Anmerkungen.

I. Absolute Wahrscheinlichkeit.

Wenn es unter einer Anzahl von N gleich möglichen Fällen n Fälle, die irgend einem Ereignisse günstig, also auch $n' = N - n$ diesem Ereignisse nicht günstige Fälle gibt, so ist, nach dem oben angeführten Grundsatze, die Wahrscheinlichkeit w, daß ein günstiger Fall eintrete,

$$w = \frac{n}{N}$$

und eben so die Wahrscheinlichkeit w′, daß ein ungünstiger eintrete,

$$w' = \frac{n'}{N'}$$

und die Summe beyder Wahrscheinlichkeiten $w + w' = 1$ ist gleich der Einheit d. h. der Gewißheit, daß entweder ein günstiger oder ein ungünstiger Fall eintreten wird.

Ex. I. Von drey Urnen A, B, C enthält eine nur schwarze und die beyden andern nur weiße Kugeln. Welches ist die Wahrscheinlichkeit w, daß man, wenn man auf Gerathewohl aus einer dieser drey Urnen eine Kugel nimmt, eine schwarze Kugel ziehen wird?

Wenn man nicht weiß, welche dieser drey Urnen die schwarzen Kugeln enthält, so gibt es hier drey gleich mögliche Fälle, von denen aber nur einer ein günstiger ist; also ist $w = \frac{1}{3}$. Wenn man aber z. B. weiß, daß die Urne A nur weiße Kugeln enthält, so wird man die Hand gewiß nur an eine von den beyden andern legen; der möglichen Fälle werden also nur mehr zwey seyn, von denen einer ein günstiger ist; also wird auch die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen, $w = \frac{1}{2}$ seyn. In jenem Falle wird man also 1 gegen 3, in diesem aber 1 gegen 2 wetten können, daß eine schwarze Kugel gezogen wird. Weiß man endlich, daß beyde Urnen A und B nur weiße Kugeln enthalten, so wird man die Hand nur an die dritte Urne C legen, und da hier gewiß eine schwarze Kugel gezogen wird, so wird auch die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses gleich der Einheit seyn. In der That ist in dem letzten Falle nur ein günstiger und auch nur ein möglicher Fall, also die Wahrscheinlichkeit gleich der Einheit oder gleich der Gewißheit.

Ex. II. Man habe zwey sechsseitige Würfel A und B, wo jede der Seiten nach der Reihe mit 1, 2 . . bis 6 bezeichnet ist.

Die Wahrscheinlichkeit, daß man auf einen Wurf mit dem einen Würfel A die Zahl 2 und mit dem andern B die Zahl 5 wirft, ist gleich $\frac{1}{36}$ und eben so jede für zwey andere Zahlen, weil überhaupt, wie die folgende Tafel zeigt, 36 gleich mögliche Fälle und unter diesen nur ein günstiger ist.

A B	A B	A B	A B	A B	A B
1 1	2 1	3 1	4 1	5 1	6 1
1 2	2 2	3 2	4 2	5 2	6 2
1 3	2 3	3 3	4 3	5 3	6 3
1 4	2 4	3 4	4 4	5 4	6 4
1 5	2 5	3 5	4 5	5 5	6 5
1 6	2 6	3 6	4 6	5 6	6 6

Eben so ist die Wahrscheinlichkeit, daß man überhaupt, ohne Rücksicht auf die einzelnen Würfel, mit einem Wurfe beyder Würfel die Zahl 2 und 5 werfe, gleich $\frac{2}{36}$, aber die Wahrscheinlichkeit, daß man zwey gleiche Zahlen 1, 1 oder 2, 2 . . werfe, ist nur $\frac{1}{36}$.

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Summe der auf einen Wurf geworfenen Zahlen gleich 7 sey, ist $\frac{6}{36}$; die Wahrscheinlichkeit, daß sie gleich 5 sey, ist gleich $\frac{4}{36}$, daß sie gleich 4 sey, gleich $\frac{3}{36}$ u. s. w.

II. Relative Wahrscheinlichkeit.

Ist $N = n + n'$ die Anzahl aller möglichen Fälle, und unter ihnen n die Anzahl einer Art und n' die einer andern Art, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fall der ersten Art eintrete, wenn nur diese beyden Arten berücksichtiget werden, gleich

$$\frac{n}{n+n'}$$

und die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fall der zweyten Art eintrete, ist gleich

$$\frac{n'}{n+n'}$$

Nennt man wieder $w = \frac{n}{N}$ und $w' = \frac{n'}{N}$ die absoluten Wahrscheinlichkeiten, so ist

$$\frac{n}{n+n'} = \frac{w}{w+w'} \text{ und } \frac{n'}{n+n'} = \frac{w'}{w+w'}$$

oder die relative Wahrscheinlichkeit eines Falles ist gleich der absoluten Wahrscheinlichkeit desselben Falles, dividirt durch die Anzahl der absoluten Wahrscheinlichkeiten.

Ex. I. Zwey Personen spielen mit zwey Würfeln unter der Bedingung, daß, indem alle übrigen Fälle unbeachtet bleiben, der Erste gewinnen soll, wenn er mit einem Wurfe 7, und der Andere, wenn er 4 wirft, so ist (nach I.) die absolute Wahrscheinlichkeit, daß der Erste gewinne, $w = \frac{6}{36}$ und die des Zweyten $w' = \frac{3}{36}$; also ist die relative Wahrscheinlichkeit, daß der Erste gewinne, $\frac{w}{w+w'} = \frac{6}{9}$ und die, daß der Zweyte gewinne, $\frac{w'}{w+w'} = \frac{3}{9}$ oder ihre Wahrscheinlichkeit zu gewinnen verhalte sich wie $6:3$ oder wie $2:1$.

Ex. II. Eine Urne enthält m weiße, n rothe, p blaue, q grüne Kugeln u. s. f., und es sey $m + n + p + q \,.. = T$.

Die absolute Wahrscheinlichkeit, daß man auf den ersten Zug eine weiße ziehen wird, ist $\frac{m}{T}$ und eben so für eine rothe $\frac{n}{T}$ u. s. w.

Aber die relative Wahrscheinlichkeit, daß man eher eine weiße, als eine rothe ziehen wird, ist gleich

$$\frac{\frac{m}{T}}{\frac{m}{T}+\frac{n}{T}}=\frac{m}{m+n}$$

also auch die Wahrscheinlichkeit, daß man eher eine rothe als eine weiße ziehen wird, gleich

$$\frac{\frac{n}{T}}{\frac{m}{T}+\frac{n}{T}}=\frac{n}{m+n}$$

und die Summe beyder Wahrscheinlichkeiten ist wieder gleich der Einheit.

III. Wahrscheinlichkeit für mehrere Arten von günstigen Fällen.

Von N möglichen Fällen seyen n für einen, n′ für einen zweyten, n″ für einen dritten Fall u. s. f. günstig, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß irgend einer dieser günstigen Fälle eintrete, gleich

$$\frac{n+n'+n''+}{N}$$

oder gleich $w+w'+w''+$

wenn wieder $w=\frac{n}{N}$, $w'=\frac{n'}{N'}$, $w''=\frac{n'''}{N}$... die absoluten Wahrscheinlichkeiten dieser Fälle sind.

Ex. Die absolute Wahrscheinlichkeit, mit zwey Würfeln 7 zu werfen, war gleich $\frac{6}{36}$, und die absolute Wahrscheinlichkeit, 8 zu werfen, ist $\frac{5}{36}$. Also ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Wurfe entweder 7 oder 8 zu werfen, gleich

$$\frac{6}{36}+\frac{5}{36}=\frac{11}{36}=0.305.$$

Die absolute Wahrscheinlichkeit, 9 zu werfen, ist $\frac{4}{36}$, also ist die Wahrscheinlichkeit, auf einen Wurf entweder 7 oder 8 oder 9 zu werfen, gleich

$$\frac{6+5+4}{36}=\frac{15}{36}=0.417.$$

IV. Wahrscheinlichkeit des wiederholten Eintreffens eines günstigen Falles.

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereigniß, dessen absolute Wahrscheinlichkeit gleich $w = \frac{n}{N}$ ist, m mal nach einander eintrete, ist gleich

$$\left(\frac{n}{N}\right)^m \text{ oder gleich } w^m.$$

Ex. Mit einem Würfel die Zahl 1 zu werfen, ist die absolute Wahrscheinlichkeit gleich $\frac{1}{6}$. Also ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel zweymal nach einander die Zahl 1 zu werfen, gleich $\frac{1}{6^2}$ und dreymal, gleich $\frac{1}{6^3}$ u. s. f.

Die absolute Wahrscheinlichkeit, mit zwey Würfeln auf einen Wurf die Zahlen 1 und 1 zu werfen, ist $\frac{1}{36}$, also ist die Wahrscheinlichkeit, mit ihnen zweymal nach einander die Zahlen 1 und 1 zu werfen, gleich $\frac{1}{36^2} = 0.0008$.

Die absolute Wahrscheinlichkeit, mit zwey Würfeln auf einen Wurf zwey gleiche Zahlen überhaupt zu werfen, ist $\frac{6}{36}$. Also ist die Wahrscheinlichkeit, daß dieser Fall viermal hinter einander eintreffe, gleich

$$\left(\frac{6}{36}\right)^4 = \frac{1}{1296} = 0.0008.$$

V. Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens mehrerer Ereignisse.

Von N Fällen einer Art seyen n günstige; von N′ Fällen einer andern Art n′ günstige u. s. w.; also die absolute Wahrscheinlichkeit dieser Fälle

$$w = \frac{n}{N} \quad w' = \frac{n'}{N'} \quad w'' = \frac{n''}{N''} \text{ u. s. w.}$$

Dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß von diesen günstigen Fällen mehrere zugleich eintreffen, für zwey Fälle $\frac{n}{N} \cdot \frac{n'}{N'} = w \cdot w'$,

für drey Fälle $\frac{n}{N} \cdot \frac{n'}{N'} \cdot \frac{n''}{N''} = w \cdot w' \cdot w''$ u. s. f.

Ex. I. Die absolute Wahrscheinlichkeit, daß mit zwey Würfeln 8 geworfen werde, war $\frac{5}{36}$ und die, daß 9 geworfen werde, ist $\frac{4}{36}$, also ist die Wahrscheinlichkeit, daß mit zwey Würfeln in zwey Würfen 8 und 9 geworfen werden, gleich

$$\frac{5}{36} \cdot \frac{4}{36} = \frac{5}{324} = 0.0154.$$

Ex. II. Wenn A und B jeder zwey und C nur einen Würfel wirft, so ist die absolute Wahrscheinlichkeit, daß A zwey gleiche Zahlen werfe, gleich $\frac{6}{36}$; die Wahrscheinlichkeit, daß B keine gleichen Zahlen werfe, gleich $\frac{30}{36}$ und die Wahrscheinlichkeit, daß C die Zahl 6 werfe, gleich $\frac{1}{6}$. Also ist auch die Wahrscheinlichkeit, daß alle drey Fälle zugleich eintreffen, gleich

$$\frac{6}{36} \cdot \frac{30}{36} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{216} = 0.0231.$$

Ex. III. Wenn ein Spiel von 32 Karten in vier Theile, nach den vier Farben getheilt wird, so daß jeder Theil nur eine Farbe enthält: welches ist die Wahrscheinlichkeit, daß man auf den ersten Zug eine Figur von gegebener Farbe ziehe?

Die absolute Wahrscheinlichkeit, daß man die Hand auf das rechte von den vier Packeten lege, ist $\frac{1}{4}$. Da aber dieses Packet 8 Karten enthält, von welchen nur 3 günstig sind, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß man aus diesem Packete die wahre Karte ziehe, gleich $\frac{3}{8}$, also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8}$, oder gleich $\frac{3}{32} = 0.094$. Da nämlich nur eines der 4 Packete die wahre Karte enthält und da von den 8 Karten jedes Packets nur 3 günstige sind, so muß man die $\frac{3}{8}$ nur von dem vierten Theile aller Karten nehmen.

Ex. IV. Eine Urne enthält 2 weiße und 1 schwarze Kugel. Eine andere enthalte 4 weiße und 1 schwarze. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, daß man auf den ersten Zug aus einer dieser Urnen eine weiße Kugel ziehen wird?

Die absolute Wahrscheinlichkeit, daß man die Hand an die erste Urne legen wird, ist $\frac{1}{2}$, und die Wahrscheinlichkeit, daß dann eine weiße Kugel gezogen wird, ist $\frac{2}{3}$, also ist die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens beyder Fälle gleich $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Ganz eben so hat man bey der zweyten Urne für die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens beyder Fälle $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$. Da aber diese zwey Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{5}$, beyde für dasselbe günstige Ereigniß gehören, so hat man (nach III) für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15} = 0.733.$$

Ex. V. Das vorhergehende Beyspiel allgemeiner zu machen, habe man
a Urnen, deren jede m weiße und n schwarze Kugeln hat, und
a′ Urnen, deren jede m′ weiße und n′ schwarze Kugeln hat, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß man auf den ersten Zug eine weiße Kugel ziehen wird, gleich

$$\frac{a}{a + a'} \cdot \frac{m}{m + n} + \frac{a'}{a + a'} \cdot \frac{m'}{m' + n}.$$

Ex. VI. Hat man m Fälle, die dem Ereignisse A günstig sind und n Fälle, die dem Ereignisse B günstig sind, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß zwey Versuche nach einander

A und A geben, gleich . . . $\frac{m^2}{(m + n)^2}$

A und B » » . . . $\frac{m\,n}{(m + n)^2}$

B und A » » . . . $\frac{n\,m}{(m + n)^2}$

B und B » » . . . $\frac{n^2}{(m + n)^2}$

Sieht man also nicht auf die Ordnung, in welcher diese Ereignisse einander folgen, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß man z. B. mit einem Würfel in zwey Würfen

A und A geben, gleich . . . $\frac{m^2}{(m+n)^2}$

A . B oder B . A . . . . . . $\frac{2mn}{(m+n)^2}$

B und B . . . . $\frac{n^2}{(m+n)^2}$

Eben so ist die Wahrscheinlichkeit, daß, ohne auf die Ordnung der Seiten A, B zu sehen, drey Würfe

3mal A geben gleich . . . . $\frac{m^3}{(m+n)^3}$

2mal A und 1mal B . . . $\frac{3m^2n}{(m+n)^3}$

1mal A und 2mal B . . . $\frac{3mn^2}{(m+n)^3}$

3mal B . . . . $\frac{n^3}{(m+n)^3}$.

Man bemerkt hier sogleich die Ähnlichkeit dieser Ausdrücke mit denen des Binomiums. Es sey daher, um dieß fortzusetzen, der Kürze wegen $f = \frac{m+n}{m}$ und $g = \frac{m+n}{n}$, und die Reihe gegeben

$$f^p + p \cdot f^{p-1} g + \frac{p \cdot p-1}{1.2} \cdot f^{p-2} g^2 + \frac{p \cdot p-1 \cdot p-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot f^{p-3} g^3 + \ldots$$

so ist das erste Glied dieser Reihe die Wahrscheinlichkeit, daß man mit p Würfen pmal die Zahl A treffe; das zweyte Glied drückt die Wahrscheinlichkeit aus, mit p Würfen (p — 1)mal A und 1mal B zu treffen; das dritte Glied aber gibt die Wahrscheinlichkeit, mit p Würfen (p — 2)mal A und 2mal B zu treffen u. s. w.

Ex. VII. Welches ist aber die Wahrscheinlichkeit, daß man in p Würfen wenigstens nicht weniger als (p — 1)mal A treffe?

Da in dem gesuchten Ereignisse auch das enthalten ist, wo man in p Würfen pmal A trifft, so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich der Summe der zwey ersten Glieder jener Reihe, also gleich

$$f^p + p \cdot f^{p-1} g$$

und eben so ist die Wahrscheinlichkeit, daß man in p Würfen nicht weniger als (p — 2)mal A und nicht weniger als 2mal B treffe, gleich der Summe der drey ersten Glieder jener Reihe u. s. f.

Ex. VIII. Um darauf einige besondere Fälle anzuwenden, suchen wir die Wahrscheinlichkeit, mit einem 6seitigen Würfel in 4 Würfen die Zahl 6 wenigstens 2mal zu werfen.

Hier ist $m = 1$, $n = 5$ und $p = 4$, also die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich der Summe der drey ersten Glieder jener Reihe, oder gleich

$$\left(\frac{1}{6}\right)^4 + 4\left(\frac{1}{6}\right)^3 . \frac{5}{6} + \frac{4 . 3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2 . \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{171}{1296} \text{ oder}$$

nahe gleich $\frac{1}{7}$.

Suchen wir noch die Wahrscheinlichkeit, mit 4 Würfen die Zahl 6 wenigstens einmal zu werfen, so ist m, n und p, wie zuvor, und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist die Summe der vier ersten Glieder jener Reihe, oder gleich

$$\frac{171}{1296} + \frac{4 . 3 . 2}{2 . 3}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{671}{1296}$$

und da diese Zahl $\frac{671}{1296}$ etwas größer als $\frac{1}{2}$ ist, so ist es auch wahrscheinlicher, daß die Zahl 6 in 4 Würfen einmal, als daß sie gar nicht vorkommen wird.

VI. Wahrscheinlichkeiten für wechselseitige Ereignisse.

Für N mögliche Fälle sey $w = \frac{n}{N}$ die absolute Wahrscheinlichkeit eines, und $w' = \frac{n'}{N}$ die eines andern Ereignisses, so ist also w die Wahrscheinlichkeit, daß das I^te Ereigniß eintreffe, und $1 - w$ die Wahrscheinlichkeit, daß das I^te Ereigniß nicht eintreffe.

Eben so ist (nach V)

$w w'$ die Wahrscheinlichkeit, daß beyde Ereignisse I und II zugleich eintreffen, und $(1 - w) w'$ die Wahrscheinlichkeit, daß I nicht, aber wohl II eintreffe; $(1 - w') w$ die Wahrscheinlichkeit, daß I, aber nicht II eintreffe, und $1 - (1 - w)(1 - w') = w + w - w w'$ die Wahrscheinlichkeit, daß I oder daß, wenn I nicht, wenigstens II, daß also von beyden wenigstens eines eintreffe.

Ex. Die Wahrscheinlichkeit, mit zwey Würfeln auf den ersten Wurf 9, oder wenn dieß nicht geschieht, wenigstens auf den zweyten Wurf 9 zu treffen, ist gleich

$$1 - \left(1 - \frac{4}{36}\right)\left(1 - \frac{4}{36}\right) = 0{.}2099.$$

Die Wahrscheinlichkeit aber, auf den ersten Wurf 9, oder wenn dieß nicht geschieht, auf den zweyten Wurf 8 zu treffen, ist gleich

$$1-\left(1-\frac{4}{36}\right)\left(1-\frac{5}{36}\right)=0.2345.$$

Eben so hat man, wenn noch ein drittes Ereigniß, dessen absolute Wahrscheinlichkeit $w''=\frac{n''}{N}$ ist, hinzukömmt, für die Wahrscheinlichkeit, daß I, oder wenn dieß nicht geschieht, daß II, oder wenn auch dieses nicht geschieht, daß dann wenigstens III eintreffe, den Ausdruck $1-(1-w)(1-w')(1-w'')$ u. s. f.

Ex. Die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln im ersten Wurfe die Zahl 7, oder, wenn dieß nicht geschieht, im zweyten die Zahl 7, oder wenn auch dieses nicht geschieht, wenigstens in dem dritten Wurfe die Zahl 7 zu werfen, ist gleich

$$1-\left(1-\frac{6}{36}\right)\left(1-\frac{6}{36}\right)\left(1-\frac{6}{36}\right)=1-\left(\frac{30}{36}\right)^3=0.421.$$

Sucht man dieselbe Wahrscheinlichkeit für die Zahl 2, so ist sie gleich $1-\left(1-\frac{1}{36}\right)^3=0.081$, also viel kleiner.

Diese Ausdrücke lassen sich unmittelbar auf die wahrscheinliche Dauer der Verbindungen zweyer oder mehrerer Personen in Witwen- und Waisenanstalten anwenden. Ist nämlich w die Wahrscheinlichkeit, daß eine a jährige Person A noch p Jahre leben wird und ist eben so w' die Wahrscheinlichkeit, daß eine b jährige Person B noch p Jahre, und w'', daß eine c jährige Person C noch p Jahre leben wird u. s. w., welche Wahrscheinlichkeiten man aus den bekannten Mortalitätstafeln findet, so ist ww' die Wahrscheinlichkeit, daß A und B noch p Jahre beysammen leben oder die Ehedauer. Eben so ist $1-ww'$ die Wahrscheinlichkeit, daß von diesen beyden Personen nach p Jahren eine schon todt ist; $w(1-w')$ die Wahrscheinlichkeit, daß nach p Jahren A noch lebe und B schon todt ist; $w'(1-w)$ die Wahrscheinlichkeit, daß nach p Jahren A schon todt ist und B noch lebe; $(1-w)(1-w')$ die Wahrscheinlichkeit, daß nach p Jahren beyde schon todt sind und $1-(1-w)(1-w')$ die Wahrscheinlichkeit, daß nach p Jahren noch nicht beyde todt sind, sondern daß wenigstens einer, oder vielleicht beyde noch leben.

Eben so ist $ww'w''$ die Wahrscheinlichkeit, daß nach p Jahren alle drey Personen A, B, C noch beysammen leben; $ww'(1-w'')$ die Wahrscheinlichkeit, daß nach p Jahren A und B noch leben, aber C schon todt ist; $(1 - w)(1 - w')w''$ die Wahrscheinlichkeit, daß nach p Jahren A und B schon todt sind, aber C noch lebe; $1 - w w' w''$ die Wahrscheinlichkeit, daß nach p Jahren wenigstens eine von diesen drey Personen todt ist; $1 - (1 - w)(1 - w')(1 - w'')$ die Wahrscheinlichkeit, daß nach p Jahren noch nicht alle drey todt sind, sondern daß wenigstens eine, vielleicht zwey, vielleicht alle drey noch leben; $(1 - w)(1 - w')(1 - w'')$ die Wahrscheinlichkeit, daß nach p Jahren alle drey schon todt sind u. s. w.

VII. Lotterien.

A. Eine Lotterie enthalte n Nummern, von welchen bey jeder Ziehung r Nummern gezogen werden. Man hat a Nummern gesetzt. Welches ist die Wahrscheinlichkeit w, daß diese a Nummern alle herauskommen?

Es ist $w = \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-a+1)}{n(n-1)(n-2)\ldots(n-a+1)}$

In unsern gewöhnlichen Lotterien ist $n = 90$ und $r = 5$ also

$$w = \frac{5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\,.\, (6 - a)}{90 \,.\, 89 \,.\, 88 \,.\,.\,.\, (91 - a)}$$

1. Hat man also nur eine Nummer gesetzt, so ist $a = 1$ und die Wahrscheinlichkeit, daß sie heraus komme

$$w = \frac{1}{18} = 0.0555.$$

2. Für zwey Nummern ist $a = 2$ und daher die Wahrscheinlichkeit, mit zwey gesetzten Nummern eine Ambe zu erhalten

$$w = \frac{5 \,.\, 4}{90 \,.\, 89} = \frac{2}{801} = 0.002497.$$

Eben so ist die Wahrscheinlichkeit, mit drey Nummern eine Terne zu erhalten

$$w = \frac{5 \,.\, 4 \,.\, 3}{90 \,.\, 89 \,.\, 88} = \frac{1}{11748} = 0.000\ 085$$

und mit vier Nummern eine Quaterne

$$w = \frac{5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2}{90 \,.\, 89 \,.\, 88 \,.\, 87} = \frac{1}{511038} = 0.000\ 001\ 957$$

und endlich mit fünf gesetzten Nummern eine Quinterne

$$w = \frac{5 . 4 . 3 . 2 . 1}{90 . 89 . 88 . 87 . 86} = \frac{1}{43949268} = 0.000\ 000\ 023$$

B. Die Wahrscheinlichkeit, daß a gesetzte Nummern alle und überdieß noch in einer bestimmten Ordnung herauskommen, ist

$$w = \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-a+1)}{1 . 2 . 3 \ldots a . n(n-1)(n-2)\ldots(n-a+1)}$$

C. Setzt man endlich $a = r$, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß die sämmtlichen r Nummern, welche in einer Ziehung gezogen werden, voraus bestimmte Nummern sind (nach A)

$$w = \frac{1 . 2 . 3 \ldots r}{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}$$

und daß sie überdieß noch nach einer bestimmten Ordnung herauskommen (nach B)

$$w = \frac{1}{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}$$

D. Eine Lotterie bestehe wieder aus n Nummern, von welchen bey jeder Ziehung r gezogen werden. Welches ist die Wahrscheinlichkeit w, daß von a gesetzten Nummern eine bestimmte Anzahl, z. B. b Nummern herauskomme?

Sey $A = \frac{(n-a)(n-a-1)(n-a-2)\ldots(n-a-[r-b-1])}{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}$

$$B = a(a-1)(a-2)\ldots(a-b+1)$$
$$C = r(r-1)(r-2)\ldots(r-b+1)$$

so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$w = \frac{A . B . C}{1 . 2 . 3 \ldots b}.$$

Ex. 1. Man hat zwey Nummern gesetzt. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, daß von ihnen gewiß eine herauskömmt? Ist wie zuvor $n = 90$ und $r = 5$, so ist für dieses Beyspiel $a = 2$ und $b = 1$, also $A = \frac{85}{90 . 89}$, $B = 2$ und $C = 5$, also

$$w = \frac{85}{801} = 0 . 10611$$

Ex. 2. Hat man drey Nummern gesetzt, so ist $a = 3$ und die

Wahrscheinlichkeit, daß von ihnen eine herauskömmt, gibt

$$b = 1,\ A = \frac{85 \cdot 84}{90 \cdot 89 \cdot 88},\ B = 3,\ C = 5$$

$$\text{also } w = \frac{85 \cdot 84}{6 \cdot 89 \cdot 88} = 0.15194.$$

Sollen zwey herauskommen, so ist $b = 2$ und

$$w = \frac{85}{66 \cdot 89} = 0.01447.$$

Sollen endlich alle drey herauskommen, so ist $b = 3$ und $w = \frac{1}{11748}$ wie in A.

E. Welches ist aber die Wahrscheinlichkeit, daß von zwey gesetzten Nummern wenigstens eine, vielleicht auch alle beyde, heraus kommen?

Diese Wahrscheinlichkeit ist (nach N. III. dieser Anmerkungen) die Summe der Wahrscheinlichkeit von D Ex. 1 und A Ex. 2, also gleich

$$\frac{2}{801} + \frac{85}{801} = \frac{87}{801} = 0.10861$$

und eben so ist, nach dem Vorhergehenden, die Wahrscheinlichkeit, daß von drey gesetzten Nummern wenigstens eine, oder zwey oder vielleicht alle drey herauskommen, gleich

$$0.00008 + 0.15194 + 0.01447 = 0.16649$$

F. Ist x die Summe, welche die Lotterie dem Spieler, wenn er gewinnt, bezahlen sollte, und m das, was der Spieler auf seine Nummern gesetzt hat, so ist

$$x = \frac{m}{w}$$

wo w die in dem Vorhergehenden angeführten Wahrscheinlichkeiten des Gewinns bezeichnet. So sollte die Lotterie nach Nr. A zahlen

für einen Estratto	18 m	die Lotterie de France	17 m
» » Ambo	400 m	zahlt aber nur	270 m
» » Terno	11748 m		5500 m
» » Quaterno	511038 m (hear, hear!)		60000 m u. s. f.

G. Beschließen wir diese Bemerkungen mit folgender Aufgabe. In einer Lotterie von n Nummern werden bey jeder Ziehung r Nummern gezogen. Welches ist die Wahrscheinlichkeit w, daß in k auf einander folgenden Ziehungen alle n Nummern herausgekommen seyn werden?

Es ist $w = 1 - n\left(\frac{n-r}{n}\right)^k + \frac{n\,.\,n-1}{1\,.\,2}\left(\frac{n-r\,.\,n-r-1}{n\,.\,n-1}\right)^k$

$- \frac{n\,.\,n-1\,.\,n-2}{1\,.\,2\,.\,3}\left(\frac{n-r\,.\,n-r-1\,.\,n-r-2}{n\,.\,n-1\,.\,n-2}\right)^k +$ u. s. f.

Ex. Für $n = 90$, $r = 5$ und $k = 100$ ist $w = 0.741$, also um $\frac{1}{5}$ größer als $\frac{1}{2}$. Für $k = 85$ wird nahe $w = \frac{1}{2}$.

VIII. Zeugenaussagen.

Ex. I. Eine Urne enthält n Nummern. Eine Person, die bey der Ziehung einer dieser Nummern gegenwärtig war, sagt aus, daß die Nummer a gezogen worden sey. Welches ist die Wahrscheinlichkeit w, daß diese Zahl a in der That gezogen worden ist?

Sey p die Wahrhaftigkeit des Zeugen, oder die Wahrscheinlichkeit, daß er nicht zu betriegen suche, und r die Sicherheit des Zeugen oder die Wahrscheinlichkeit, daß er sich selbst nicht betriege, d. h. sich nicht irre.

Dieß vorausgesetzt findet man

$$w = p\,r + \frac{(1-p)(1-r)}{n-1}$$

Ist also $r = 1$, d. h., irrt sich der Zeuge nicht, so ist $w = p$ oder die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist gleich der Wahrhaftigkeit des Zeugen. Eben so ist für $p = 1$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich $w = r$.

Ist n eine sehr große Zahl, so ist nahe $w = p\,r$, oder die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist gleich der Wahrhaftigkeit des Zeugen, multiplicirt in die Sicherheit desselben.

Dabey wurde vorausgesetzt, daß der Zeuge, wenn er sich irrt, eben so leicht auf eine, als auf eine andere der in der That nicht herausgekommenen Nummern verfallen kann. Wenn aber einige von ihnen unter einander eine größere Ähnlichkeit haben und daher leichter verwechselt werden können; wenn der Zeuge für bestimmte Zahlen ein besonderes Interesse hat u. dgl., so werden die vorhergehenden Resultate nicht mehr richtig seyn.

Ex. II. Die Urne enthalte $n - 1$ schwarze und eine weiße Kugel. Ein Zeuge sagt aus, es sey eine weiße Kugel gezogen worden.

Welches ist die Wahrscheinlichkeit w, daß in der That eine weiße Kugel gezogen worden ist?

Haben wieder p und r die vorige Bedeutung und setzt man

$$q = p\,r + (1 - p)(1 - r)$$

so findet man

$$w = \frac{q}{q + (1 - q)(n - 1)}$$

und eben so ist die Wahrscheinlichkeit w', daß nicht eine weiße, sondern eine schwarze Kugel gezogen wurde

$$w' = 1 - w = \frac{(1 - q)(n - 1)}{q + (1 - q)(n - 1)}$$

Ist die Zahl n der Kugeln sehr groß, so wird die Aussage der Zeugen sehr zweifelhaft, wie der Ausdruck für w zeigt, wenn nicht zugleich q sehr nahe an 1 ist. Je größer aber die Zahl der Kugeln ist, desto außerordentlicher erscheint auch das von den Zeugen ausgesagte Ereigniß, zum Beweise, wie sehr die Außerordentlichkeit einer Begebenheit die Aussage der Zeugen schwächt.

Die Größe q zeigt die Wahrscheinlichkeit an, daß der Zeuge wirklich die Wahrheit gesagt habe, so wie sie ihm erschien. Daß er also weder betrogen noch sich geirrt, oder daß er zugleich betrogen und sich geirrt habe.

Ex. III. Eine Urne enthalte eine Anzahl n weißer und eine andere Urne eine eben so große Anzahl schwarzer Kugeln. Man zieht aus einer dieser Urnen eine Kugel und wirft sie in die andere Urne, und zieht endlich aus dieser andern Urne wieder eine Kugel.

Ein Zeuge sagt aus, daß in der ersten Ziehung eine weiße Kugel gezogen worden sey, und ein zweyter Zeuge sagt aus, daß auch in der zweyten Ziehung eine weiße Kugel gezogen worden sey. Welches ist die Wahrscheinlichkeit w, daß wirklich in beyden Ziehungen eine weiße Kugel gezogen worden sey?

Bezeichnet wieder q die Wahrscheinlichkeit, daß der erste Zeuge und q' die, daß der zweyte die Wahrheit gesagt habe, wo also wieder $q = p\,r + (1 - p)(1 - r)$ und $q' = p'r' + (1 - p')(1 - r')$ ist, so sey der Kürze wegen

$$Q = q\,q' + (1 - q)(1 - q')$$

und es ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$w = \frac{q\,q'}{Q + (1 - Q)\,n}$$

also wieder diese Wahrscheinlichkeit desto kleiner, je größer die Anzahl der Kugeln, d. h. je außerordentlicher das von den Zeugen ausgesagte Ereigniß ist.

Ex. IV. Zwey Zeugen sagen über irgend ein Ereigniß übereinstimmend dasselbe aus. Welches ist die Wahrscheinlichkeit w, daß dieses Ereigniß in der That statt hatte?

Eine Urne enthalte z. B. n Nummern, und beyde Zeugen sagen aus, daß die Nummer a gezogen worden sey.

Sind p und p' die Grade der Wahrhaftigkeit der beyden Zeugen und nimmt man $r = r' = 1$, d. h. nimmt man an, daß sie sich nicht geirrt haben, so findet man die Wahrscheinlichkeit, daß die Nummer a in der That gezogen worden ist

$$w = \frac{1}{1 + \frac{(1-p)(1-p')}{(n-1)\,p\,p'}} \quad . \; . \; . \quad (A)$$

also auch die Wahrscheinlichkeit, daß sie nicht gezogen worden ist

$$w' = 1 - w = \frac{1}{1 + \frac{(n-1)\,p\,p'}{(1-p)(1-p')}}$$

Ist $n = 2$, so sind beyde Wahrscheinlichkeiten einander gleich und man hat

$$w = w' = \frac{p\,p'}{p\,p' + (1-p)(1-p')}$$

und dieß ist überhaupt der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit eines von zwey Zeugen übereinstimmend ausgesagten Ereignisses, wenn das Eintreffen und Nichteintreffen dieses Ereignisses gleich möglich ist.

Ist die Wahrhaftigkeit beyder Zeugen gleich groß, so ist die letzte Wahrscheinlichkeit gleich

$$\frac{p^2}{p^2 + (1-p)^2}$$

und überhaupt: sagen r gleich wahrhafte Zeugen die Existenz eines solchen Ereignisses aus, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß dasselbe in der That statt gehabt habe, gleich

$$\frac{p^r}{p^r + (1-p)^r}$$

vorausgesetzt, daß die Existenz und Nichtexistenz des Ereignisses gleich möglich ist.

Ist die Anzahl n der Nummern der Urne sehr groß, so wird in der Gleichung (A) die Größe w nahe gleich 1 oder es ist ungemein wahrscheinlich, daß die Nummer a in der That gezogen worden ist.

Die Ursache davon ist, weil die Zeugen, wenn sie ja betriegen wollten, nicht alle dieselbe Nummer angegeben haben würden.

Ex. V. Eine Urne enthalte n Nummern. Ein erster Zeuge sagt aus, daß die Nummer a, ein zweyter aber, daß die Nummer b gezogen worden sey. Die Wahrhaftigkeit dieser beyden Zeugen sey p und p′ und ihre Sicherheit wieder $r = r' = 1$.

Dieß vorausgesetzt, ist die Wahrscheinlichkeit w, daß die Zahl a in der That gezogen worden ist,

$$w = \frac{p\,(1 - p')}{1 - p\,p' - \dfrac{(1 - p)\,(1 - p')}{n - 1}}$$

Ist $n = 2$, d. h., ist die Existenz der beyden Ereignisse, welche die Zeugen aussagen, eben so wahrscheinlich, als die Nichtexistenz derselben, und ist überdieß $p = p'$, so wird die letzte Gleichung $w = \frac{1}{2}$ und daher auch die Wahrscheinlichkeit w′ des Gegentheils, daß nämlich die Zahl b gezogen worden ist, $w' = 1 - w = \frac{1}{2}$, also $w = w'$, weil beyde Zeugnisse sich gegenseitig aufheben.

Wird überhaupt ein Ereigniß dieser Art von f Zeugen bejaht und von g Zeugen verneint, und ist die Wahrhaftigkeit aller Zeugen gleich groß, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß dieses Ereigniß sich in der That zugetragen habe, gleich

$$\frac{p^{f-g}}{p^{f-g} + (1 - p)^{f-g}}$$

d. h. diese Wahrscheinlichkeit ist, nach Ex. IV. eben so groß, als wäre sie von f — g Zeugen bestätiget worden.

Ex. VI. Nehmen wir nun an, die Aussage, daß z. B. aus einer Urne mit n Nummern die Nummer a gezogen worden, sey nach und nach, auf dem Wege der Tradition, durch r Zeugen bestätiget worden, so ist die Wahrscheinlichkeit w, daß dieses Ereigniß in der That statt gehabt hat,

$$w = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\;\frac{(np_1 - 1)\,(np_2 - 1)\,(np_3 - 1)\ldots(np_r - 1)}{(n - 1)^r}\;\ldots\;(B)$$

wo $p_1\ p_2\ p_3$ . . die Wahrhaftigkeit des 1, 2, 3 . . Zeugen bezeichnet.

Ist n unendlich groß, so ist

$$w = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_r$$

Ist $n = 2$, d. h., ist die Existenz des Ereignisses eben so möglich, als die Nichtexistenz desselben, so ist

$$w = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p_1 - 1)(2p_2 - 1)(2p_3 - 1)\ldots(2p_r - 1)$$

Überhaupt, je weiter diese Reihe der Traditionen sich erstreckt, desto mehr nähert sich der Werth von w der Gränze $\frac{1}{n}$, d. h. der absoluten Wahrscheinlichkeit (Nr. I.), daß die Nummer a in der That gezogen worden ist. Das Glied $\frac{n-1}{n}$; $\frac{(np_1 - 1)}{(n-1)}$ ... ist also das, um was diese Reihe von Zeugen die absolute Wahrscheinlichkeit des Ereignisses vergrößert. Man sieht wie die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses durch spätere Zeugen immer vermindert wird, da die Werthe der Brüche $\frac{np_1 - 1}{n-1}$; $\frac{np_2 - 1}{n-1}$ .. immer kleiner werden, indem die Werthe der Größen $p_1\ p_2\ p_3$ .. mit der Zeit immer abnehmen. Die Folge der Zeiten schwächt daher die Verläßlichkeit unserer historischen Nachrichten eben so, wie sie allmählig die Denkmähler zerstört, welche wir den wichtigen Personen und Ereignissen der Geschichte aufgestellt haben. Die Buchdruckerkunst ist in der That eines der mächtigsten Mittel, diesem Verfalle entgegenzuwirken. Aber auch sie wird nicht verhindern können, daß endlich nach Jahrtausenden von physischen und moralischen Revolutionen, welche die Oberfläche der Erde zu allen Zeiten in Bewegung setzen, selbst diejenigen Thatsachen der Geschichte dunkel und zweifelhaft werden, die jetzt allgemein als vollkommen gewiß anerkannt sind.

IX. Wahrscheinlichkeit der Urtheilssprüche.

Ist $p + q$ die Anzahl der Richter eines Tribunals, von welchen p den Angeklagten verurtheilen und q ihn freysprechen, so ist die Wahrscheinlichkeit w eines in dem gesprochenen Urtheile zu befürchtenden Fehlers, wenn man der Kürze wegen $a = p + q + 1$ setzt,

$$w = \frac{1}{2^a}\left[1 + a + \frac{a \,.\, a-1}{1 \,.\, 2} + \frac{a \,.\, a-1 \,.\, a-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \ldots + \frac{a \,.\, a-1 \,.\, a-2 \,..\, (a-q+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,..\, q}\right]$$

Wird zur Gültigkeit des Ausspruches die Unanimität der Stimmen gefordert, so ist $q = 0$ und daher

$$w = \frac{1}{2^a}$$

Ex. Ist $p = 5$, $q = 3$ also $a = 9$ so ist

$$w = \frac{1}{2^9}\left(1 + 9 + \frac{9 \,.\, 8}{2} + \frac{9 \,.\, 8 \,.\, 7}{2 \,.\, 3}\right) = \frac{1}{2^9}\,(130) = 0.254$$ wie im Text.

Ist die Anzahl der Richter gleich 8, also $a = 9$ und wird die Unanimität der Stimmen gefordert, so ist

$$w = \frac{1}{2^9} = \frac{1}{512} = 0.00195.$$

Ist $p = 90$ und $q = 54$ also $a = 145$, so findet man

$$w = \frac{1}{773} = 0.0013$$

Ist $p = 112$ und $q = 100$, so findet man $w = \dfrac{1}{4.889} = 0.2045.$