Erstes Capitel.

§. 1. Seyen $x\,x_1\,x_2\,..$ die durch Beobachtungen unmittelbar erhaltenen Größen, z. B. die Polhöhen des Beobachtungsortes, und N die Anzahl dieser Beobachtungen. Sind diese Beobachtungen alle von gleichem Werthe, so daß man in Beziehung auf ihre Genauigkeit keinen Unterschied unter ihnen machen kann, so ist der wahrscheinlichste Werth dieser Größen, den wir durch X bezeichnen wollen, gleich dem arithmetischen Mittel derselben, oder es ist

$$X = \frac{x + x_1 + x_2 + ..}{N}$$

oder, wenn man der Kürze wegen $\Sigma x = x + x_1 + x_2 +$ setzt, so ist

$$X = \frac{\Sigma x}{N}$$

§. 2. Es sey nun ε der Unterschied zwischen diesem wahrscheinlichsten Werthe X unserer Größe und dem unmittelbaren Resultate x der ersten Beobachtung, oder es sey $\varepsilon = X - x$ und eben so

für die zweyte Beobachtung $\varepsilon_1 = X - x_1$,
für die dritte „ „ $\varepsilon_2 = X - x_2$ u. s. f.

Man kann diese Größen $\varepsilon\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2\ ..$ als die Fehler der einzelnen Beobachtungen ansehen. Bezeichnet man wieder der Kürze wegen die Summe der Quadrate der Größen $\varepsilon_2 . \varepsilon_1^2 . \varepsilon_2^2$ . . durch $\Sigma \varepsilon^2$, so daß

$$\Sigma \varepsilon^2 = \varepsilon^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \text{ist},$$

so heißt die Größe

$$P = \frac{N^2}{2 \Sigma \varepsilon^2}$$

das **Gewicht** jener Bestimmung von X als des wahrscheinlichsten Werthes von x. Man sieht, daß dieses Gewicht desto größer seyn wird, je größer die Anzahl N der Beobachtungen und je kleiner die Größen $\varepsilon\, \varepsilon_1\, \varepsilon_2$ . . das heißt, je genauer diese Beobachtungen selbst sind.

§. 3. Nennet man dann Φ den **mittleren zu befürchtenden Fehler**, den man bey der Bestimmung der Größe X (nach dem in §. 1. gezeigten Verfahren) begangen haben mag, so ist

$$\Phi = \frac{1}{2\sqrt{\pi P}} = \frac{0.282095}{\sqrt{P}}$$

wo $\pi = 3.1415926$ das Verhältniß der Peripherie des Kreises zu seinem Durchmesser ist. Dieser mittlere zu befürchtende Fehler Φ ist die Summe der Producte jedes Fehlers der einzelnen Beobachtungen in seine Wahrscheinlichkeit.

§. 4. Von diesem mittleren zu befürchtenden Fehler unterscheidet sich der **wahrscheinliche** Fehler F, den man bey dieser Bestimmung von X begangen haben kann. Dieser Fehler F ist nämlich derjenige, von dem es **gleich** wahrscheinlich ist, daß man ihn begangen oder daß man ihn auch nicht begangen habe. Dieser wahrscheinliche Fehler ist

$$F = \frac{0.4769363}{\sqrt{P}}$$

§. 5. Die beyden Fehler Φ und F beziehen sich auf das Resultat X, welches man (durch das Verfahren des §. 1) aus den einzelnen Beobachtungen $x\, x_1\, x_2$ . . abgeleitet hat. Nennt man nun eben so f den wahrscheinlichen Fehler jeder einzelnen dieser Beobachtungen, so ist

$$f = 0.4769363 \sqrt{\frac{N}{P}},$$

und die wahrscheinliche Gränze $f + \Delta f$ dieses Fehlers f ist

$$f \pm \Delta f = f.\left(1 + \frac{0.4769363}{\sqrt{N}}\right),$$

wo in allen diesen Ausdrücken wegen dem Wurzelzeichen die dasselbe enthaltende Größe immer mit den doppelten Zeichen $\pm$ verstanden wird. Der letzte Ausdruck sagt daher, daß der wahre, wirklich statthabende Werth von f zwischen die beyden Gränzen fallen wird:

$$f\left(1 + \frac{0.4769363}{\sqrt{N}}\right), \text{ und}$$

$$f\left(1 - \frac{0.4769363}{\sqrt{N}}\right),$$

oder daß man 1 gegen 1 wetten kann, daß der wahre Werth von f zwischen diese beyden Größen fallen wird.

§. 6. Um aber auch die Wahrscheinlichkeit w zu finden, daß eine der bisher bestimmten Größen, daß z. B. der mittlere zu befürchtende Fehler Φ des Resultates X zwischen zwey andere, willkührliche Gränzen falle, so findet man die Wahrscheinlichkeit w, daß diese Größe Φ zwischen den Gränzen $\pm \frac{r}{\sqrt{P}}$ liege, wo r irgend eine willkührliche Größe, und, wie zuvor, $P = \frac{N^2}{2\Sigma\varepsilon^2}$ ist,

$$w = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-r^2}\, dr,$$

wo $e = 2.7182818$ die Basis der natürlichen Logarithmen ist, und wo das Integral von $r = 0$ bis $r = \infty$ genommen wird. Man findet aber für dieses Integral, wenn $r < 1$ ist

$$\int e^{-r^2} dr = r - \frac{r^3}{3} + \frac{1}{1.2} \cdot \frac{r^5}{5} - \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{r^7}{7} + \frac{1}{1.2.3.4} \cdot \frac{r^9}{9} -$$

oder

$$\int e^{-r^2} dr = \frac{r}{e^{r^2}} \left[1 + \frac{2r^2}{1.3} + \frac{(2r^2)^2}{1.3.5} + \frac{(2r^2)^3}{1.3.5.7} + \cdots \right]$$

und wenn $r > 1$ ist,

$$\int e^{-r^2}\,dr = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} - \frac{1}{2r\,.\,e^{r^2}}$$

$$\left[1 - \frac{1}{2\,r^2} + \frac{1.3}{(2\,r^2)^2} - \frac{1.3.5}{(2\,r^2)^3} + \frac{1.3.5.7}{(2\,r^2)^4} - \ldots\right]$$

Entwickelt man diese Ausdrücke für einige Werthe von r, so gibt die vorhergehende Gleichung

$$w = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-r^2}\,dr$$

folgende kleine Tafel:

r	w	$\frac{w}{1-w}$
0.4769363	0.5	1.0000000
0.5951161	0.6	1.5000000
0.7328691	0.7	2.3333333
0.9061939	0.8	4.0000000
1.0000000	0.8427008	5.3572874
1.1630872	0.9	9.0
1.8213864	0.99	99.0
2.3276754	0.999	999.0
2.7510654	0.9999	9999.0
∞	1.0000000	∞

Diese Tafel zeigt z. B., daß die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler Φ zwischen den Gränzen $\pm \frac{1}{\sqrt{P}}$ liege, gleich $w = 0.8427008$, und daß also auch die Wahrscheinlichkeit des Gegentheiles, daß Φ nicht zwischen diesen Gränzen liege, gleich $1 - w = 0.1572992$ ist, weil jede Wahrscheinlichkeit, daß irgend ein Fall eintrete, und die, daß er nicht eintrete, zusammen gleich der Wahrheit d. h. gleich 1 ist. Man kann daher die Größe w gegen $1 - w$ d. h., man kann die Größe $\frac{w}{1-w} = 5.3572874$ gegen die Einheit wetten, daß der Fehler Φ zwischen den Gränzen $\pm \frac{1}{\sqrt{P}}$ enthalten, oder mit andern Worten, daß der Fehler Φ kleiner als $\frac{1}{\sqrt{P}}$ ist. Eben so kann man 9999 gegen 1 oder nahe 10000 gegen 1 wetten, daß der Fehler Φ kleiner als $\frac{2.7510654}{\sqrt{P}}$ ist; aber man kann nur 4 gegen 1 wetten, daß der Fehler Φ kleiner als $\frac{0.9061939}{\sqrt{P}}$ ist u. s. w.

§. 7. Wir wollen nun auf das Vorhergehende ein Beyspiel anwenden, um den Gebrauch der bisher aufgestellten Ausdrücke deutlich zu machen.

Zehn Beobachtungen unsers Meridiankreises haben folgende Polhöhen der Wiener Sternwarte gegeben:

$$\begin{aligned}
x &= 48^\circ\, 12'\, 35.''2 \\
x_1 &= \quad\quad\;\; 34.6 \\
x_2 &= \quad\quad\;\; 35.4 \\
x_3 &= \quad\quad\;\; 35.0 \\
x_4 &= \quad\quad\;\; 34.2 \\
x_5 &= \quad\quad\;\; 34.7 \\
x_6 &= \quad\quad\;\; 35.4 \\
x_7 &= \quad\quad\;\; 34.8 \\
x_8 &= \quad\quad\;\; 35.6 \\
x_9 &= \quad\quad\;\; 35.2
\end{aligned}$$

Arithm. Mittel $X = 48^\circ\, 12'\, 35.''01 = \frac{\Sigma x}{N}$, wo $N = 10$ ist.

Dieser Werth von X ist also der wahrscheinlichste Werth der Polhöhe jenes Beobachtungsortes, wie er aus diesen zehn Beobachtungen folgt.

I. Es sind aber die Differenzen dieses Resultates X von den einzelnen Beobachtungen

$X - x = \varepsilon = 35.01 - 35.2$, oder

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= -0.19, \text{ und } & \varepsilon^2 &= 0.0361 \\
\varepsilon_1 &= 0.41 & \varepsilon^2_1 &= 0.1861 \\
\varepsilon_2 &= -0.39 & \varepsilon^2_2 &= 0.1521 \\
\varepsilon_3 &= 0.01 & \varepsilon^2_3 &= 0.0001 \\
\varepsilon_4 &= 0.81 & \varepsilon^2_4 &= 0.6561 \\
\varepsilon_5 &= 0.31 & \varepsilon^2_5 &= 0.0961 \\
\varepsilon_6 &= -0.39 & \varepsilon^2_6 &= 0.1521 \\
\varepsilon_7 &= 0.21 & \varepsilon^2_7 &= 0.0441 \\
\varepsilon_8 &= -0.59 & \varepsilon^2_8 &= 0.3481 \\
\varepsilon_9 &= -0.19 & \varepsilon^2_9 &= 0.0361 \\
& & \Sigma\varepsilon^2 &= 1.7070
\end{aligned}$$

Dieses vorausgesetzt ist das Gewicht P der vorhergehenden Bestimmung von X

$$P = \frac{N^2}{2\,\Sigma\varepsilon^2} = 29.291.$$

Der mittlere zu befürchtende Fehler Φ dieses Resultates X ist

$$\Phi = \frac{1}{2\sqrt{\pi P}} = \pm\, 0.''0521.$$

Der wahrscheinliche Fehler F dieses Resultates ist

$$F = \frac{0.47694}{\sqrt{P}} = \pm\, 0.0881.$$

Endlich ist der wahrscheinliche Fehler f jeder einzelnen Beobachtung

$$f = 0.47694\sqrt{\frac{N}{P}} = \pm\, 0.2787,$$

und die wahrscheinliche Gränze $f + \Delta f$ dieses letzten Fehlers ist

$$f \pm \Delta f = f\left(1 \pm \frac{0.47694}{\sqrt{N}}\right),$$

das heißt

$$0.2787 \pm 0.0420 = \begin{matrix} 0.3207 \\ 0.2367 \end{matrix}.$$

Man kann daher sagen, daß mit diesem Instrumente unter übrigens gleichen Umständen, jede einzelne Beobachtung dieser Art dem wahrscheinlichen Fehler 0.″28 unterworfen ist, und daß dieser Fehler in der Ordnung nicht größer als 0.″32, und nicht kleiner als 0.″24 seyn wird, und dieser Schluß wird desto genauer seyn, je größer die ihm zu Grunde gelegte Anzahl von Beobachtungen gewesen ist.

II. Welches ist aber die Wahrscheinlichkeit w, daß die Gränzen $\varDelta\Phi$ des mittleren zu befürchtenden Fehlers die Größe

$$\varDelta\Phi = \pm\frac{r}{\sqrt{P}}$$

nicht übersteige, oder daß der mittlere zu befürchtende Fehler kleiner, oder wenigstens nicht größer als $\frac{r}{\sqrt{P}}$ sey?

Sey $r = 0.4769363$, so ist

$$\varDelta\Phi = \frac{0.4769363}{5.4121} = 0.0881,$$

und da zu diesem r in der Tafel des §. 6. der Werth $w = 0.5$, oder $\frac{w}{1-w} = 1$ gehört, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler $\varDelta\Phi$ nicht größer als 0.0881 sey, gleich 0.5, oder man kann 1 gegen 1 wetten, daß der Fehler, den man in der Bestimmung von X begangen hat, nicht größer als 0.0881 sey. Auch ist der wahrscheinliche Fehler F des Resultates X in N. I ebenfalls gleich dieser Größe 0.0881 gefunden worden.

Für $r = 1$ gibt die Tafel $\frac{w}{1-w} = 5.357$, und

$$\varDelta\Phi = \frac{1}{5.4121} = 0.1848,$$

für $r = 2.32767$ gibt die Tafel $\frac{w}{1-w} = 999$, und

$$\varDelta\Phi = \frac{2.32767}{5.4121} = 0.4301.$$

Man kann also 5.357 gegen 1 wetten, daß die obige Bestimmung von Φ nicht über 0.″1848, und man kann 999 gegen 1 oder nahe 1000 gegen 1 wetten, daß diese Bestimmung nicht über 0.″4301 fehlerhaft ist.

§. 8. Die vorhergehenden Bestimmungen lassen sich noch zur Rechnung etwas bequemer machen, ohne dadurch der Genauigkeit der Resultate in Φ, F und f bedeutend zu schaden. Man kann nämlich statt der bisher gebrauchten Summe der Quadrate der Fehler $\Sigma\varepsilon^2 = \varepsilon^2 + \varepsilon_1^{\,2} + \varepsilon_2^{\,2} +$ auch die Summe dieser Fehler selbst, oder die Größe $\Sigma\varepsilon = \varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots$ einführen, wo aber dann alle diese Größen $\varepsilon\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots$ positiv genommen werden müssen. Dieses vorausgesetzt, findet man für den wahrscheinlichen Fehler f jeder einzelnen Beobachtung den genäherten Ausdruck

$$f = 0.84535\ \frac{\Sigma\varepsilon}{N}.$$

In unserem Beyspiele ist $\Sigma\varepsilon = 3.50$, also

$$f = 0.296$$

nur 0.017 von dem im §. 7. verschieden.

Setzt man also diese beyden Werthe von f einander gleich, so erhält man

$$0.84535\ \frac{\Sigma\varepsilon}{N} = 0.47694\ \sqrt{\frac{N}{P}},$$

oder das Gewicht

$$P = 0.31831\ \frac{N^3}{(\Sigma\varepsilon)^2}.$$

Ist so P gefunden, so hat man, wie im §. 7., die genäherten Werthe

$$\Phi = \frac{1}{2\sqrt{\pi P}},$$

$$F = \frac{0.47694}{\sqrt{P}},$$

$$f = 0.47694\ \sqrt{\frac{N}{P}}, \text{ und}$$

$$\Delta f = f\left(1 \pm \frac{0.47694}{\sqrt{N}}\right).$$

In unserem Beyspiele ist, wenn alle ε positiv genommen werden, $\Sigma\varepsilon = 3.50$, also

$$P = 25.984,$$
$$\Phi = 0.055,$$
$$F = 0.094,$$
$$f = \pm 0.296,$$
$$\Delta f = 0.296 \pm 0.045 = \begin{matrix} 0.341 \\ 0.251 \end{matrix},$$

welche Werthe nicht beträchtlich von denen des §. 7. verschieden sind.

§. 9. Ist überhaupt f der wahrscheinliche Fehler einer einzelnen Beobachtung, und g der Grad ihrer Präcision (Genauigkeit), und ist eben so F der wahrscheinliche Fehler des Resultates aus mehreren Beobachtungen, und G die Genauigkeit dieses Resultates, so ist

$$\frac{F}{f} = \frac{g}{G}.$$

Also auch, wenn man die Genauigkeit g der einzelnen Beobachtungen zur Einheit annimmt, die Genauigkeit des Resultates

$$G = \frac{f}{F}.$$

Substituirt man hier die obigen Werthe von f und F, so ist

$$G = \sqrt{N},$$

also in unserem Beyspiele

$$G = \sqrt{10} = 3.1623.$$

§. 10. Bisher haben wir die einzelnen Beobachtungen ohne Unterschied von gleichem Werthe vorausgesetzt. Es sey nun $c\, c_1\, c_2 \ldots$ der Werth der 1, 2, 3.. Beobachtung (so daß man die 2 zweymal, die 3 dreymal besser voraussetzt, als die erste, wenn $c=1$, $c_1=2$, $c_2=3$ ist), so hat man für den wahrscheinlichsten Werth des Resultates

$$X=\frac{c^2x+c_1^2x+c_2^2x+c_3^2x+}{c^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2+}=\frac{\Sigma c^2 x}{\Sigma c^2}.$$

Sucht man dann wieder die Größe

$$\varepsilon=X-x,\ \varepsilon_1=X-x_1,\ \varepsilon_2=X-x_2\ldots,$$

und setzt man

$$\Sigma c^2\varepsilon^2=c^2\varepsilon^2+c_1^2\varepsilon_1^2+c_2^2\varepsilon_2^2+$$

so erhält man für P, Φ, $F\ldots$ die Ausdrücke

$$P=\frac{N}{2}\cdot\frac{\Sigma c^2}{\Sigma c^2\varepsilon^2},\quad \Phi=\frac{0.282095}{\sqrt{P}},\quad F=\frac{0.47694}{\sqrt{P}},$$

$$G=\sqrt{\Sigma c^2},\quad f=0.47694\sqrt{\frac{\Sigma c^2}{P}},$$

$$f+\Delta f=f\left(1+\frac{0.47694}{\sqrt{\Sigma c^2}}\right),$$

wo f der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung, deren Genauigkeit als Einheit genommen wird, und wo G die Genauigkeit des Resultates X bezeichnet, wenn die Genauigkeit einer Beobachtung als Einheit genommen wird.

Endlich ist der wahrscheinliche Fehler

der ersten Beobachtung

$$\frac{f}{c},$$

der zweyten Beobachtung

$$\frac{f}{c_1},$$

der dritten Beobachtung

$$\frac{f}{c_2}\ \text{u. s. w.}$$

Setzt man in diesen Ausdrücken $c = c_1 = c_2 \ldots = 1$, so ist $\Sigma c^2 \varepsilon^2 = \Sigma \varepsilon^2$ und $\Sigma c^2 = N$, und man erhält die Gleichungen des §. 7. wieder.

Exempel. Seyen die drey Polhöhen gegeben

48°	12′	33″	und der Werth dieser Beobachtung sey	$c = 1$
48	12	34	" " " "	$c_1 = 2$
48	12	35	" " " "	$c_2 = 3$

so hat man

$$\begin{array}{ll} c^2\ x = \ \ 33 & c^2 = 1 \\ c^2_1\ x = 136 & c^2_1 = 4 \\ c^2_2\ x = 315 & c^2_2 = 9 \\ \hline \Sigma c^2 x = 484 & \Sigma c^2 = 14 \end{array}$$

$$X = \frac{\Sigma c^2 x}{\Sigma c^2} = 34.571, \ \varepsilon = X - x = \ \ 1.571, \ c^2\,\varepsilon^2 = 2.468$$

$$\varepsilon_1 = X - x_1 = \ \ 0.571, \ c^2_1\,\varepsilon^2_1 = 1.304$$

$$\varepsilon_2 = X - x_2 = -0.429, \ c^2_2\,\varepsilon^2_2 = 1.656$$

$$\Sigma c^2\,\varepsilon^2 = 5.428$$

Man hat daher

$$\begin{array}{ll} X = 34.''571 & F = 0.240 \\ P = \ \ 3.959 & G = 3.742 \\ \Phi = \ \ 0.142 & f = 0.415 \end{array}$$

und der wahrscheinliche Fehler

der ersten Beobachtung

$$\frac{f}{c} = 0.415,$$

der zweyten Beobachtung

$$\frac{f}{c_1} = 0.207,$$

der dritten Beobachtung

$$\frac{f}{c_2} = 0.138,$$

und man kann 1000 gegen 1 wetten, daß der Fehler von X nicht größer ist als 1.″17.

Hätte man in diesem Beyspiele $c = c_1 = c_2 = 1$ genommen, so würde man nach §. 7. erhalten haben

$$X = \frac{\Sigma x}{N} = 34.''00, \quad \Sigma \varepsilon^2 = 2,$$

$$P = 2.25, \quad \Phi = 0.188, \quad \begin{aligned} F &= 0.318 \\ f &= 0.551 \\ G &= 1.732, \end{aligned}$$

und man kann 1000 gegen 1 wetten, daß der Fehler von X nicht größer ist als 1.''55.