Zweyte Abtheilung.

Methode der kleinsten Quadrate,

oder

Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung

auf

Beobachtungen.

Erstes Capitel.

§. 1. Seyen $x\,x_1\,x_2\ldots$ die durch Beobachtungen unmittelbar erhaltenen Größen, z. B. die Polhöhen des Beobachtungsortes, und N die Anzahl dieser Beobachtungen. Sind diese Beobachtungen alle von gleichem Werthe, so daß man in Beziehung auf ihre Genauigkeit keinen Unterschied unter ihnen machen kann, so ist der wahrscheinlichste Werth dieser Größen, den wir durch X bezeichnen wollen, gleich dem arithmetischen Mittel derselben, oder es ist

$$X = \frac{x + x_1 + x_2 + \ldots}{N}$$

oder, wenn man der Kürze wegen $\Sigma x = x + x_1 + x_2 +$ setzt, so ist

$$X = \frac{\Sigma x}{N}$$

§. 2. Es sey nun ε der Unterschied zwischen diesem wahrscheinlichsten Werthe X unserer Größe und dem unmittelbaren Resultate x der ersten Beobachtung, oder es sey $\varepsilon = X - x$ und eben so

für die zweyte Beobachtung $\varepsilon_1 = X - x_1$,
für die dritte „ „ $\varepsilon_2 = X - x_2$ u. s. f.

Man kann diese Größen $\varepsilon\ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots$ als die Fehler der einzelnen Beobachtungen ansehen. Bezeichnet man wieder der Kürze wegen die Summe der Quadrate der Größen $\varepsilon_2 . \varepsilon_1^2 . \varepsilon_2^2$ . . durch $\Sigma \varepsilon^2$, so daß

$$\Sigma \varepsilon^2 = \varepsilon^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \text{ist},$$

so heißt die Größe

$$P = \frac{N^2}{2 \Sigma \varepsilon^2}$$

das Gewicht jener Bestimmung von X als des wahrscheinlichsten Werthes von x. Man sieht, daß dieses Gewicht desto größer seyn wird, je größer die Anzahl N der Beobachtungen und je kleiner die Größen $\varepsilon\, \varepsilon_1\, \varepsilon_2$ . . das heißt, je genauer diese Beobachtungen selbst sind.

§. 3. Nennet man dann Φ den mittleren zu befürchtenden Fehler, den man bey der Bestimmung der Größe X (nach dem in §. 1. gezeigten Verfahren) begangen haben mag, so ist

$$\Phi = \frac{1}{2\sqrt{\pi P}} = \frac{0.282095}{\sqrt{P}}$$

wo $\pi = 3.1415926$ das Verhältniß der Peripherie des Kreises zu seinem Durchmesser ist. Dieser mittlere zu befürchtende Fehler Φ ist die Summe der Producte jedes Fehlers der einzelnen Beobachtungen in seine Wahrscheinlichkeit.

§. 4. Von diesem mittleren zu befürchtenden Fehler unterscheidet sich der wahrscheinliche Fehler F, den man bey dieser Bestimmung von X begangen haben kann. Dieser Fehler F ist nämlich derjenige, von dem es gleich wahrscheinlich ist, daß man ihn begangen oder daß man ihn auch nicht begangen habe. Dieser wahrscheinliche Fehler ist

$$F = \frac{0.4769363}{\sqrt{P}}$$

§. 5. Die beyden Fehler Φ und F beziehen sich auf das Resultat X, welches man (durch das Verfahren des §. 1) aus den einzelnen Beobachtungen $x\, x_1\, x_2$ . . abgeleitet hat. Nennt man nun eben so f den wahrscheinlichen Fehler jeder einzelnen dieser Beobachtungen, so ist

$$f = 0.4769363 \sqrt{\frac{N}{P}},$$

und die wahrscheinliche Gränze $f + \Delta f$ dieses Fehlers f ist

$$f \pm \Delta f = f.\left(1 + \frac{0.4769363}{\sqrt{N}}\right),$$

wo in allen diesen Ausdrücken wegen dem Wurzelzeichen die dasselbe enthaltende Größe immer mit den doppelten Zeichen $\pm$ verstanden wird. Der letzte Ausdruck sagt daher, daß der wahre, wirklich statthabende Werth von f zwischen die beyden Gränzen fallen wird:

$$f\left(1 + \frac{0.4769363}{\sqrt{N}}\right), \text{ und}$$

$$f\left(1 - \frac{0.4769363}{\sqrt{N}}\right),$$

oder daß man 1 gegen 1 wetten kann, daß der wahre Werth von f zwischen diese beyden Größen fallen wird.

§. 6. Um aber auch die Wahrscheinlichkeit w zu finden, daß eine der bisher bestimmten Größen, daß z. B. der mittlere zu befürchtende Fehler Φ des Resultates X zwischen zwey andere, willkührliche Gränzen falle, so findet man die Wahrscheinlichkeit w, daß diese Größe Φ zwischen den Gränzen $\pm \frac{r}{\sqrt{P}}$ liege, wo r irgend eine willkührliche Größe, und, wie zuvor, $P = \frac{N^2}{2 \Sigma \varepsilon^2}$ ist,

$$w = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-r^2} dr,$$

wo $e = 2.7182818$ die Basis der natürlichen Logarithmen ist, und wo das Integral von $r = 0$ bis $r = \infty$ genommen wird. Man findet aber für dieses Integral, wenn $r < 1$ ist

$$\int e^{-r^2} dr = r - \frac{r^3}{3} + \frac{1}{1.2} \cdot \frac{r^5}{5} - \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{r^7}{7} + \frac{1}{1.2.3.4} \cdot \frac{r^9}{9} -$$

oder

$$\int e^{-r^2} dr = \frac{r}{e^{r^2}} \left[1 + \frac{2r^2}{1.3} + \frac{(2r^2)^2}{1.3.5} + \frac{(2r^2)^3}{1.3.5.7} + \cdot \cdot \right]$$

und wenn $r > 1$ ist,

$$\int e^{-r^2}\, dr = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} - \frac{1}{2r \cdot e^{r^2}}$$

$$\left[1 - \frac{1}{2r^2} + \frac{1.3}{(2r^2)^2} - \frac{1.3.5}{(2r^2)^3} + \frac{1.3.5.7}{(2r^2)^4} - \ldots\right]$$

Entwickelt man diese Ausdrücke für einige Werthe von r, so gibt die vorhergehende Gleichung

$$w = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-r^2}\, dr$$

folgende kleine Tafel:

r	w	$\frac{w}{1-w}$
0.4769363	0.5	1.0000000
0.5951161	0.6	1.5000000
0.7328691	0.7	2.3333333
0.9061939	0.8	4.0000000
1.0000000	0.8427008	5.3572874
1.1630872	0.9	9.0
1.8213864	0.99	99.0
2.3276754	0.999	999.0
2.7510654	0.9999	9999.0
∞	1.0000000	∞

Diese Tafel zeigt z. B., daß die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler Φ zwischen den Gränzen $\pm \frac{1}{\sqrt{P}}$ liege, gleich $w = 0.8427008$, und daß also auch die Wahrscheinlichkeit des Gegentheiles, daß Φ nicht zwischen diesen Gränzen liege, gleich $1 - w = 0.1572992$ ist, weil jede Wahrscheinlichkeit, daß irgend ein Fall eintrete, und die, daß er nicht eintrete, zusammen gleich der Wahrheit d. h. gleich 1 ist. Man kann daher die Größe w gegen $1 - w$ d. h., man kann die Größe $\frac{w}{1-w} = 5.3572874$ gegen die Einheit wetten, daß der Fehler Φ zwischen den Gränzen $\pm \frac{1}{\sqrt{P}}$ enthalten, oder mit andern Worten, daß der Fehler Φ kleiner als $\frac{1}{\sqrt{P}}$ ist. Eben so kann man 9999 gegen 1 oder nahe 10000 gegen 1 wetten, daß der Fehler Φ kleiner als $\frac{2.7510654}{\sqrt{P}}$ ist; aber man kann nur 4 gegen 1 wetten, daß der Fehler Φ kleiner als $\frac{0.9061939}{\sqrt{P}}$ ist u. s. w.

§. 7. Wir wollen nun auf das Vorhergehende ein Beyspiel anwenden, um den Gebrauch der bisher aufgestellten Ausdrücke deutlich zu machen.

Zehn Beobachtungen unsers Meridiankreises haben folgende Polhöhen der Wiener Sternwarte gegeben:

$$
\begin{aligned}
x &= 48^{\circ}\,12'\,35.''2 \\
x_1 &= 34.6 \\
x_2 &= 35.4 \\
x_3 &= 35.0 \\
x_4 &= 34.2 \\
x_5 &= 34.7 \\
x_6 &= 35.4 \\
x_7 &= 34.8 \\
x_8 &= 35.6 \\
x_9 &= 35.2
\end{aligned}
$$

Arithm. Mittel $X = 48^{\circ}\,12'\,35.''01 = \frac{\Sigma x}{N}$, wo $N = 10$ ist.

Dieser Werth von X ist also der wahrscheinlichste Werth der Polhöhe jenes Beobachtungsortes, wie er aus diesen zehn Beobachtungen folgt.

I. Es sind aber die Differenzen dieses Resultates X von den einzelnen Beobachtungen

$X - x = \varepsilon = 35.01 - 35.2$, oder

$$
\begin{array}{llll}
\varepsilon = & -0.19, \text{ und } & \varepsilon^2 = & 0.0361 \\
\varepsilon_1 = & 0.41 & \varepsilon^2_1 = & 0.1861 \\
\varepsilon_2 = & -0.39 & \varepsilon^2_2 = & 0.1521 \\
\varepsilon_3 = & 0.01 & \varepsilon^2_3 = & 0.0001 \\
\varepsilon_4 = & 0.81 & \varepsilon^2_4 = & 0.6561 \\
\varepsilon_5 = & 0.31 & \varepsilon^2_5 = & 0.0961 \\
\varepsilon_6 = & -0.39 & \varepsilon^2_6 = & 0.1521 \\
\varepsilon_7 = & 0.21 & \varepsilon^2_7 = & 0.0441 \\
\varepsilon_8 = & -0.59 & \varepsilon^2_8 = & 0.3481 \\
\varepsilon_9 = & -0.19 & \varepsilon^2_9 = & 0.0361 \\
\hline
 & & \Sigma\varepsilon^2 = & 1.7070
\end{array}
$$

Dieses vorausgesetzt ist das Gewicht P der vorhergehenden Bestimmung von X

$$P = \frac{N^2}{2\,\Sigma\varepsilon^2} = 29.291.$$

Der mittlere zu befürchtende Fehler Φ dieses Resultates X ist

$$\Phi = \frac{1}{2\sqrt{\pi P}} = \pm\, 0.''0521.$$

Der wahrscheinliche Fehler F dieses Resultates ist

$$F = \frac{0.47694}{\sqrt{P}} = \pm\, 0.0881.$$

Endlich ist der wahrscheinliche Fehler f jeder einzelnen Beobachtung

$$f = 0.47694 \sqrt{\frac{N}{P}} = \pm\, 0.2787,$$

und die wahrscheinliche Gränze $f + \Delta f$ dieses letzten Fehlers ist

$$f \pm \Delta f = f\left(1 \pm \frac{0.47694}{\sqrt{N}}\right),$$

das heißt

$$0.2787 \pm 0.0420 = \frac{0.3207}{0.2367}.$$

Man kann daher sagen, daß mit diesem Instrumente unter übrigens gleichen Umständen, jede einzelne Beobachtung dieser Art dem wahrscheinlichen Fehler 0.″28 unterworfen ist, und daß dieser Fehler in der Ordnung nicht größer als 0.″32, und nicht kleiner als 0.″24 seyn wird, und dieser Schluß wird desto genauer seyn, je größer die ihm zu Grunde gelegte Anzahl von Beobachtungen gewesen ist.

II. Welches ist aber die Wahrscheinlichkeit w, daß die Gränzen $\Delta\Phi$ des mittleren zu befürchtenden Fehlers die Größe

$$\Delta\Phi = \pm \frac{r}{\sqrt{P}}$$

nicht übersteige, oder daß der mittlere zu befürchtende Fehler kleiner, oder wenigstens nicht größer als $\frac{r}{\sqrt{P}}$ sey?

Sey r = 0.4769363, so ist

$$\Delta\Phi = \frac{0.4769363}{5.4121} = 0.0881,$$

und da zu diesem r in der Tafel des §. 6. der Werth $w = 0.5$, oder $\frac{w}{1-w} = 1$ gehört, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler $\Delta\Phi$ nicht größer als 0.0881 sey, gleich 0.5, oder man kann 1 gegen 1 wetten, daß der Fehler, den man in der Bestimmung von X begangen hat, nicht größer als 0.0881 sey. Auch ist der wahrscheinliche Fehler F des Resultates X in N. I ebenfalls gleich dieser Größe 0.0881 gefunden worden.

Für $r = 1$ gibt die Tafel $\frac{w}{1-w} = 5.357$, und

$$\Delta\Phi = \frac{1}{5.4121} = 0.1848,$$

für $r = 2.32767$ gibt die Tafel $\frac{w}{1-w} = 999$, und

$$\Delta\Phi = \frac{2.32767}{5.4121} = 0.4301.$$

Man kann also 5.357 gegen 1 wetten, daß die obige Bestimmung von Φ nicht über 0.″1848, und man kann 999 gegen 1 oder nahe 1000 gegen 1 wetten, daß diese Bestimmung nicht über 0.″4301 fehlerhaft ist.

§. 8. Die vorhergehenden Bestimmungen lassen sich noch zur Rechnung etwas bequemer machen, ohne dadurch der Genauigkeit der Resultate in Φ, F und f bedeutend zu schaden. Man kann nämlich statt der bisher gebrauchten Summe der Quadrate der Fehler $\Sigma\varepsilon^2 = \varepsilon^2 + \varepsilon_1{}^2 + \varepsilon_2{}^2 +$ auch die Summe dieser Fehler selbst, oder die Größe $\Sigma\varepsilon = \varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots$ einführen, wo aber dann alle diese Größen $\varepsilon\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots$ positiv genommen werden müssen. Dieses vorausgesetzt, findet man für den wahrscheinlichen Fehler f jeder einzelnen Beobachtung den genäherten Ausdruck

$$f = 0.84535\ \frac{\Sigma\varepsilon}{N}.$$

In unserem Beyspiele ist $\Sigma\varepsilon = 3.50$, also

$$f = 0.296$$

nur 0.017 von dem im §. 7. verschieden.

Setzt man also diese beyden Werthe von f einander gleich, so erhält man

$$0.84535\ \frac{\Sigma\varepsilon}{N} = 0.47694 \sqrt{\frac{N}{P}},$$

oder das Gewicht

$$P = 0.31831\ \frac{N^3}{(\Sigma\varepsilon)^2}.$$

Ist so P gefunden, so hat man, wie im §. 7., die genäherten Werthe

$$\Phi = \frac{1}{2\sqrt{\pi P}},$$

$$F = \frac{0.47694}{\sqrt{P}},$$

$$f = 0.47694 \sqrt{\frac{N}{P}}, \text{ und}$$

$$\Delta f = f\left(1 \pm \frac{0.47694}{\sqrt{N}}\right).$$

In unserem Beyspiele ist, wenn alle ε positiv genommen werden, $\Sigma\varepsilon = 3.50$, also

$$P = 25.984,$$
$$\Phi = 0.055,$$
$$F = 0.094,$$
$$f = \pm 0.296,$$

$$\Delta f = 0.296 \pm 0.045 = \begin{matrix} 0.341 \\ 0.251 \end{matrix},$$

welche Werthe nicht beträchtlich von denen des §. 7. verschieden sind.

§. 9. Ist überhaupt f der wahrscheinliche Fehler einer einzelnen Beobachtung, und g der Grad ihrer Präcision (Genauigkeit), und ist eben so F der wahrscheinliche Fehler des Resultates aus mehreren Beobachtungen, und G die Genauigkeit dieses Resultates, so ist

$$\frac{F}{f} = \frac{g}{G}.$$

Also auch, wenn man die Genauigkeit g der einzelnen Beobachtungen zur Einheit annimmt, die Genauigkeit des Resultates

$$G = \frac{f}{F}.$$

Substituirt man hier die obigen Werthe von f und F, so ist

$$G = \sqrt{N},$$

also in unserem Beyspiele

$$G = \sqrt{10} = 3.1623.$$

§. 10. Bisher haben wir die einzelnen Beobachtungen ohne Unterschied von gleichem Werthe vorausgesetzt. Es sey nun $c\ c_1\ c_2 \ldots$ der Werth der 1, 2, 3.. Beobachtung (so daß man die 2 zweymal, die 3 dreymal besser voraussetzt, als die erste, wenn $c=1$, $c_1=2$, $c_2=3$ ist), so hat man für den wahrscheinlichsten Werth des Resultates

$$X=\frac{c^2x+c_1^2x+c_2^2x+c_3^2x+}{c^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2+}=\frac{\Sigma c^2x}{\Sigma c^2}.$$

Sucht man dann wieder die Größe

$$\varepsilon=X-x,\ \varepsilon_1=X-x_1,\ \varepsilon_2=X-x_2\ldots,$$

und setzt man

$$\Sigma c^2\varepsilon^2=c^2\varepsilon^2+c_1^2\varepsilon_1^2+c_2^2\varepsilon_2^2+$$

so erhält man für P, Φ, $F\ldots$ die Ausdrücke

$$P=\frac{N}{2}\cdot\frac{\Sigma c^2}{\Sigma c^2\varepsilon^2},\quad \Phi=\frac{0.282095}{\sqrt{P}},\quad F=\frac{0.47694}{\sqrt{P}},$$

$$G=\sqrt{\Sigma c^2},\quad f=0.47694\sqrt{\frac{\Sigma c^2}{P}},$$

$$f+\Delta f=f\left(1+\frac{0.47694}{\sqrt{\Sigma c^2}}\right),$$

wo f der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung, deren Genauigkeit als Einheit genommen wird, und wo G die Genauigkeit des Resultates X bezeichnet, wenn die Genauigkeit einer Beobachtung als Einheit genommen wird.

Endlich ist der wahrscheinliche Fehler

der ersten Beobachtung

$$\frac{f}{c},$$

der zweyten Beobachtung

$$\frac{f}{c_1},$$

der dritten Beobachtung

$$\frac{f}{c_2}\ \text{u. s. w.}$$

Setzt man in diesen Ausdrücken $c = c_1 = c_2 \,..= 1$, so ist $\Sigma c^2 \varepsilon^2 = \Sigma \varepsilon^2$ und $\Sigma c^2 = N$, und man erhält die Gleichungen des §. 7. wieder.

Exempel. Seyen die drey Polhöhen gegeben

48°	12′	33″	und der Werth dieser Beobachtung sey	c	$= 1$
48	12	34	„ „ „ „	c_1	$= 2$
48	12	35	„ „ „ „	c_2	$= 3$

so hat man

$$\begin{array}{rl} c^2\,x = & 33 \\ c^2_1\,x = & 136 \\ c^2_2\,x = & 315 \\ \hline \Sigma c^2 x = & 484 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} c^2 = & 1 \\ c^2_1 = & 4 \\ c^2_2 = & 9 \\ \hline \Sigma c^2 = & 14 \end{array}$$

$$X = \frac{\Sigma c^2 x}{\Sigma c^2} = 34.571,\ \varepsilon = X - x = \ \ 1.571,\ c^2\,\varepsilon^2 = 2.468$$

$$\varepsilon_1 = X - x_1 = \ \ 0.571,\ c^2_1\,\varepsilon^2_1 = 1.304$$

$$\varepsilon_2 = X - x_2 = -0.429,\ c^2_2\,\varepsilon^2_2 = 1.656$$

$$\Sigma c^2\,\varepsilon^2 = 5.428$$

Man hat daher

$$\begin{array}{ll} X = 34.''571 & F = 0.240 \\ P = \ \ 3.959 & G = 3.742 \\ \Phi = \ \ 0.142 & f = 0.415 \end{array}$$

und der wahrscheinliche Fehler

der ersten Beobachtung

$$\frac{f}{c} = 0.415,$$

der zweyten Beobachtung

$$\frac{f}{c_1} = 0.207,$$

der dritten Beobachtung

$$\frac{f}{c_2} = 0.138,$$

und man kann 1000 gegen 1 wetten, daß der Fehler von X nicht größer ist als 1.″17.

Hätte man in diesem Beyspiele $c = c_1 = c_2 = 1$ genommen, so würde man nach §. 7. erhalten haben

$$X = \frac{\Sigma x}{N} = 34.''00, \quad \Sigma \varepsilon^2 = 2,$$

$$P = 2.25, \quad \Phi = 0.188, \quad \begin{aligned} F &= 0.318 \\ f &= 0.551 \\ G &= 1.732, \end{aligned}$$

und man kann 1000 gegen 1 wetten, daß der Fehler von X nicht größer ist als 1.''55.

Zweytes Capitel.

§. 11. Es werde nun durch eine Anzahl von Beobachtungen irgend eine Größe gesucht, deren Werth man schon beynahe kennt d. h. für welche man schon einen genäherten analytischen Ausdruck hat. Man soll diesen Ausdruck durch Hülfe jener Beobachtungen genauer bestimmen.

Um diesen Gegenstand sogleich durch ein Beyspiel zu fixiren, so ist bekanntlich der Höhenunterschied in Toisen von zwey Orten, in welchen man die Barometerhöhen b und b′ beobachtet hat, gleich

$$B = 9437 \log \frac{b}{b'},$$

wenn man die Correctionen wegen der Temperatur und Polhöhe hier, der Kürze wegen, vernachlässiget. Da aber dieser Factor 9437, von welchem die Bestimmung des Höhenunterschiedes zweyer Orte vorzüglich abhängt, noch keineswegs genau bekannt ist, so wollen wir die Verbesserung desselben mit x bezeichnen, so daß der wahre Werth dieses Factors gleich $9437 + x$, und daß daher der wahre Ausdruck der Höhendifferenz gleich

$$(9437 + x) \log \frac{b}{b'}$$

Toisen seyn soll, in welchem die Correction x noch unbekannt ist.

Beobachtet man nun in der That an zwey Orten die Barometerhöhen, und kennt man zugleich aus andern unmittelbaren z. B. aus trigonometrischen Messungen die wahre Höhendifferenz A dieser beyden Orte, so wird man, da auch

$$(9437 + x) \log \frac{b}{b'}$$

diese wahre Höhendifferenz ausdrückt, die Gleichung erhalten

$$A = (9437 + x) \log \frac{b}{b'}, \text{ oder}$$

$$A = B + x \cdot \log \frac{b}{b'} \ldots . (I),$$

und da in dieser Gleichung bloß die unbekannte Größe x vorkommt, so wird man sie durch diese Gleichung selbst bestimmen können, und so den wahren Werth $9437 + x$ jenes Factors erhalten.

I. Sey z. B. auf der untern dieser beyden Stationen die Barometerhöhe $b = 27.27$ Zoll, und auf der obern $b' = 22.47$ beobachtet worden. Eine trigonometrische Messung aber habe die wahre Höhendifferenz dieser beyden Stationen gleich

$$A = 794.5$$

Toisen gegeben. Wir haben daher

$$\log \frac{b}{b'} = 0.084082, \text{ und}$$

$$B = 9437 \log \frac{b}{b'} = 793.482,$$

und die vorhergehende Gleichung (I) geht daher in folgende über

$$A = B + 0.084082\, x,$$

wo aus der Berechnung $B = 793.482$, und aus der unmittelbaren trigonometrischen Messung $A = 794.5$ folgt.

Allein das Resultat A dieser Messung kann, da sie wieder aus einer Beobachtung, wenn gleich aus einer viel genaueren, als die der Barometerhöhen, abgeleitet ist, ebenfalls nicht als ganz wahr angesehen werden. Nehmen wir daher an, daß ε der

Fehler dieser Messung sey, oder daß $A + \varepsilon$ der wahre Werth der Größe A sey, so wird die letzte Gleichung seyn

$$A + \varepsilon = B + 0.084082\,x,$$

oder wenn man die Differenz der unmittelbaren Messung, und der Rechnung nach der aufgestellten Formel, d. h. wenn man die Größe $A - B$ gleich δ setzt,

$$\delta + \varepsilon = 0.084082\,x,$$

oder endlich überhaupt, wenn man den Coefficienten von x durch a bezeichnet,

$$\varepsilon = a\,x - \delta,$$

und dieß ist die Bedingungsgleichung der ersten Beobachtung, in welcher also a und δ bekannte Größen, x die zu bestimmende Größe, und ε der noch unbekannte Fehler der ersten Messung ist. Eine zweyte Beobachtung wird eben so die Bedingungsgleichung

$$\varepsilon_1 = a_1\,x - \delta_1,$$

und eine dritte die Gleichung

$$\varepsilon_2 = a_2\,x - \delta_2$$

geben u. s. f., und es wird nun darauf ankommen, denjenigen Werth der Größe x zu finden, der allen diesen Bedingungsgleichungen am besten entspricht.

Die Theorie der kleinsten Quadrate zeigt, das dieser Werth der Größe x, oder daß der wahrscheinlichste Werth X derselben derjenige ist, für welchen die Summe der Quadrate aller Beobachtungsfehler $\varepsilon\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2$ . . , ein Kleinstes ist, oder für welchen man hat

$$d\,.\,(\varepsilon^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \ldots) = 0.$$

Substituirt man aber in dieser Gleichung für $\varepsilon\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2$.. ihre vorhergehenden Werthe, so hat man

$$d.(a\,x - \delta)^2 + d.(a_1\,x - \delta_1)^2 + d.(a_2\,x - \delta_2)^2 + .. = 0,$$

oder

$$x\,(a^2 + a_1^2 + a_2^2 +) - (a\,\delta + a_1\,\delta_1 + a_2\,\delta_2 + ..) = 0,$$

oder endlich, wenn man wieder die oben eingeführten Abkürzungszeichen braucht,

$$x \,.\, \Sigma a^2 - \Sigma \,.\, a\delta = 0,$$

das heißt, da der durch diese Gleichung bestimmte Werth von x der wahrscheinlichste von allen ist, den wir mit X bezeichnet haben,

$$X = \frac{\Sigma \,.\, a\delta}{\Sigma a^2},$$

$$\text{wo } \Sigma a\delta = a\delta + a_1\delta_1 + a_2\delta_2 + \,.\,., \text{ und}$$
$$\Sigma a^2 = a^2 + a^2_1 + a_2{}^2 + a_3{}^2 + \,.\,.\, \text{ ist.}$$

§. 13. Hat man so den wahrscheinlichsten Werth X der Größe x gefunden, so wird man die Größen P, Φ, F, f und G im Allgemeinen nach ähnlichen Ausdrücken mit denen bestimmen, welche wir im §. 3. und 4. u. s. w. gegeben haben.

Setzt man nämlich

$$\Sigma \varepsilon^2 = (aX - \delta)^2 + (a_1 X - \delta_1)^2 + (a_2 X - \delta_2)^2 +,$$

so findet man für das Gewicht P jener Bestimmung des Resultates X den Ausdruck

$$P = \frac{N}{2} \cdot \frac{\Sigma a^2}{\Sigma \varepsilon^2},$$

wo wieder N die Anzahl der Beobachtungen ist.

Um die Größe $\Sigma \varepsilon^2$ zur Rechnung bequemer zu machen, hat man, wenn man den gegebenen Ausdruck von $\Sigma \varepsilon^2$ entwickelt,

$$\Sigma \varepsilon^2 = X^2 (a^2 + a_1{}^2 + a_2{}^2 +),$$
$$- 2X (a\delta + a_1\delta_1 + a_2\delta_2 +),$$
$$+ \delta^2 + \delta_1{}^2 + \delta_2{}^2 +,$$

oder kürzer ausgedrückt

$$\Sigma \varepsilon^2 = X^2 \Sigma a^2 - 2X \Sigma a\delta + \Sigma \delta^2,$$

oder endlich da

$$X = \frac{\Sigma a\delta}{\Sigma a^2} \text{ war,}$$

$$\Sigma\varepsilon^2 = \frac{(\Sigma a\delta)^2}{\Sigma a^2} - \frac{2(\Sigma a\delta)^2}{\Sigma a^2} + \Sigma\delta^2,$$

das heißt

$$\Sigma\varepsilon^2 = \Sigma\delta^2 - \frac{(\Sigma a\delta)^2}{\Sigma a^2}.$$

Hat man also durch diese Gleichung den Werth von $\Sigma\varepsilon^2$ gefunden, so ist

$$P = \frac{N}{2} \cdot \frac{\Sigma a^2}{\Sigma\varepsilon^2},$$

und kennt man so den Werth von P, so ist der mittlere zu befürchtende Fehler des Resultates X gleich

$$\Phi = \frac{1}{2\sqrt{\pi P}} = \frac{0.282095}{\sqrt{P}},$$

der wahrscheinliche Fehler dieses Resultates

$$F = \frac{0.47694}{\sqrt{P}},$$

und die Genauigkeit (Präcision) dieser Bestimmung des Resultates, die Genauigkeit der einzelnen Beobachtungen als Einheit vorausgesetzt,

$$G = \frac{f}{F} = \sqrt{\Sigma a^2}.$$

Endlich ist der wahrscheinliche Fehler jeder einzelnen Beobachtung

$$f = 0.47694\sqrt{\frac{\Sigma a^2}{P}},$$

und die wahrscheinlichen Gränzen desselben

$$f \pm \Delta f = f\left(1 \pm \frac{0.47694}{\sqrt{N}}\right).$$

I. Man bemerkt von selbst, daß diese Ausdrücke von P, Φ, F.. in die des §. 7. übergehen, wenn man hier die Größe $a = a_1 = a_2 ..$ gleich 1, und $\delta\ \delta_1\ \delta_2 ..$ gleich $x\ x_1\ x_2 ..$ setzt, wodurch $\Sigma a^2 = a^2 + a^2 + a^2 .. = N$ wird.

Auch zeigt schon der Ausdruck für P, daß das Gewicht des Resultates X desto größer wird, je größer die Anzahl N der

Beobachtungen, und je kleiner Σs^2 ist d. h. je genauer die Beobachtungen sind, und endlich je größer die Factoren $a\,a_1\,a_2\,..$ der Größe x in den Bedingungsgleichungen sind: übereinstimmend mit dem, was §. 11. I. gesagt worden ist. Je größer aber für alle diese Fälle die Größe P wird, desto kleiner werden auch die Größen Φ F und f.

§. 14. Wenden wir diese Ausdrücke auf folgendes Beyspiel an:

$$\begin{aligned} 1.50\,x - 0.72 &= \varepsilon \\ 1.46\,x - 0.68 &= \varepsilon_1 \\ 1.52\,x - 0.82 &= \varepsilon_2 \\ 1.43\,x - 0.78 &= \varepsilon_3 \\ 1.48\,x - 0.69 &= \varepsilon_4. \end{aligned}$$

Hier ist also

$$a = 1.50 \qquad a_1 = 1.46$$
$$\delta = 0.72 \qquad \delta_1 = 0.68 \text{ u. f.,}$$

also auch

$$\begin{array}{rlrlrl} a^2 = & 2.2500 & \delta^2 = & 0.5184 & a\,\delta = & 1.0800 \\ a_1^{\,2} = & 2.1316 & \delta_1^{\,2} = & 0.4624 & a_1\delta_1 = & 0.9928 \\ & 2.3104 & & 0.6724 & & 1.2464 \\ & 2.0449 & & 0.6084 & & 1.1154 \\ & 2.1904 & & 0.4761 & & 1.0212 \\ \hline \Sigma a^2 = & 10.9273 & \Sigma\delta^2 = & 2.7377 & \Sigma a\,\delta = & 5.4558 \end{array}$$

Daraus folgt

$$\Sigma\varepsilon^2 = \Sigma\delta^2 - \frac{(\Sigma a\,\delta)^2}{\Sigma a^2} = 0.0137, \text{ und}$$

$$X = \frac{\Sigma a\,\delta}{\Sigma a^2} = 0.49928, \text{ und da } N = 5 \text{ ist,}$$

$$\begin{aligned} P &= 1994.033 \\ \Phi &= 0.00632 \\ F &= 0.01068 \\ G &= 3.3056 \\ f &= 0.03531 \\ f \pm \Delta f &= \begin{matrix} 0.04284 \\ 0.02778. \end{matrix} \end{aligned}$$

Die Größen P und G sind hier so groß, oder die Φ und F so klein, weil die einzelnen Beobachtungen so wenig von einander verschieden, oder weil die Beobachtungen so genau sind, wie auch der kleine Werth von f, des Fehlers jeder einzelnen Beobachtung, so wie der ebenfalls sehr kleine Werth von $\Sigma\varepsilon^2$, der Summe der Quadrate aller Beobachtungsfehler, zeigt.

In einem zweyten Beyspiele sey

$$\begin{aligned} 2.1\,x - 2.5 &= \varepsilon \\ 3.2\,x - 5.0 &= \varepsilon_1 \\ 2.4\,x - 4.5 &= \varepsilon_2 \\ 4.0\,x - 5.0 &= \varepsilon_3 \\ 3.5\,x - 4.1 &= \varepsilon_4. \end{aligned}$$

Addirt man alle diese Gleichungen, so erhält man, wenn man alle $\varepsilon = 0$ setzt, $15.2x - 21.1 = 0$, oder $x = 1.388$ für das arithmethische Mittel dieser Größe, welches aber nicht der wahrscheinlichste Werth X derselben ist.

Nach dem Vorhergehenden geben jene fünf Gleichungen

$\Sigma a^2 = 48.66$, $\Sigma\delta^2 = 93.31$, $\Sigma a\delta = 66.40$ und $N = 5$,

also ist

$$\Sigma\varepsilon^2 = 93.31 - 90.6075 = 2.7025,$$

der wahrscheinlichste Werth

$$\begin{aligned} X &= 1.36457 \\ P &= 45.01387 \\ \Phi &= 0.04204 \\ F &= 0.07109 \\ G &= 6.97567 \\ f &= 0.49588 \\ f \pm \Delta f &= \begin{cases} 0.60164 \\ 0.39012. \end{cases} \end{aligned}$$

Nach der Tafel des §. 6. ist für

$r = 1.8213861$ der Werth von $\Delta\Phi = \dfrac{r}{\sqrt{P}} = 0.271$, und für

$r = 2.32767$ der Werth von $\Delta\Phi = \dfrac{r}{\sqrt{P}} = 0.347$;

also kann man 100 gegen 1 wetten, daß der Fehler von X nicht größer als 0.271, und 1000 gegen 1 wetten, daß der Fehler von X nicht größer als 0.347 ist.

I. Auch hier könnte man, wie im §. 8., wieder die Größe $\Sigma\varepsilon^2$ vermeiden, indem man

$$f = 0.84535 \, . \, \frac{\Sigma\varepsilon}{N}$$

einführt, wo $\Sigma\varepsilon$ die Summe der Größen

$$\varepsilon = Xa - \delta, \; \varepsilon_1 = Xa_1 - \delta_1, \; \varepsilon_2 = Xa_{11} - \delta_{11} \ldots,$$

diese Differenzen alle positiv genommen, bezeichnet. Setzt man nämlich diesen Werth von f gleich dem vorhergehenden

$$f = 0.47694 \sqrt{\frac{\Sigma a^2}{P}},$$

so findet man

$$P = 0.31831 \, . \, \frac{N^2 \, . \, \Sigma a^2}{(\Sigma\varepsilon)^2},$$

und dann die übrigen Größen Φ, F, f.. wie im §. 13. In unserem zweyten Beyspiele ist

$$\begin{array}{lr}
\varepsilon = Xa - \delta = & 0.36566 \\
\varepsilon_1 \;.\;.\;.\;. & -\,0.63328 \\
\varepsilon_2 \;.\;.\;.\;. & -\,1.22496 \\
\varepsilon_3 \;.\;.\;.\;. & 0.45840 \\
\varepsilon_4 \;.\;.\;.\;. & 0.67610 \\
\hline
\Sigma\varepsilon = & 3.35840
\end{array}$$

wenn alle ε positiv genommen werden. Ferner ist

$$N = 5, \; \Sigma a^2 = 48.66,$$

also nach der letzten Gleichung

$$P = 34.332$$
$$\Phi = 0.048$$
$$F = 0.081 \text{ u. s. w.}$$

Allein die Berechnung der Größe P nach der Gleichung

$$P = \frac{N}{2} \, . \, \frac{\Sigma a^2}{\Sigma\varepsilon^2}$$

des §. 13. ist nicht nur genauer, sondern auch bequemer, da man den Werth von $\Sigma\varepsilon^2$ sogleich aus dem Ausdrucke

$$\Sigma\varepsilon^2 = \Sigma\delta^2 - \frac{(\Sigma a\delta)^2}{\Sigma a^2}$$

erhält, während man den Werth von $\Sigma\varepsilon$ nicht aus dem analogen Ausdrucke

$$\Sigma\varepsilon = X\Sigma a - \Sigma\delta = \frac{\Sigma a\delta}{\Sigma a} - \Sigma\delta$$

finden kann, weil vorausgesetzt wird, daß alle ε positiv genommen werden, daher man hier die Werthe aller ε unmittelbar aus den primitiven Gleichungen

$$\varepsilon = aX - \delta,\quad \varepsilon_1 = a_1 X - \delta_1 \ldots$$

berechnen muß.

§. 15. Das Vorhergehende setzt voraus, daß die Werthe aller Bedingungsgleichungen unter sich gleich groß sind.

Ist aber von der Bedingungsgleichung

$\varepsilon = a\,x - \delta$ der Werth c, und von
$\varepsilon_1 = a_1\,x - \delta_1$ „ c_1,
$\varepsilon_2 = a_2\,x - \delta_2$ „ c_2 u. s. w.,

so hat man für die Größen X, P, Φ.. folgende Ausdrücke, wo wieder

$$\varepsilon = aX - \delta,\ \varepsilon_1 = a_1 X - \delta_1$$

u. s. f. ist.

$$X = \frac{\Sigma c^2 a\delta}{\Sigma c^2 a^2},\quad P = \frac{N}{2}\cdot\frac{\Sigma c^2 a^2}{\Sigma c^2 \varepsilon^2}\quad F = \frac{0.47694}{\sqrt{P}},$$

$$\Phi = \frac{0.28209}{\sqrt{P}},\quad G = \sqrt{\Sigma c^2 a^2}$$

$$f = 0.47694\sqrt{\frac{\Sigma c^2 a^2}{P}} = 0.47694\sqrt{\frac{\Sigma c^2 a^2}{P}}$$

$$f + \varDelta f = f\left(1 \pm \frac{0.47694}{\sqrt{N}}\right).$$

Setzt man in diesen Ausdrücken

$$c = c_1 = c_2 \ldots = 1,$$

so ist

$$\Sigma c^2 a\delta = \Sigma a\delta,\ \Sigma c^2 a^2 = \Sigma a^2,\ \Sigma c^2 \varepsilon^2 = \Sigma\varepsilon^2,$$

und man erhält die Gleichungen des §. 13. wieder.

Exempel. Seyen die Bedingungsgleichungen gegeben

$$2\,x - 2.5 = \varepsilon \text{ mit dem Werthe } c = 1$$
$$3\,x - 5.0 = \varepsilon_1 \quad " \quad " \quad c_1 = 2$$
$$4\,x - 6.0 = \varepsilon_2 \quad " \quad " \quad c_2 = 3,$$

so daß also die zweyte Beobachtung einen zwey Mahl, und die dritte einen drey Mal größeren Werth hat, als die erste.

Diese Gleichungen geben

$$\begin{array}{rr@{\qquad}rr} c^2 a^2 = & 4 & c^2 a \delta = & 5 \\ & 36 & & 60 \\ & 144 & & 216 \\ \hline \Sigma c^2 a^2 = & 184 & \Sigma c^2 a \delta = & 281 \end{array}$$

also ist

$$X = \frac{\Sigma c^2 a \delta}{\Sigma c^2 a^2} = 1.52717.$$

Mit diesem Werthe von X erhält man

$$\varepsilon = a X - \delta = 3.05434 - 2.5 = 0.5543,$$

und eben so

$$\varepsilon_1 = - 0.4184, \text{ und } \varepsilon^2 = 0.1088, \text{ also ist}$$

$$\begin{array}{rl} c^2 \varepsilon^2 = & 0.30736 \\ & 0.70024 \\ & 0.10653 \\ \hline \Sigma c^2 \varepsilon^2 = & 1.11413 \end{array}$$

Es ist daher

$$P = \frac{N}{2} \cdot \frac{\Sigma c^2 a \varepsilon}{\Sigma c^2 \varepsilon^2} = 247.7263,$$

$$F = \frac{0.47694}{\sqrt{P}} = 0.03030\,,$$

$$G = \sqrt{\Sigma c^2 a^2} = 13.565,$$

$$f = 0.47694 \sqrt{\frac{\Sigma c^2 a^2}{P}} = 0.41104.$$

§. 16. Allein man kann auch den Fall, wo die einzelnen Beobachtungen ungleiche Werthe haben, unmittelbar auf den des §. 13., wo sie alle gleiche Werthe haben, zurückführen, und sonach die Ausdrücke des §. 15. ganz entbehren.

Wenn man nämlich von den gegebenen Bedingungsgleichungen jede durch ihren Werth $c\ c_1\ c_2 \ldots$ multiplicirt, so kann man dann annehmen, daß die so veränderten Gleichungen alle denselben Werth haben, und daher auf sie die Ausdrücke des §. 13. unmittelbar anwenden.

Für das letzte Beyspiel hat man daher folgende Bedingungsgleichungen, die alle denselben Werth haben

$$2\,x - 2.5 = \varepsilon$$
$$6\,x - 10.0 = \varepsilon_1$$
$$12\,x - 18.0 = \varepsilon_2.$$

Behandelt man daher diese so modificirten Gleichungen nach §. 13., so erhält man

$a^2 = 4$	$\delta^2 = 6.25$	$a\delta = 5$
36	100	60
144	324	216
$\Sigma a^2 = 184$	$\Sigma \delta^2 = 430.25$	$\Sigma a\delta = 281$

Es ist daher

$$X = \frac{\Sigma a\,\delta}{\Sigma a^2} = 1.52717,$$

$$\Sigma \varepsilon^2 = \Sigma \delta^2 - \frac{(\Sigma a \delta)^2}{\Sigma a^2} = 430.25 - 429.1358 = 1.1142,$$

$$P = \frac{N}{2} \cdot \frac{\Sigma a^2}{\Sigma \varepsilon^2} = 247.7113,$$

$$F = \frac{0.47694}{\sqrt{P}} = 0.03030,$$

$$G = \sqrt{\Sigma a^2} = 13.565,$$

$$f = 0.47694 \sqrt{\frac{\Sigma a^2}{P}} = 0.41105,$$

welche Werthe mit den vorhergehenden genau übereinstimmen. Endlich sind noch die wahrscheinlichsten Fehler der ersten, zweyten und dritten Beobachtung in derselben Ordnung

$$\frac{f}{c} = 0.411,\ \frac{f}{c_1} = 0.205,\ \frac{f}{c_2} = 0.137.$$

§. 17. Man wird wohl nur selten im Stande seyn, diese Werthe $c\ c_1\ c_2$.. der einzelnen Beobachtungen, auch nur mit einiger Genauigkeit, anzugeben. Wenn man die einzelnen Bedingungsgleichungen, die man alle von gleichem Werthe voraussetzt, in Gruppen theilt, indem man mehrere derselben in eine Summe vereinigt, so kann man, wenn die erste, zweyte und dritte Gruppe aus $n\ n_1\ n_2$.. Beobachtungen entstanden ist, für die auf einander folgenden Bedingungsgleichungen dieser Gruppen die Werthe

$$c = \sqrt{n},\ c_1 = \sqrt{n_1},\ c_2 = \sqrt{n_2} \ldots$$

annehmen, und mit diesen Werthen von $c\ c_1\ c_2$.. wie im §. 16. verfahren.

Wenn man z. B. in dem Exempel des §. 14. die zwey ersten und die drey letzten Bedingungsgleichungen in eine Summe vereinigt, so erhält man zwey neue Bedingungsgleichungen

$2.96\,x - 1.40 = \varepsilon$ mit dem Werthe .. $\sqrt{2}$

$4.43\,x - 2.29 = \varepsilon_1$ „ „ „ .. $\sqrt{3}$,

und man wird daher die Gleichungen

$$2.96\,x\sqrt{2} - 1.40\sqrt{2} = \varepsilon$$
$$4.43\,x\sqrt{3} - 2.29\sqrt{3} = \varepsilon_1$$

nach den Vorschriften des §. 13. behandeln können. Da aber bey diesem Verfahren die Eintheilung in Gruppen willkührlich ist, (indem man z. B. hier auch die drey ersten, und die zwey letzten Gleichungen hätte summiren können u. s. w.), und da überhaupt hier nicht, wie im §. 15. oder 16. in der That geschehen ist, jede einzelne der primitiven Gleichungen, sondern nur willkührliche Gruppen derselben berücksichtigt werden, so wird man durch dieses Verfahren nur überhaupt genäherte Werthe von X, F u. s. w., aber nicht genau dieselben Werthe erhalten können, die man erhält, wenn man jede einzelne der ursprünglichen Bedingungsgleichungen nach der Methode des §. 13. behandelt.

§. 18. Bey diesen Gruppirungen, oder auch bey Beobachtungen mit multiplicirenden Instrumenten, an welchen nicht die Resultate der einzelnen Beobachtungen, sondern nur die Resultate einer bestimmten Anzahl derselben abgelesen werden, pflegt man öfters die folgenden Gruppen mit allen vorhergehenden zu vereinigen, um so die allmählige Annäherung zu einem stehenden Resultate gleichsam dem Auge sichtbar zu machen. Um dieß durch ein Beyspiel zu zeigen, so wurde für die Polhöhe von Mailand durch einen Multiplicationskreis gefunden

aus 10 Beobachtungen	45° 28′ 5.″0	$= a$
aus 15 andern Beobachtungen	4.5	$= a_1$
aus 25 „ „	5.1	$= a_2$
aus 30 „ „	4.8	$= a_3$

Vereinigt man die beyden ersten dieser Beobachtungen, so erhält man

$$\frac{10\,a + 15\,a_1}{25} = 45^\circ\ 28'\ 4.''7$$

als Resultat der 25 ersten Beobachtungen. Eben so geben die drey ersten Beobachtungen

$$\frac{10\,a + 15\,a_1 + 25\,a_2}{50} = 45^\circ\ 28'\ 4.''9$$

als Resultat der 50 ersten Beobachtungen. Endlich gibt die Vereinigung aller Beobachtungen

$$\frac{10\,a + 15\,a_1 + 25\,a_2 + 30\,a_3}{80} = 45^\circ\ 28'\ 4.''8625$$

als Resultat von 80 Beobachtungen. Wir haben daher aus

10 Beobachtungen	45° 28′ 5.″0	$= A$
25 „	4.7	$= A_1$
50 „	4.9	$= A_2$
80 „	4.8	$= A_3$

und diese Werthe von $A\ A_1\ A_2 \ldots$ zeigen die allmählige Annäherung an die zu findende Größe, während im Gegentheile die Werthe von $a\ a_1\ a_2, \ldots$ wieder die Übereinstimmung der partiellen Resultate unter einander darstellen.

Um beyden Zwecken zu genügen, wird man daher aus den Größen $A\ A_1\ A_2 \ldots$, wenn diese gegeben sind, die Größen $a\ a_1\ a_2 \ldots$, und umgekehrt, ableiten.

Sey also überhaupt

a das Resultat aus n Beobachtungen
a_1 „ „ n_1 „
a_2 „ „ n_2 u. s. f., und eben so
A „ „ n
A_1 „ „ $n + n_1$
A_2 „ „ $n + n_1 + n_2$ u. s. f.,

so hat man, wenn die Größen $a\ a_1\ a_2 \ldots$ gegeben sind,

$$A = a$$

$$A_1 = \frac{n a + n_1 a_1}{n + n_1}$$

$$A_2 = \frac{n a + n_1 a_1 + n_2 a_2}{n + n_1 + n_2}$$

$$A_3 = \frac{n a + n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3}{n + n_1 + n_2 + n_3} \text{ u. s. f.,}$$

und wenn die Größen $A\ A_1\ A_2 \ldots$ gegeben sind,

$$a = A$$

$$a_1 = \frac{n}{n_1}(A_1 - A) + A_1$$

$$a_2 = \frac{n + n_1}{n_2}(A_2 - A_1) + A_2$$

$$a_3 = \frac{n + n_1 + n_2}{n_3}(A_3 - A_2) + A_3$$

$$a_4 = \frac{n + n_1 + n_2 + n_3}{n_4}(A_4 - A_3) + A_4 \text{ u. s. f.}$$

In dem vorhergehenden Beyspiele ist
$n = 10$, $n_1 = 15$, $n_2 = 25$, $n_3 = 30$, und
$A = 5.0$, $A_1 = 4.7$, $A_2 = 4.9$, $A_3 = 4.8625$, also ist auch

$$a = 5.0,$$

$$a_1 = \frac{10}{15}(-0{,}3) + 4.7 = 4.5$$

$$a_2 = \frac{25}{25}(0.2) + 4.9 = 5.1$$

$$a_3 = \frac{5}{3}(-0.0375) + 4.8625 = 4.8 \text{ wie zuvor.}$$

Hätte man in einem zweyten Beyspiele aus den

10	ersten	Beobachtungen	erhalten	$45^\circ\ 28'\ 5.''0$	=	A
20	„	„	„	5.55	=	A_1
30	„	„	„	5.30	=	A_2
40	„	„	„	5.275	=	A_3
50	„	„	„	5.160	=	A_4

so ist

$$n = n_1 = n_2 \ldots = 10,$$

und daher

$$a = 45^\circ\ 28'\ 5.''0$$
$$a_1 = 2A_1 - A = 6.1$$
$$a_2 = 3A_2 - 2A_1 = 4.8$$
$$a_3 = 4A_3 - 3A_2 = 5.2$$
$$a_4 = 5A_4 - 4A_3 = 4.7.$$

Drittes Capitel.

§. 19. Wir wollen nun auf eine ähnliche Weise zwey unbekannte, durch mehrere Gleichungen gegebene Größen, zu bestimmen suchen. Um uns auch hier gleich durch ein Beyspiel zu erklären, nehmen wir an, daß die Secundenpendellänge A für die geographische Breite φ durch den Ausdruck gegeben werde

$$A = 439.23 + 2.39 \operatorname{Sin}^2 \varphi$$

in Pariser Linien, in welchen aber die beyden constanten Größen 439.23 und 2.39 noch nicht als ganz genau angesehen werden, und daher einer Verbesserung bedürfen. Seyen diese zu suchenden verbesserten Werthe

$$439.23 + x, \text{ und } 2.39 + y.$$

Hat man nun unter der Breite φ diese Pendellänge durch unmittelbare Beobachtung gleich B gefunden, und nimmt man an, daß auch diese Beobachtung nicht ganz richtig ist, und daß der wahre, noch unbekannte Werth dieses Resultates gleich $B + \varepsilon$ ist, wo also ε den Fehler der Beobachtung bezeichnet, so hat man, da sowohl $B + \varepsilon$, als auch

$$439.23 + x + (2.39 + y) \operatorname{Sin}^2 \varphi$$

den wahren Ausdruck der Pendellänge vorstellt,

$$B + \varepsilon = 439.23 + x + (2.39 + y) \operatorname{Sin}^2 \varphi,$$

und wenn man davon die vorhergehende Gleichung

$$A = 439.23 + 2.39 \operatorname{Sin}^2 \varphi$$

abzieht,

$$B - A + \varepsilon = x + y \operatorname{Sin}^2 \varphi,$$

oder wenn man den Unterschied zwischen dem Resultate B der unmittelbaren Beobachtung, und dem Resultate A der Berechnung nach dem oben aufgestellten Ausdruck, d. h. wenn man $B - A = \delta$ setzt

$$\varepsilon = x + y \operatorname{Sin}^2 \varphi - \delta,$$

welches daher die Bedingungsgleichung dieser Beobachtung ist.

Wir wollen diese Bedingungsgleichung überhaupt durch

$$\varepsilon = a x + b y - \delta$$

darstellen. Eine zweyte Beobachtung gibt eben so

$$\varepsilon_1 = a_1 x + b_1 y - \delta_1,$$

eine dritte

$$\varepsilon_2 = a_2 x + b_2 y - \delta_2 \text{ u. s. w.},$$

und es wird nun darum zu thun seyn, diejenigen Werthe von x und y zu finden, welche allen diesen Bedingungsgleichungen am besten entsprechen.

Diese Werthe von x und y werden aber wieder, wie oben, diejenigen seyn, für welche die Summe der Quadrate der Beobachtungsfehler

$$\varepsilon^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots = \Sigma \varepsilon^2$$

ein Kleinstes ist, oder für welche man hat

$$d . \Sigma \varepsilon^2 = 0.$$

Da aber die Größen x und y im Allgemeinen von einander unabhängig sind, so ist die letzte Gleichung folgenden beyden gleich geltend

$$\left(\frac{d . \Sigma \varepsilon}{dx}\right)^2 = 0, \text{ und } \left(\frac{d . \Sigma \varepsilon}{dy}\right)^2 = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen gibt, da

$$\varepsilon = a x + b y - \delta,$$

also auch

$$\varepsilon^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2 + 2 a b x y - 2 a \delta x - 2 b \delta y + \delta^2 \text{ ist},$$

$$\begin{aligned} & a^2 x + a (b y - \delta) \\ + & a_1^2 x + a_1 (b_1 y - \delta_1) \\ + & a_2^2 x + a_2 (b_2 y - \delta_2) + \ldots \end{aligned}$$

oder

$$x \Sigma a^2 + y \Sigma a b - \Sigma a \delta = 0 \ldots . (I),$$

und eben so gibt die zweyte jener Gleichungen

$$b^2\ y + b\ (a\ x - \delta)$$
$$b_1^2\ y + b_1\ (a_1\ x - \delta_1)$$
$$b_2^2\ y + b_2\ (a_2\ x - \delta_2) + \ldots$$

oder

$$y \Sigma b^2 + x \Sigma a b - \Sigma b \delta = 0 \ldots . (II).$$

Diese beyden Gleichungen (I) und (II) geben also die gesuchten wahrscheinlichsten Werthe von x und y, die wir wieder durch X und Y bezeichnen wollen.

Man erhält nämlich aus diesen beyden Gleichungen durch Elimination für diese wahrscheinlichsten Werthe die Ausdrücke

$$X = \frac{\Sigma b^2 \Sigma a \delta - \Sigma a b \Sigma b \delta}{\Sigma a^2 \Sigma b^2 - (\Sigma a b)^2}, \text{ und}$$

$$Y = \frac{\Sigma a^2 \Sigma b \delta - \Sigma a b \Sigma a \delta}{\Sigma a^2 \Sigma b^2 - (\Sigma a b)^2}.$$

Nennt man der Kürze wegen die Größe

$$\Sigma a^2 \Sigma b^2 - (\Sigma a b)^2 = k,$$

so ist

$$X = \frac{\Sigma b^2 \Sigma a \delta - \Sigma a b \Sigma b \delta}{k}$$

$$Y = \frac{\Sigma a^2 \Sigma b \delta - \Sigma a b \Sigma a \delta}{k}.$$

§. 20. Kennt man aber diese wahrscheinlichsten Werthe X und Y der beyden Größen x und y, so findet man die Gewichte P_x und Q_y dieser Bestimmungen der Resultate von X und Y, so wie die wahrscheinlichsten Fehler F_x und F_y dieser beyden Größen durch folgende, den bereits vorhin gegebenen analoge Ausdrücke

$$P_x = \frac{N}{2} \cdot \frac{k}{\Sigma b^2\ \Sigma \varepsilon^2},$$

$$P_y' = \frac{N}{2} \cdot \frac{k}{\Sigma a^2\ \Sigma \varepsilon^2},$$

wo $\varepsilon = a X + b Y - \delta$, $\varepsilon_1 = a_1 X + b_1 Y - \delta_1 \ldots$ ist, oder wo ε den Werth von $a x + b y \delta$ bezeichnet, wenn man in dem letzten Ausdrucke für x und y ihre im §. 19. gefundenen wahrscheinlichsten Werthe X und Y setzt.

Die wahrscheinlichsten Fehler dieser Bestimmungen der Resultate von X und Y sind

$$\text{für } X \ldots F_x = \frac{0.47694}{\sqrt{Px}},$$

$$\text{für } Y \ldots F_y = \frac{0.47694}{\sqrt{Py}},$$

und eben so sind die mittleren zu befürchtenden Fehler

$$\text{für } X \ldots \Phi_x = \frac{0.28209}{\sqrt{Px}},$$

$$\text{für } Y \ldots \Phi_y = \frac{0.28209}{\sqrt{Py}}.$$

§. 21. Noch ist übrig, die Genauigkeit oder die Präcision Gx und Gy dieses Resultates X und Y, und endlich die wahrscheinlichen Fehler f der einzelnen Beobachtung und die Gränzen dieser Fehler $f + \Delta f$ zu finden.

Zu diesem Zwecke wollen wir die beyden Gleichungen (I) und (II) so ausdrücken

$$\begin{aligned} \xi &= -\Sigma a \delta + x \Sigma a^2 + y \Sigma a b \\ v &= -\Sigma b \delta + y \Sigma b^2 + x \Sigma a b. \end{aligned}$$

Leitet man aus ihnen durch die bekannte Methode der Elimination zwey andere Gleichungen ab, welche die Größen x und y durch ξ und v ausdrücken, und welche die Form haben

$$\left.\begin{aligned} x &= L + A \xi + B v \\ y &= L' + A' \xi + B' v \end{aligned}\right\} \ldots (III),$$

so sind $x = L$ und $y = L'$ die wahrscheinlichsten Werthe dieser Größen, oder es ist

$$X = L \text{ und } Y = L'$$

in Übereinstimmung mit §. 19., weil dann $\xi = v = 0$ gesetzt wird. Die Genauigkeit dieser Bestimmung von X und Y aber ist, wenn man die Genauigkeit der einzelnen Beobachtungen zur Einheit annimmt,

$$\text{für } X \ldots G_x = \frac{1}{\sqrt{A}},$$

$$\text{für } Y \ldots G_y = \frac{1}{\sqrt{B}}.$$

Endlich ist, wie §. 9., der wahrscheinliche Fehler f jeder einzelnen Beobachtung

$$f = F_x \cdot G_x = F_y \cdot G_y.$$

Um auch diese Ausdrücke auf ein Beyspiel anzuwenden, seyen die drey folgenden Bedingungsgleichungen gegeben

$$\varepsilon = x + y - 3$$
$$\varepsilon_1 = x - 2y + 4$$
$$\varepsilon_2 = 3x - y - 2,$$

so hat man

$$\Sigma a^2 = 11, \; \Sigma b^2 = 6, \; \Sigma ab = -4$$
$$\Sigma b\delta = 9, \; \Sigma a\delta = 5, \; k = 50,$$

und daher die wahrscheinlichsten Werthe der beyden Größen

$$X = \frac{33}{25} = 1.32000,$$

$$Y = \frac{119}{50} = 2.38000.$$

Mit diesen Werthen erhält man

$$\varepsilon = X + Y - 3 = 0.70,$$

und eben so

$$\varepsilon_1 = 0.56, \; \varepsilon_2 = -0.42,$$

also auch

$$\Sigma \varepsilon^2 = 0.9800,$$

und daher für die beyden gefundenen Bestimmungen von X und Y die Gewichte

$$P_x = \frac{3}{2} \cdot \frac{50}{5.88} = 12.7551,$$

$$P_y = \frac{3}{2} \cdot \frac{50}{10.78} = 6.95733.$$

Die wahrscheinlichsten Fehler

$$F_x = 0.133542$$

$$F_y = 0.180817.$$

Die mittleren zu befürchtenden Fehler

$$\Phi_x = 0.07898$$

$$\Phi_y = 0.10695.$$

Weiter geben die beyden Gleichungen (I) und (II)

$$\xi = 11\,x - 4\,y - 5$$

$$v = 6\,y - 4\,x - 9,$$

woraus man durch Elimination erhält

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{33}{25} + \frac{3}{25}\,\xi + \frac{2}{25}\,v \\ y &= \frac{119}{50} + \frac{4}{50}\,\xi + \frac{11}{50}\,v \end{aligned}\right\}\ldots\text{III},$$

woraus sofort die wahrscheinlichsten Werthe der Größen x und y folgen

$$X = \frac{33}{25}, \text{ und } Y = \frac{119}{50}$$

wie zuvor, und die Genauigkeit dieser beyden Resultate

$$G_x = \sqrt{\frac{25}{3}} = 2.88675$$

$$G_y = \sqrt{\frac{50}{11}} = 2.13201.$$

Endlich ist der Fehler jeder einzelnen Beobachtung

$$f = F_x\,G_x = F_y\,G_y = 0.38550.$$

Man sieht, daß in diesem Beyspiele die Größe X genauer bestimmt ist, als Y, und zwar in dem Verhältniß von

$$\frac{2.88675}{2.13201} = \frac{1.354}{1}.$$

Nach der Tafel des §. 6. findet man für diese Bestimmung der Größe X folgende Gränzen

$$r = 1 \text{ gibt } \Delta\varphi = \frac{r}{\sqrt{P_x}} = \frac{1}{\sqrt{12.7551}} = 0.2800,$$

also kann man $\frac{w}{1-w} = 5.357$ gegen 1 wetten, daß der Fehler von X nicht größer als 0.28 ist.

Für $r = 2.32767$ ist

$$\Delta\varphi = \frac{r}{\sqrt{P_x}} = \frac{2.32767}{\sqrt{12.7551}} = 0.672,$$

also kann man $\frac{w}{1-w} = 1000$ gegen 1 wetten, daß der Fehler von X nicht größer als 0.67 ist.

Für die Größe Y, die weniger genau bestimmt ist, sind für dieselben Wahrscheinlichkeiten diese Grenzen der Fehler größer. So ist für

$$r = 1 \,..\, \Delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{P_y}} = \frac{1}{\sqrt{6.9573}} = 0.379, \text{ und}$$

$$\frac{w}{1-w} = 5.357, \text{ und für}$$

$$r = 2.32767, \; \Delta\varphi = \frac{r}{\sqrt{P_y}} = 0.8825, \text{ und}$$

$$\frac{w}{1-w} = 1000,$$

oder man kann 1000 gegen 1 wetten, daß der Fehler von Y kleiner als 0.8825 ist, während dasselbe Verhältniß bey X schon für den kleinen Fehler 0.672 Statt hat.

§. 21. Man kann aber auch die Einführung der Größen $\mathfrak{E}$ und v, oder die Entwickelung der Gleichungen (III) ganz umgehen, und die Auflösung auf folgende einfache Ausdrücke zurückführen. Ist

$$k = \Sigma a^2 \,.\, \Sigma b^2 - (\Sigma a b)^2$$

so sind die wahrscheinlichsten Werthe von x und y, wie zuvor

$$X = \frac{\Sigma b^2 \Sigma a \delta - \Sigma a \delta \Sigma b \delta}{k},$$

$$Y = \frac{\Sigma a^2 \Sigma b \delta - \Sigma a b \Sigma a \delta}{k}.$$

Und von diesen Resultaten sind die Gewichte

$$P_x = \frac{Nk}{2\Sigma b^2 \Sigma \varepsilon^2}, \quad P_y = \frac{Nk}{2\Sigma a^2 \Sigma \varepsilon^2},$$

wo $\varepsilon = aX + bY - \delta$, $\varepsilon_1 = a_1 X + b_1 Y - \delta_1$ u. s. f. ist.

Ferner sind die mittleren zu befürchtenden Fehler dieser Resultate

$$\Phi_x = \frac{0.28209}{\sqrt{P_x}}, \quad \Phi_y = \frac{0.28209}{\sqrt{P_y}},$$

und die wahrscheinlichsten Fehler derselben

$$F_x = \frac{0.47694}{\sqrt{P_x}}, \quad F_y = \frac{0.47694}{\sqrt{P_y}}.$$

Die Genauigkeit der Bestimmung dieser Resultate ist

$$G_x = \sqrt{\frac{k}{\Sigma b^2}}; \quad G_y = \sqrt{\frac{k}{\Sigma a^2}},$$

und endlich der Fehler jeder einzelnen Beobachtung

$$f = 0.47694 \sqrt{\frac{2\Sigma \varepsilon^2}{N}}.$$

In unserem Beyspiele ist in derselben Ordnung

$$k = 50, \quad X = \frac{33}{25}, \quad Y = \frac{119}{50},$$

$$\begin{aligned} P_x &= 12.75510 & P_y &= 6.95733 \\ \Phi_x &= 0.07898 & \Phi_y &= 0.10695 \\ F_x &= 0.13354 & F_y &= 0.18082 \\ G_x &= 2.88675 & G_y &= 2.13201 \end{aligned}$$

$$f = 0.38550.$$

I. Zwischen den Größen F und G hat man überhaupt folgende Ausdrücke

$$G_x = \sqrt{\frac{k}{\Sigma b^2}} = \sqrt{\frac{2P_x . \Sigma \varepsilon^2}{N}},$$

$$G_y = \sqrt{\frac{k}{\Sigma a^2}} = \sqrt{\frac{2P_y . \Sigma \varepsilon^2}{N}},$$

$$F_x = \frac{f}{G_x} = 0.47694 \sqrt{\frac{2\Sigma \varepsilon^2 \Sigma b^2}{Nk}},$$

$$F_y = \frac{f}{G_y} = 0.47694 \sqrt{\frac{2\Sigma \varepsilon^2 \Sigma a^2}{Nk}}.$$

II. Sind die einzelnen Beobachtungen von ungleicher Güte, und ist z. B. $c\, c_1\, c_2 \ldots$ der Werth der ersten, zweyten und dritten Beobachtung, so wird man, wie im §. 16., die gegebenen Bedingungsgleichungen, außer dem ε, durch die Größen $c\, c_1\, c_2 \ldots$ multipliciren, und dann mit ihnen, wie zuvor, verfahren.

Viertes Capitel.

§. 22. Nehmen wir nun an, daß man durch eine Reihe von Beobachtungen drey unbekannte Größen x y z so bestimmen soll, daß sie diesen Beobachtungen am besten entsprechen. Hier werden also die Bedingungsgleichungen folgende Form haben

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= a\,x + b\,y + c\,z - \delta \\
\varepsilon_1 &= a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z - \delta_1 \\
\varepsilon_2 &= a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z - \delta_2 \\
\varepsilon_3 &= a_3\,x + b_3\,y + c_3\,z - \delta_3 \text{ u. s. w.}
\end{aligned}$$

Sucht man daraus wieder diejenigen Gleichungen, welche die Summe der Quadrate der Fehler, oder welche die Größe

$$\varepsilon^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots = \Sigma\,\varepsilon^2$$

zu einem Minimum machen, oder welche den Ausdrücken

$$\left(\frac{d.\Sigma\varepsilon}{dx}\right) = 0,\ \left(\frac{d.\Sigma\varepsilon}{dy}\right) = 0,\ \left(\frac{d.\Sigma\varepsilon}{dz}\right) = 0$$

entsprechen, so hat man

$$\left.\begin{aligned}
0 &= X\Sigma a^2 + Y\Sigma ab + Z\Sigma ac - \Sigma a\delta \\
0 &= X\Sigma ab + Y\Sigma b^2 + Z\Sigma bc - \Sigma b\delta \\
0 &= X\Sigma ac + Y\Sigma bc + Z\Sigma c^2 - \Sigma c\delta
\end{aligned}\right\}\ldots(\mathrm{I}),$$

und die Werthe von X, Y und Z, welche man aus diesen drey Gleichungen (I) durch Elimination findet, werden die gesuchten wahrscheinlichsten Werthe von x y z seyn.

Setzt man dann

$$k = \Sigma a^2 . \Sigma b^2 . \Sigma c^2 - \Sigma a^2 . (\Sigma b c)^2 - \Sigma b2(b^2) . (\Sigma a c)^2$$
$$- \Sigma c^2 . (\Sigma a b)^2 + 2 \Sigma a b . \Sigma a c . \Sigma b c,$$

so sind die Gewichte dieser drey Bestimmungen von

$$X \ldots P_x = \frac{N}{2 \Sigma \varepsilon^2} \cdot \frac{k}{\Sigma b^2 . \Sigma c^2 - (\Sigma b c)^2},$$

$$Y \ldots P_y = \frac{N}{2 \Sigma \varepsilon^2} \cdot \frac{k}{\Sigma a^2 . \Sigma c^2 - (\Sigma a c)^2},$$

$$Z \ldots P_z = \frac{N}{2 \Sigma \varepsilon^2} \cdot \frac{k}{\Sigma a^2 . \Sigma b^2 - (\Sigma a b)^2}.$$

Ist so P bekannt, so hat man für die mittleren zu befürchtenden Fehler

$$\Phi_x = \frac{0.28209}{\sqrt{P_x}}, \quad \Phi_y = \frac{0.28209}{\sqrt{P_y}}, \quad \Phi_z = \frac{0.28209}{\sqrt{P_z}},$$

für die wahrscheinlichsten Fehler

$$F_x = \frac{0.47694}{\sqrt{P_x}}, \quad F_y = \frac{0.47694}{\sqrt{P_y}}, \quad F_z = \frac{0.47694}{\sqrt{P_z}},$$

für die Genauigkeit dieser drey Resultate X, Y und Z ist

$$G_x = \sqrt{\frac{2 P_x . \Sigma \varepsilon^2}{N}}, \quad G_y = \sqrt{\frac{2 P_y . \Sigma \varepsilon^2}{N}},$$

$$G_z = \sqrt{\frac{2 P_z . \Sigma \varepsilon^2}{N}},$$

und endlich ist der wahrscheinlichste Fehler jeder einzelnen Beobachtung

$$f = 0.47694 \sqrt{\frac{2 \Sigma \varepsilon^2}{N}}.$$

Sind die einzelnen Beobachtungen von ungleichem Werth $c\ c_1\ c_2 \ldots$, so multiplicirt man sie durch diese Werthe, und verfährt dann wie zuvor.

Exempel. Seyen die Gleichungen gegeben

$\varepsilon = x + y - 2z - 1 \ldots$ mit dem Werthe $c = 1$
$\varepsilon_1 = \frac{1}{3}x - y + \frac{1}{3}z - 1 \ldots$ „ „ „ $c_1 = 3$
$\varepsilon_2 = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y - \frac{1}{2}z - \frac{1}{3} \ldots$ „ „ „ $c_2 = 6$
$\varepsilon_3 = \frac{1}{12}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{12}z - \frac{1}{4} \ldots$ „ „ „ $c_3 = 12$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Ordnung durch c, c_1, c_2 und c_3, so erhält man die reducirten Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= x + y - 2z - 1 \\ \varepsilon_1 &= x - 3y + z - 3 \\ \varepsilon_2 &= 2x + y - 3z - 2 \\ \varepsilon_3 &= x - 4y + z - 3 \end{aligned}\right\}\ldots\ldots(A).$$

Diese Gleichungen geben

$$\begin{array}{lll} \Sigma a^2 = 7 & \Sigma ab = -4 & \Sigma a\delta = +11 \\ \Sigma b^2 = 27 & \Sigma ac = -6 & \Sigma b\delta = -18 \\ \Sigma c^2 = 15 & \Sigma bc = -12 & \Sigma c\delta = -2 \end{array}$$

und daher sind die Gleichungen (I)

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 7\,X - 4\,Y - 6\,Z - 11 \\ 0 &= 4\,X - 27\,Y + 12\,Z - 18 \\ 0 &= 6\,X + 12\,Y - 15\,Z - 2 \end{aligned}\right\}$$

woraus man durch Elimination die wahrscheinlichsten Werthe $X\,Y\,Z$ der Größen $x\,y\,z$ erhält

$$X = +1.9231, \quad Y = -0.1538, \quad Z = +0.5128.$$

Substituirt man diese Werthe von $X\,Y\,Z$ in den Gleichungen (A), so erhält man

$$\varepsilon = -0.2563, \quad \varepsilon_1 = -0.1027,$$
$$\varepsilon_2 = +0.1540, \quad \varepsilon_3 = +0.0511.$$

Also ist $\Sigma\varepsilon^2 = 0.1025$ und $k = 39$, so wie $N = 4$. Damit erhält man die Gewichte;

$$P_x = 2.9136, \quad P_y = 11.0211, \quad P_z = 4.3957.$$

Die mittleren zu befürchtenden Fehler

$$\Phi_x = 0.1652, \quad \Phi_y = 0.0850, \quad \Phi_z = 0.1345.$$

Die wahrscheinlichsten Fehler dieser drey Resultate

$$F_x = 0.2794, \quad F_y = 0.1437, \quad F_z = 0.2275,$$

und die Genauigkeit dieser Resultate

$$G_x = 0.3865, \quad G_y = 0.7518, \quad G_z = 0.4748.$$

Endlich ist der wahrscheinlichste Fehler jeder einzelnen Beobachtung

$$f = 0.47694 \sqrt{\frac{2\Sigma\varepsilon^2}{N}} = 0.1080,$$

und daher der wahrscheinlichste Fehler der

$$1.\ \text{Beobachtung}\ \frac{f}{c} = 0.108,$$

$$2.\ \text{"}\ \frac{f}{c_1} = 0.036,$$

$$3.\ \text{"}\ \frac{f}{c_2} = 0.018,$$

$$4.\ \text{"}\ \frac{f}{c_3} = 0.009.$$

Man sieht aus diesen Ausdrücken, daß von den drey Größen der Werth von Y am genauesten, und der von X am wenigsten genau, und daß Y nahe noch einmal so genau, als X bestimmt ist. Auch kann man, nach §. 6., 1000 gegen 1 wetten, daß der Fehler von

X nicht größer als $\pm$ 1.36
Y „ „ „ $\pm$ 0.70
Z „ „ „ $\pm$ 1.11 ist.

In der
F. Beck'schen Univers. Buchhandlung
in Wien, Seitzergasse Nr. 427, im Seitzerhofe, dem Kriegsgebäude gegenüber, ist erschienen:

Vergleichung
der vorzüglichsten
Maße, Gewichte und Münzen
mit den
im österreichischen Kaiserstaate Gebräuchlichen.

Von
J. J. Littrow,
Director der k. k. Sternwarte in Wien, Ritter des kaiserlich russischen St. Annen-Ordens zweyter Classe, Mitglied mehrerer gelehrten Gesellschaften.

gr. 8. 1832. geh. 1 fl. C. M.

Dieses Werk erfüllt den schon so oft geäußerten Wunsch nach einem einfachen und bequemen Mittel, die verschiedenen Maße, Gewichte und Münzen anderer Länder mit den in Österreich Gebräuchlichen zu vergleichen. Die Anordnung desselben ist so getroffen, daß es für alle Classen von Lesern gleich brauchbar ist, und daß das Gesuchte in jedem Falle leicht, und gleichsam auf den ersten Blick, gefunden werden kann. Der reiche Inhalt auf nur wenigen Blättern, die Genauigkeit der Angaben, der sehr geringe Preis, und endlich der bekannte Name des Herrn Verfassers wird aller weiteren Empfehlung des Werkes überheben.

Ferner von demselben Verfasser:
Über
Lebensversicherungen
und
andere Versorgungs-Anstalten.
gr. 8. 1832. geb. 1 fl. C. M.

Die nähere Kenntniß dieser wichtigen Anstalten ist Jedem nothwendig, der das Wohl des Ganzen und das seiner Familie zu beachten gewohnt ist. Das gegenwärtige Werk enthält eine vollständige Anleitung zur Kenntniß aller Arten Versorgungsanstalten, die bisher besonders in England, mit so glücklichem Fortgange bestehen, und von welchen die meisten bey uns noch unbekannt sind. Die erste Abtheilung desselben verbreitet sich über die wesentlichsten Theile dieses Gegenstandes in einem populären, Jedermann verständlichen Vortrage; die zweyte beschäftigt sich mit der eigentlichen Basis, oder mit der Berechnung desselben. Dem Ganzen sind viele Tafeln beygefügt, welche auch ohne Kenntniß jener Berechnung, bey der Errichtung und Prüfung solcher Anstalten leicht, und mit Nutzen gebraucht werden können.

Kalender für alle Stände.

1833.

Preis: geheftet 24 kr.; geheftet und durchschossen 28 kr.; cartonnirt 32 kr. C. M.

Dieser bisher so allgemein gut aufgenommene Kalender hat sich für dieses Jahr durch wesentliche und sehr zweckmäßige Änderungen sowohl, als auch durch interessante Zusätze, mit denen er durch den regen Geist des bekannten Herrn Herausgebers ausgeschmückt wurde, eines erneuerten Beyfalles versichert. Unter jenen wollen wir hier nur anführen, daß jetzt jedem Monathe fünf Seiten, statt den früheren vier, gewidmet sind, die ersten zwey Seiten jedes Monaths nämlich haben ganz die Gestalt, die sie in dem letzten Jahrgange hatten, beybehalten, die dritte Seite hingegen gibt jetzt bloß die Ephemeriden der Sonne und des Mondes, während sie früher auch die der Planeten enthielt, in einem etwas ausgedehnteren Umfange, indem von der Sonne nebst Auf- und Untergang, auch Länge und Abweichung, und vom Monde die Zeit seiner Culmination, und seine Abweichung angegeben sind; die vierte Seite jedes Monaths aber enthält lediglich die Ephemeriden der Planeten Merkur, Venus, Mars, Jupiter, Saturn und Uranus, und zwar findet man von jedem derselben die Tageszeit seiner Sichtbarkeit, seine Länge, Abweichung, Zeit der Culmination, des Auf- und Unterganges angezeigt; die fünfte und letzte Seite jedes Monaths endlich ist wie früher dem Tagebuche der Erscheinungen gewidmet.

Unter den neuen Zusätzen ist vorzüglich eine Chronik der epidemischen Krankheiten vom Jahre 1700 vor Christo bis auf unsere Zeit würdig, der allgemeinen Aufmerksamkeit empfohlen zu werden, da sie bey den leider damit nur zu verwandten gegenwärtigen Zeitverhältnissen, durch das Erinnern an so viel gräßlichere Plagen des Menschengeschlechts zu einer wahren Quelle des Trostes und der Beruhigung wird. Endlich erwähnen wir hier noch ein sehr fleißig gearbeitetes Verzeichniß aller durch meteorologische Erscheinungen ausgezeichneten Jahre von 476 vor Christo bis 999 nach Christo, dessen für das nächste Jahr versprochene Fortsetzung wir mit Ungeduld erwarten, und einen gewiß recht vielen lebenslustigen Wienern willkommenen Anzeiger aller Wienergesellschaftswagen sammt der Stunde ihrer Ankunft und Abfahrt.

so ge bestehen, und von
w Die erste Abtheilung
de Theile dieses Gegen=
sta lichen Vortrage; die
zw oder mit der Berech=
nu n beygefügt, welche
au Errichtung und Prü=
fu aucht werden können.

Stände.

P chschossen 28 kr.;

K Kalender hat sich für
die ßige Änderungen so=
wo nen er durch den re=
ge usgeschmückt wurde,
ein wollen wir hier nur
an , statt den früheren
vie Monaths nämlich ha=
be gange hatten, beybe=
hal oß die Ephemeriden
der auch die der Plane=
ten ange, indem von der
Sc nd Abweichung, und
vo eine Abweichung an=
ge ber enthält lediglich
die s, Mars, Jupiter,
Sa jedem derselben die
Ta chung, Zeit der Cul=
mi die fünfte und letzte
Se Tagebuche der Er=
sche

sche Chronik der epidemi=
wü bis auf unsere Zeit
bey en zu werden, da sie
niss wärtigen Zeitverhält=
sche e Plagen des Men=
gun es und der Beruhi=
tete sehr fleißig gearbei=
net einungen ausgezeich=
näd risto, dessen für das
und Ungeduld erwarten,
Anz nern willkommenen
kun r Stunde ihrer An=