Drittes Capitel.

§. 19. Wir wollen nun auf eine ähnliche Weise zwey unbekannte, durch mehrere Gleichungen gegebene Größen, zu bestimmen suchen. Um uns auch hier gleich durch ein Beyspiel zu erklären, nehmen wir an, daß die Secundenpendellänge A für die geographische Breite φ durch den Ausdruck gegeben werde

$$A = 439.23 + 2.39 \operatorname{Sin}^2 \varphi$$

in Pariser Linien, in welchen aber die beyden constanten Größen 439.23 und 2.39 noch nicht als ganz genau angesehen werden, und daher einer Verbesserung bedürfen. Seyen diese zu suchenden verbesserten Werthe

$$439.23 + x, \text{ und } 2.39 + y.$$

Hat man nun unter der Breite φ diese Pendellänge durch unmittelbare Beobachtung gleich B gefunden, und nimmt man an, daß auch diese Beobachtung nicht ganz richtig ist, und daß der wahre, noch unbekannte Werth dieses Resultates gleich $B + \varepsilon$ ist, wo also ε den Fehler der Beobachtung bezeichnet, so hat man, da sowohl $B + \varepsilon$, als auch

$$439.23 + x + (2.39 + y) \operatorname{Sin}^2 \varphi$$

den wahren Ausdruck der Pendellänge vorstellt,

$$B + \varepsilon = 439.23 + x + (2.39 + y) \operatorname{Sin}^2 \varphi,$$

und wenn man davon die vorhergehende Gleichung

$$A = 439.23 + 2.39 \operatorname{Sin}^2 \varphi$$

abzieht,

$$B - A + \varepsilon = x + y \operatorname{Sin}^2 \varphi,$$

oder wenn man den Unterschied zwischen dem Resultate B der unmittelbaren Beobachtung, und dem Resultate A der Berechnung nach dem oben aufgestellten Ausdruck, d. h. wenn man $B - A = \delta$ setzt

$$\varepsilon = x + y \operatorname{Sin}^2 \varphi - \delta,$$

welches daher die Bedingungsgleichung dieser Beobachtung ist.

Wir wollen diese Bedingungsgleichung überhaupt durch

$$\varepsilon = a\,x + b\,y - \delta$$

darstellen. Eine zweyte Beobachtung gibt eben so

$$\varepsilon_1 = a_1\,x + b_1\,y - \delta_1,$$

eine dritte

$$\varepsilon_2 = a_2\,x + b_2\,y - \delta_2 \text{ u. s. w.},$$

und es wird nun darum zu thun seyn, diejenigen Werthe von x und y zu finden, welche allen diesen Bedingungsgleichungen am besten entsprechen.

Diese Werthe von x und y werden aber wieder, wie oben, diejenigen seyn, für welche die Summe der Quadrate der Beobachtungsfehler

$$\varepsilon^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots = \Sigma \varepsilon^2$$

ein Kleinstes ist, oder für welche man hat

$$d.\Sigma\varepsilon^2 = 0.$$

Da aber die Größen x und y im Allgemeinen von einander unabhängig sind, so ist die letzte Gleichung folgenden beyden gleich geltend

$$\left(\frac{d.\Sigma\varepsilon}{dx}\right)^2 = 0, \text{ und } \left(\frac{d.\Sigma\varepsilon}{dy}\right)^2 = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen gibt, da

$$\varepsilon = a\,x + b\,y - \delta,$$

also auch

$$\varepsilon^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2 + 2abxy - 2a\delta x - 2b\delta y + \delta^2 \text{ ist},$$

$$\begin{aligned} & a^2\,x + a\,(b\,y - \delta) \\ + & a_1^2\,x + a_1\,(b_1\,y - \delta_1) \\ + & a_2^2\,x + a_2\,(b_2\,y - \delta_2) + \ldots \end{aligned}$$

oder

$$x\Sigma a^2 + y\Sigma ab - \Sigma a\delta = 0 \ldots (I),$$

und eben so gibt die zweyte jener Gleichungen

$$\begin{aligned} &b^2\ y + b\ (a\ x - \delta) \\ &b_1^2\ y + b_1\ (a_1\ x - \delta_1) \\ &b_2^2\ y + b_2\ (a_2\ x - \delta_2) + \ldots \end{aligned}$$

oder

$$y\Sigma b^2 + x\Sigma a b - \Sigma b\delta = 0 \ldots .(\mathrm{II}).$$

Diese beyden Gleichungen (I) und (II) geben also die gesuchten wahrscheinlichsten Werthe von x und y, die wir wieder durch X und Y bezeichnen wollen.

Man erhält nämlich aus diesen beyden Gleichungen durch Elimination für diese wahrscheinlichsten Werthe die Ausdrücke

$$X = \frac{\Sigma b^2 \Sigma a\delta - \Sigma a b \Sigma b\delta}{\Sigma a^2 \Sigma b^2 - (\Sigma a b)^2}, \text{ und}$$

$$Y = \frac{\Sigma a^2 \Sigma b\delta - \Sigma a b \Sigma a\delta}{\Sigma a^2 \Sigma b^2 - (\Sigma a b)^2}.$$

Nennt man der Kürze wegen die Größe

$$\Sigma a^2 \Sigma b^2 - (\Sigma a b)^2 = k,$$

so ist

$$X = \frac{\Sigma b^2 \Sigma a\delta - \Sigma a b \Sigma b\delta}{k}$$

$$Y = \frac{\Sigma a^2 \Sigma b\delta - \Sigma a b \Sigma a\delta}{k}.$$

§. 20. Kennt man aber diese wahrscheinlichsten Werthe X und Y der beyden Größen x und y, so findet man die Gewichte P_x und Q_y dieser Bestimmungen der Resultate von X und Y, so wie die wahrscheinlichsten Fehler F_x und F_y dieser beyden Größen durch folgende, den bereits vorhin gegebenen analoge Ausdrücke

$$P_x = \frac{N}{2} \cdot \frac{k}{\Sigma b^2\ \Sigma \varepsilon^2},$$

$$P_y' = \frac{N}{2} \cdot \frac{k}{\Sigma a^2 \Sigma \varepsilon^2},$$

wo $\varepsilon = aX + bY - \delta$, $\varepsilon_1 = a_1 X + b_1 Y - \delta_1 \ldots$ ist, oder wo ε den Werth von $a x + b y \delta$ bezeichnet, wenn man in dem letzten Ausdrucke für x und y ihre im §. 19. gefundenen wahrscheinlichsten Werthe X und Y setzt.

Die wahrscheinlichsten Fehler dieser Bestimmungen der Resultate von X und Y sind

$$\text{für } X \ldots F_x{}^{2} = \frac{0.47694}{\sqrt{Px}},$$

$$\text{für } Y \ldots F_y = \frac{0.47694}{\sqrt{Py}},$$

und eben so sind die mittleren zu befürchtenden Fehler

$$\text{für } X \ldots \Phi_x = \frac{0.28209}{\sqrt{Px}},$$

$$\text{für } Y \ldots \Phi_y = \frac{0.28209}{\sqrt{Py}}.$$

§. 21. Noch ist übrig, die Genauigkeit oder die Präcision Gx und Gy dieses Resultates X und Y, und endlich die wahrscheinlichen Fehler f der einzelnen Beobachtung und die Gränzen dieser Fehler $f + \Delta f$ zu finden.

Zu diesem Zwecke wollen wir die beyden Gleichungen (I) und (II) so ausdrücken

$$\begin{aligned} \xi &= -\Sigma a \delta + x \Sigma a^2 + y \Sigma a b \\ v &= -\Sigma b \delta + y \Sigma b^2 + x \Sigma a b. \end{aligned}$$

Leitet man aus ihnen durch die bekannte Methode der Elimination zwey andere Gleichungen ab, welche die Größen x und y durch ξ und v ausdrücken, und welche die Form haben

$$\left.\begin{aligned} x &= L + A \xi + B v \\ y &= L' + A' \xi + B' v \end{aligned}\right\} \ldots \text{(III)},$$

so sind $x = L$ und $y = L'$ die wahrscheinlichsten Werthe dieser Größen, oder es ist

$$X = L \text{ und } Y = L'$$

in Übereinstimmung mit §. 19., weil dann $\xi = v = 0$ gesetzt wird. Die Genauigkeit dieser Bestimmung von X und Y aber ist, wenn man die Genauigkeit der einzelnen Beobachtungen zur Einheit annimmt,

$$\text{für } X \ldots G_x = \frac{1}{\sqrt{A}},$$

$$\text{für } Y \ldots G_y = \frac{1}{\sqrt{B}}.$$

Endlich ist, wie §. 9., der wahrscheinliche Fehler f jeder einzelnen Beobachtung

$$f = F_x \cdot G_x = F_y \cdot G_y.$$

Um auch diese Ausdrücke auf ein Beyspiel anzuwenden, seyen die drey folgenden Bedingungsgleichungen gegeben

$$\begin{aligned} \varepsilon &= x + y - 3 \\ \varepsilon_1 &= x - 2y + 4 \\ \varepsilon_2 &= 3x - y - 2, \end{aligned}$$

so hat man

$$\Sigma a^2 = 11, \ \Sigma b^2 = 6, \ \Sigma ab = -4$$
$$\Sigma b\delta = 9, \ \Sigma a\delta = 5, \ k = 50,$$

und daher die wahrscheinlichsten Werthe der beyden Größen

$$X = \frac{33}{25} = 1.32000,$$

$$Y = \frac{119}{50} = 2.38000.$$

Mit diesen Werthen erhält man

$$\varepsilon = X + Y - 3 = 0.70,$$

und eben so

$$\varepsilon_1 = 0.56, \ \varepsilon_2 = -0.42,$$

also auch

$$\Sigma \varepsilon^2 = 0.9800,$$

und daher für die beyden gefundenen Bestimmungen von X und Y die Gewichte

$$P_x = \frac{3}{2} \cdot \frac{50}{5.88} = 12.7551,$$

$$P_y = \frac{3}{2} \cdot \frac{50}{10.78} = 6.95733.$$

Die wahrscheinlichsten Fehler

$$F_x = 0.133542$$
$$F_y = 0.180817.$$

Die mittleren zu befürchtenden Fehler

$$\Phi_x = 0.07898$$
$$\Phi_y = 0.10695.$$

Weiter geben die beyden Gleichungen (I) und (II)

$$\xi = 11\,x - 4\,y - 5$$
$$v = 6\,y - 4\,x - 9,$$

woraus man durch Elimination erhält

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{33}{25} + \dfrac{3}{25}\,\xi + \dfrac{2}{25}\,v \\ y = \dfrac{119}{50} + \dfrac{4}{50}\,\xi + \dfrac{11}{50}\,v \end{array}\right\}\ldots\mathrm{III},$$

woraus sofort die wahrscheinlichsten Werthe der Größen x und y folgen

$$X = \frac{33}{25},\ \text{und}\ Y = \frac{119}{50}$$

wie zuvor, und die Genauigkeit dieser beyden Resultate

$$G_x = \sqrt{\frac{25}{3}} = 2.88675$$
$$G_y = \sqrt{\frac{50}{11}} = 2.13201.$$

Endlich ist der Fehler jeder einzelnen Beobachtung

$$f = F_x\ G_x = F_y\ G_y = 0.38550.$$

Man sieht, daß in diesem Beyspiele die Größe X genauer bestimmt ist, als Y, und zwar in dem Verhältniß von

$$\frac{2.88675}{2.13201} = \frac{1.354}{1}.$$

Nach der Tafel des §. 6. findet man für diese Bestimmung der Größe X folgende Gränzen

$$r = 1\ \text{gibt}\ \Delta\varphi = \frac{r}{\sqrt{P_x}} = \frac{1}{\sqrt{12.7551}} = 0.2800,$$

also kann man $\frac{w}{1-w} = 5.357$ gegen 1 wetten, daß der Fehler von X nicht größer als 0.28 ist.

Für $r = 2.32767$ ist

$$\Delta\varphi = \frac{r}{\sqrt{P_x}} = \frac{2.32767}{\sqrt{12.7551}} = 0.672,$$

also kann man $\frac{w}{1-w} = 1000$ gegen 1 wetten, daß der Fehler von X nicht größer als 0.67 ist.

Für die Größe Y, die weniger genau bestimmt ist, sind für dieselben Wahrscheinlichkeiten diese Grenzen der Fehler größer. So ist für

$$r = 1 \,..\, \Delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{P_y}} = \frac{1}{\sqrt{6.9573}} = 0.379, \text{ und}$$

$$\frac{w}{1-w} = 5.357, \text{ und für}$$

$$r = 2.32767, \ \Delta\varphi = \frac{r}{\sqrt{P_y}} = 0.8825, \text{ und}$$

$$\frac{w}{1-w} = 1000,$$

oder man kann 1000 gegen 1 wetten, daß der Fehler von Y kleiner als 0.8825 ist, während dasselbe Verhältniß bey X schon für den kleinen Fehler 0.672 Statt hat.

§. 21. Man kann aber auch die Einführung der Größen ξ und v, oder die Entwickelung der Gleichungen (III) ganz umgehen, und die Auflösung auf folgende einfache Ausdrücke zurückführen. Ist

$$k = \Sigma a^2 . \Sigma b^2 - (\Sigma ab)^2$$

so sind die wahrscheinlichsten Werthe von x und y, wie zuvor

$$X = \frac{\Sigma b^2 \Sigma a\delta - \Sigma a\delta \Sigma b\delta}{k},$$

$$Y = \frac{\Sigma a^2 \Sigma b\delta - \Sigma ab \Sigma a\delta}{k}.$$

Und von diesen Resultaten sind die Gewichte

$$P_x = \frac{N k}{2 \Sigma b^2 \Sigma \varepsilon^2}, \quad P_y = \frac{N k}{2 \Sigma a^2 \Sigma \varepsilon^2},$$

wo $\varepsilon = a X + b Y - \delta$, $\varepsilon_1 = a_1 X + b_1 Y - \delta_1$ u. s. f. ist.

Ferner sind die mittleren zu befürchtenden Fehler dieser Resultate

$$\Phi_x = \frac{0.28209}{\sqrt{P_x}}, \quad \Phi_y = \frac{0.28209}{\sqrt{P_y}},$$

und die wahrscheinlichsten Fehler derselben

$$F_x = \frac{0.47694}{\sqrt{P_x}}, \quad F_y = \frac{0.47694}{\sqrt{P_y}}.$$

Die Genauigkeit der Bestimmung dieser Resultate ist

$$G_x = \sqrt{\frac{k}{\Sigma b^2}}; \quad G_y = \sqrt{\frac{k}{\Sigma a^2}},$$

und endlich der Fehler jeder einzelnen Beobachtung

$$f = 0.47694 \sqrt{\frac{2 \Sigma \varepsilon^2}{N}}.$$

In unserem Beyspiele ist in derselben Ordnung

$$k = 50, \quad X = \frac{33}{25}, \quad Y = \frac{119}{50},$$

$$\begin{array}{ll} P_x = 12.75510 & P_y = 6.95733 \\ \Phi_x = 0.07898 & \Phi_y = 0.10695 \\ F_x = 0.13354 & F_y = 0.18082 \\ G_x = 2.88675 & G_y = 2.13201 \end{array}$$

$$f = 0.38550.$$

I. Zwischen den Größen F und G hat man überhaupt folgende Ausdrücke

$$G_x = \sqrt{\frac{k}{\Sigma b^2}} = \sqrt{\frac{2 P_x . \Sigma \varepsilon^2}{N}},$$

$$G_y = \sqrt{\frac{k}{\Sigma a^2}} = \sqrt{\frac{2 P_y . \Sigma \varepsilon^2}{N}},$$

$$F_x = \frac{f}{G_x} = 0.47694 \sqrt{\frac{2 \Sigma \varepsilon^2 \Sigma b^2}{N k}},$$

$$F_y = \frac{f}{G_y} = 0.47694 \sqrt{\frac{2 \Sigma \varepsilon^2 \Sigma a^2}{N k}}.$$

II. Sind die einzelnen Beobachtungen von ungleicher Güte, und ist z. B. $c\, c_1\, c_2 \ldots$ der Werth der ersten, zweyten und dritten Beobachtung, so wird man, wie im §. 16., die gegebenen Bedingungsgleichungen, außer dem ε, durch die Größen $c\, c_1\, c_2 \ldots$ multipliciren, und dann mit ihnen, wie zuvor, verfahren.