Zweytes Capitel.

§. 11. Es werde nun durch eine Anzahl von Beobachtungen irgend eine Größe gesucht, deren Werth man schon beynahe kennt d. h. für welche man schon einen genäherten analytischen Ausdruck hat. Man soll diesen Ausdruck durch Hülfe jener Beobachtungen genauer bestimmen.

Um diesen Gegenstand sogleich durch ein Beyspiel zu fixiren, so ist bekanntlich der Höhenunterschied in Toisen von zwey Orten, in welchen man die Barometerhöhen b und b′ beobachtet hat, gleich

$$B = 9437 \log \frac{b}{b'},$$

wenn man die Correctionen wegen der Temperatur und Polhöhe hier, der Kürze wegen, vernachlässiget. Da aber dieser Factor 9437, von welchem die Bestimmung des Höhenunterschiedes zweyer Orte vorzüglich abhängt, noch keineswegs genau bekannt ist, so wollen wir die Verbesserung desselben mit x bezeichnen, so daß der wahre Werth dieses Factors gleich $9437 + x$, und daß daher der wahre Ausdruck der Höhendifferenz gleich

$$(9437 + x) \log \frac{b}{b'}$$

Toisen seyn soll, in welchem die Correction x noch unbekannt ist.

Beobachtet man nun in der That an zwey Orten die Barometerhöhen, und kennt man zugleich aus andern unmittelbaren z. B. aus trigonometrischen Messungen die wahre Höhendifferenz A dieser beyden Orte, so wird man, da auch

$$(9437 + x) \log \frac{b}{b'}$$

diese wahre Höhendifferenz ausdrückt, die Gleichung erhalten

$$A = (9437 + x) \log \frac{b}{b'}, \text{ oder}$$

$$A = B + x \cdot \log \frac{b}{b'} \ldots . (I),$$

und da in dieser Gleichung bloß die unbekannte Größe x vorkommt, so wird man sie durch diese Gleichung selbst bestimmen können, und so den wahren Werth $9437 + x$ jenes Factors erhalten.

I. Sey z. B. auf der untern dieser beyden Stationen die Barometerhöhe $b = 27.27$ Zoll, und auf der obern $b' = 22.47$ beobachtet worden. Eine trigonometrische Messung aber habe die wahre Höhendifferenz dieser beyden Stationen gleich

$$A = 794.5$$

Toisen gegeben. Wir haben daher

$$\log \frac{b}{b'} = 0.084082, \text{ und}$$

$$B = 9437 \log \frac{b}{b'} = 793.482,$$

und die vorhergehende Gleichung (I) geht daher in folgende über

$$A = B + 0.084082\, x,$$

wo aus der Berechnung $B = 793.482$, und aus der unmittelbaren trigonometrischen Messung $A = 794.5$ folgt.

Allein das Resultat A dieser Messung kann, da sie wieder aus einer Beobachtung, wenn gleich aus einer viel genaueren, als die der Barometerhöhen, abgeleitet ist, ebenfalls nicht als ganz wahr angesehen werden. Nehmen wir daher an, daß ε der

Fehler dieser Messung sey, oder daß $A + \varepsilon$ der **wahre Werth** der Größe A sey, so wird die letzte Gleichung seyn

$$A + \varepsilon = B + 0.084082\, x,$$

oder wenn man die Differenz der unmittelbaren Messung, und der Rechnung nach der aufgestellten Formel, d. h. wenn man die Größe $A - B$ gleich δ setzt,

$$\delta + \varepsilon = 0.084082\, x,$$

oder endlich überhaupt, wenn man den Coefficienten von x durch a bezeichnet,

$$\varepsilon = a\, x - \delta,$$

und dieß ist die **Bedingungsgleichung** der ersten Beobachtung, in welcher also a und δ bekannte Größen, x die zu bestimmende Größe, und ε der noch unbekannte Fehler der ersten Messung ist. Eine zweyte Beobachtung wird eben so die Bedingungsgleichung

$$\varepsilon_1 = a_1\, x - \delta_1,$$

und eine dritte die Gleichung

$$\varepsilon_2 = a_2\, x - \delta_2$$

geben u. s. f., und es wird nun darauf ankommen, denjenigen Werth der Größe x zu finden, der allen diesen Bedingungsgleichungen am besten entspricht.

Die Theorie der kleinsten Quadrate zeigt, das dieser Werth der Größe x, oder daß der **wahrscheinlichste Werth** X derselben derjenige ist, für welchen die Summe der Quadrate aller Beobachtungsfehler $\varepsilon\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2$ . . , ein Kleinstes ist, oder für welchen man hat

$$d\,.\,(\varepsilon^2 + \varepsilon_1^{\ 2} + \varepsilon_2^{\ 2} + \varepsilon_3^{\ 2} + \ldots) = 0.$$

Substituirt man aber in dieser Gleichung für $\varepsilon\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2 ..$ ihre vorhergehenden Werthe, so hat man

$$d.(a\,x - \delta)^2 + d.(a_1\, x - \delta_1)^2 + d.(a_2\, x - \delta_2)^2 + .. = 0,$$

oder

$$x\,(a^2 + a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} +) - (a\,\delta + a_1\,\delta_1 + a_2\,\delta_2 + ..) = 0,$$

oder endlich, wenn man wieder die oben eingeführten Abkürzungszeichen braucht,

$$x \cdot \Sigma a^2 - \Sigma \cdot a\delta = 0,$$

das heißt, da der durch diese Gleichung bestimmte Werth von x der wahrscheinlichste von allen ist, den wir mit X bezeichnet haben,

$$X = \frac{\Sigma \cdot a\delta}{\Sigma a^2},$$

$$\text{wo } \Sigma a\delta = a\delta + a_1\delta_1 + a_2\delta_2 + \ldots, \text{ und}$$
$$\Sigma a^2 = a^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots \text{ ist.}$$

§. 13. Hat man so den wahrscheinlichsten Werth X der Größe x gefunden, so wird man die Größen P, Φ, F, f und G im Allgemeinen nach ähnlichen Ausdrücken mit denen bestimmen, welche wir im §. 3. und 4. u. s. w. gegeben haben.

Setzt man nämlich

$$\Sigma\varepsilon^2 = (aX - \delta)^2 + (a_1 X - \delta_1)^2 + (a_2 X - \delta_2)^2 +,$$

so findet man für das Gewicht P jener Bestimmung des Resultates X den Ausdruck

$$P = \frac{N}{2} \cdot \frac{\Sigma a^2}{\Sigma\varepsilon^2},$$

wo wieder N die Anzahl der Beobachtungen ist.

Um die Größe $\Sigma\varepsilon^2$ zur Rechnung bequemer zu machen, hat man, wenn man den gegebenen Ausdruck von $\Sigma\varepsilon^2$ entwickelt,

$$\begin{aligned} \Sigma\varepsilon^2 &= X^2(a^2 + a_1^2 + a_2^2 +), \\ &- 2X(a\delta + a_1\delta_1 + a_2\delta_2 +), \\ &+ \delta^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 +, \end{aligned}$$

oder kürzer ausgedrückt

$$\Sigma\varepsilon^2 = X^2 \Sigma a^2 - 2X\Sigma a\delta + \Sigma\delta^2,$$

oder endlich da

$$X = \frac{\Sigma a\delta}{\Sigma a^2} \text{ war,}$$

$$\Sigma\varepsilon^2 = \frac{(\Sigma a\delta)^2}{\Sigma a^2} - \frac{2(\Sigma a\delta)^2}{\Sigma a^2} + \Sigma\delta^2,$$

das heißt

$$\Sigma\varepsilon^2 = \Sigma\delta^2 - \frac{(\Sigma a\delta)^2}{\Sigma a^2}.$$

Hat man also durch diese Gleichung den Werth von $\Sigma\varepsilon^2$ gefunden, so ist

$$P = \frac{N}{2} \cdot \frac{\Sigma a^2}{\Sigma\varepsilon^2},$$

und kennt man so den Werth von P, so ist der mittlere zu befürchtende Fehler des Resultates X gleich

$$\Phi = \frac{1}{2\sqrt{\pi P}} = \frac{0.282095}{\sqrt{P}},$$

der wahrscheinliche Fehler dieses Resultates

$$F = \frac{0.47694}{\sqrt{P}},$$

und die Genauigkeit (Präcision) dieser Bestimmung des Resultates, die Genauigkeit der einzelnen Beobachtungen als Einheit vorausgesetzt,

$$G = \frac{f}{F} = \sqrt{\Sigma a^2}.$$

Endlich ist der wahrscheinliche Fehler jeder einzelnen Beobachtung

$$f = 0.47694 \sqrt{\frac{\Sigma a^2}{P}},$$

und die wahrscheinlichen Gränzen desselben

$$f \pm \Delta f = f\left(1 \pm \frac{0.47694}{\sqrt{N}}\right).$$

I. Man bemerkt von selbst, daß diese Ausdrücke von P, Φ, F.. in die des §. 7. übergehen, wenn man hier die Größe $a = a_1 = a_2 ..$ gleich 1, und $\delta\ \delta_1\ \delta_2 ..$ gleich $x\ x_1\ x_2 ..$ setzt, wodurch $\Sigma a^2 = a^2 + a^2 + a^2 .. = N$ wird.

Auch zeigt schon der Ausdruck für P, daß das Gewicht des Resultates X desto größer wird, je größer die Anzahl N der

Beobachtungen, und je kleiner Σs^2 ist d. h. je genauer die Beobachtungen sind, und endlich je größer die Factoren $a\, a_1\, a_2 \ldots$ der Größe x in den Bedingungsgleichungen sind: übereinstimmend mit dem, was §. 11. I. gesagt worden ist. Je größer aber für alle diese Fälle die Größe P wird, desto kleiner werden auch die Größen Φ F und f.

§. 14. Wenden wir diese Ausdrücke auf folgendes Beyspiel an:

$$\begin{aligned} 1.50\,x - 0.72 &= \varepsilon \\ 1.46\,x - 0.68 &= \varepsilon_1 \\ 1.52\,x - 0.82 &= \varepsilon_2 \\ 1.43\,x - 0.78 &= \varepsilon_3 \\ 1.48\,x - 0.69 &= \varepsilon_4. \end{aligned}$$

Hier ist also

$$a = 1.50 \qquad a_1 = 1.46$$
$$\delta = 0.72 \qquad \delta_1 = 0.68 \text{ u. f.},$$

also auch

$$\begin{array}{rlrlrl} a^2 = & 2.2500 & \delta^2 = & 0.5184 & a\,\delta = & 1.0800 \\ a_1^2 = & 2.1316 & \delta_1^2 = & 0.4624 & a_1\delta_1 = & 0.9928 \\ & 2.3104 & & 0.6724 & & 1.2464 \\ & 2.0449 & & 0.6084 & & 1.1154 \\ & 2.1904 & & 0.4761 & & 1.0212 \\ \hline \Sigma a^2 = & 10.9273 & \Sigma\delta^2 = & 2.7377 & \Sigma a\,\delta = & 5.4558 \end{array}$$

Daraus folgt

$$\Sigma\varepsilon^2 = \Sigma\delta^2 - \frac{(\Sigma a\,\delta)^2}{\Sigma a^2} = 0.0137, \text{ und}$$

$$X = \frac{\Sigma a\,\delta}{\Sigma a^2} = 0.49928, \text{ und da } N = 5 \text{ ist,}$$

$$\begin{aligned} P &= 1994.033 \\ \Phi &= 0.00632 \\ F &= 0.01068 \\ G &= 3.3056 \\ f &= 0.03531 \\ f \pm \Delta f &= \begin{matrix} 0.04284 \\ 0.02778 \end{matrix} \end{aligned}$$

Die Größen P und G sind hier so groß, oder die Φ und F so klein, weil die einzelnen Beobachtungen so wenig von einander verschieden, oder weil die Beobachtungen so genau sind, wie auch der kleine Werth von f, des Fehlers jeder einzelnen Beobachtung, so wie der ebenfalls sehr kleine Werth von $\Sigma\varepsilon^2$, der Summe der Quadrate aller Beobachtungsfehler, zeigt.

In einem zweyten Beyspiele sey

$$\begin{aligned}2.1\,x - 2.5 &= \varepsilon\\ 3.2\,x - 5.0 &= \varepsilon_1\\ 2.4\,x - 4.5 &= \varepsilon_2\\ 4.0\,x - 5.0 &= \varepsilon_3\\ 3.5\,x - 4.1 &= \varepsilon_4.\end{aligned}$$

Addirt man alle diese Gleichungen, so erhält man, wenn man alle $\varepsilon = 0$ setzt, $15.2x - 21.1 = 0$, oder $x = 1.388$ für das arithmethische Mittel dieser Größe, welches aber nicht der wahrscheinlichste Werth X derselben ist.

Nach dem Vorhergehenden geben jene fünf Gleichungen
$\Sigma a^2 = 48.66$, $\Sigma \delta^2 = 93.31$, $\Sigma a\delta = 66.40$ und $N = 5$,

also ist

$$\Sigma\varepsilon^2 = 93.31 - 90.6075 = 2.7025,$$

der wahrscheinlichste Werth

$$\begin{aligned}X &= 1.36457\\ P &= 45.01387\\ \Phi &= 0.04204\\ F &= 0.07109\\ G &= 6.97567\\ f &= 0.49588\\ f \pm \Delta f &= \begin{cases}0.60164\\ 0.39012.\end{cases}\end{aligned}$$

Nach der Tafel des §. 6. ist für

$r = 1.8213861$ der Werth von $\Delta\Phi = \dfrac{r}{\sqrt{P}} = 0.271$, und für

$r = 2.32767$ der Werth von $\Delta\Phi = \dfrac{r}{\sqrt{P}} = 0.347$;

also kann man 100 gegen 1 wetten, daß der Fehler von X nicht größer als 0.271, und 1000 gegen 1 wetten, daß der Fehler von X nicht größer als 0.347 ist.

I. Auch hier könnte man, wie im §. 8., wieder die Größe $\Sigma \varepsilon^2$ vermeiden, indem man

$$f = 0.84535 \,.\, \frac{\Sigma \varepsilon}{N}$$

einführt, wo $\Sigma \varepsilon$ die Summe der Größen

$$\varepsilon = X a - \delta, \; \varepsilon_1 = X a_1 - \delta_1, \; \varepsilon_2 = X a_{11} - \delta_{11} \ldots,$$

diese Differenzen alle positiv genommen, bezeichnet. Setzt man nämlich diesen Werth von f gleich dem vorhergehenden

$$f = 0.47694 \sqrt{\frac{\Sigma a^2}{P}},$$

so findet man

$$P = 0.31831 \,.\, \frac{N^2 \,.\, \Sigma a^2}{(\Sigma \varepsilon)^2},$$

und dann die übrigen Größen Φ, F, f.. wie im §. 13. In unserem zweyten Beyspiele ist

$$\begin{array}{lr} \varepsilon = X a - \delta = & 0.36566 \\ \varepsilon_1 \;\ldots\ldots & -\,0.63328 \\ \varepsilon_2 \;\ldots\ldots & -\,1.22496 \\ \varepsilon_3 \;\ldots\ldots & 0.45840 \\ \varepsilon_4 \;\ldots\ldots & 0.67610 \\ \hline \Sigma \varepsilon = & 3.35840 \end{array}$$

wenn alle ε positiv genommen werden. Ferner ist

$$N = 5, \; \Sigma a^2 = 48.66,$$

also nach der letzten Gleichung

$$P = 34.332$$
$$\Phi = 0.048$$
$$F = 0.081 \text{ u. s. w.}$$

Allein die Berechnung der Größe P nach der Gleichung

$$P = \frac{N}{2} \,.\, \frac{\Sigma a^2}{\Sigma \varepsilon^2}$$

des §. 13. ist nicht nur genauer, sondern auch bequemer, da man den Werth von $\Sigma \varepsilon^2$ sogleich aus dem Ausdrucke

$$\Sigma\varepsilon^2 = \Sigma\delta^2 - \frac{(\Sigma a\delta)^2}{\Sigma a^2}$$

erhält, während man den Werth von $\Sigma\varepsilon$ nicht aus dem analogen Ausdrucke

$$\Sigma\varepsilon = X\Sigma a - \Sigma\delta = \frac{\Sigma a\delta}{\Sigma a} - \Sigma\delta$$

finden kann, weil vorausgesetzt wird, daß alle ε positiv genommen werden, daher man hier die Werthe aller ε unmittelbar aus den primitiven Gleichungen

$$\varepsilon = a X - \delta, \quad \varepsilon_1 = a_1 X - \delta_1 \ldots$$

berechnen muß.

§. 15. Das Vorhergehende setzt voraus, daß die Werthe aller Bedingungsgleichungen unter sich gleich groß sind.

Ist aber von der Bedingungsgleichung

$\varepsilon = a\ x - \delta$ der Werth c, und von

$\varepsilon_1 = a_1\ x - \delta_1$ „ c_1,

$\varepsilon_2 = a_2\ x - \delta_2$ „ c_2 u. s. w.,

so hat man für die Größen X, P, Φ.. folgende Ausdrücke, wo wieder

$$\varepsilon = a X - \delta, \ \varepsilon_1 = a_1 X - \delta_1$$

u. s. f. ist.

$$X = \frac{\Sigma c^2 a\delta}{\Sigma c^2 a^2}, \quad P = \frac{N}{2} \cdot \frac{\Sigma c^2 a^2}{\Sigma c^2 \varepsilon^2} \quad F = \frac{0.47694}{\sqrt{P}},$$

$$\Phi = \frac{0.28209}{\sqrt{P}}, \quad G = \sqrt{\Sigma c^2 a^2}$$

$$f = 0.47694\sqrt{\frac{\Sigma c^2 a^2}{P}} = 0.47694\sqrt{\frac{\Sigma c^2 a^2}{P}}$$

$$f + \Delta f = f\left(1 \pm \frac{0.47694}{\sqrt{N}}\right).$$

Setzt man in diesen Ausdrücken

$$c = c_1 = c_2 \ldots = 1,$$

so ist

$$\Sigma c^2 a\delta = \Sigma a\delta, \ \Sigma c^2 a^2 = \Sigma a^2, \ \Sigma c^2 \varepsilon^2 = \Sigma\varepsilon^2,$$

und man erhält die Gleichungen des §. 13. wieder.

6 *

Exempel. Seyen die Bedingungsgleichungen gegeben

$$2x - 2.5 = \varepsilon \text{ mit dem Werthe } c = 1$$
$$3x - 5.0 = \varepsilon_1 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad c_1 = 2$$
$$4x - 6.0 = \varepsilon_2 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad c_2 = 3,$$

so daß also die zweyte Beobachtung einen zwey Mahl, und die dritte einen drey Mal größeren Werth hat, als die erste.

Diese Gleichungen geben

$$\begin{array}{rr@{\qquad}rr} c^2 a^2 = & 4 & c^2 a \delta = & 5 \\ & 36 & & 60 \\ & 144 & & 216 \\ \hline \Sigma c^2 a^2 = & 184 & \Sigma c^2 a \delta = & 281 \end{array}$$

also ist

$$X = \frac{\Sigma c^2 a \delta}{\Sigma c^2 a^2} = 1.52717.$$

Mit diesem Werthe von X erhält man

$$\varepsilon = a X - \delta = 3.05434 - 2.5 = 0.5543,$$

und eben so

$$\varepsilon_1 = - 0.4184, \text{ und } \varepsilon^2 = 0.1088, \text{ also ist}$$

$$\begin{array}{rl} c^2 \varepsilon^2 = & 0.30736 \\ & 0.70024 \\ & 0.10653 \\ \hline \Sigma c^2 \varepsilon^2 = & 1.11413 \end{array}$$

Es ist daher

$$P = \frac{N}{2} \cdot \frac{\Sigma c^2 a \varepsilon}{\Sigma c^2 \varepsilon^2} = 247.7263,$$

$$F = \frac{0.47694}{\sqrt{P}} = 0.03030,$$

$$G = \sqrt{\Sigma c^2 a^2} = 13.565,$$

$$f = 0.47694 \sqrt{\frac{\Sigma c^2 a^2}{P}} = 0.41104.$$

§. 16. Allein man kann auch den Fall, wo die einzelnen Beobachtungen ungleiche Werthe haben, unmittelbar auf den des §. 13., wo sie alle gleiche Werthe haben, zurückführen, und sonach die Ausdrücke des §. 15. ganz entbehren.

Wenn man nämlich von den gegebenen Bedingungsgleichungen jede durch ihren Werth $c\ c_1\ c_2 \ldots$ multiplicirt, so kann man dann annehmen, daß die so veränderten Gleichungen alle denselben Werth haben, und daher auf sie die Ausdrücke des §. 13. unmittelbar anwenden.

Für das letzte Beyspiel hat man daher folgende Bedingungsgleichungen, die alle denselben Werth haben

$$2\,x - 2.5 = \varepsilon$$
$$6\,x - 10.0 = \varepsilon_1$$
$$12\,x - 18.0 = \varepsilon_2.$$

Behandelt man daher diese so modificirten Gleichungen nach §. 13., so erhält man

$a^2 = 4$	$\delta^2 = 6.25$	$a\delta = 5$
36	100	60
144	324	216
$\Sigma a^2 = 184$	$\Sigma\delta^2 = 430.25$	$\Sigma a\delta = 281$

Es ist daher

$$X = \frac{\Sigma a\delta}{\Sigma a^2} = 1.52717,$$

$$\Sigma\varepsilon^2 = \Sigma\delta^2 - \frac{(\Sigma a\delta)^2}{\Sigma a^2} = 430.25 - 429.1358 = 1.1142,$$

$$P = \frac{N}{2} \cdot \frac{\Sigma a^2}{\Sigma\varepsilon^2} = 247.7113,$$

$$F = \frac{0.47694}{\sqrt{P}} = 0.03030,$$

$$G = \sqrt{\Sigma a^2} = 13.565,$$

$$f = 0.47694 \sqrt{\frac{\Sigma a^2}{P}} = 0.41105,$$

welche Werthe mit den vorhergehenden genau übereinstimmen. Endlich sind noch die wahrscheinlichsten Fehler der ersten, zweyten und dritten Beobachtung in derselben Ordnung

$$\frac{f}{c} = 0.411,\ \frac{f}{c_1} = 0.205,\ \frac{f}{c_2} = 0.137.$$

§. 17. Man wird wohl nur selten im Stande seyn, diese Werthe $c\ c_1\ c_2 ..$ der einzelnen Beobachtungen, auch nur mit einiger Genauigkeit, anzugeben. Wenn man die einzelnen Bedingungsgleichungen, die man alle von gleichem Werthe voraussetzt, in Gruppen theilt, indem man mehrere derselben in eine Summe vereinigt, so kann man, wenn die erste, zweyte und dritte Gruppe aus $n\ n_1\ n_2 ..$ Beobachtungen entstanden ist, für die auf einander folgenden Bedingungsgleichungen dieser Gruppen die Werthe

$$c = \sqrt{n},\ c_1 = \sqrt{n_1},\ c_2 = \sqrt{n_2} ..$$

annehmen, und mit diesen Werthen von $c\ c_1\ c_2 ..$ wie im §. 16. verfahren.

Wenn man z. B. in dem Exempel des §. 14. die zwey ersten und die drey letzten Bedingungsgleichungen in eine Summe vereinigt, so erhält man zwey neue Bedingungsgleichungen

$$2.96\,x - 1.40 = \varepsilon \text{ mit dem Werthe} .. \sqrt{2}$$
$$4.43\,x - 2.29 = \varepsilon_1 \quad „ \quad „ \quad „ \quad .. \sqrt{3},$$

und man wird daher die Gleichungen

$$2.96\,x\,\sqrt{2} - 1.40\,\sqrt{2} = \varepsilon$$
$$4.43\,x\,\sqrt{3} - 2.29\,\sqrt{3} = \varepsilon_1$$

nach den Vorschriften des §. 13. behandeln können. Da aber bey diesem Verfahren die Eintheilung in Gruppen willkührlich ist, (indem man z. B. hier auch die drey ersten, und die zwey letzten Gleichungen hätte summiren können u. s. w.), und da überhaupt hier nicht, wie im §. 15. oder 16. in der That geschehen ist, jede einzelne der primitiven Gleichungen, sondern nur willkührliche Gruppen derselben berücksichtigt werden, so wird man durch dieses Verfahren nur überhaupt genäherte Werthe von X, F u. s. w., aber nicht genau dieselben Werthe erhalten können, die man erhält, wenn man jede einzelne der ursprünglichen Bedingungsgleichungen nach der Methode des §. 13. behandelt.

§. 18. Bey diesen Gruppirungen, oder auch bey Beobachtungen mit multiplicirenden Instrumenten, an welchen nicht die Resultate der einzelnen Beobachtungen, sondern nur die Resultate einer bestimmten Anzahl derselben abgelesen werden, pflegt man öfters die folgenden Gruppen mit allen vorhergehenden zu vereinigen, um so die allmählige Annäherung zu einem stehenden Resultate gleichsam dem Auge sichtbar zu machen. Um dieß durch ein Beyspiel zu zeigen, so wurde für die Polhöhe von Mailand durch einen Multiplicationskreis gefunden

aus 10 Beobachtungen		$45^\circ\ 28'\ 5.''0 = a$
aus 15 andern Beobachtungen		$4.5 = a_1$
aus 25 „	„	$5.1 = a_2$
aus 30 „	„	$4.8 = a_3$

Vereinigt man die beyden ersten dieser Beobachtungen, so erhält man

$$\frac{10\,a + 15\,a_1}{25} = 45^\circ\ 28'\ 4.''7$$

als Resultat der 25 ersten Beobachtungen. Eben so geben die drey ersten Beobachtungen

$$\frac{10\,a + 15\,a_1 + 25\,a_2}{50} = 45^\circ\ 28'\ 4.''9$$

als Resultat der 50 ersten Beobachtungen. Endlich gibt die Vereinigung aller Beobachtungen

$$\frac{10\,a + 15\,a_1 + 25\,a_2 + 30\,a_3}{80} = 45^\circ\ 28'\ 4.''8625$$

als Resultat von 80 Beobachtungen. Wir haben daher aus

10 Beobachtungen		$45^\circ\ 28'\ 5.''0 = A$
25	„	$4.7 = A_1$
50	„	$4.9 = A_2$
80	„	$4.8 = A_3$

und diese Werthe von $A\ A_1\ A_2 \ldots$ zeigen die allmählige Annäherung an die zu findende Größe, während im Gegentheile die Werthe von $a\ a_1\ a_2, \ldots$ wieder die Übereinstimmung der partiellen Resultate unter einander darstellen.

Um beyden Zwecken zu genügen, wird man daher aus den Größen $A\ A_1\ A_2 \ldots$, wenn diese gegeben sind, die Größen $a\ a_1\ a_2 \ldots$, und umgekehrt, ableiten.

Sey also überhaupt

a das Resultat aus n Beobachtungen
a_1 „ „ n_1 „
a_2 „ „ n_2 u. s. f., und eben so
A „ „ n
A_1 „ „ $n+n_1$
A_2 „ „ $n+n_1+n_2$ u. s. f.,

so hat man, wenn die Größen $a\; a_1\; a_2 \ldots$ gegeben sind,

$$A = a$$

$$A_1 = \frac{n\,a + n_1\,a_1}{n+n_1}$$

$$A_2 = \frac{n\,a + n_1\,a_1 + n_2\,a_2}{n+n_1+n_2}$$

$$A_3 = \frac{n\,a + n_1\,a_1 + n_2\,a_2 + n_3\,a_3}{n+n_1+n_2+n_3} \text{ u. s. f.,}$$

und wenn die Größen $A\; A_1\; A_2 \ldots$ gegeben sind,

$$a = A$$

$$a_1 = \frac{n}{n_1}(A_1 - A) + A_1$$

$$a_2 = \frac{n+n_1}{n_2}(A_2 - A_1) + A_2$$

$$a_3 = \frac{n+n_1+n_2}{n_3}(A_3 - A_2) + A_3$$

$$a_4 = \frac{n+n_1+n_2+n_3}{n_4}(A_4 - A_3) + A_4 \text{ u. s. f.}$$

In dem vorhergehenden Beyspiele ist

$n=10$, $n_1=15$, $n_2=25$, $n_3=30$, und
$A=5.0$, $A_1=4.7$, $A_2=4.9$, $A_3=4.8625$, also ist auch

$$a = 5.0,$$

$$a_1 = \frac{10}{15}(-0{,}3) + 4.7 = 4.5$$

$$a_2 = \frac{25}{25}(0.2) + 4.9 = 5.1$$

$$a_3 = \frac{5}{3}(-0.0375) + 4.8625 = 4.8 \text{ wie zuvor.}$$

Hätte man in einem zweyten Beyspiele aus den

10	ersten Beobachtungen			erhalten	45° 28′ 5.″0	$= A$
20	„	„	„	„	5.55	$= A_1$
30	„	„	„	„	5.30	$= A_2$
40	„	„	„	„	5.275	$= A_3$
50	„	„	„	„	5.160	$= A_4$

so ist

$$n = n_1 = n_2 \ldots = 10,$$

und daher

$$\begin{aligned} a &= 45^\circ\ 28'\ 5.''0 \\ a_1 &= 2A_1 - A = 6.1 \\ a_2 &= 3A_2 - 2A_1 = 4.8 \\ a_3 &= 4A_3 - 3A_2 = 5.2 \\ a_4 &= 5A_4 - 4A_3 = 4.7. \end{aligned}$$