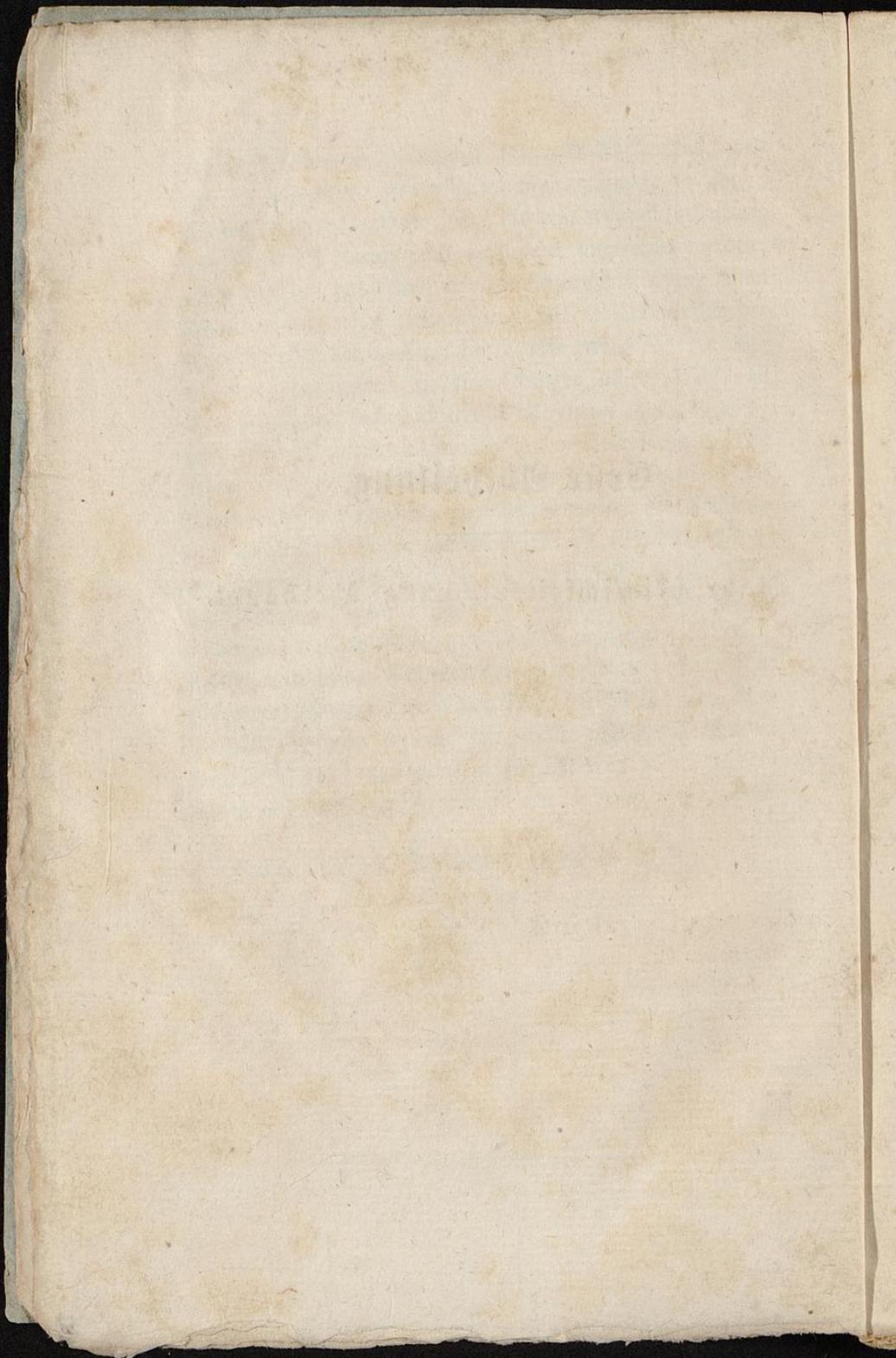


Erste Abtheilung.

---

Wahrscheinlichkeitsrechnung überhaupt.



---

Die wichtigsten Fragen, die unsere geselligen Verhältnisse, unser Leben und uns selbst betreffen, lassen sich beynahe alle auf Probleme der Wahrscheinlichkeit zurückführen. Die meisten der menschlichen Erkenntnisse sind nur Wahrscheinlichkeiten, und selbst in denjenigen, die uns Gewißheit gewähren, in den mathematischen Wissenschaften, sind die vorzüglichsten Mittel, zu dieser Gewißheit zu gelangen, Analogie und Induction, die sich beyde wieder auf Wahrscheinlichkeit gründen. Wer endlich in den ewigen und unveränderlichen Principien der Vernunft, der Gerechtigkeit und der Humanität, selbst ohne ihren tieferen Grund zu kennen, auch nur die Glücksfälle aufmerksam betrachtet, welche sie am beständigsten begleiten, wird sich von den Vortheilen, ihnen zu folgen, so wie von der Wahrscheinlichkeit der Nachteile, die ihre Vernachlässigung beynahe immer nach sich zu ziehen pflegt, bald überzeugen.

Alle Ereignisse, selbst diejenigen, die durch ihre Geringsfügigkeit uns ganz zufällig und von den großen Gesetzen der Natur völlig unabhängig erscheinen, sind doch ohne Zweifel eine eben so nothwendige Folge derselben ewigen Gesetze, als es die Bewegung der Sonne und aller Körper des Himmels nur immer seyn kann. Nur unsere Unkenntniß des Zusammenhanges dieser Erscheinungen mit jenen Gesetzen des Weltalls läßt uns die einen derselben von bestimmten Endursachen, die andern aber von dem blinden Zufalle abhängig machen, je nachdem sie in einer bestimmten und sichtbaren Aufeinanderfolge, oder aber ohne irgend eine uns bemerkbare Ordnung vor sich zu gehen scheinen. Die erwähnten, übrigens oft nur eingebildeten Endursachen werden allmählig, wie sich die Gränzen unserer Kenntnisse erweitern, immer mehr und mehr zurückgerückt und sie verschwinden nur

zu oft gänzlich vor dem klaren Blicke des Verstandes, der in den meisten dieser Endursachen nur den Ausdruck der gänzlichen Unkenntniß erblickt, die uns die wahren Ursachen jener Erscheinungen vielleicht für immer zu verbergen droht.

Jedes gegenwärtige Ereigniß muß mit einem ihm vorhergegangenen in irgend einer Verbindung stehen, da Nichts bestehen kann, ohne einen Grund seines Bestehens zu haben. Selbst unsere scheinbar gleichgültigsten Handlungen unterliegen ohne Zweifel demselben Gesetze. Der allerfreieste Wille wird, wenn gar kein Motiv ihn bestimmt, auch keine Handlung hervorbringen können. Denn wenn alle Umstände zweyer verschiedener Verhältnisse sich durchaus gleich sind und der Wille doch unter dem einen zur Handlung übergeht und unter dem andern unthätig bleibt, so gäbe es eine Wirkung ohne Ursache, die wir wenigstens uns nicht denken können. Das Gegentheil von dieser Annahme ist offenbar nur die Folge einer Selbsttäuschung, welche die oft sehr flüchtigen, aber doch die Wahl bestimmenden Gründe, überseht und sich überreden will, ohne Gründe und vollkommen frey gewählt zu haben.

Der gegenwärtige Zustand des Universums ist also in allen seinen, auch den scheinbar geringfügigsten Theilen, nur die Folge eines vorhergegangenen, so wie zugleich die Ursache eines künftigen Zustandes desselben. Ein Geist, der alle Kräfte kennt, von denen die Natur belebt wird, und der den gegenwärtigen Zustand aller Wesen, die sie enthält, überseht, wird vielleicht in einem einzigen Ausdrücke der Analyse alle vergangenen und alle künftigen Erscheinungen der Natur zu umfassen im Stande seyn und die Bewegungen der großen himmlischen Körper nicht minder, als die der Wassertropfen, welche unsere Meere bilden, oder als die der kleinsten Sonnenstäubchen übersehen, welche unsere Atmosphäre erfüllen: für einen solchen Geist wäre nichts unbekannt und nichts wahrscheinlich: nur die Wahrheit selbst würde für ihn da seyn, und die Vergangenheit, wie die Zukunft, würde offen und klar vor seinen Augen liegen.

Nur in einer einzigen Wissenschaft ist es bisher dem menschlichen Geiste gelungen, uns ein, obgleich auch hier nur ein sehr schwaches Bild jener hohen Erkenntniß darzustellen. Die Astro-

nomie hat, mit Hülfе der Mechanik und der Geometrie, den gegenwärtigen und künftigen Zustand der Körper unsers Planetensystems, wenigstens in seinen großen Zügen, in einem einzigen Ausdrucke dargestellt und uns dadurch in den Stand gesetzt, auf Ereignisse in denselben zurückzugehen, die einer, in jeder andern Beziehung uns gänzlich unbekanntem Periode der Menschengeschichte angehören, und wieder andere vorauszusagen, welche erst in der spätesten Folgezeit durch die Beobachtungen unserer Nachkommen ihre unbezweifelte Bestätigung erhalten werden. In allen unsern Bemühungen nach Wahrheit und nach der Erkenntniß derselben bemerken wir dieselbe Tendenz, jenem höheren Ziele nachzukommen, wenn wir gleich immer unendlich weit von ihm entfernt bleiben werden. Diese Tendenz ist es, die den menschlichen Geist auszeichnet und ihn von dem der Thiere unterscheidet: sein Fortgang in dieser Beziehung gibt den Jahrhunderten unserer Weltgeschichte und den verschiedenen Völkern, welche die Oberfläche der Erde bewohnen, ihr eigenthümliches Gepräge und den Antheil, den jedes von ihnen an der Vervollkommnung des ganzen Geschlechtes und dadurch an wahrem Ruhme anzusprechen hat.

Es ist noch nicht lange her, daß jedes ungewöhnlich trockene oder nasse Jahr, daß jede Finsterniß, jedes Nordlicht, jeder Komet, daß überhaupt eine jede ungewöhnliche Erscheinung der Natur als ein unmittelbares Zeichen des göttlichen Zorns betrachtet worden ist. Man flehte zitternd zu dem Himmel, die gedrohte Strafe abzuwenden. Warum aber hat man ihn nicht auch, den Lauf der Sonne und der Planeten zu ändern? — Die Ursache der letzteren war bekannt und Beobachtungen hatten bereits das Unnütze solcher Bitten gezeigt. Aber von jenen ersten Erscheinungen, die sich nicht so regelmäßig folgten, die nur selten wiederkamen, und deren Gründe man nicht so leicht einsehen konnte, von ihnen glaubte jeder, was ihm gut dünkte oder was seine erschreckte Einbildungskraft ihn zu glauben antrieb. So verbreitete der große Komet des Jahres 1456 Entsetzen über ganz Europa, das ohnehin durch eine verheerende Pest und durch die Fortschritte geängstiget war, welche vor Kurzem die Türken ge-

macht hatten, die das orientalische Kaiserthum zerstörten und sich nun wie ein unaufhaltbarer Strom über die Nachbarländer zu ergießen drohten. Aber wie ganz anders wurde die Erscheinung desselben Kometen zwey Jahrhunderte später aufgenommen. Newton hatte uns seitdem die Geseze des Weltsystems bekannt gemacht und diese Kenntniß zerstreute schnell den eiteln Schrecken, den nur die Unwissenheit erzeugt hatte. Halley, der jenen Kometen i. J. 1682 beobachtet hatte, erkannte seine Identität mit den Kometen von 1607, 1531 und 1456 und wagte es sogar, seine nächste Wiederkunft auf das Jahr 1759, vorauszusagen. Clairaut berechnete späterhin die Störungen, welche dieser Komet von den beyden größten Planeten unsers Sonnensystems, von Jupiter und Saturn, erleiden mußte und bestimmte seinen nächsten Durchgang durch die Sonnennähe auf den Anfang des April d. J. 1759, eine Bestimmung, welche durch die Beobachtungen vollkommen bestätigt worden ist. Sein nächster Durchgang durch sein Perihelium wird in die Mitte Novembers des Jahres 1835 fallen.

Dieselbe Regelmäßigkeit aber, die wir in der Bewegung der Kometen kennen gelernt haben, wird ohne Zweifel auch bey allen übrigen Phänomenen der Natur statt haben, wenn sie uns gleich, so lange wir ihre Geseze noch nicht kennen, ganz zufällig und unregelmäßig erscheinen. Die krummen Linien, welche die kleinsten Staubbörnchen oder diejenigen, welche die Elemente der Luftarten und der Dünste beschreiben, sind gewiß eben so geordnet, und eben so bestimmten und unveränderlichen Gesezen unterworfen, als die Bahnen, welche von jenen großen Körpern des Himmels in dem Weltenraume beschrieben werden, und der Unterschied, der zwischen beyden für uns noch statt hat, liegt nicht in ihnen, sondern einzig nur in uns selbst, in unserer Beschränktheit, in unserer eigenen Unwissenheit.

---

Was wir daher Wahrscheinlichkeit nennen, hängt zum Theile von dieser Unwissenheit, zum Theile aber auch von unserer, wenn gleich nur genäherten Kenntniß der Naturgeseze ab. Die nähere Bestimmung derselben oder das Maß der Wahrscheinlich-

keit, daß irgend ein Ereigniß eintreten werde, wird offenbar das Verhältniß der Summe der Fälle, welche diesem Eintreten günstig sind, zu der Summe aller möglichen Fälle seyn, vorausgesetzt, daß diese letzten alle gleich möglich sind. Die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Ereignisses wird also im Allgemeinen in der Form eines eigentlichen Bruches dargestellt werden, dessen Zähler die Summe aller günstigen, und dessen Nenner die Summe aller möglichen Fälle enthält. Dieser Bruch nähert sich der Einheit desto mehr, je größer die Anzahl der günstigen Fälle gegen die Anzahl aller möglichen Fälle ist, und nur dann, wenn unter allen möglichen Fällen gar kein ungünstiger ist d. h. wenn alle Fälle günstig sind, wird dieser Bruch zur Einheit und die Wahrscheinlichkeit zur Gewißheit, so daß also die Einheit gleichsam das Symbol der Gewißheit ist, welcher sich die Wahrscheinlichkeit immer mehr nähert, je größer die Anzahl der günstigen Fälle zu der Anzahl aller möglichen Fälle ist. Man nennt diese die absolute Wahrscheinlichkeit. (Man sehe Anmerkung I. am Ende dieser ersten Abtheilung.)

Von ihr unterscheidet sich die relative Wahrscheinlichkeit, wo von allen möglichen Fällen durch die Natur der Aufgabe einige ausgeschlossen sind. Nennt man  $w$  und  $w'$  die absoluten Wahrscheinlichkeiten zweyer Ereignisse, so ist die relative Wahrscheinlichkeit, daß das erste dieser Ereignisse eintrete, gleich  $w$  dividirt durch die Summen der beyden absoluten Wahrscheinlichkeiten  $w + w'$  (II).

Diese beyden Gattungen von Wahrscheinlichkeiten beziehen sich nur auf einzelne Fälle und sie heißen daher einfache Wahrscheinlichkeiten, während alle folgenden, die mehrere dieser Fälle umfassen, zusammengesetzte Wahrscheinlichkeiten genannt werden. Sind nämlich von  $N$  möglichen Fällen die absoluten Wahrscheinlichkeiten  $w, w', w'', \dots$  so ist die  $W$ , daß irgend einer dieser Fälle eintreffe, gleich der Summe  $w + w' + w'' + \dots$  (III).

Ist ferner  $w$  die absolute Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß dasselbe in  $m$  mal nach einander wiederholten Versuchen immer eintreffe, gleich  $w^m$  (IV).

Endlich ist die Wahrscheinlichkeit, daß mehrere Ereignisse,

deren absolute Wahrscheinlichkeiten  $w, w', w'' \dots$  sind, zugleich eintreffen, gleich  $w \cdot w' \cdot w'' \dots$  (V).

Auf diese fünf Classen lassen sich beynabe alle Aufgaben zurückführen, welche man in der Wahrscheinlichkeitsrechnung gegeben hat. Aber es wird zuweilen ein besonderer Scharfsinn erfordert, diese Classen zu unterscheiden und die Nebenbedingungen dieser Aufgaben gehörig zu erfüllen. Eine unmittelbare Folge derselben ist die Lehre von den wechselseitigen Ereignissen, wo man die Wahrscheinlichkeiten sucht, die ein Ereigniß für den Fall hat, daß ein anderes ebenfalls eingetreten oder daß das letzte nicht eingetreten ist (VI). Diese letzten Betrachtungen führen unmittelbar auf diejenigen Wahrscheinlichkeiten, welche den Berechnungen unserer Wittwen- und Waiseninstitute zu Grunde liegen. Eine andere Anwendung der vorhergehenden Grundsätze bezieht sich auf die Einrichtung unserer Lotterien, deren Vor- und Nachteile näher zu kennen vielleicht für viele nicht ohne Nutzen seyn wird (VII Bogen F). In den Anmerkungen sind alle diese Gattungen von Wahrscheinlichkeiten näher angeführt und zur größeren Deutlichkeit mit Beyspielen versehen worden.

---

Die bisher angeführten Wahrscheinlichkeiten setzen voraus, daß die Anzahl der möglichen Fälle bekannt und eine endliche Größe sey. Allein es gibt noch andere Ereignisse, für welche diese Anzahl der möglichen Fälle entweder unbekannt oder auch unendlich groß ist, und die Wahrscheinlichkeit des Eintretens solcher Ereignisse zu bestimmen, erfordert ganz eigene Betrachtungen. Wir werden sie in der zweyten Abtheilung dieses Werkes, wenigstens in Beziehung auf ihre Anwendung näher kennen lernen. Hieher gehören vorzüglich die Wahrscheinlichkeiten, welche sich auf Beobachtungen oder auf wiederholte Experimente beziehen. Wenn man nämlich den Werth einer oder mehrerer Größen, die man schon aus früheren Versuchen beynabe kennt, genauer bestimmen will, so wird man so viele Beobachtungen, als möglich, zu dieser Bestimmung anwenden und da sonach die Anzahl dieser Beobachtungen gewöhnlich viel größer seyn wird, als

die Anzahl der unbekanntten Größen, so wird eine Methode notwendig, diejenigen Werthe, welche allen diesen Beobachtungen am besten entsprechen, d. h. die wahrscheinlichsten Werthe dieser Größen zu finden. Diese Untersuchungen lassen sich, mit besonderen Modificationen, beynahе auf alle Erscheinungen der Natur, auf die Phänomene der physischen und selbst der moralischen Welt anwenden und sie werden ohne Zweifel, wenn diese Theorie selbst sowohl, als auch unsere ihr zu Grunde liegenden Erfahrungen eine größere Ausbildung erhalten haben, zu den wichtigsten und interessantesten Resultaten führen. Wir wollen es versuchen, in dem Folgenden wenigstens einige derselben näher anzuzeigen.

Mitten unter den höchst veränderlichen und verwickelsten, uns aber größtentheils unbekanntten Ursachen der Erscheinungen in der Natur, welche Ursachen wir, eben wegen unserer Unkenntniß derselben, mit dem Namen des Zufalls bezeichnen, bemerken wir beynahе ohne Ausnahme, daß die Unregelmäßigkeit derselben in dem Maße abzunehmen scheint, wie sie öfter vorkommen, daß also, wie die Erscheinungen selbst sich multipliciren, eine Art von fester Ordnung in ihnen sichtbar wird, die wir denn auch meistens, vielleicht mit Unrecht, einer Art von, uns übrigens verborgener, Absicht zuschreiben. Um dieses sogleich durch ein Beyspiel deutlich zu machen, wollen wir annehmen, daß eine Urne eine uns ganz unbekanntte Anzahl von weißen und schwarzen Kugeln enthalte. Wenn man bey jedem Zuge eine derselben herausnimmt und ihre Farbe bemerkt und sie dann wieder in die Urne zurücklegt, um eine neue Ziehung vorzunehmen, so wird bey den ersten Zügen das Verhältniß der gezogenen weißen Kugeln zu den gezogenen schwarzen sehr veränderlich und unregelmäßig seyn, aber je länger man diese Ziehungen fortsetzt, desto deutlicher wird man ein bestimmtes und constantes Verhältniß dieser beyden Farben sich gestalten sehen, und dieses Verhältniß der gezogenen weißen und schwarzen Kugeln wird dem Verhältniß der in der Urne enthaltenen weißen und schwarzen Kugeln immer näher kommen, je größer die Anzahl der Ziehungen ist, so daß man endlich mit großer Wahrscheinlichkeit das

wahre Verhältniß der Anzahl der in der Urne enthaltenen weißen sowohl, als auch der schwarzen Kugeln wird bestimmen können, wenn uns gleich anfangs dieses Verhältniß völlig unbekannt gewesen ist. Denken wir uns in einem zweyten Beispiele eine Reihe kreisförmig aufgestellter Urnen, deren jede eine große Anzahl weißer und schwarzer Kugeln enthält. Das ursprüngliche Verhältniß dieser zwey Gattungen von Kugeln kann noch so verschieden seyn, so daß z. B. mehrere Urnen bloß weiße, und wieder andere bloß schwarze Kugeln enthalten. Zieht man dann eine Kugel aus der ersten Urne und wirft sie in die zweyte; schüttelt man dann die Kugeln der zweyten Urne wohl durch einander und zieht aus ihr eine Kugel, und wirft sie in die dritte u. s. w. bis man die aus der letzten Urne gezogene Kugel wieder in die erste wirft und so das Verfahren mit der ganzen Reihe von Urnen öfter wiederholt, so zeigt die Analyse, daß, je öfter man dieses Verfahren wiederholt hat, desto mehr das Verhältniß der weißen und schwarzen Kugeln in jeder Urne sich dem constanten Verhältnisse der weißen und schwarzen Kugeln in allen Urnen nähern wird. Durch diese einfache Art der Transposition der einzelnen gezogenen Kugeln verschwindet also die anfängliche Unregelmäßigkeit dieses Verhältnisses in jeder einzelnen Urne immer mehr und mehr und geht endlich in eine sehr einfache Ordnung über. Stellt man dann zwischen diese Urnen mehrere andere, deren jede wieder eine willkürliche Anzahl von weißen und schwarzen Kugeln enthält, und wendet man jetzt auf alle diese Urnen das oben erwähnte Verfahren an, so wird zwar anfangs die in den alten Urnen bestehende Ordnung gestört werden und eine Unregelmäßigkeit entstehen, die sich über alle Urnen verbreitet, aus welcher sich aber, wenn man nur jenes Verfahren oft genug wiederholt, sich endlich doch wieder jene Regelmäßigkeit entwickeln wird, indem am Ende doch wieder das Verhältniß der weißen Kugeln zu den schwarzen in jeder Urne, sich dem constanten Verhältnisse der weißen zu den schwarzen Kugeln in allen Urnen, den alten und den neuen, immer mehr nähern wird. Ganz dieselbe Erscheinung hat auch bey allen Ereignissen der Natur statt, in welchen gewisse constante Kräfte regelmäßige Wirkungen erzeu-

gen, die eben dadurch andere, veränderliche Einflüsse mit der Zeit überwiegen und so endlich selbst aus dem Schooße der Unordnung und dem scheinbaren Chaos Systeme entwickeln, deren einfache Regelmäßigkeit so oft der Gegenstand unserer Bewunderung ist. Alle Phänomene, selbst diejenigen, welche am meisten von dem blinden Zufalle abzuhängen scheinen, zeigen also, wenn sie nur oft genug wiederholt werden, jene Neigung, sich immer mehr und mehr einem constanten Verhältnisse zu nähern und sich einem bestimmten, meistens sehr einfachen Gesetze zu unterwerfen, aus welchem Gesetze, wenn es uns einmal mit hinlänglicher Genauigkeit bekannt ist, man dann auch die künftigen Erscheinungen dieser Ereignisse bestimmen wird. Die Ursache dieses merkwürdigen Umstandes ist ohne Zweifel darin zu suchen, daß bey den, jene Erscheinungen erzeugenden Veranlassungen eine oder mehrere regelmäßig wirkende sind, welche mit der Zeit die anderen unregelmäßigen, und sich gleichsam, zum Theil wenigstens, einander selbst aufhebenden Ursachen überwiegen und daher auch in regelmäßigen Wirkungen sichtbar werden. Wenn die Ziehung und die Zurückgabe der Kugeln in dem vorhergehenden Beyspiele nicht in der angeführten einfachen Ordnung statt hätte, sondern wenn man z. B. aus der 1., 4., 9. . . Urne 3, 5, 8. . . Kugeln in die 3., 4., 7. . . Urne geben würde, so würde auch jene endliche Ordnung der Verhältnisse der beyden Farben nicht statt haben, aber sie würde, wenn gleich vielleicht später, eintreten, wenn man sowohl in der Zahl der zu ziehenden Kugeln, als auch in der Wahl der Urnen irgend ein anderes Gesetz, z. B. das der figurirten Zahlen eintreten lassen wollte.

Diese sonderbare Erscheinung fällt vielleicht nur wenig auf, weil sie selbst bey alltäglichen Versuchen so oft wiederkömmt und weil sie von dem gesunden Menschenverstande gleichsam schon als ein Axiom angenommen wird. Desto schwerer ist es, einen treffenden Beweis derselben durch die Analyse zu geben. Auch that sich Jacob Bernoulli, der zuerst einen solchen Beweis für diese Erscheinung gefunden hatte, nicht wenig darauf zu Gute. Erst in unsern Tagen hat Laplace eine andere und noch vollständigere Demonstration derselben gefunden, die sich aber hier, wo wir

die Analyse vermeiden wollen, ohne Weitläufigkeit nicht gut mittheilen läßt. Aus diesem Theoreme hat man dann die Folgerung gezogen, die man als ein allgemeines Gesetz ansehen kann: daß nämlich die anfangs meistens veränderlich und ganz zufällig scheinenden Verhältnisse aller Naturereignisse sich immer mehr einem gewissen beständigen Verhältnisse nähern, je zahlreicher diese Erscheinungen selbst sind. So sind, ungeachtet der Veränderungen, welche einzelne Jahre hervorbringen mögen, die Anzahl der Geburten oder der Sterbefälle eines Landes oder einer Stadt für einen bestimmten Zeitraum, wenn man sie aus einer größeren Anzahl von Jahren ableitet, immer sehr nahe constant und daselbe hat auch mit den Erzeugnissen eines Landes statt, so daß die Vorsicht der Menschen sich von der Unregelmäßigkeit der einzelnen Jahre unabhängig machen kann, wenn sie die Güter der Natur, die sie selbst von Jahr zu Jahr oft sehr ungleich auszutheilen scheint, auf mehrere Jahre zu gleichen Theilen zu verbreiten sich bemüht. Selbst die Erscheinungen in der moralischen Welt scheinen sich diesem allgemeinen Gesetze unterzuordnen. So will man sogar die Erfahrung gemacht haben, daß in Paris und London die Anzahl der, wegen unvollständiger Adressen, auf den Posten zurückgebliebenen Briefe, jährlich immer nahe dieselbe ist.

Es scheint daher, daß bey einer längeren Reihe von Ereignissen derselben Art, die Wirkung der regelmäßigen und constanten Ursachen über die der unregelmäßigen eine Art von Übergewicht erhalten.

Die günstigen und glücklicher Weise noch oft genug wiederkommenden Ereignisse, welche die Beobachtung der ewigen und unveränderlichen Gesetze der Vernunft, der Gerechtigkeit und der Humanität zu begleiten pflegen, zeigen uns, dem Einzelnen so gut als ganzen Völkern, daß es immer vortheilhafter ist, sich diesen Gesetzen unterzuordnen, als sich von ihnen zu entfernen. Unsere Weltgeschichte und unsere eigene Erfahrung unterstützen diese Behauptung. Wer kann die glücklichen Folgen der Vereinigungen läugnen, die auf Vernunft und auf die natürlichen Rechte der Menschheit gegründet sind, oder wer kann die

Vortheile verkennen, die Nützlichkeith und Treue dem einzelnen Menschen sowohl, als auch ganzen Staaten bringen. Die Opfer, welche ihnen die gewissenhafte Erfüllung ihrer mit den Nachbarn eingegangenen Verträge kostet, werden reichlich ersetzt durch den Vortheil der Achtung, des Vertrauens und der Wohlfahrt, welche die unmittelbaren Früchte jener edlen Selbstbeherrschung sind. Wie lehrreich, wie interessant könnte unsere Weltgeschichte werden, wenn sie aus diesem Gesichtspuncte behandelt werden möchte.

In den meisten Fällen ist uns die Wahrscheinlichkeit der einzelnen Ereignisse unbekannt, und dann sind wir gezwungen, zu der Vergangenheit zurückzugehen, und in den bereits angestellten Beobachtungen und Erfahrungen eine Anzeige aufzusuchen, die uns in unsern künftigen Erwartungen zu leiten im Stande ist. Gewöhnlich halten wir dann, wie in unsern Spielen, diejenigen Fälle, welche bereits am häufigsten vorgekommen sind, für die wahrscheinlicheren und zwar desto mehr, je öfter sie bereits erschienen sind. So ist, nach unsern Erfahrungen, die Anzahl der Geburten der Knaben zu jener der Mädchen in allen Ländern, wo man bisher solche Untersuchungen anstellen konnte, sehr nahe gleich dem Verhältnisse von 22 zu 21, und dieses Verhältniß scheint von dem Klima und der Lebensart ganz unabhängig zu seyn, so daß man also diese größere Anzahl der männlichen Geburten, so unbekannt uns auch die Ursache derselben seyn mag, als ein Gesetz der Natur betrachten muß.

Wir haben bereits mehrere Beispiele in dem verwickeltesten Theile der astronomischen Analysis, in der Theorie der gegenseitigen Störungen der Himmelskörper, von dem Nutzen, welche die Wahrscheinlichkeitsrechnung bey diesen Untersuchungen gewähren kann. Die bekannte Acceleration der mittleren Bewegung des Mondes quälte lange die Geometer des verfloffenen Jahrhunderts, da sie ihren wahren Grund nicht finden konnten. Lagrange verwarf endlich, nach vielen mühsamen Rechnungen, die Existenz dieser Acceleration gänzlich, indem er sie für eine Täuschung der Beobachter erklärte. Allein Laplace, der die älteren Beobachtungen, besonders die der Araber, mit denen der neuern Zeiten verglich, fand, daß die Existenz einer solchen Acceleration eine

sehr große Wahrscheinlichkeit habe, und indem er, durch diese Überzeugung bewogen, die Theorie des Mondes noch einmal mit der größten Sorgfalt durchging, fand er glücklich den wahren Grund jener scheinbaren Anomalie in der Veränderung der Excentricität unserer Erdbahn.

Oft ist zwar die wahre Auflösung des Problemes, welches das Gesetz dieser Erscheinungen darstellen soll, über die Kräfte unserer Analysis. Aber auch in diesen Fällen ist es interessant und wichtig, jene constanten Verhältnisse und den Grad der Genauigkeit zu kennen, mit welchem sie von den Beobachtungen dargestellt werden. So mag es vielen immerhin noch als eine Hypothese gelten, daß die Ebbe und Fluth des Meeres eine Wirkung der Anziehung des Mondes und der Sonne sey. Aber die große Übereinstimmung, welche die von Laplace auf diese Hypothese gegründete Theorie jener Erscheinung mit so vielen Tausenden von Beobachtungen gewährt, gibt dieser Hypothese einen Grad der Wahrscheinlichkeit, den viele andere unserer menschlichen Kenntnisse noch weit entfernt sind zu besitzen, wenn sie gleich der Art sind, daß es beynahe Niemand wagt, an ihrer Existenz zu zweifeln.

Es ist wahrscheinlich, daß diese Wirkung der Sonne und des Mondes, die so große Bewegungen in den Gewässern des Meeres erzeugt, auch ähnliche Fluctuationen in unserer Atmosphäre hervorbringen werde. Laplace hat zu diesem Zwecke gegen zwölfstausend Beobachtungen des Barometers und Thermometers untersucht, die auf der Sternwarte in Paris gemacht worden sind. Aber er fand die hieher gehörenden Veränderungen des Barometers nur gleich drey Hunderttheilchen einer Linie und die Wahrscheinlichkeit dieses Resultates so gering, daß man es noch als sehr ungewiß betrachten muß. Unter dem Äquator, wo jener Einfluß des Mondes und der Sonne am größten ist, würde sich ohne Zweifel diese Untersuchung mit mehr Sicherheit anstellen lassen.

Eine andere Veränderung des Barometerstandes, die von der Änderung der Temperatur bey Tage und bey Nacht entsteht, und die auch in der heißen Zone am merklichsten ist, zeigt, daß

das Barometer, ungeachtet seiner täglichen Schwankungen, gen 9 Uhr des Morgens am höchsten, und gegen 3 Uhr des Abends am tiefsten steht, während es wieder in der Nacht gegen 11 Uhr am höchsten und gegen 4 Uhr des Morgens am niedrigsten steht. Die Differenz des höchsten und niedrigsten Standes beträgt daselbst oft 0.8 einer Par. Linie. In unsern Breiten sind diese Veränderungen viel kleiner, aber auch hier zeigen die Beobachtungen, daß man mehr als 300,000 gegen die Einheit wetten kann, daß diese Erscheinung von irgend einer regelmäßigen Ursache entstehen müsse. Ohne diese Ursache durch die Analyse nachweisen zu können, da es hier hinreichen mag, ihre Existenz außer Zweifel gesetzt zu haben, sieht man doch, schon aus den Epochen dieser Variationen, die sich nach der Länge des Sonnentages richten, daß der Grund dieser Erscheinungen in der Wärme zu suchen ist, welche die Sonne dem Theile der Oberfläche der Erde und ihrer Atmosphäre ertheilt, den sie mit ihren Strahlen bedeckt.

Auch die bekannten täglichen Variationen der Magnethadel sind eine Wirkung der Sonne auf die Erde, da ihre Perioden ebenfalls von der Länge des Sonnentages abhängen. Ob aber diese Wirkung auf die Magnethadel ebenfalls durch die Wärme, welche die Sonne erzeugt, oder ob sie durch den Einfluß dieses Gestirns auf die Electricität und den Magnetismus unserer Erde entsteht, werden erst künftige Beobachtungen entscheiden können.

Eine der merkwürdigsten Erscheinungen unseres Planetensystems besteht darin, daß die rotirenden sowohl als auch die fortschreitenden Bewegungen der Planeten um die Sonne und der Satelliten um die Hauptplaneten durchaus in derselben Richtung, von West gen Ost, und überdieß alle sehr nahe in den Ebenen des Sonnenäquators vor sich gehen. Wir bemerken diese Erscheinung bey sechs Hauptplaneten, bey dem Monde der Erde, bey den vier Monden Jupiters und bey einem Monde Saturns, so wie bey dem Ringe dieses letzten Planeten. Es ist daher sehr wahrscheinlich, daß sie keine Wirkung des bloßen Zufalls ist, sondern daß sie in einer allgemeinen Ursache, welche diese gleichförmigen Bewegungen hervorgebracht hat, gesucht werden muß. Auch zeigt die Analyse, daß man über vier Billionen gegen die Einheit wetten kann,

daß diese Erscheinung nicht dem blinden Ohngefähr zugeschrieben werden kann, und diese große Wahrscheinlichkeit war es, welche Laplace bewog, jene constante Ursache dieses Phänomens aufzusuchen und uns eine der sinnreichsten Erklärungen des Ursprungs unsers Sonnensystems zu geben.

Vielleicht werden uns auch fortgesetzte Erfahrungen bald in den Stand setzen, diese neue Art der Analyse auf den Einfluß anzuwenden, welchen mehrere Naturereignisse auf unsern eignen Organismus auszuüben scheinen. Die feinsten Instrumente, welche wir zu den Beobachtungen der Natur anwenden können, sind ohne Zweifel unsere Nerven, besonders wenn sie durch irgend einen Zufall in einen höhern Stand der Reizbarkeit versetzt werden. Durch sie hat man die äußerst schwache Electricität entdeckt, welche durch die Berührung zweyer heterogener Metalle erregt wird, und die sonderbaren Erscheinungen, welche eine große Reizbarkeit der Nerven bey einigen Individuen hervorgebracht hat, haben uns den thierischen Magnetismus und den Einfluß der Sonne und des Mondes in verschiedenen Krankheiten kennen gelehrt. Die Wirkungen, welche aus diesen Quellen entspringen, sind ohne Zweifel meistens nur sehr schwach, und sie können daher, von andern Einflüssen gestört, leicht verkannt und noch leichter von einer zu lebhaften Phantasie über ihren wahren Werth geschätzt werden; aber dieß kann noch kein Grund seyn, sie, wie manche gethan haben, ohne alle weitere Untersuchung ganz zu verwerfen. Wir sind noch so weit entfernt, alle Agentien der Natur und die verschiedenen Arten ihrer Wirksamkeit zu kennen, daß es durchaus nicht gebilligt werden kann, die Existenz solcher Erscheinungen bloß aus dem Grunde zu läugnen, weil sie uns bey dem gegenwärtigen Zustande unserer Kenntnisse noch unerklärbar sind. Vielmehr sollen wir sie alle vorurtheilsfrey und parteylos untersuchen und zwar desto genauer untersuchen, je schwerer sie zu erkennen sind, und eben hier wird es besonders wünschenswerth seyn, durch unsere Analyse, wenigstens einigermaßen, den Grad der Wahrscheinlichkeit der auf diese Erscheinungen gestützten Hypothesen beurtheilen zu können.

Bisher haben wir uns mit der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Erscheinungen in der Körperwelt beschäftigt. Indem wir nun zu jenen der geistigen oder moralischen Welt übergehen, müssen wir zuvörderst bemerken, daß hier die wahren Ursachen der Ereignisse gewöhnlich noch verborgener und ihre Wirkungen noch weit verwickelter sind, als in jener, so daß man, bey dem gegenwärtigen Zustande der Analysis sowohl, als auch unserer bisher gesammelten Kenntnisse, wohl nur selten zu ganz bestimmten Resultaten zu gelangen hoffen darf. So viele unvorhergesehene und unvorherzusehende Ursachen wirken auf die einfachsten Handlungen einzelner Menschen und ganzer Staaten ein, daß es oft selbst dem scharfsinnigsten Beobachter unmöglich wird, sie von einander zu trennen und sich bis zu einer klaren Ansicht des Gegenstandes zu erheben. Auch fehlt es uns, selbst im Großen, an hinlänglichen Erfahrungen. Hätte man z. B. in jedem Zweige der öffentlichen Administrationen seit Jahrhunderten die neu eingeführten Experimente und ihre glücklichen oder unglücklichen Erfolge genau aufgezeichnet, so würde man jetzt über den Nutzen oder Schaden dieser Einrichtungen ein bestimmteres Urtheil fällen können. Aber wie wenige allgemeine und vollkommen bewährte Regeln können selbst über diesen so wichtigen Gegenstand angeführt werden. Es scheint uns klar, daß man dem unabweislichen Fortgang des Ganzen der menschlichen Gesellschaft in materieller und intellectueller Hinsicht kein Hinderniß entgegenzusetzen soll; aber es ist wohl nicht minder gewiß, daß man jede Veränderung im Großen nur mit der äußersten Umsicht vornehmen darf, wenn man nicht auf neue, und oft ganz unbesiegbare Hindernisse stoßen will. Die Vergangenheit kennen wir bereits durch unsere eigenen Erfahrungen: aber die Uebel, welche jede Neuerung mit sich führen wird, sind uns noch unbekannt. In dieser Unkenntniß der künftigen Ereignisse schreibt uns die Vernunft und die Analyse Vorsicht und vor allem die Vermeidung jeder heftigen Veränderung vor, bey welcher, wie bey einem gewaltsamen Stöße, in der physischen sowohl als in der moralischen Welt immer sehr viel von dem verloren geht, was

man in der Mechanik die lebendige Kraft eines Systems zu nennen pflegt.

Einer der wichtigsten Gegenstände dieser Art ist die Wahrscheinlichkeit der Zeugen auszusagen, die besonders die Gerichte in einem hohen Grad interessiren muß. Oft zwar ist es uns unmöglich, auf diesem Wege die gesuchte Wahrheit zu erkennen, da die meistens unbekannte Wahrheitsliebe der Zeugen und andere Nebenumstände den Gegenstand sehr verwickelt machen können. Aber in vielen einfachen Fällen läßt sich doch unsere neue Analyse mit einiger Sicherheit anwenden, und immer wird, auch nur eine genäherte Kenntniß einer Sache einer vagen, auf bloßes subjectives Gutdünken und Meinungen gegründeten Ansicht vorzuziehen seyn (VIII).

Auch die Wahlen und Entscheidungen richterlicher Versammlungen unterliegen dieser neuen Analyse. Sie hängen meistens von der Mehrheit der Stimmen, aber auch von der Einsicht und Unparteylichkeit der Botirenden ab, welche letzte einer Berechnung nur schwer zu unterwerfen seyn wird. Doch gibt es auch hier einige allgemeine Gesetze, die schon der gemeine Verstand vorschreibt und die von jener Analyse bestätigt werden. Wenn z. B. die Versammlung nur wenige Kenntniß von dem zu entscheidenden Gegenstande hat; wenn dieser Gegenstand eine ungewöhnlich genaue Untersuchung erfordert; wenn die Wahrheit, der man auf diese Weise den Sieg verschaffen will, mit allgemein angenommenen Vorurtheilen im Gegensatze ist, wie z. B. in frühern Zeiten bey den Hexenprozessen — dann wird dasjenige Resultat, welches man bloß durch die so beliebte Mehrheit der Stimmen zu erhalten sucht, gewöhnlich falsch seyn, und diese Besorgniß wird desto größer seyn, je größer die Anzahl der Mitglieder ist. Es ist daher nothwendig, daß zahlreichen Versammlungen nur solche Entscheidungen überlassen werden, die der größere Theil der Menschen kennt und übersieht; es ist nothwendig, daß Bildung und Kenntniß der uns zunächst umgebenden Gegenstände so allgemein als möglich verbreitet und daß vor allem diejenige Classe der menschlichen Gesellschaft wahrhaft aufgeklärt werde, die bestimmt ist, über das Schicksal der andern zu ent-

scheiden oder sie zu leiten, um nicht von Vorurtheilen, falschen Ansichten und Unkenntniß der Dinge verführt zu werden. Haben doch selbst die Gebildeten nur zu oft Gelegenheit zu bemerken, daß die ersten Ansichten einer Sache trügen und daß die Wahrheit nicht immer auch zugleich wahrscheinlich ist.

Die sicherste Art, unter mehreren vorgeschlagenen Candidaten einen zu wählen, wäre die, wo jeder Wähler die Namen dieser Candidaten aufschreibt und ihnen diejenigen Zahlen beysetzt, welche nach seiner Ansicht die Verdienste der Candidaten zu dieser Wahl ausdrücken sollen. Wenn z. B. vier Wähler über drey Candidaten A, B, C folgende Listen eingeben:

	Erster Wähler.	Zweyter.	Dritter.	Vierter.
A . .	10 . . .	4 . . .	3 . . .	3
B . .	5 . . .	7 . . .	6 . . .	7
C . .	2 . . .	3 . . .	2 . . .	5

so hat der erste Candidat 20, der zweyte 25 und der dritte 12 Stimmen, also der zweyte die meisten und der dritte die wenigsten Stimmen erhalten, daher der zweyte gewählt wird. Wenn aber die Wähler ihre Listen ohne Nummern und nur so abgeben, daß der zuerst stehende Candidat als der würdigste, der zweyte als der nächstwürdige gehalten wird, wenn z. B. jene vier Wähler folgende Liste eingeben:

	Erster Wähler.	Zweyter.	Dritter.	Vierter.
B	A	C	B	
A	B	A	C	
C	C	B	A	

so denkt man sich von den untersten Candidaten einer jeden Reihe anzufangen, die natürlichen Zahlen 1, 2, 3 . . . beygeschrieben und verfährt, wie zuvor. In unserem Schema hat A die Zahlen  $2 + 3 + 2 + 1 = 8$ , B aber  $3 + 2 + 1 + 3 = 9$  und C endlich  $1 + 1 + 3 + 2 = 7$ , also hat B wieder die meisten und C die wenigsten Stimmen.

Da aber die Interessen der einzelnen Wähler und viele andere, dem Verdienste der Candidaten oft ganz fremde Rücksichten, die Ordnung, welche man durch solche Wahlrichtungen erreichen will, leicht stören können, so möchte es am gerathensten seyn,

im Allgemeinen bey den Wahlen durch absolute Stimmenmehrheit stehen zu bleiben, die wenigstens alle diejenigen Candidaten, welche die Majorität verschmäht, entfernt halten und die daher meistens den eigentlichen Wunsch der ganzen Gesellschaft ausdrückt.

Diejenigen Gesellschaften, welche sich, ihren Institutionen zu Folge, am Ende einer jeden Periode von mehreren Jahren ganz erneuern sollen, werden sicherer gehen, wenn sie in kleineren Perioden eine theilweise Erneuerung vornehmen. Denn die neuen Wahlen hängen immer von den Meinungen ab, welche eben zu der Zeit dieser Wahlen die vorherrschenden sind, und je öfter daher diese Wahlen theilweise vorgenommen werden, desto mehr wird man sich der allgemeinen Meinung des größten Theils der Gesellschaft annähern.

In solchen Gerichten, wo wichtige und schwere Verurtheilungen ausgesprochen werden, müssen offenbar auch die stärksten Gründe für die Existenz des zu strafenden Verbrechens vorausgesetzt werden. Aber jede bloß moralische Überzeugung ist doch nur eine Wahrscheinlichkeit, keine unwidersprechliche Wahrheit, und wir haben selbst bey den scheinbar gerechtesten Richtern bereits zu viele beklagenswerthe Erscheinungen gesehen, um nicht mit der äußersten Vorsicht zu verfahren, besonders bey Todesstrafen, wo Gutmachung und Ersatz eines erst später erkannten Fehlers unmöglich ist. Wenn aber der Richter bey seinen Urtheilen eine mathematische Gewißheit fordert, so wird er beynah nie im Stande seyn, ein Urtheil zu fällen, und doch ist diese Fällung durch die Gefahr geboten, der bey der Ungestraftheit des Verbrechens die Gesellschaft ausgesetzt wäre. Man muß sich daher begnügen, wenigstens so starke Beweise des von dem Beklagten begangenen Verbrechens zu haben, daß die Gesellschaft der übrigen Mitbürger weniger zu fürchten hat, wenn der Beklagte unschuldig verurtheilt wird, als wenn er, schuldig freigesprochen, durch seine künftigen Attentate und durch das Beyspiel, das seine Ungestraftheit ähnlichen Verbrechern gibt, den Staat in neue Gefahren setzt. Die Ausfüßung dieser Aufgabe hängt aber von vielen Nebenumständen ab, die oft schwer zu erkennen seyn werden. Beynahe

immer wird es unmöglich seyn, den Grad der Wahrscheinlichkeit des Verbrechens, der zu einer Verurtheilung nöthig ist, mit Gewißheit anzugeben. Jeder Richter wird, in dieser Beziehung, seinem innern Gefühle folgen müssen, das durch die Kenntniß der Gesetze und der Menschen, durch Umsicht, Scharfsinn und endlich durch viele vorhergegangene Erfahrungen bey ähnlichen Fällen bestimmt und unterstützt wird. Die Auslösung jenes Problems hängt auch von der Größe der Strafe ab, welche der Verbrecher erleiden soll. Ohne Zweifel werden die Beweise für Todesstrafe eines ganz anderen Gewichts seyn müssen, als die für ein Gefängniß von einem oder einigen Jahren. Die Strafe muß überdies dem Verbrechen angemessen seyn, und schwere Strafen auf leichte Verbrechen gesetzt, tragen nur dazu bey, viele Schuldige ganz frey zu sprechen. Das Product der Wahrscheinlichkeit, daß das Verbrechen in der That begangen worden ist, in die Größe dieses Verbrechens ist das Maß der Gefahr, welches aus der Freysprechung des Schuldigen für die Gesellschaft entstehen kann.

Welches ist aber die Wahrscheinlichkeit, daß ein solches Urtheil, wenn es durch die Mehrheit der stimmenden Richter ausgesprochen wird, in der That gerecht ist? Die Majorität einer einzigen Stimme in einem zahlreichen Tribunale zeigt an, daß der Gegenstand, um den es sich handelt, noch sehr zweifelhaft und daß daher in diesem Falle die Verurtheilung des Angeklagten den Gesetzen der Humanität, dieser Beschützerinn der Unschuld, entgegen ist. Die Totalität aller Stimmen im Gegentheile gibt eine sehr große Wahrscheinlichkeit, daß die ausgesprochene Sentenz gerecht ist. Aber diese Totalität als nothwendige Bedingung einer schweren Strafe aufzustellen, geht eben so wenig an, da dann ohne Zweifel zu viele Schuldige ungestraft bleiben würden. Man muß daher, um diese beyden Extreme zu vermeiden, entweder die Anzahl der Richter vermindern, wenn man ihre Unanimität als Basis der Verurtheilung aufstellt, oder man muß, bey einer größeren Anzahl von Richtern, auch die Majorität der Stimmen vergrößern, die zu einem Urtheile erfordert werden.

Wenn in einem Tribunal von 101 Richtern 51 der einen,

und 50 der entgegengesetzten Meinung sind, so ist offenbar die Wahrscheinlichkeit, daß die Meinung eines jeden dieser Richter, alle gleich gerecht vorausgesetzt, die wahre sey, nahe gleich  $\frac{1}{2}$  d. h. nahe der Wahrscheinlichkeit des Gegentheils gleich, daß nämlich seine Meinung nicht die wahre sey. Sind sie aber alle derselben Meinung, so ist jene Wahrscheinlichkeit jedes einzelnen Richters nahe gleich der Einheit oder der Gewißheit. Außer diesen beyden Extremen kann nur die Größe des Verhältnisses der einen Stimmen über die andern entscheiden, und dieses Verhältniß kann von  $\frac{1}{2}$  bis 1 wachsen. Wenn in einem Tribunale von 8 Richtern 5 Stimmen zur Verurtheilung des Angeklagten erfordert werden, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Sentenz ungerecht ist, größer als  $\frac{1}{4}$ . Sind nur 6 Richter und werden 4 Stimmen erfordert, so ist jene Wahrscheinlichkeit kleiner als  $\frac{1}{4}$ . Der Angeklagte geht daher bey dieser Reduction der Richterzahl sicherer. In beyden Fällen ist die Majorität der Stimmen um 2 größer, da in dem ersten Falle für die entgegengesetzten Meinungen 5 und 3 und in dem zweyten Falle 4 und 2 Stimmen waren. So lange diese Majorität immer dieselbe bleibt, wird die Wahrscheinlichkeit eines fehlerhaften Urtheils immer größer, je größer die Anzahl der Richter ist, welches auch diese Majorität der Stimmen ist, wenn sie nur immer dieselbe bleibt. So werden in unserm Beispiele zur Fällung eines Urtheils bey einem Tribunale von bloß zwey Richtern 2 für und keiner gegen die Strafe, also die Totalität der Stimmen erfordert. Im Gegentheile müßten bey einem Tribunale erfordert werden

von 4 Richt. für die Strafe 3 u. f. die Losspr. 1 Stim., Verhältn. 3

6	—	—	4	—	—	2	—	—	2
8	—	—	5	—	—	3	—	—	1.67
10	—	—	6	—	—	4	—	—	1.50
50	—	—	26	—	—	24	—	—	1.08
100	—	—	51	—	—	49	—	—	1.04
1000	—	—	501	—	—	499	—	—	1.004

Diese Tafel zeigt, daß sich das Verhältniß der positiven Stimmen zu den negativen, je größer die Anzahl der Richter wird, desto mehr der Gleichheit nähert, bis endlich für ein sehr

zahlreiches Tribunal beyde sehr nahe gleich werden und die Hälfte der Richter für, die Hälfte aber gegen die Strafe ist, wodurch das Resultat ganz unentschieden bleibt. Dasselbe wird der Fall seyn, wenn auch die Majorität der Stimmen statt 2 irgend eine größere Zahl wäre: so daß also die Besorgniß eines unrichtigen Urtheils und daher auch die Unsicherheit des Angeklagten desto größer wird, je größer die Anzahl der Richter ist. Ist diese Majorität z. B. 10, so hat man für ein Tribunal

	Bejahende.	Verneinende.
von 10 Richtern	10 . . .	0
20 „	15 . . .	5
30 „	20 . . .	10
100 „	54 . . .	45
1000 „	505 . . .	495

also wieder diese Annäherung des Verhältnisses zur Einheit zwischen den bejahenden und den verneinenden Stimmen.

Im Gegentheile, wenn man, statt dem arithmetischen, das geometrische Verhältniß für die Majorität festsetzt, so wird die Sicherheit des Urtheils immer desto größer, je größer die Anzahl der Richter ist. Wird z. B. angenommen, daß das Urtheil nur vollzogen werden kann, wenn zwey Drittheile der Richter für die Strafe stimmen, so ist die Wahrscheinlichkeit eines Irrthums bey 6 Richtern nahe  $\frac{1}{4}$ , und bey zwölf Richtern wird diese Wahrscheinlichkeit beträchtlich kleiner. So hat man unter dieser Voraussetzung bey einem Tribunale

	Bejahende.	Verneinende.
von 5 Richtern	3 . . .	2
10 „	6 . . .	4
20 „	12 . . .	8
50 „	30 . . .	20
100 „	60 . . .	40
1000 „	600 . . .	400 u. s. w.

Überhaupt ist die Wahrscheinlichkeit einer fehlerhaften Sentenz gleich 0.254, wenn 5 Stimmen von 8 zur Verurtheilung hinreichen; aber nur mehr 0.133, wenn 8 Stimmen von 12 hinreichen; sie ist 0.045, wenn 9 Stimmen von 12 erfordert wer-

den, und sie ist endlich nur 0.00012, wenn die Totalität aller zwölf Richter zur Ausführung des Urtheils erfordert wird, wie dieses letzte der Fall bey den englischen Jurys ist; sie ist endlich nahe 0.001, wenn von einem Tribunale von 9 Mitgliedern die Totalität aller Stimmen gefordert wird (IX).

Das geistige Auge des Menschen hat ohne Zweifel eben so seine Illusionen, wie das körperliche; die letzten suchen wir durch das Gefühl, und jene durch Reflexion und Rechnung zu berichtigen. Unsere Leidenschaften und Vorurtheile, unsere herrschenden Meinungen lassen uns die Vortheile mancher Unternehmungen wie in einem Hohlspiegel vergrößert sehen, und setzen uns den gefährlichsten Folgen aus. Gegenwärtige Leiden und die Ursachen, welche sie erzeugen, drücken uns viel mehr, als vielleicht viel größere, aber künftige Übel, die wir uns oft eben durch die Mittel zuziehen, durch welche wir jene zu entfernen suchen. Und nicht nur der Einzelne, auch ganze große Völkerschaften handeln nur zu oft auf dieselbe Weise, indem sie sich der Anarchie und dem Despotismus übergeben, nur um sich von dem lästigen Übel der Gegenwart zu befreien. Wir haben oben gesehen, wie nachtheilig das Spiel der Lotterie für diejenigen ist, welche sich ihm anvertrauen. Aber es ist sehr zu besorgen, daß selbst viele von denen, welche diese Nachteile kennen, sich von ihren eiteln Hoffnungen doch nicht abhalten lassen. Die bloße Möglichkeit, mit einer kleinen Summe ein großes Vermögen zu erwerben, so äußerst gering auch die Wahrscheinlichkeit eines glücklichen Erfolges seyn mag, ist so lockend, daß der Arme sein Letztes hinträgt, um wenigstens einige Tage sich in trügerischen Hoffnungen zu wiegen und dann sich der Noth und dem Mangel auszusetzen. Diese Träume, denen er sich überläßt, bedürfen um so weniger einer Widerlegung, da sie sich gegenseitig selbst zerstören. So setzen viele Arme ihr ganzes Vermögen auf eine einzige Zahl, weil diese schon so lange nicht herausgekommen ist, und eben so viele vertrauen ihr Glück einer andern, die schon mehrmal nach einander gezogen worden ist und daher, nach ihrer Meinung, nächstens wieder

gezogen werden muß; aller übrigen Vorurtheile nicht zu gedenken, die mit dem armen, betrogenen Menschen ihr toses Spiel treiben.

Oft führen wir sogar selbst die sonderbaren und unerklärlichen Zufälle herbey, wegen welchen wir dann sehr mit Unrecht das Schicksal anklagen, das uns und unsere Unschuld verfolgen soll. So sucht man in den Spielen, die zum Theil von dem Zufalle, zum Theil aber auch von der Geschicklichkeit des Spielers abhängen, wenn man durch eine längere Zeit verloren hat, seinen Schaden durch gewagte Sätze, die selten ohne Leidenschaft unternommen werden, wieder gut zu machen, wodurch man gewöhnlich nur das Unglück vermehrt und dadurch, weit entfernt, seine eigene Schuld anzuerkennen, in noch heftigere Klagen gegen die Ungunst und die Ungerechtigkeit des Schicksals ausbricht. Welches Recht haben wir denn, von diesem Schicksale ausschließende Gunstbezeugungen auf Kosten der andern zu fordern? Wir lächeln über die Chinesen, die ihr himmlisches Reich für den Mittelpunct der Welt halten, während die meisten von uns, wenn sie es auch nicht immer offen gestehen, doch desto inniger heimlich glauben, daß sie selbst und ihr liebes Ich ein ähnlicher Mittelpunct sind, für welchen die Natur eine ganz besondere Sorgfalt tragen, für welchen das Schicksal ganz besondere Verbindlichkeiten hegen, ja für welchen die Götter selbst von ihren Thronen steigen und ihm zu Liebe den Lauf und die Gesetze des Universums ändern sollen. Und wer von uns nicht thöricht genug ist, in seinen ruhigen und nüchternen Stunden, in den Stunden seiner Zufriedenheit und seines Glückes, solche ausschweifende Forderungen an die höheren Mächte zu machen, wird sich doch, wenn das Unglück ihn ereilt oder bange Besorgniß vor der düstern Zukunft sein Herz beengt, unter den Schutz derselben Anmaßungen zu flüchten suchen, die er früher an andern so tadelnswerth gefunden hatte. Diese Meinungen, von denen sich nur die wenigsten und vielleicht keiner ganz frey zu halten weiß, können oft sehr vortheilhaft, oder doch für ihren Bekenner sehr trostreich seyn, aber sie können eben so oft traurige Folgen haben, und sie sind, wie die Erfahrung und die ganze Menschengeschichte lehrt, den

größten Mißbräuchen ausgesetzt, welche zu allen Zeiten von denjenigen benützt worden sind, denen es darum zu thun war, die andern als Mittel zu ihren eigenen Zwecken zu gebrauchen.

Illusionen jeder Art, so nützlich sie auch zuweilen dem Einzelnen seyn mögen, sind dem Ganzen immer schädlich: die Wahrheit aber allein ist immer und allen nützlich. Aber an welchen Merkmalen sollen wir sie erkennen? — Wer diese Frage löst, wird der größte Wohlthäter der Menschheit heißen, selbst den betrübenden Fall nicht ausgenommen, daß seine Lösung des Problems dahin führt, daß uns die reine, nackte Wahrheit ewig verborgen bleiben und daß wir bestimmt sind, sie immer nur, so oft wir uns ihr von Ferne nähern, unter dem trügerischen Gewande der Täuschung zu erblicken. Die wenigen eigentlich mathematischen Wahrheiten ausgenommen, wie viele haben wir noch, von denen, vollkommen überzeugt zu seyn, wir uns rühmen dürfen? Von denen wir dieß glauben, welchen Beweis für die Rechtmäßigkeit dieses Glaubens können wir angeben? — Keinen besseren, als den, daß Tausende mit uns daselbe glauben. Allein wie viele Dinge sind beynähe allgemein durch mehrere Jahrhunderte, ja durch Jahrtausende geglaubt worden, die demungeachtet falsch waren.

Wir haben daher allen Grund, uns vor den Täuschungen der Einbildungskraft wenigstens so weit, als es uns möglich ist, zu hüten, und überall, so viel wir können, nur den Eingebungen der gesunden und nüchternen Vernunft zu folgen. Zu viele Beispiele, selbst der ausgezeichnetsten Menschen, rufen uns diese Warnung zu und sogar die Mathematiker, in ihrer Wissenschaft selbst, die doch allen Täuschungen fremd seyn sollte, vermochten nicht immer, diese gefährliche Klippe zu vermeiden. Wenn man die Einheit durch die Größe  $1+x$  dividirt, so erhält man bekanntlich die Reihe  $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$ . Nimmt man in dieser Reihe die Größe  $x=1$  an, und summirt man je zwey nächste Glieder derselben, so erhält man  $\frac{1}{2} = 0 + 0 + 0 + \dots$  woraus zu folgen scheint, daß eine unendliche Anzahl von Nullen der endlichen Größe  $\frac{1}{2}$  gleich ist.

Der bekannte Geometer Guido Grandi stellte im Anfange

des achtzehnten Jahrhunderts diese Behauptung im vollen Ernste auf, und gerieth darüber in einen vielsährigen, heftigen Streit mit Marchetti, der diesen Satz für die Theologie sehr gefährlich hielt, da Grandi daraus die Schöpfung der Welt aus Nichts erklären wollte. Der große Leibniz, der seiner lebhaften Einbildungskraft zuweilen mehr nachgab, als man es von einem Geiste seiner Art und von einem Mathematiker erwarten sollte, suchte die Sonderbarkeit jener Behauptung zu retten, indem er bemerkte, daß diese Reihe entweder Null oder die Einheit gebe, je nachdem man eine gerade oder eine ungerade Anzahl von den Gliedern derselben summire, und da bey einer unendlichen Anzahl von Gliedern der Unterschied zwischen Gerade und Ungerade verschwinde, so müsse man in diesem Falle, nach den Regeln der Wahrscheinlichkeit, das Mittel jener beyden Resultate 0 und 1, oder mit andern Worten, man müsse die Größe  $\frac{1}{2}$  für die wahre Summe dieser unendlichen Reihe annehmen. Ein offenbar fal-

scher Schluß, da die Entwicklung des Bruches  $\frac{1+x}{1+x+x^2+\dots}$

ebenfalls die Reihe  $1 - x^2 + x^3 - x^5 + x^6 - \dots$  und daher, wenn  $x=1$  ist,  $0 + 0 + 0 + \dots = \frac{2}{3}$  und nicht  $\frac{1}{2}$  gibt, wie die Wahrscheinlichkeitsrechnung nach Leibniz fordern soll. Die einfache Erklärung dieses Paradoxons ist heute zu Tage zu allgemein bekannt, um hier noch umständlich angeführt zu werden. — Derselbe Leibniz glaubte in seiner Diatik, in welcher er alle Zahlen durch zwey Ziffer 0 und 1 darstellte, ein getreues Bild der Schöpfung zu erblicken, in welchem er den Schöpfer als die Einheit und das Nichts als das Zero darstellte, und diese Idee gefiel ihm so sehr, daß er sie dem Jesuiten Grimaldi, Präsidenten des mathematischen Tribunals in China, zuschickte, in der Hoffnung, durch dieses Emblem der Schöpfung den Beherrscher und alle Bewohner jenes Landes zu der Annahme des christlichen Glaubens zu bewegen. So weit können Vorurtheile und Illusionen der Einbildungskraft selbst solche Männer verleiten, wenn sie sich den Anlockungen derselben ohne Rückhalt hingeben.

Wir alle sind geneigt zu glauben, daß die Ordnung, welche wir selbst in der Aufeinanderfolge der Erscheinungen der Na-

tur in unsern Tagen bemerken, von jeher bestanden habe und ohne Unterbrechung immer so dauern werde. Ohne Zweifel würde wohl auch der gegenwärtige Zustand der Dinge, wenn er dem vergangenen vollkommen gleich wäre, auf eine eben so unveränderliche Zukunft schließen lassen. Viele Dinge scheinen uns diese Beständigkeit in unserm Sonnensysteme anzudeuten. Selbst die Analyse hat es bereits bestätigt, daß die rotirende sowohl als die progressive Bewegung der Planeten und der Satelliten und die Lagen ihrer Bahnen sowohl als ihre Äquatoren keinen fortgehenden Änderungen, sondern nur periodischen Ungleichheiten unterworfen sind, die, meistens in sehr engen Gränzen eingeschlossen, sich zu verschiedenen Epochen wieder in ihre erste Lage herstellen. Es kann als bewiesen angenommen werden, daß seit den Zeiten Hipparch's d. h. seit nahe 2000 Jahren, die Länge unseres Sterntages nicht um einen Hunderttheil einer Secunde und die mittlere Temperatur der Erde nicht um den hundertsten Theil eines Grades Reaum. sich geändert habe. Aber die Ordnung mancher andern Erscheinungen der Natur kann doch noch immer großen Änderungen unterworfen seyn, ohne daß unsere bisherigen Beobachtungen oder unsere Rechnungen sie uns anzuzeigen im Stande sind. Die Wirkungen des Oceans, der Atmosphäre, der Meteo- re, der Erdbeben und der vulkanischen Ausbrüche äußern ihre immerwährenden Einflüsse auf die Oberfläche der Erde, und diese Einflüsse können vielleicht die Temperatur unserer Klimate, das Volumen unserer Atmosphäre und die Verhältnisse der Luftarten, aus denen sie besteht, allmählig wenigstens, ändern und dadurch endlich für den vegetabilischen und animalischen Theil der Bewohner der Erde einen ganz andern Zustand heraufführen. Die Instrumente und die Beobachtungsmethoden, durch welche wir zur Kenntniß dieser Änderungen gelangen, sind alle noch zu neu, um über diesen Gegenstand einen bestimmten Ausspruch wagen zu können.

Eine längere Reihe von Jahrhunderten wird uns vielleicht in den Stand setzen, diese für alle organischen Wesen sehr wichtigen Ereignisse näher kennen zu lernen. Bereits sind mehrere unbezweifelte Spuren einer früheren, von der gegenwärtigen

sehr verschiedenen Welt aufgefunden worden, und die Eingeweide der Erde, so wie die höchsten Gipfel unserer Berge zeigen uns die Trümmer einer Pflanzen- und Thierwelt, die in den früheren Revolutionen der Erde untergegangen und einer neuen, von jener ganz verschiedenen, Organisation ihre Stelle abgetreten hat. Mit welchem Rechte sollten wir auch diese Unveränderlichkeit ihres Daseyns für unsere Erde erwarten, da wir sie nicht einmal an den Körpern des Himmels erblicken, wo neue Sterne entstehen und ganze große Welten verschwinden, und wo allein schon der Widerstand des Lichts und des Äthers, in welchem sich jene Körper bewegen, in der Folge der Zeit große Änderungen in der Anordnung des Ganzen heraufführen muß.

Besonders hat die den Menschen natürliche und vielleicht seiner intellectuellen Organisation, eigenthümliche Begierde, in die Zukunft zu dringen, zu einer großen Anzahl von oft sehr abenteuerlichen Mitteln geführt, durch welche wir diesem unbezweifelbaren Wunsche zu genügen suchen. Die Astrologen, die Zauberer, die Hexen und Traumdeuter liefern uns nur zu viel Beispiele von den traurigen Verirrungen, denen sich nicht bloß der Einzelne, sondern ganze Völkerschaften, durch mehrere Jahrhunderte ohne Anstand und mit einer Hartnäckigkeit hingegeben haben, die weder die Vernunft, noch selbst tausendmal von dem Gegentheile gemachte Erfahrungen zu besiegen vermochten. Diese Vorurtheile verbittern unser Leben, sie halten uns in beständiger Furcht, sie verfolgen uns selbst bis in unsere Träume — aber alles dieß vermag nichts über das arme Menschengeschlecht, das sich willig allen Qualen Preis gibt, um dadurch seine Lust zu befriedigen, in der dunklen Zukunft zu lesen und das Unmögliche möglich zu machen. Den Grund einer so betrübenden und so allgemeinen Erscheinung müssen wir wohl in der inneren Einrichtung unseres Wesens selbst, in der geistigen Physiologie suchen, die dort anfängt, wo unsere materielle Physiologie aufhört, und die ohne Zweifel, so wie diese, bestimmten Gesetzen unterworfen ist, deren nähere Kenntniß für uns selbst nicht anders als höchst interessant seyn kann. Die Nerven unseres Organismus vereinigen sich in ihren letzten und feinsten Verästelungen

beynahe alle in der sogenannten Marksubstanz des Gehirns, und führen daselbst die Eindrücke zusammen, welche sie durch die äußeren Sinne von den Gegenständen erhalten haben. Aber diese Sinne selbst lehren uns nichts, und alle bisher gewagten Versuche des menschlichen Scharfsinnes lassen uns im Dunkeln über die Art, auf welche jene äußeren Eindrücke fortgeführt und dem eigentlichen Denkvermögen mitgetheilt werden. Vielleicht werden die Versuche unserer Nachfolger glücklicher seyn, wenn sie einmal die hiehergehörenden Erscheinungen im Großen aufgefaßt und von den übrigen deutlicher unterschieden haben werden. Eine solche scheint jene geistige Sympathie oder der Trieb zu seyn, sich mit gleichartigen oder gleichgestimmten Wesen in nähere Verbindung zu setzen. Wir bemerken diesen Trieb bey allen organischen und selbst gewissermaßen bey den unorganischen Wesen. Zwey Pendel oder zwey Uhren, deren Gang nur wenig verschieden ist, erhalten endlich, wenn sie auf derselben Unterlage ruhen, einen ganz gleichen Gang. Gespannte Saiten, wenn eine derselben tönt, geben die verwandten Töne wieder. Thiere, verschiedener Gattung, aber von ähnlicher Organisation, streben nach Vereinigung. Viele von ihnen bilden sich von selbst in Gruppen und Heerden und das starke Band der Familienverbindungen scheint sich selbst über viele Geschlechter der Pflanzen zu erstrecken. Die menschlichen Vereinigungen zu größeren Gesellschaften und zu ganzen Staaten haben ohne Zweifel denselben Ursprung. Wie in der Ehe, wie in der Kinderliebe, so sehen wir auch in jenen Gesellschaften, daß der stärkere Geist daselbe innige Vergnügen in der Leitung und Beschützung des schwächeren findet, welches dieser in der Hingebung und in dem Gehorsam gegen jenen genießt. Verwandte Gefühle und Empfindungen, in einem Kreise mehrerer Menschen erregt, verstärken sich durch gegenseitige Mittheilung, wie wir täglich in unsern Schauspielen sehen. Die Lust, die aus diesen Mittheilungen entspringt, ist oft so mächtig, daß sie zur Begeisterung, ja selbst zum Fanatismus führen kann, der alle Gemüther bis zu einer Art von Wuth erhitzt und indem er sich mit einer unwiderstehlichen Kraft verbreitet, wahrhaft entsetzliche Wirkungen hervorbringt, wie unsere Geschichtsbücher

bezeugen. Es ist möglich, daß die oft eben so unbesiegbare Sympathie, die die Muskeln unseres Gesichtes verzieht, wenn wir einen andern lachen oder gähnen sehen, aus derselben Quelle entspringt, die jene Erscheinungen hervorbringt. Unsere Augenlieder schließen sich schnell und unwillkürlich, beynabe noch ehe die Wirkung unsers Willens sie ereilt, vor einer plötzlich auffallenden Gefahr, und wir machen die Bewegung des Ausweichens vor einem uns beznennenden Hindernisse, wenn wir gleich noch weit von ihm entfernt sind, ja selbst zuweilen schon bey der bloßen Erzählung einer ähnlichen Begebenheit. Warum ist es manchen Menschen gefährlich, auf einem schmalen Stege oder auf einem Brete zu gehen, das über einen Fluß oder einen Abgrund gelegt ist, während derselbe Mensch keinen Anstand nimmt, es zu betreten, wenn es auf ebenem Boden liegt? Manche andere, wenn sie in einer solchen Lage, oder auf der schmalen Mauer eines hohen Gebäudes stehen, fühlen ein beynabe unwiderstehliches Verlangen, sich von derselben herabzustürzen, obschon sie sich zugleich vor den Folgen eines solchen Sturzes entsetzen.

Die Erzählung großer und edler Thaten erregt nicht nur die Begeisterung, sondern auch den Trieb der Nachahmung, besonders bey jungen Gemüthern, die für alle Eindrücke noch empfänglicher sind. Andere, weniger glücklich organisirte Menschen, werden von Criminal- und Räubergeschichten zu einer ähnlichen Nachäferung angereizt, und in dieser Beziehung ist die Bekanntmachung solcher Geschichten schon oft schädlich geworden. Hieher gehört auch jene geheimnißvolle Verbindung der äußeren Gegenstände und ihrer inneren Eindrücke, durch welche wir, wenn wir nur einen derselben erfassen, sogleich auch alle übrigen, die mit jenen das erstemal sich gemeinschaftlich dargestellt haben, wieder zurückrufen, und wir haben vielleicht sehr Unrecht, diese Erscheinung bloß dem Gedächtnisse zuzuschreiben.

Der Eindruck, welchen wir nur durch einen einzigen unserer Sinne erhalten, ist gewöhnlich von demjenigen sehr verschieden, der durch die Zusammenwirkung mehrerer Sinne entsteht. Der Staarblinde macht sich gleich nach der Operation gewiß eine

ganz andere Vorstellung von den ihn umgebenden Gegenständen, so lange er sie bloß sehen kann, als wenn er später dieselben Eindrücke auch durch den Sinn des Gefühls verdeutlicht und berichtigt hat. Das Bild, welches jene Gegenstände auf der Netzhaut seines Auges entwerfen, bleibt immer dasselbe, aber das innere Bild, welches sich die Seele von jenem äußern Bilde des Auges macht, ist durch diese Berichtigung der übrigen Sinne ein anderes geworden. Wir alle haben wahrscheinlich in den ersten Jahren unserer Kindheit die Eindrücke unseres Gesichtes auf eine ähnliche Weise durch das Gefühl berichtigen müssen, und wir sehen später nur, wie uns früher dieses Gefühl zu sehen gelehrt hat. Wo aber dieser letzte Sinn nicht hinreicht, bleiben viele durch ihr ganzes Leben im Dunkeln. So können sich nur wenige überzeugen, daß die Gestirne des Himmels, weil sie sie nicht mit ihren Händen erreichen können, in der That in einer unermesslichen Entfernung von uns abstehen. Zwey leuchtende Kugeln von gleichem Durchmesser, aber in ungleicher Entfernung von uns, werden uns in der Nacht ungleich groß erscheinen; sobald aber die Sonne über ihnen aufgeht und auch die zwischenliegenden Gegenstände beleuchtet, wird sofort, in unserem Geiste, die nähere verkleinert und die anderen vergrößert, bis beyde, in unserer Schätzung, als nahe gleich große Kugeln erscheinen. So erscheint uns derselbe Mensch in der Entfernung von fünf oder von zehn Klaftern gleich groß, obschon in der That das Bild desselben auf der Retina unseres Auges in dem einen Falle noch einmal so groß ist, als in dem anderen. Aus einem ähnlichen Grunde erscheint uns der Mond in der Nähe des Horizonts, wo so viele Zwischengegenstände ihn von uns trennen, größer, als im Zenithe, obschon er in der That, wie unsere Messungen zeigen, im Zenithe größer ist. Eben so erscheint uns eine Spinne, die sich nahe vor unserem Auge von dem Zweige eines Baumes herabläßt, auf dem ersten Bilde in der Größe eines Vogels, aber wie man die Verbindung derselben mit dem Zweige erkennt, wird auch sofort der erste Eindruck jenes Bildes auf seine wahre Größe reduziert. Alle diese und ähnliche Phänomene lassen sich weder, wie einige geglaubt haben, durch ihre Zurückführung

auf die Operationen der Urtheilskraft, noch auf die des Gedächtnisses vollständig erklären: sie gehören jener geistigen Physiologie oder jener Psychologie an, von der wir oben gesprochen haben, und deren Gesetze für uns noch größtentheils im Dunkeln liegen.

Eine entfernte Schrift, die wir durchaus nicht lesen können, wird sofort lesbar, wenn ein anderer die Worte derselben ausspricht: das innere Bild, wenn ich so sagen darf, steigt über den äußern Eindruck des Auges herauf, und erleuchtet und berichtigt denselben. Die unverständliche Stimme eines Schauspielers wird vollkommen verständlich, wenn man die Worte liest, die er so eben declamirt, ja oft schon, wenn man durch ein Glas die Gesichtszüge des Sprechenden deutlicher sieht. Aus demselben Grunde erscheinen uns ganz gewöhnliche Gegenstände im Dunkeln oder im Zwielichte unter den seltsamsten Gestalten und der Schrecken, den ihr Anblick erregt, erweitert sie oft bis zum Entsetzlichen. In diesem gereizten Zustande, oder auch bey einer Krankheit dieses innern Sinnes, werden die Eindrücke desselben oft viel lebhafter, als die des äußern Sinnes: denn, hält man diese Erscheinungen der Einbildungskraft für wirkliche Gegenstände, so wird man ein Geisterseher, ein Visionär, der im wachenden Zustande träumt. Diese krankhaften Affectionen irgend eines jener innern Organe liegen ohne Zweifel auch den Mondsüchtigen zu Grunde. Während ihrer Träume ist vielleicht einer ihrer äußern Sinne, z. B. der des Gefühls, nicht völlig eingeschlafen, er ist noch empfänglich für äußere Eindrücke, die, auf seinen innern Sinn fortgeführt, seine Träume modificiren und selbst seine körperlichen Bewegungen im Schläfe leiten.

Oft glauben solche Kranke die Stimmen fremder Personen zu hören oder sie selbst vor sich zu sehen. In den Gegenden an der Nordseite des kaspischen Meeres hat diese Krankheit eine Art von epidemischem Charakter: sie befällt oft ganz gesunde Personen, führt aber meistens, wenn sie länger dauert, zum Tode. Bonnet erzählt von seinem Großvater, einem Greise voll von Gesundheit, daß er solche Erscheinungen in Menge hatte, an denen er sich selbst ergögte, nachdem er bemerkt hatte, daß sie keinen nachtheiligen Einfluß auf seine Gesundheit äußern. Die

ähnlichen Visionen eines noch lebenden berühmten Staatsministers mit dem grünen Manne sind allgemein bekannt.

Die Geschichte solcher Personen, mit unparteyischer Wahrhaftigkeit erzählt, würde nicht minder interessant seyn und uns eben so wichtige Aufschlüsse über jenen innern Menschen geben, als die Darstellung unseres Lebens im Schlafe und während den Träumen. Gewiß liegt hier noch vieles verborgen, das uns größere Aufklärungen über uns selbst geben könnte, als wir von den unfruchtbaren Feldern erwarten dürfen, auf welchen sich bisher unsere Psychologen und Metaphysiker herumgetrieben haben, Aufklärungen, zu welchen uns vielleicht eine genauere Beobachtung des in unsern Zeiten so viel besprochenen thierischen Magnetismus die Bahn öffnen könnte.

Selbst in denjenigen Operationen jener innern Organisation, die wir ganz dem eigentlichen Gedächtnisse zuzuschreiben pflegen, liegt noch viel Geheimnißvolles, das einer genaueren Untersuchung würdig ist. Wer hat nicht schon die höchst sonderbaren inneren Bewegungen gefühlt, die wir gleichsam unwillkürlich vornehmen, wenn wir uns an einen Namen oder an eine Sache erinnern wollen, die uns nur zum Theil entschwunden ist und deren Benennung, wie man zu sagen pflegt, uns auf der Zunge liegt. Es ist, als ob man das verloren Geglaubte nicht in dem ganzen Kopfe, sondern nur in einem Theile, in einem bestimmten Winkel desselben suchte, etwa wie man eine in einem Kasten verlegte Schrift nur in gewissen Fächern desselben sucht, wo sie, einer gewissen unerklärbaren Ahnung zu Folge, liegen soll. Eindrücke der frühesten Jugend erhalten sich oft bis in das späteste Alter, und sind selbst dann noch lebhaft, wenn die der männlichen Jahre schon längst wieder verschwunden sind. Es scheint, als ob jene ersten Eindrücke, die sich so tief in unser Gedächtniß gegraben haben, nur die Zeit der Reife der späteren abwarten wollten, um dann mit ihrer ganzen jugendlichen Frische wieder hervorzutreten, so wie die Gestirne, wenn das Licht der Sonne für uns erlischt, mit neuem Glanze aus dem Dunkel der Nacht hervorbrechen. Warum behält man die Dinge, die man am Abend eines Tages gehört oder gelernt hat, am sichersten?

Warum vergißt man im Gegentheile jene am leichtesten, die man, etwa aus einem Buche, unmittelbar vor dem Einschlafen erhalten hat? Warum werden verwickelte Untersuchungen, wenn man sie einige Tage ruhen läßt und sich absichtlich ganz von ihnen entfernt, nach dieser Zeit oft so klar und deutlich, als sie durch eine fortgesetzte, angestrengte Untersuchung nie geworden seyn würden? Wir bewundern oft, und mit Recht, das ungewöhnlich starke Gedächtniß einzelner Menschen. Aber wenn man bedenkt, welche Anzahl von Dingen, auch das gewöhnlichste Gedächtniß eines jeden Menschen enthält, so müssen wir erstaunen, wie so viele Gegenstände in einem so kleinen Raume ohne Verwirrung Platz haben können. Einem Sängler auf unsern Bühnen z. B. muß jede Sylbe seiner Rolle, ihr Ton, ihr Zeitmaß und die Geberde, welche sie begleiten soll, klar und lebhaft in seinem Gedächtnisse vorschweben, und die morgige Rolle muß allen diesen unübersehbaren Vorrath in den dunklen Hintergrund zurückstellen, um einem neuen, ähnlichen Heere von Vorstellungen und Erinnerungen ihre Stelle abzutreten. Alle diese endlosen Reihen liegen zu gleicher Zeit in seinem Gedächtnisse, und können, wie die Register einer Orgel, gezogen werden, um je nach dem Bedürfnisse die eine oder die andere in den Vordergrund treten und alle andern übertönen zu lassen.

Diese und unzählige andere Operationen unsers innern Sinnes werden alle durch Wiederholung geläufiger und nachdrücklicher zugleich. Aus dieser reichen Quelle der Psychologie entspringen unsere Gewohnheiten, unsere Gebräuche und selbst unsere Sitten. Aus ihr allein läßt sich erklären, warum, was bey dem einen Volke allgemein als gut, schicklich und der Natur angemessen erscheint, von dem andern als schlecht betrachtet und oft mit Abscheu zurückgestoßen wird. Die Gladiatorenspiele der alten Römer und die Menschenopfer der Wilden erregen Entsetzen auch bey jenen Nationen, die, wegen bloßen Meinungen, Tausende ihrer Brüder mit Lust dem langsamen Tode auf ihren Scheiterhaufen übergeben und sich, jenen gegenüber, für sehr gesittete Menschen halten. Wenn man den bejammernswürdigen Zustand der Sklaven auf den westindischen Zuckerplantagen, oder den der für im-

mervährenden Zeiten der Verachtung übergebenen Kaste der Paria, ja wenn man, um nur bey uns selbst stehen zu bleiben, die Zeiten der Leibeigenschaft, oder der Inquisition oder der Kreuzzüge zurückruft, so kann man sich nur mit Mühe enthalten, in die bittersten Thränen und Vorwürfe über ein Geschlecht auszubringen, das sich vor allen andern Geschöpfen der Erde durch seine Vernunft zu unterscheiden glaubt, und das durch bloße Meinungen, Vorurtheile und Gewohnheiten bis zu solchen entsetzlichen Extremen verleitet werden kann.

Übrigens wird man, bey einiger Aufmerksamkeit auf sich selbst, diejenigen Äußerungen, welche der bloßen Gewohnheit angehören, leicht von denjenigen unterscheiden, welche gleichsam aus der innern und eigenthümlichen Organisation eines jeden Menschen hervorgehen. Wir haben vielleicht sehr unrecht, zu sagen, daß die Thiere allein von der Natur mit Instinct versehen worden sind, da das, was jenem innern Organismus des Menschen angehört, mit Recht denselben Namen erhalten soll. Die Anhänglichkeit der Mutter an ihren Säugling beruht so wenig auf bloßen Vernunftgründen, als die Anhänglichkeit an das andere Geschlecht, wie schon die große Macht beweist, welche diese Triebe, selbst gegen die laute Stimme der Vernunft, auf uns äußert. Sa bloße Ansichten und Meinungen, oft genug wiederholt, graben sich so tief in das Innere des Menschen ein, daß sie, wie mehrere äußere körperliche Dispositionen, von dem Vater auf die Kinder sich vererben und von einer Generation zur andern verpflanzen. Durch bloße Erziehung und Mittheilung wird man diese sonderbaren Phänomene nicht erklären, da sie ganz eigentlich der innern Structur des Menschen und so zu sagen dem Knochensysteme seines geistigen Wesens angehören. Ich habe eine Familie gekannt, in welcher seit mehreren Generationen alle Kinder, wenn sie die Zeit ihrer Pubertät erreichten, Schwärmer bis zum Wahnsinn wurden, während sie vor und nach dieser Periode für die nüchternsten Menschen galten. Drey Töchter einer Mutter, alle unbescholtene und wackere Frauen, die das Glück ihrer Männer machten, hatten von ihrer Mutter die Sonderbarkeit geerbt, während den Zeiten ihrer Hoffnung jede Scheere,

Nadel und andere weibliche Utensilien, die sie bey ihren Freundinnen fanden, sich anzueignen. Sie konnten dem Verlangen nicht widerstehen und alles, was sie über sich vermochten, bestand darin, daß sie diese Dinge in den folgenden Tagen unter der Ausrede der Vergesslichkeit an ihre frühern Besitzerinnen wieder zurückschickten. Ihre Freundinnen kannten diese Unarten, die anfangs das Gerüde der ganzen Stadt waren und die man später bloß zu belächeln sich begnügte, da das durchaus sehr geregelte Betragen dieser Frauen außer jenen Zeiten über allen Verdacht erhaben war.

Nicht weniger merkwürdig ist die Leichtigkeit, mit welcher unsere Organe, wenn sie oft geübt werden, ihre Functionen selbst ohne unsern Willen fortsetzen. Wer im Gehen von einer ihm interessanten Idee ergriffen wird, fängt an zu gesticuliren, ja laut zu sprechen, ohne daß er sich dessen bewußt wäre, und setzt mechanisch seinen Weg fort, ohne es zu wollen. Soldaten, die auf ermüdenden Märschen von dem Schlafe überfallen werden, gehen in demselben Tacte immer weiter und erwachen erst, wenn sie ein Hinderniß aufhält. Die Ärzte haben eine Krankheit bemerkt, in welcher der Mensch, einmal in Bewegung gesetzt, nicht innehalten kann, wenn er sich nicht an einen ihm begegnenden Gegenstand festhält. Überhaupt wird man von den Ärzten besonders wichtige Aufschlüsse über diesen Theil der Physiologie erwarten dürfen, wenn sie einmal ihre fortgesetzte Aufmerksamkeit auf diesen Gegenstand gerichtet haben werden, da die merkwürdigsten Phänomene dieser Art besonders deutlich in krankhaften Zuständen hervortreten.

Diese Erscheinungen der letzten Art zeigen sich allerdings nur bey solchen Operationen, an die wir durch eine öftere Wiederholung schon gewöhnt worden sind. Allein eben diese Gewohnheit ist es, welche über uns, ohne daß wir uns dessen immer deutlich bewußt sind, eine so große Kraft ausübt, und die daher wohl eine nähere Untersuchung verdient. Bey einer unparteyischen Betrachtung unsrer Handlungen und beynabe aller unsrerer geistigen Functionen, werden wir finden, daß keinesweges, wie wir uns wohl sonst selbstgefällig zu schmeicheln pflegen, Überle-

gung, Vernunftgründe und freye Wahl uns dazu bestimmen, sondern daß die Hauptquellen derselben aus einer Art von Instinct und aus Gewohnheit entspringen. Fast bey jeder unserer Überlegungen geht ein gewisses dunkles, aber sehr mächtig bestimmendes Gefühl vorher, das Menschen von glücklicher, innerer Organisation nur selten trügt; das uns sicherer führt, als alle künstliche Vernunftschlüsse, und das uns gewöhnlich allein zu führen pflegt, da das, was wir Vernunftschlüsse nennen, meistens nur spät nach jenem Gefühle eintritt und mehr dazu dient, jene erste Sensation zu controlliren. Die gütige Natur ließ es bey den Menschen nicht leicht auf die Vernunft allein ankommen, und der Trieb kömmt oft schon über uns, wenn wir mit dem schulgerechten Beweise und mit der eigentlichen Einsicht noch nicht zur Hälfte fertig sind. Das Brauchbarste in unserem Leben haben wir gewöhnlich von Niemand gelernt; es wohnt uns bey, und wir kamen dazu, ohne selbst recht zu wissen, auf welche Art. Am deutlichsten sehen wir dieses in jenen Dingen, in welchen wir eigentlich gar nichts, als eben auf diese Weise, sehen, ich meine, in unsern sogenannten hyperphysischen Wissenschaften. Denn besteht nicht z. B. unsere ganze Metaphysik eigentlich doch nur darin, uns dessen etwas deutlicher, oder wenn man lieber will, etwas gelehrter bewußt zu seyn, was wir alle auch ohne Metaphysik schon längst gewußt haben?

Ein nicht minder kräftiger Hebel, als dieses instinctartige Gefühl, ist aber auch, wie gesagt, die Gewohnheit. Es würde gewiß sehr schlecht um uns stehen, wenn wir alles nur aus Überzeugung thun sollten, und wenn wir zu nichts früh schon gewöhnt würden. Gar vieles und vielleicht das Beste in jedem Menschen ist nur durch eine beständige Gewohnheit von Kindheit an entstanden. Wenn unsere Erzieher, die der jungen so wie der alten Kinder, diese Wahrheit, die sie bisher wohl im Munde geführt, aber demungeachtet noch nicht völlig begriffen haben, ganz einsehen und sie ins praktische Leben einführen werden, so wird die moralische Welt eine ganz andere Gestalt annehmen. Pascal, der diese Macht der Gewohnheit wohl kannte, äußert sich darüber in seinen bekannten Pensées auf folgende

Art: „Wenn sich die Menschen nicht absichtlich verkennen wollen, so müssen sie nur gestehen, daß sie, selbst bey ihren geistigen Functionen, eben sowohl Seele als Körper sind, und daß sich diese beyden Elemente im Leben nicht so leicht trennen lassen, als man gewöhnlich glaubt. Das Ding, was in uns die eigentliche Überzeugung von einer Sache hervorbringt, ist durchaus nicht immer das, was wir den Beweis derselben nennen. Wie wenig Sachen gibt es, die für uns wirklich bewiesen sind?“ — Diese Beweise überzeugen nur den Verstand, aber Instinct und Gewohnheit reißt uns ganz mit sich fort. Die Gewohnheit leitet endlich sogar den Verstand und zieht den Geist nach sich, ohne daß dieser es bemerkt. Wer hat uns bewiesen, daß morgen die Sonne wieder aufgehen wird, oder daß wir alle einmal sterben werden. Und doch, was wird so allgemein, so ohne alle Ausnahme von Jedermann geglaubt, als eben dieses? Erfahrung und Gewohnheit sind es also, die uns überzeugen, und die gar keine Zweifel aufkommen lassen, so wie sie es sind, die den Türken und den Heiden, die den Handwerker und den Soldaten machen. Zu ihnen muß man im praktischen Leben immer wieder zurückkommen, um unsere Geschäfte und Verrichtungen abzukürzen und uns nicht dem Mangel an den eigentlichen Beweisen auszusetzen, die uns so leicht verlassen, wo wir ihrer am dringendsten bedürfen. Wer diese Beweise immer gegenwärtig haben will, macht sich zu viel zu thun und kommt nie zu Ende. Die Gewohnheit geht sicherer zugleich und schneller: ohne Gewalt, ohne Kunst, ohne Demonstration leitet sie uns zum Ziele, so daß wir durch sie auf eine uns natürliche und gleichsam mechanische Weise alle unsere Geschäfte viel besser verrichten, als wir dieß je durch die bloße Theorie hätten thun können. Es reicht nicht hin, eine Sache bloß aus Gründen und aus Überzeugung anzunehmen; auch unsere Sinne, auch der körperliche Theil unsers Wesens muß zu dieser Annahme bewogen werden: beyde Theile müssen zugleich in Bewegung gesetzt werden, der Verstand durch Gründe, die aber einmal gekannt zu haben für das ganze Leben hinreicht, und die Sinne durch die Gewohnheit, die dann ihre wohlthätigen Wirkungen bis an unsern Tod verbreitet.

Es ist sehr wünschenswerth, daß unsere Philosophen, statt den unfruchtbaren Speculationen, mit welchen sie sich gewöhnlich beschäftigen, diese für den Menschen eben so wichtigen als interessanten Gegenstände weiter verfolgen und genauer untersuchen wollten. Noch haben wir zu wenig Erfahrungen dieser Art gesammelt, um darauf die Theorie jener höhern Physiologie mit Sicherheit gründen zu können. Aber das Feld ist groß, und reich die Ernte für Schnitter, die Muth und Kraft in sich fühlen, das Werk zu beginnen und uns allen ein großes Thor zu neuen Kenntnissen, eine neue Welt zu öffnen, besonders wenn durch ihre Bemühungen ihre Nachfolger, unsere spätern Enkel, in den Stand gesetzt werden, auf den gesammelten Vorrath von Erfahrungen und Beobachtungen die Kraft ihrer Analyse anzuwenden, und dadurch erst der neuen Erkenntniß diejenige Sicherheit zu geben, welche wir in allen denjenigen Wissenschaften und nur in denen besitzen, die einer mathematischen Unterlage fähig sind. Die allerdings nicht geringen Schwierigkeiten, dieses jetzt von uns noch so ferne Ziel zu erreichen, werden uns in unsern Bemühungen eben so wenig zurückhalten, als es die vielleicht nicht geringern Hindernisse zu thun vermochten, welche sich der Entdeckung des Gesetzes der allgemeinen Schwere entgegengesetzt haben. Seit dieser großen und für alle Zeiten merkwürdigen Entdeckung hat man gefunden, daß dieses Gesetz nicht nur die Bewegung der himmlischen Körper in dem endlosen Weltraume genau darstellt, sondern daß es auch, unter zweckgemäßen Modificationen, die Anordnung der kleinsten, die Körper constituirenden Elemente und die regelmäßige Bildung der Krystalle, aus denen sie bestehen, in sich schließt: warum sollte nicht auch jene Bewegung der thierischen Nerven denselben Gesetzen der Dynamik unterliegen, und so gleichsam die dreifache uns umgebende Welt einen einzigen, gemeinschaftlichen Ursprung haben? Bereits scheinen mehrere Erfahrungen diese Bemerkung zu bestätigen. Die Bewegungen, welche jene Nervenvibrationen dem Muskelsysteme, und durch dasselbe den äußern, fremden Körpern mittheilen, sind alle, wie Entwicklungen elastischer Federn, der Art, daß dabey der gemeinschaftliche Schwerpunct unsers eigenen

und der bewegten fremden Körper, dem bekannten Grundsatz der Mechanik zu Folge, unbeweglich bleibt. Auch jene Vibrationen scheinen sich, ohne Störung oder Verwirrung, eine über die andere zu verbreiten, wie wir dieses bey den Wellen unserer Gewässer und selbst unserer Atmosphäre bemerken. Diese Vibrationen theilen sich den Umstehenden mit, wie sich die Schwingungen eines tönenden Körpers den sie umgebenden Gegenständen mittheilen. Wie es aber auch mit diesen jetzt noch im tiefen Dunkel liegenden Gegenständen und mit ihrer Beleuchtung in einer wahrscheinlich noch sehr fernen Zukunft sich verhalten mag, uns genüge es, diese Zukunft wenigstens geahndet, und uns der Wahrheit, die uns vielleicht immer versagt ist, so viel es unsere schwachen Kräfte vermochten, genähert zu haben.

---

## Anmerkungen.

---

### I. Absolute Wahrscheinlichkeit.

Wenn es unter einer Anzahl von  $N$  gleich möglichen Fällen  $n$  Fälle, die irgend einem Ereignisse günstig, also auch  $n' = N - n$  diesem Ereignisse nicht günstige Fälle gibt, so ist, nach dem oben angeführten Grundsatz, die Wahrscheinlichkeit  $w$ , daß ein günstiger Fall eintrete,

$$w = \frac{n}{N}$$

und eben so die Wahrscheinlichkeit  $w'$ , daß ein ungünstiger eintrete,

$$w' = \frac{n'}{N}$$

und die Summe beyder Wahrscheinlichkeiten  $w + w' = 1$  ist gleich der Einheit d. h. der Gewißheit, daß entweder ein günstiger oder ein ungünstiger Fall eintreten wird.

Ex. I. Von drey Urnen A, B, C enthält eine nur schwarze und die beyden andern nur weiße Kugeln. Welches ist die Wahrscheinlichkeit  $w$ , daß man, wenn man auf Gerathewohl aus einer dieser drey Urnen eine Kugel nimmt, eine schwarze Kugel ziehen wird?

Wenn man nicht weiß, welche dieser drey Urnen die schwarzen Kugeln enthält, so gibt es hier drey gleich mögliche Fälle, von denen aber nur einer ein günstiger ist; also ist  $w = \frac{1}{3}$ . Wenn man aber z. B.

weiß, daß die Urne A nur weiße Kugeln enthält, so wird man die Hand gewiß nur an eine von den beyden andern legen; der möglichen Fälle werden also nur mehr zwey seyn, von denen einer ein günstiger

ist; also wird auch die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen,  $w = \frac{1}{2}$  seyn. In jenem Falle wird man also 1 gegen 3, in diesem aber 1 gegen 2 wetten können, daß eine schwarze Kugel gezogen wird. Weiß man endlich, daß beyde Urnen A und B nur weiße Kugeln enthalten, so wird man die Hand nur an die dritte Urne C legen, und da hier gewiß eine schwarze Kugel gezogen wird, so wird auch die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses gleich der Einheit seyn. In der That ist in dem letzten Falle nur ein günstiger und auch nur ein möglicher Fall, also die Wahrscheinlichkeit gleich der Einheit oder gleich der Gewißheit.

Ex. II. Man habe zwey sechsseitige Würfel A und B, wo jede der Seiten nach der Reihe mit 1, 2. . bis 6 bezeichnet ist.

Die Wahrscheinlichkeit, daß man auf einen Wurf mit dem einen Würfel A die Zahl 2 und mit dem andern B die Zahl 5 wirft, ist gleich  $\frac{1}{36}$  und eben so jede für zwey andere Zahlen, weil überhaupt, wie die folgende Tafel zeigt, 36 gleich mögliche Fälle und unter diesen nur ein günstiger ist.

A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1
1	2	2	2	3	2	4	2	5	2	6	2
1	3	2	3	3	3	4	3	5	3	6	3
1	4	2	4	3	4	4	4	5	4	6	4
1	5	2	5	3	5	4	5	5	5	6	5
1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6	6

Eben so ist die Wahrscheinlichkeit, daß man überhaupt, ohne Rücksicht auf die einzelnen Würfel, mit einem Wurf beyder Würfel die Zahl 2 und 5 werfe, gleich  $\frac{2}{36}$ , aber die Wahrscheinlichkeit, daß man zwey gleiche Zahlen 1, 1 oder 2, 2 . . werfe, ist nur  $\frac{1}{36}$ .

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Summe der auf einen Wurf geworfenen Zahlen gleich 7 sey, ist  $\frac{6}{36}$ ; die Wahrscheinlichkeit, daß sie gleich 5 sey, ist gleich  $\frac{4}{36}$ , daß sie gleich 4 sey, gleich  $\frac{3}{36}$  u. s. w.

## II. Relative Wahrscheinlichkeit.

Ist  $N = n + n'$  die Anzahl aller möglichen Fälle, und unter ihnen  $n$  die Anzahl einer Art und  $n'$  die einer andern Art, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fall der ersten Art eintrete, wenn nur diese beyden Arten berücksichtigt werden, gleich

$$\frac{n}{n + n'}$$

und die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fall der zweyten Art eintrete, ist gleich

$$\frac{n'}{n + n'}$$

Rechnet man wieder  $w = \frac{n}{N}$  und  $w' = \frac{n'}{N}$  die absoluten Wahrscheinlichkeiten, so ist

$$\frac{n}{n + n'} = \frac{w}{w + w'} \quad \text{und} \quad \frac{n'}{n + n'} = \frac{w'}{w + w'}$$

oder die relative Wahrscheinlichkeit eines Falles ist gleich der absoluten Wahrscheinlichkeit desselben Falles, dividirt durch die Anzahl der absoluten Wahrscheinlichkeiten.

Ex. I. Zwey Personen spielen mit zwey Würfeln unter der Bedingung, daß, indem alle übrigen Fälle unbeachtet bleiben, der Erste gewinnen soll, wenn er mit einem Wurf 7, und der Andere, wenn er 4 wirft, so ist (nach I.) die absolute Wahrscheinlichkeit, daß der Erste gewinne,  $w = \frac{6}{36}$  und die des Zweyten

$w' = \frac{3}{36}$ ; also ist die relative Wahrscheinlichkeit, daß der Erste

gewinne,  $\frac{w}{w + w'} = \frac{6}{9}$  und die, daß der Zweyte gewinne,

$\frac{w'}{w + w'} = \frac{3}{9}$  oder ihre Wahrscheinlichkeit zu gewinnen ver-

halte sich wie 6 : 3 oder wie 2 : 1.

Ex. II. Eine Urne enthält  $m$  weiße,  $n$  rothe,  $p$  blaue,  $q$  grüne Kugeln u. s. f., und es sey  $m + n + p + q \dots = T$ .

Die absolute Wahrscheinlichkeit, daß man auf den ersten Zug eine weiße ziehen wird, ist  $\frac{m}{T}$  und eben so für eine rothe  $\frac{n}{T}$  u. s. w.

Aber die relative Wahrscheinlichkeit, daß man eher eine weiße, als eine rothe ziehen wird, ist gleich

$$\frac{\frac{m}{T}}{\frac{m}{T} + \frac{n}{T}} = \frac{m}{m+n}$$

also auch die Wahrscheinlichkeit, daß man eher eine rothe als eine weiße ziehen wird, gleich

$$\frac{\frac{n}{T}}{\frac{m}{T} + \frac{n}{T}} = \frac{n}{m+n}$$

und die Summe beyder Wahrscheinlichkeiten ist wieder gleich der Einheit.

### III. Wahrscheinlichkeit für mehrere Arten von günstigen Fällen.

Von N möglichen Fällen seyen n für einen, n' für einen zweyten, n'' für einen dritten Fall u. s. f. günstig, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß irgend einer dieser günstigen Fälle eintrete, gleich

$$\frac{n + n' + n'' + \dots}{N}$$

oder gleich  $w + w' + w'' + \dots$

wenn wieder  $w = \frac{n}{N}$ ,  $w' = \frac{n'}{N}$ ,  $w'' = \frac{n''}{N}$  ... die absoluten Wahrscheinlichkeiten dieser Fälle sind.

Ex. Die absolute Wahrscheinlichkeit, mit zwey Würfeln 7 zu werfen, war gleich  $\frac{6}{36}$ , und die absolute Wahrscheinlichkeit, 8 zu werfen, ist  $\frac{5}{36}$ . Also ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Wurf entweder 7 oder 8 zu werfen, gleich

$$\frac{6}{36} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36} = 0.305.$$

Die absolute Wahrscheinlichkeit, 9 zu werfen, ist  $\frac{4}{36}$ , also ist die Wahrscheinlichkeit, auf einen Wurf entweder 7 oder 8 oder 9 zu werfen, gleich

$$\frac{6 + 5 + 4}{36} = \frac{15}{36} = 0.417.$$

#### IV. Wahrscheinlichkeit des wiederholten Eintreffens eines günstigen Falles.

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereigniß, dessen absolute Wahrscheinlichkeit gleich  $w = \frac{n}{N}$  ist,  $m$  mal nach einander eintrete, ist gleich

$$\left(\frac{n}{N}\right)^m \text{ oder gleich } w^m.$$

Gr. Mit einem Würfel die Zahl 1 zu werfen, ist die absolute Wahrscheinlichkeit gleich  $\frac{1}{6}$ . Also ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel zweymal nach einander die Zahl 1 zu werfen, gleich  $\frac{1}{6^2}$  und dreyimal, gleich  $\frac{1}{6^3}$  u. s. f.

Die absolute Wahrscheinlichkeit, mit zwey Würfeln auf einen Wurf die Zahlen 1 und 1 zu werfen, ist  $\frac{1}{36}$ , also ist die Wahrscheinlichkeit, mit ihnen zweymal nach einander die Zahlen 1 und 1 zu werfen, gleich  $\frac{1}{36^2} = 0.0008$ .

Die absolute Wahrscheinlichkeit, mit zwey Würfeln auf einen Wurf zwey gleiche Zahlen überhaupt zu werfen, ist  $\frac{6}{36}$ . Also ist die Wahrscheinlichkeit, daß dieser Fall viermal hinter einander eintreffe, gleich

$$\left(\frac{6}{36}\right)^4 = \frac{1}{1296} = 0.0008.$$

#### V. Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens mehrerer Ereignisse.

Von  $N$  Fällen einer Art seyen  $n$  günstige; von  $N'$  Fällen einer andern Art  $n'$  günstige u. s. w.; also die absolute Wahrscheinlichkeit dieser Fälle

$$w = \frac{n}{N} \quad w' = \frac{n'}{N'} \quad w'' = \frac{n''}{N''} \text{ u. s. w.}$$

Dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß von diesen günstigen Fällen mehrere zugleich eintreffen,

für zwey Fälle  $\frac{n}{N} \cdot \frac{n'}{N'} = w \cdot w'$ ,

für drey Fälle  $\frac{n}{N} \cdot \frac{n'}{N'} \cdot \frac{n''}{N''} = w \cdot w' \cdot w''$  u. s. f.

Ex. I. Die absolute Wahrscheinlichkeit, daß mit zwey Würfeln 8  
geworfen werde, war  $\frac{5}{36}$  und die, daß 9 geworfen werde,

ist  $\frac{4}{36}$ , also ist die Wahrscheinlichkeit, daß mit zwey Würfeln  
in zwey Würfen 8 und 9 geworfen werden, gleich

$$\frac{5}{36} \cdot \frac{4}{36} = \frac{5}{324} = 0.0154.$$

Ex. II. Wenn A und B jeder zwey und C nur einen Würfel wirft, so ist  
die absolute Wahrscheinlichkeit, daß A zwey gleiche Zahlen werfe,  
gleich  $\frac{6}{36}$ ; die Wahrscheinlichkeit, daß B keine gleichen Zahlen

werfe, gleich  $\frac{30}{36}$  und die Wahrscheinlichkeit, daß C die Zahl  
6 werfe, gleich  $\frac{1}{6}$ . Also ist auch die Wahrscheinlichkeit, daß

alle drey Fälle zugleich eintreffen, gleich

$$\frac{6}{36} \cdot \frac{30}{36} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{216} = 0.0231.$$

Ex. III. Wenn ein Spiel von 32 Karten in vier Theile, nach den  
vier Farben getheilt wird, so daß jeder Theil nur eine Farbe  
enthält: welches ist die Wahrscheinlichkeit, daß man auf den  
ersten Zug eine Figur von gegebener Farbe ziehe?

Die absolute Wahrscheinlichkeit, daß man die Hand auf das rechte  
von den vier Packeten lege, ist  $\frac{1}{4}$ . Da aber dieses Packet 8 Karten

enthält, von welchen nur 3 günstig sind, so ist die Wahrscheinlich-  
keit, daß man aus diesem Packete die wahre Karte ziehe, gleich  $\frac{3}{8}$ ,

also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich  $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8}$ , oder gleich

$\frac{3}{32} = 0.094$ . Da nämlich nur eines der 4 Packete die wahre Karte  
enthält und da von den 8 Karten jedes Packets nur 3 günstige sind, so  
muß man die  $\frac{3}{8}$  nur von dem vierten Theile aller Karten nehmen.

Ex. IV. Eine Urne enthält 2 weiße und 1 schwarze Kugel. Eine

andere enthalte 4 weiße und 1 schwarze. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, daß man auf den ersten Zug aus einer dieser Urnen eine weiße Kugel ziehen wird?

Die absolute Wahrscheinlichkeit, daß man die Hand an die erste Urne legen wird, ist  $\frac{1}{2}$ , und die Wahrscheinlichkeit, daß dann eine weiße Kugel gezogen wird, ist  $\frac{2}{3}$ , also ist die Wahrscheinlichkeit des

Zusammentreffens beyder Fälle gleich  $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ . Ganz eben so hat man bey der zweyten Urne für die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens beyder Fälle  $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$ . Da aber diese zwey Wahrscheinlichkeiten  $\frac{1}{3}$  und  $\frac{2}{5}$ , beyde für dasselbe günstige Ereigniß gehören, so hat man (nach III) für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15} = 0.733.$$

Ex. V. Das vorhergehende Beyspiel allgemeiner zu machen, habe man

a Urnen, deren jede m weiße und n schwarze Kugeln hat, und a' Urnen, deren jede m' weiße und n' schwarze Kugeln hat, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß man auf den ersten Zug eine weiße Kugel ziehen wird, gleich

$$\frac{a}{a + a'} \cdot \frac{m}{m + n} + \frac{a'}{a + a'} \cdot \frac{m'}{m' + n}.$$

Ex. VI. Hat man m Fälle, die dem Ereignisse A günstig sind und n Fälle, die dem Ereignisse B günstig sind, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß zwey Versuche nach einander

A und A geben, gleich . . .  $\frac{m^2}{(m + n)^2}$

A und B „ „ . . .  $\frac{m n}{(m + n)^2}$

B und A „ „ . . .  $\frac{n m}{(m + n)^2}$

B und B „ „ . . .  $\frac{n^2}{(m + n)^2}$

Sieht man also nicht auf die Ordnung, in welcher diese Ereignisse einander folgen, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß man z. B. mit einem Würfel in zwey Würfen

A und A geben, gleich . . . . .	$\frac{m^2}{(m+n)^2}$
A . B oder B . A . . . . .	$\frac{2 m n}{(m+n)^2}$
B und B . . . . .	$\frac{n^2}{(m+n)^2}$

Eben so ist die Wahrscheinlichkeit, daß, ohne auf die Ordnung der Seiten A, B zu sehen, drey Würfe

3mal A geben gleich . . . . .	$\frac{m^3}{(m+n)^3}$
2mal A und 1mal B . . . . .	$\frac{3 m^2 n}{(m+n)^3}$
1mal A und 2mal B . . . . .	$\frac{3 m n^2}{(m+n)^3}$
3mal B . . . . .	$\frac{n^3}{(m+n)^3}$

Man bemerkt hier sogleich die Ähnlichkeit dieser Ausdrücke mit denen des Binomiums. Es sey daher, um dieß fortzusetzen, der Kürze wegen  $f = \frac{m+n}{m}$  und  $g = \frac{m+n}{n}$ , und die Reihe gegeben

$$f^p + p \cdot f^{p-1} g + \frac{p \cdot p - 1}{1 \cdot 2} \cdot f^{p-2} g^2 + \frac{p \cdot p - 1 \cdot p - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot f^{p-3} g^3 + \dots$$

so ist das erste Glied dieser Reihe die Wahrscheinlichkeit, daß man mit p Würfeln  $p^{mal}$  die Zahl A treffe; das zweyte Glied drückt die Wahrscheinlichkeit aus, mit p Würfeln  $(p-1)^{mal}$  A und  $1^{mal}$  B zu treffen; das dritte Glied aber gibt die Wahrscheinlichkeit, mit p Würfeln  $(p-2)^{mal}$  A und  $2^{mal}$  B zu treffen u. s. w.

Ex. VII. Welches ist aber die Wahrscheinlichkeit, daß man in p Würfeln wenigstens nicht weniger als  $(p-1)^{mal}$  A treffe?

Da in dem gesuchten Ereignisse auch das enthalten ist, wo man in p Würfeln  $p^{mal}$  A trifft, so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich der Summe der zwey ersten Glieder jener Reihe, also gleich

$$f^p + p \cdot f^{p-1} g$$

und eben so ist die Wahrscheinlichkeit, daß man in p Würfeln nicht weniger als  $(p-2)^{mal}$  A und nicht weniger als  $2^{mal}$  B treffe, gleich der Summe der drey ersten Glieder jener Reihe u. s. f.

Ex. VIII. Um darauf einige besondere Fälle anzuwenden, suchen wir die Wahrscheinlichkeit, mit einem 6seitigen Würfel in 4 Würfeln die Zahl 6 wenigstens  $2^{mal}$  zu werfen.

Hier ist  $m = 1$ ,  $n = 5$  und  $p = 4$ , also die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich der Summe der drey ersten Glieder jener Reihe, oder gleich

$$\left(\frac{1}{6}\right)^4 + 4 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6} + \frac{4 \cdot 3}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{171}{1296} \text{ oder}$$

nahe gleich  $\frac{1}{7}$ .

Suchen wir noch die Wahrscheinlichkeit, mit 4 Würfeln die Zahl 6 wenigstens einmal zu werfen, so ist  $m$ ,  $n$  und  $p$ , wie zuvor, und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist die Summe der vier ersten Glieder jener Reihe, oder gleich

$$\frac{171}{1296} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3} \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{671}{1296}$$

und da diese Zahl  $\frac{671}{1296}$  etwas größer als  $\frac{1}{2}$  ist, so ist es auch wahrscheinlicher, daß die Zahl 6 in 4 Würfeln einmal, als daß sie gar nicht vorkommen wird.

## VI. Wahrscheinlichkeiten für wechselseitige Ereignisse.

Für  $N$  mögliche Fälle sey  $w = \frac{n}{N}$  die absolute Wahrscheinlichkeit eines, und  $w' = \frac{n'}{N}$  die eines andern Ereignisses, so ist also  $w$  die Wahrscheinlichkeit, daß das 1<sup>te</sup> Ereigniß eintreffe, und  $1 - w$  die Wahrscheinlichkeit, daß das 1<sup>te</sup> Ereigniß nicht eintreffe.

Eben so ist (nach V)

$w w'$  die Wahrscheinlichkeit, daß beyde Ereignisse I und II zugleich eintreffen, und  $(1 - w) w'$  die Wahrscheinlichkeit, daß I nicht, aber wohl II eintreffe;  $(1 - w') w$  die Wahrscheinlichkeit, daß I, aber nicht II eintreffe, und  $1 - (1 - w)(1 - w') = w + w - w w'$  die Wahrscheinlichkeit, daß I oder daß, wenn I nicht, wenigstens II, daß also von beyden wenigstens eines eintreffe.

Ex. Die Wahrscheinlichkeit, mit zwey Würfeln auf den ersten Wurf 9, oder wenn dieß nicht geschieht, wenigstens auf den zweyten Wurf 9 zu treffen, ist gleich

$$1 - \left(1 - \frac{4}{36}\right) \left(1 - \frac{4}{36}\right) = 0.2099.$$

Die Wahrscheinlichkeit aber, auf den ersten Wurf 9, oder wenn dieß nicht geschieht, auf den zweyten Wurf 8 zu treffen, ist gleich

$$1 - \left(1 - \frac{4}{36}\right) \left(1 - \frac{5}{36}\right) = 0.2345.$$

Eben so hat man, wenn noch ein drittes Ereigniß, dessen absolute Wahrscheinlichkeit  $w'' = \frac{n''}{N}$  ist, hinzukömmt, für die Wahrscheinlichkeit, daß I, oder wenn dieß nicht geschieht, daß II, oder wenn auch dieses nicht geschieht, daß dann wenigstens III eintreffe, den Ausdruck  $1 - (1 - w)(1 - w')(1 - w'')$  u. s. f.

Ex. Die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln im ersten Wurfe die Zahl 7, oder, wenn dieß nicht geschieht, im zweyten die Zahl 7, oder wenn auch dieses nicht geschieht, wenigstens in dem dritten Wurfe die Zahl 7 zu werfen, ist gleich

$$1 - \left(1 - \frac{6}{36}\right) \left(1 - \frac{6}{36}\right) \left(1 - \frac{6}{36}\right) = 1 - \left(\frac{30}{36}\right)^3 = 0.421.$$

Sucht man dieselbe Wahrscheinlichkeit für die Zahl 2, so ist sie gleich  $1 - \left(1 - \frac{1}{36}\right)^3 = 0.081$ , also viel kleiner.

Diese Ausdrücke lassen sich unmittelbar auf die wahrscheinliche Dauer der Verbindungen zweyer oder mehrerer Personen in Witwen- und Waisenanstalten anwenden. Ist nämlich  $w$  die Wahrscheinlichkeit, daß eine  $a$  jährige Person A noch  $p$  Jahre leben wird und ist eben so  $w'$  die Wahrscheinlichkeit, daß eine  $b$  jährige Person B noch  $p$  Jahre, und  $w''$ , daß eine  $c$  jährige Person C noch  $p$  Jahre leben wird u. s. w., welche Wahrscheinlichkeiten man aus den bekannten Mortalitätstafeln findet, so ist  $w w'$  die Wahrscheinlichkeit, daß A und B noch  $p$  Jahre beysammen leben oder die Gedauer. Eben so ist  $1 - w w'$  die Wahrscheinlichkeit, daß von diesen beyden Personen nach  $p$  Jahren eine schon todt ist;  $w(1 - w')$  die Wahrscheinlichkeit, daß nach  $p$  Jahren A noch lebe und B schon todt ist;  $w'(1 - w)$  die Wahrscheinlichkeit, daß nach  $p$  Jahren A schon todt ist und B noch lebe;  $(1 - w)(1 - w')$  die Wahrscheinlichkeit, daß nach  $p$  Jahren beyde schon todt sind und  $1 - (1 - w)(1 - w')$  die Wahrscheinlichkeit, daß nach  $p$  Jahren noch nicht beyde todt sind, sondern daß wenigstens einer, oder vielleicht beyde noch leben.

Eben so ist  $w w' w''$  die Wahrscheinlichkeit, daß nach  $p$  Jahren alle drey Personen A, B, C noch beysammen leben;  $w w'(1 - w'')$  die Wahrscheinlichkeit, daß nach  $p$  Jahren A und B noch leben, aber C

schon todt ist;  $(1-w)(1-w')w''$  die Wahrscheinlichkeit, daß nach  $p$  Jahren A und B schon todt sind, aber C noch lebe;  $1-ww'w''$  die Wahrscheinlichkeit, daß nach  $p$  Jahren wenigstens eine von diesen drey Personen todt ist;  $1-(1-w)(1-w')(1-w'')$  die Wahrscheinlichkeit, daß nach  $p$  Jahren noch nicht alle drey todt sind, sondern daß wenigstens eine, vielleicht zwey, vielleicht alle drey noch leben;  $(1-w)(1-w')(1-w'')$  die Wahrscheinlichkeit, daß nach  $p$  Jahren alle drey schon todt sind u. s. w.

## VII. L o t t e r i e n.

- A. Eine Lotterie enthalte  $n$  Nummern, von welchen bey jeder Ziehung  $r$  Nummern gezogen werden. Man hat  $a$  Nummern gesetzt. Welches ist die Wahrscheinlichkeit  $w$ , daß diese  $a$  Nummern alle herauskommen?

$$\text{Es ist } w = \frac{r(r-1)(r-2)\dots(r-a+1)}{n(n-1)(n-2)\dots(n-a+1)}$$

In unsern gewöhnlichen Lotterien ist  $n = 90$  und  $r = 5$  also

$$w = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \dots (6-a)}{90 \cdot 89 \cdot 88 \dots (91-a)}$$

1. Hat man also nur eine Nummer gesetzt, so ist  $a = 1$  und die Wahrscheinlichkeit, daß sie heraus komme

$$w = \frac{1}{18} = 0,0555.$$

2. Für zwey Nummern ist  $a = 2$  und daher die Wahrscheinlichkeit, mit zwey gesetzten Nummern eine Umbe zu erhalten

$$w = \frac{5 \cdot 4}{90 \cdot 89} = \frac{2}{801} = 0,002497.$$

Eben so ist die Wahrscheinlichkeit, mit drey Nummern eine Terne zu erhalten

$$w = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{90 \cdot 89 \cdot 88} = \frac{1}{11748} = 0,000\ 085$$

und mit vier Nummern eine Quaterne

$$w = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87} = \frac{1}{511038} = 0,000\ 001\ 957$$

und endlich mit fünf gesetzten Nummern eine Quinterne

$$w = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} = \frac{1}{43949268} = 0.000\ 000\ 023$$

B. Die Wahrscheinlichkeit, daß a gesetzte Nummern alle und überdies noch in einer bestimmten Ordnung herauskommen, ist

$$w = \frac{r(r-1)(r-2)\dots(r-a+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots a \cdot n(n-1)(n-2)\dots(n-a+1)}$$

C. Setzt man endlich  $a = r$ , so ist die Wahrscheinlichkeit, daß die sämtlichen r Nummern, welche in einer Ziehung gezogen werden, voraus bestimmte Nummern sind (nach A)

$$w = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r}{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}$$

und daß sie überdies noch nach einer bestimmten Ordnung herauskommen (nach B)

$$w = \frac{1}{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}$$

D. Eine Lotterie bestehe wieder aus n Nummern, von welchen bey jeder Ziehung r gezogen werden. Welches ist die Wahrscheinlichkeit w, daß von a gesetzten Nummern eine bestimmte Anzahl, z. B. b Nummern herauskomme?

$$\text{Sey } A = \frac{(n-a)(n-a-1)(n-a-2)\dots(n-a-[r-b-1])}{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}$$

$$B = a(a-1)(a-2)\dots(a-b+1)$$

$$C = r(r-1)(r-2)\dots(r-b+1)$$

so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$w = \frac{A \cdot B \cdot C}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots b}$$

Ex. 1. Man hat zwey Nummern gesetzt. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, daß von ihnen gewiß eine herauskommt? Ist wie zuvor  $n = 90$  und  $r = 5$ , so ist für dieses Beispiel  $a = 2$  und

$$b = 1, \text{ also } A = \frac{85}{90 \cdot 89}, B = 2 \text{ und } C = 5, \text{ also}$$

$$w = \frac{85}{801} = 0.10611$$

Ex. 2. Hat man drey Nummern gesetzt, so ist  $a = 3$  und die

Wahrscheinlichkeit, daß von ihnen eine herauskommt, gibt

$$b = 1, A = \frac{85 \cdot 84}{90 \cdot 89 \cdot 88}, B = 3, C = 5$$

$$\text{also } w = \frac{85 \cdot 84}{6 \cdot 89 \cdot 88} = 0.15194.$$

Sollen zwey herauskommen, so ist  $b = 2$  und

$$w = \frac{85}{66 \cdot 89} = 0.01447.$$

Sollen endlich alle drey herauskommen, so ist  $b = 3$  und

$$w = \frac{1}{11748} \text{ wie in A.}$$

E. Welches ist aber die Wahrscheinlichkeit, daß von zwey gesetzten Nummern wenigstens eine, vielleicht auch alle beyde, heraus kommen?

Diese Wahrscheinlichkeit ist (nach N. III. dieser Anmerkungen) die Summe der Wahrscheinlichkeit von D Gr. 1 und A Gr. 2, also gleich

$$\frac{2}{801} + \frac{85}{801} = \frac{87}{801} = 0.10861$$

und eben so ist, nach dem Vorhergehenden, die Wahrscheinlichkeit, daß von drey gesetzten Nummern wenigstens eine, oder zwey oder vielleicht alle drey herauskommen, gleich

$$0.00008 + 0.15194 + 0.01447 = 0.16649$$

F. Ist  $x$  die Summe, welche die Lotterie dem Spieler, wenn er gewinnt, bezahlen sollte, und  $m$  das, was der Spieler auf seine Nummern gesetzt hat, so ist

$$x = \frac{m}{w}$$

wo  $w$  die in dem Vorhergehenden angeführten Wahrscheinlichkeiten des Gewinns bezeichnet. So sollte die Lotterie nach Nr. A zahlen

für einen Estatto 18 m	die Lotterie de France	17 m
» » Ambo 400 m	zahlt aber nur	270 m
» » Terno 11748 m		5500 m
» » Quaterno 511038 m (hear, hear !)		60000 m u. f. f.

G. Verschließen wir diese Bemerkungen mit folgender Aufgabe. In einer Lotterie von  $n$  Nummern werden bey jeder Ziehung  $r$  Nummern gezogen. Welches ist die Wahrscheinlichkeit  $w$ , daß in  $k$  auf einander folgenden Ziehungen alle  $n$  Nummern herausgekommen seyn werden?

$$\text{Es ist } w = 1 - n \left( \frac{n-r}{n} \right)^k + \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2} \left( \frac{n-r \cdot n-r-1}{n \cdot n - 1} \right)^k \\ - \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left( \frac{n-r \cdot n-r-1 \cdot n-r-2}{n \cdot n - 1 \cdot n - 2} \right)^k + \text{u. s. f.}$$

Ex. Für  $n = 90$ ,  $r = 5$  und  $k = 100$  ist  $w = 0.741$ , also um  $\frac{1}{5}$  größer als  $\frac{1}{2}$ . Für  $k = 85$  wird nahe  $w = \frac{1}{2}$ .

### VIII. Zeugen aussagen.

Ex. I. Eine Urne enthält  $n$  Nummern. Eine Person, die bey der Ziehung einer dieser Nummern gegenwärtig war, sagt aus, daß die Nummer  $a$  gezogen worden sey. Welches ist die Wahrscheinlichkeit  $w$ , daß diese Zahl  $a$  in der That gezogen worden ist?

Sey  $p$  die Wahrhaftigkeit des Zeugen, oder die Wahrscheinlichkeit, daß er nicht zu betriegen suche, und  $r$  die Sicherheit des Zeugen oder die Wahrscheinlichkeit, daß er sich selbst nicht betriege, d. h. sich nicht irre.

Dies vorausgesetzt findet man

$$w = pr + \frac{(1-p)(1-r)}{n-1}$$

Ist also  $r = 1$ , d. h., irrt sich der Zeuge nicht, so ist  $w = p$  oder die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist gleich der Wahrhaftigkeit des Zeugen. Eben so ist für  $p = 1$  die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich  $w = r$ .

Ist  $n$  eine sehr große Zahl, so ist nahe  $w = pr$ , oder die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist gleich der Wahrhaftigkeit des Zeugen, multiplicirt in die Sicherheit desselben.

Dabey wurde vorausgesetzt, daß der Zeuge, wenn er sich irrt, eben so leicht auf eine, als auf eine andere der in der That nicht herausgekommenen Nummern verfallen kann. Wenn aber einige von ihnen unter einander eine größere Ähnlichkeit haben und daher leichter verwechselt werden können; wenn der Zeuge für bestimmte Zahlen ein besonderes Interesse hat u. dgl., so werden die vorhergehenden Resultate nicht mehr richtig seyn.

Ex. II. Die Urne enthalte  $n - 1$  schwarze und eine weiße Kugel. Ein Zeuge sagt aus, es sey eine weiße Kugel gezogen worden.

Welches ist die Wahrscheinlichkeit  $w$ , daß in der That eine weiße Kugel gezogen worden ist?

Haben wieder  $p$  und  $r$  die vorige Bedeutung und setzt man

$$q = p r + (1 - p)(1 - r)$$

so findet man

$$w = \frac{q}{q + (1 - q)(n - 1)}$$

und eben so ist die Wahrscheinlichkeit  $w'$ , daß nicht eine weiße, sondern eine schwarze Kugel gezogen wurde

$$w' = 1 - w = \frac{(1 - q)(n - 1)}{q + (1 - q)(n - 1)}$$

Ist die Zahl  $n$  der Kugeln sehr groß, so wird die Aussage der Zeugen sehr zweifelhaft, wie der Ausdruck für  $w$  zeigt, wenn nicht zugleich  $q$  sehr nahe an 1 ist. Je größer aber die Zahl der Kugeln ist, desto außerordentlicher erscheint auch das von den Zeugen ausgesagte Ereigniß, zum Beweise, wie sehr die Außerordentlichkeit einer Begebenheit die Aussage der Zeugen schwächt.

Die Größe  $q$  zeigt die Wahrscheinlichkeit an, daß der Zeuge wirklich die Wahrheit gesagt habe, so wie sie ihm erschien. Daß er also weder betrogen noch sich geirrt, oder daß er zugleich betrogen und sich geirrt habe.

Ex. III. Eine Urne enthalte eine Anzahl  $n$  weißer und eine andere Urne eine eben so große Anzahl schwarzer Kugeln. Man zieht aus einer dieser Urnen eine Kugel und wirft sie in die andere Urne, und zieht endlich aus dieser andern Urne wieder eine Kugel.

Ein Zeuge sagt aus, daß in der ersten Ziehung eine weiße Kugel gezogen worden sey, und ein zweyter Zeuge sagt aus, daß auch in der zweyten Ziehung eine weiße Kugel gezogen worden sey. Welches ist die Wahrscheinlichkeit  $w$ , daß wirklich in beyden Ziehungen eine weiße Kugel gezogen worden sey?

Bezeichnet wieder  $q$  die Wahrscheinlichkeit, daß der erste Zeuge und  $q'$  die, daß der zweyte die Wahrheit gesagt habe, wo also wieder  $q = p r + (1 - p)(1 - r)$  und  $q' = p' r' + (1 - p')(1 - r')$  ist, so sey der Kürze wegen

$$Q = q q' + (1 - q)(1 - q')$$

und es ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$w = \frac{q q'}{Q + (1 - Q)n}$$

also wieder diese Wahrscheinlichkeit desto kleiner, je größer die Anzahl

der Kugeln, d. h. je außerordentlicher das von den Zeugen ausgesagte Ereigniß ist.

Gr. IV. Zwey Zeugen sagen über irgend ein Ereigniß übereinstimmend dasselbe aus. Welches ist die Wahrscheinlichkeit  $w$ , daß dieses Ereigniß in der That statt hatte?

Eine Urne enthalte  $z. B. n$  Nummern, und beyde Zeugen sagen aus, daß die Nummer  $a$  gezogen worden sey.

Sind  $p$  und  $p'$  die Grade der Wahrhaftigkeit der beyden Zeugen und nimmt man  $r = r' = 1$ , d. h. nimmt man an, daß sie sich nicht geirrt haben, so findet man die Wahrscheinlichkeit, daß die Nummer  $a$  in der That gezogen worden ist

$$w = \frac{1}{1 + \frac{(1-p)(1-p')}{(n-1)pp'}} \dots (A)$$

also auch die Wahrscheinlichkeit, daß sie nicht gezogen worden ist

$$w' = 1 - w = \frac{1}{1 + \frac{(n-1)pp'}{(1-p)(1-p')}}$$

Ist  $n = 2$ , so sind beyde Wahrscheinlichkeiten einander gleich und man hat

$$w = w' = \frac{pp'}{pp' + (1-p)(1-p')}$$

und dieß ist überhaupt der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit eines von zwey Zeugen übereinstimmend ausgesagten Ereignisses, wenn das Eintreffen und Nichteintreffen dieses Ereignisses gleich möglich ist.

Ist die Wahrhaftigkeit beyder Zeugen gleich groß, so ist die letzte Wahrscheinlichkeit gleich

$$\frac{p^2}{p^2 + (1-p)^2}$$

und überhaupt: sagen  $r$  gleich wahrhafte Zeugen die Existenz eines solchen Ereignisses aus, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß dasselbe in der That statt gehabt habe, gleich

$$\frac{p^r}{p^r + (1-p)^r}$$

vorausgesetzt, daß die Existenz und Nichtexistenz des Ereignisses gleich möglich ist.

Ist die Anzahl  $n$  der Nummern der Urne sehr groß, so wird in der Gleichung (A) die Größe  $w$  nahe gleich 1 oder es ist ungemein wahrscheinlich, daß die Nummer  $a$  in der That gezogen worden ist.

2  
0

Die Ursache davon ist, weil die Zeugen, wenn sie ja betrogen wollten, nicht alle dieselbe Nummer angegeben haben würden.

Gr. V. Eine Urne enthalte  $n$  Nummern. Ein erster Zeuge sagt aus, daß die Nummer  $a$ , ein zweyter aber, daß die Nummer  $b$  gezogen worden sey. Die Wahrhaftigkeit dieser beyden Zeugen sey  $p$  und  $p'$  und ihre Sicherheit wieder  $r = r' = 1$ .

Dies vorausgesetzt, ist die Wahrscheinlichkeit  $w$ , daß die Zahl  $a$  in der That gezogen worden ist,

$$w = \frac{p(1-p')}{1-pp' - \frac{(1-p)(1-p')}{n-1}}$$

Ist  $n = 2$ , d. h., ist die Existenz der beyden Ereignisse, welche die Zeugen aussagen, eben so wahrscheinlich, als die Nichtexistenz derselben, und ist überdies  $p = p'$ , so wird die letzte Gleichung  $w = \frac{1}{2}$  und daher auch die Wahrscheinlichkeit  $w'$  des Gegentheils, daß nämlich die Zahl  $b$  gezogen worden ist,  $w' = 1 - w = \frac{1}{2}$ , also  $w = w'$ , weil beyde Zeugnisse sich gegenseitig aufheben.

Wird überhaupt ein Ereigniß dieser Art von  $f$  Zeugen bejaht und von  $g$  Zeugen verneint, und ist die Wahrhaftigkeit aller Zeugen gleich groß, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß dieses Ereigniß sich in der That zugetragen habe, gleich

$$\frac{p^{f-s}}{p^{f-s} + (1-p)^{f-s}}$$

d. h. diese Wahrscheinlichkeit ist, nach Gr. IV. eben so groß, als wäre sie von  $f - g$  Zeugen bestätigt worden.

Gr. VI. Nehmen wir nun an, die Aussage, daß z. B. aus einer Urne mit  $n$  Nummern die Nummer  $a$  gezogen worden, sey nach und nach, auf dem Wege der Tradition, durch  $r$  Zeugen bestätigt worden, so ist die Wahrscheinlichkeit  $w$ , daß dieses Ereigniß in der That statt gehabt hat,

$$w = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \frac{(np_1 - 1)(np_2 - 1)(np_3 - 1) \dots (np_r - 1)}{(n-1)^r} \dots (E)$$

wo  $p_1, p_2, p_3 \dots$  die Wahrhaftigkeit des 1, 2, 3 . . . Zeugen bezeichnet.

Ist  $n$  unendlich groß, so ist

$$w = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_r$$

Ist  $n = 2$ , d. h., ist die Existenz des Ereignisses eben so möglich, als die Nichtexistenz desselben, so ist

$$w = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (2p_1 - 1) (2p_2 - 1) (2p_3 - 1) \dots (2p_r - 1)$$

Überhaupt, je weiter diese Reihe der Traditionen sich erstreckt, desto mehr nähert sich der Werth von  $w$  der Gränze  $\frac{1}{n}$ , d. h. der absoluten Wahrscheinlichkeit (Nr. I), daß die Nummer  $a$  in der That gezogen worden ist. Das Glied  $\frac{n-1}{n}$ ;  $\frac{(np_1 - 1)}{(n-1)}$  . . . ist also das, um was diese Reihe von Zeugen die absolute Wahrscheinlichkeit des Ereignisses vergrößert. Man sieht wie die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses durch spätere Zeugen immer vermindert wird, da die Werthe der Brüche  $\frac{np_1 - 1}{n - 1}$ ;  $\frac{np_2 - 1}{n - 1}$  . . . immer kleiner werden, indem die Werthe der Größen  $p_1, p_2, p_3 \dots$  mit der Zeit immer abnehmen. Die Folge der Zeiten schwächt daher die Verlässlichkeit unserer historischen Nachrichten eben so, wie sie allmählig die Denkmähler zerstört, welche wir den wichtigen Personen und Ereignissen der Geschichte aufgestellt haben. Die Buchdruckerkunst ist in der That eines der mächtigsten Mittel, diesem Verfall entgegenzuwirken. Aber auch sie wird nicht verhindern können, daß endlich nach Jahrtausenden von physischen und moralischen Revolutionen, welche die Oberfläche der Erde zu allen Zeiten in Bewegung setzen, selbst diejenigen Thatfachen der Geschichte dunkel und zweifelhaft werden, die jetzt allgemein als vollkommen gewiß anerkannt sind.

### IX. Wahrscheinlichkeit der Urtheilssprüche.

Ist  $p + q$  die Anzahl der Richter eines Tribunals, von welchen  $p$  den Angeklagten verurtheilen und  $q$  ihn freisprechen, so ist die Wahrscheinlichkeit  $w$  eines in dem gesprochenen Urtheile zu befürchtenden Fehlers, wenn man der Kürze wegen  $a = p + q + 1$  setzt,

$$w = \frac{1}{2^a} \left[ 1 + a + \frac{a \cdot a - 1}{1 \cdot 2} + \frac{a \cdot a - 1 \cdot a - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \dots + \frac{a \cdot a - 1 \cdot a - 2 \dots (a - q + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots q} \right]$$

Wird zur Gültigkeit des Ausspruches die Unanimität der Stimmen gefordert, so ist  $q = 0$  und daher

$$w = \frac{1}{2^a}$$

Ex. Ist  $p = 5$ ,  $q = 3$  also  $a = 9$  so ist

$$w = \frac{1}{2^9} \left( 1 + 9 + \frac{9 \cdot 8}{2} + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{2 \cdot 3} \right) = \frac{1}{2^9} (130) = 0,254 \text{ wie}$$

im Text.

Ist die Anzahl der Richter gleich 8, also  $a = 9$  und wird die Unanimität der Stimmen gefordert, so ist

$$w = \frac{1}{2^9} = \frac{1}{512} = 0,00195.$$

Ist  $p = 90$  und  $q = 54$  also  $a = 145$ , so findet man

$$w = \frac{1}{773} = 0,0013$$

Ist  $p = 112$  und  $q = 100$ , so findet man  $w = \frac{1}{4,889} = 0,2045.$

