Kräfte.

Bey der Bewegung eines durch was immer für Kräfte sollicitirten Punkts ist die Veränderung der lebendigen Kraft gleich der doppelten Summe der Producte der Masse des Punkts in jede der beschleunigenden Kräfte, stückweise multiplicirt durch die elementarischen

Gröfsen, um welche der Punkt gegen ihren Ursprung fortrückt. Bey der Bewegung eines jeden Systems ist das Doppelte der Summe aller dieser Producte die Veränderung der lebendigen Kraft des Systems.

Wenn die lebendige Kraft ihr Maximum oder ihr Minimum erreicht, so ist diese Veränderung Null; das System würde also, laut des Grundsatzes der virtualen Geschwindigkeiten, in dieser Lage, vermöge der beschleunigenden Kräfte, wovon es getrieben wird, im Gleichgewichte seyn. Unter allen Lagen also, welche das System nach einander annimmt, ist die, wobey es die gröfste oder kleinste lebendige Kraft hat, auch diejenige, bey welcher es im Gleichgewichte bleiben würde. Dabey ist auch das merkwürdig, dafs, wenn bey dieser Lage die lebendige Kraft beständig ein Maximum ist, das Gleichgewicht beharrlich ist, wie auch immer die Geschwindigkeiten der Körper, wenn sie dazu gelangen, beschaffen seyn mögen; dafs es aber das nicht ist, wenn die lebendige Kraft dabey beständig ein Minimum ist. Diefs folgt offenbar aus dem, was wir oben von den einfachen Schwingungen eines Systems von Körpern gesagt haben.

Endlich haben wir im zweyten Kapitel gesehen, daſs die Summe der Integrale des Products der Masse von jedem Körper eines Systems in seine Geschwindigkeit, und in das Element der Curve, die er beschreibt, ein Minimum ist. Dieſs giebt den Grundsatz von der kleinsten Wirkung, welcher von den Grundsätzen der gleichförmigen Bewegung des Schwerpunkts und der Erhaltung der Flächen und der lebendigen Kräfte darin unterschieden ist, daſs diese Grundsätze wahre Integrale der Differentialgleichungen der Bewegung der Körper sind, da jener nur eine besondere Verbindung eben dieser Gleichungen ist.

Es läſst sich hier noch eine wichtige Bemerkung über die Ausdehnung dieser verschiedenen Grundsätze machen. Der Grundsatz der gleichförmigen Bewegung des Schwerpunkts eines Systems von Körpern, und der Grundsatz der Erhaltung der Flächen, bestehen selbst in dem Falle, wenn durch die gegenseitige Wirkung der Körper plötzliche Veränderungen in ihren Bewegungen entstehen, und dieſs macht diese Grundsätze unter mehreren Umständen sehr nützlich; aber der Grundsatz der Erhaltung der lebendigen Kräfte, und der der kleinsten Wirkung fordern, daſs die Veränderungen der Bewegungen des Systems nach unmerklichen Abstuffungen erfolgen.

Wenn das System durch die gegenseitige Wirkung der Körper, oder durch das Aufstossen von Hindernissen, plötzliche Veränderungen erfährt, so leidet die lebendige Kraft bey jeder dieser Veränderungen eine Verminderung, die der Summe der Producte jeder Masse multiplicirt durch die Summe der Quadrate der Abwechselungen, welche diese Veränderung in ihrer, nach paralleler Richtung mit drey auf einander lothrechten Achsen zerlegten Geschwindigkeit hervorbringt, gleich ist.

Alle diese Grundsätze würden in Ansehung der relativen Bewegung der Körper des Systems, auch dann noch bestehen, wenn es mit einer allgemeinen, und den Brennpunkten der Kräfte, die wir als vest angenommen haben, gemeinschaftlichen Bewegung fortgeführt würde. Auf gleiche Art haben sie bey der relativen Bewegung der Körper auf der Erde Statt. Denn es ist, wie wir schon bemerkt haben, unmöglich, von der absoluten Bewegung eines Systems von Körpern, nach den bloſsen Erscheinungen seiner relativen Bewegung, zu urtheilen.