Anwendung der Differential-
rechnung auf Geometrie.

XI.

Tangenten, Normalen u. s. der ebenen Curven.

§. 87. (**Bedeutung der Differentialien in der Geometrie.**) Jede Funktion $y = fx$ einer veränderlichen Größe x kann als die Ordinate BM, CN ... (Fig. 31) einer ebenen krummen Linie MNP ... dargestellt werden, deren Absciſſe AB, AC ... jene veränderliche Größe x iſt.

Wenn man die Absciſſe $AB = x$ nach einander um dieselbe Größe $h = BC = CD = DE$ ... wachſen läßt, ſo daß $AB = x$, $AC = x + h$, $AD = x + 2h$ ... iſt, und wenn man die Endpunkte M, N, P ... der dieſen Absciſſen entſprechenden Ordinaten BM, CN, DP ... durch die geradlinigen Sehnen MN, NP, PQ ... verbindet, ſo entſteht dadurch das Polygon $MNPQ$ ..., welches ſich um ſo weniger von der gegebenen krummen Linie $MNPQ$ ... unterſcheiden wird, je mehr ſich die Punkte M, N, P, Q ... einander nähern. Dieſe krumme Linie wird die Gränze aller jener Polygone ſeyn, und was von dieſer äußerſten Gränze der Polygone geſagt werden kann, wird auch von der krummen Linie ſelbſt gelten.

Man ziehe nun die Linien Ma, Nb, Pc ... mit der Absciſſenaxe AX parallel, und verlängere die erſte geradlinige Sehne MN, ſo wie die zweyte NP, bis jene die Ordinate DP in p, und dieſe die Ordinate EQ in q ſchneidet, ſo daß alſo $aN = bp$ und $bP = cq$ iſt.

Dieß vorausgeſetzt, hat man, nach Taylor's Theorem:

$$BM = y,$$

$$CN = y + h\frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots,$$

$$DP = y + (2h)\frac{dy}{dx} + \frac{(2h)^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots \text{ u. ſ.},$$

alſo auch für die Differenzen dieſer Ordinaten:

$$Na = h\frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots,$$

$$Pb = h\frac{dy}{dx} + \frac{3h^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots \text{ u. f.},$$

und für die Differenz dieser Differenzen

$$Pb - Na = Pp = h^2\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots \text{ u. f.}$$

Verwandelt man also in diesen Ausdrücken die Größe h in dx, und nimmt dx unendlich klein an, so wird man, indem man die höheren Potenzen der Größe h oder dx gegen die niederen (nach §. 25) wegläßt, erhalten:

$$Na = dy, \quad Pp = d^2y \text{ u. f. w.}$$

Sey überhaupt $BM = y$, $CN = y'$, $DP = y''$, $EQ = y'''$ u. f. Bezeichnet man dann die Differenz von je zwey nächsten dieser Ordinaten durch Δy, so daß man hat $\Delta y = y' - y$, $\Delta y' = y'' - y'$, $\Delta y'' = y''' - y''$ u. f., und bezeichnet man eben so die Differenz von je zwey nächsten dieser Differenzen durch $\Delta^2 y$, so daß man hat $\Delta^2 y = \Delta y' - \Delta y$, $\Delta^2 y' = \Delta y'' - \Delta y'$, $\Delta^2 y'' = \Delta y''' - \Delta y''$ u. f., und fährt man so fort, so kann man diese Größen zur bequemeren Übersicht in folgende Tafel ordnen:

$$\begin{array}{ccccccccc}
y & & y' & & y'' & & y''' & & y^{IV} \text{ u. f.} \\
& \underset{\Delta y}{y'-y} & & \underset{\Delta y'}{y''-y'} & & \underset{\Delta y''}{y'''-y''} & & \underset{\Delta y'''}{y^{IV}-y'''} & \\
& & \underset{\Delta^2 y}{y''-2y'+y} & & \underset{\Delta^2 y'}{y'''-2y''+y'} & & \underset{\Delta^2 y''}{y^{IV}-2y'''+y''} & & \\
& & & \underset{\Delta^3 y}{y'''-3y''+3y'-y} & & \underset{\Delta^3 y'}{y^{IV}-3y'''+3y''-y'} & & & \\
& & & & \underset{\Delta^4 y.}{y^{IV}-4y'''+6y''-4y'+y} & & & &
\end{array}$$

Daraus sieht man, daß man hat

$$\begin{aligned}
\Delta y &= y' - y = Na, \\
\Delta y' &= y'' - y' = Pb, \\
\Delta y'' &= y''' - y'' = Qc \text{ u. f.}
\end{aligned}$$

und daß eben so ist

$\Delta^2 y = \Delta y' - \Delta y = Pb - Na = Pp$, oder $= y'' - 2y' + y$

$\Delta^2 y' = \Delta y'' - \Delta y' = Qc - Pb = Qz$, oder $= y''' - 2y'' + y'$

und auf dieselbe Weise

$$\Delta^3 y = \Delta^2 y' - \Delta^2 y = Qq - Pp \text{ oder } = (Qc - Pb) - (Pb - Na)$$
$$= Qc - 2Pb + Na$$
$$= y''' - 3y'' + 3y' - y$$
u. s. w.

wodurch daher die geometrische Bedeutung der Größen Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y \ldots$, oder, wenn man die Intervalle h zwischen den Ordinaten unendlich klein annimmt, die Bedeutung der Größen dy, $d^2 y$, $d^3 y$.. vollständig erläutert wird (vgl. §. 62). Zugleich sieht man aus dieser Darstellung, warum man die Größen BC, CD, DE... oder die ersten Differentialien der Abscissen einander gleich oder constant angenommen hat, weil sonst, wenn diese Größen unter sich willkürlich verschieden wären, die Werthe von dy, $d^2 y$, $d^3 y$... keine bestimmte Bedeutung mehr haben, und zur Untersuchung der Eigenschaften der krummen Linien nicht mehr geeignet seyn würden; so wie zugleich klar ist, daß man auch die Größen Na, Pb, Qc..., oder die Größen MN, NP, PQ... u. s. w., als unter sich gleich hätte annehmen können, um dieselbe Absicht zu erreichen, daß nämlich in jedem höheren Differentialausdruck irgend ein erstes Differential als constant angenommen werden muß, wenn dieser Ausdruck selbst eine bestimmte Bedeutung haben, und eine Anwendung zulassen soll (vergl. §. 38 und 85).

Vergleicht man endlich die auf einander folgenden Ausdrücke

$$dy = y' - y,$$
$$d^2 y = y'' - 2y' + y,$$
$$d^3 y = y''' - 3y'' + 3y' - y \quad \text{u. f.}$$

und

$$y' = y + dy,$$
$$y'' = y + 2dy + d^2 y,$$
$$y''' = y + 3dy + 3d^2 y + d^3 y \quad \text{u. f.},$$

so sieht man, daß man die Differentialien aller Ordnungen dy, $d^2 y$, $d^3 y$... durch die ursprünglichen Größen y, y', y''..., und daß man eben so diese ursprünglichen Größen y', y'', y'''... durch die Differenzialien aller Ordnungen, verbunden mit der ersten Größe y, ausdrücken kann, und daß der allgemeine Ausdruck in beyden Fällen nach dem bekannten Gesetze des Binomiums fortgeht, indem man hat

$$d^n y = y^n - n y^{n-1} + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} y^{n-2} - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} y^{n-3} + \ldots$$

und

$$y^n = y + n dy + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} d^2 y + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^3 y + \ldots$$

In dem Vorhergehenden wurde die krumme Linie gegen die Abscissenaxe A X erhoben oder convex angenommen. Es ist leicht, dieselben Ausdrücke auch für eine gegen diese Axe concave Curve zu finden.

§. 88. (**Differential des Bogens einer krummen Linie.**) Da wir die krummen Linien als Polygone von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten betrachten, so folgt daraus sofort, daß die geradlinige Sehne eines unendlich kleinen Bogens diesem Bogen selbst gleich ist.

In der That ist der Bogen ABCD (Fig. 32) unendlich klein, und zieht man die Sehnen AB, BC, CD, von welchen die erste und die letzte verlängert, sich in dem Punkte M begegnen, so ist offenbar die zweyte Sehne BC kleiner als ihr Bogen BC, und dieser Bogen BC ist wieder kleiner als die gebrochene Linie BMC. Es ist daher nur nöthig, zu zeigen, daß diese gebrochene Linie BMC und diese geradlinige Sehne BC eines unendlich kleinen Bogens nur mehr durch eine unendlich kleine Größe der zweyten Ordnung verschieden sind, und daß daher das Verhältniß dieser beyden Größen gleich der Einheit ist, woraus dann von selbst folgt, daß noch viel mehr das Verhältniß des Bogens zu seiner Sehne der Einheit gleich seyn muß.

Da nun die Winkel, welche die unendlich kleinen Sehnen in den Punkten B und C unter sich bilden, im Allgemeinen von zwey rechten Winkeln nur unendlich wenig verschieden seyn können, so wird der Winkel TMD, als Supplement des Winkels AMD, unendlich klein seyn. Sey dieser Winkel $TMD = \omega$, und überdieß $BM = a$, $MC = b$ und $BC = c$. Dieß vorausgesetzt, gibt das ebene Dreyeck BMC

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos.\omega, \quad \text{oder auch}$$
$$c^2 = (a+b)^2 - 4ab \sin.^2 \tfrac{1}{2}\omega.$$

Wir haben daher für das Quadrat des Verhältnisses der Sehne BC zu der gebrochenen Linie BMC

$$\frac{c^2}{(a+b)^2} = 1 - \frac{4ab}{(a+b)^2} \sin.^2 \tfrac{1}{2}\omega;$$

oder da (§. 33) für einen unendlich kleinen Bogen $\frac{\sin.\omega}{\omega} = 1$ ist

$$\frac{c^2}{(a+b)^2} = 1 - \left[1 - \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\right] \cdot \frac{\omega^2}{4}.$$

Da aber in diesem Ausdrucke der Coefficient von $\frac{\omega^2}{4}$, oder die

Größe

$$1 - \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2$$

nie unendlich groß werden kann, sondern vielmehr immer kleiner als Eins seyn muß, so ist die Größe

$$\left[1 - \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\right] \cdot \frac{\omega^2}{4}$$

immer wenigstens ein unendlich Kleines der zweyten Ordnung, und daher $\frac{c^2}{(a+b)^2}$; also auch $\frac{c}{a+b}$ gleich der Einheit.

Ist daher der Bogen $M\overset{\frown}{N}$ (Fig. 33) unendlich klein, so wird man dafür seine geradlinige Sehne MN substituiren können. Da aber

$$Ma = BC = dx \quad \text{und} \quad Na = dy$$

war, so ist in dem bey a rechtwinkligen Dreyecke MaN diese Sehne gleich $\sqrt{dx^2 + dy^2}$; also ist auch, wenn ds das Differential des Bogens einer Curve bezeichnet

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Ex. I. Für den Kreis hat man die Gleichung

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

wenn a den Halbmesser desselben bezeichnet. Dieß gibt

$$x\,dx + y\,dy = 0 \quad \text{oder} \quad dy = -\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Substituirt man diesen Werth von dy in dem allgemeinen Ausdrucke von ds, so erhält man

$$ds = \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

und dieß ist das gesuchte Differential des Bogens eines Kreises. Kann man den ursprünglichen endlichen Ausdruck angeben, durch dessen Differential dieser Ausdruck von ds entstanden ist, so wird man dadurch auch die Länge eines endlichen Kreisbogens zwischen zwey gegebenen Punkten desselben erhalten. Es ist aber oben (§. 34) gezeigt worden, daß man hat

$$d \,.\, \text{arc. sin.} \frac{bx}{a} = \frac{b\,dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}}.$$

Setzt man also $b = 1$, so erhält man, wenn man zu beyden Seiten durch a multiplicirt:

$$d \,.\, a \text{ arc. sin.} \frac{x}{a} = \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

woraus daher folgt, daß die Länge eines Kreisbogens, zu welchem die Abscisse x gehört, gleich

$$a \text{ arc. sin. } \frac{x}{a}$$

ist, wie bekannt. Setzt man in dem letzten Ausdrucke $x = 0$ und dann $x = a$, so hat man, da $\sin. 0 = 0$ und $\text{arc. sin. } 1 = \frac{1}{2}\pi$ ist, für die Länge des Quadranten des Kreises $\frac{1}{2} a \pi$, also auch für die ganze Peripherie desselben $4 \cdot \frac{1}{2} a \pi = 2 a \pi$ wie ebenfalls bekannt.

Ex. II. Für die Cycloïs hat man (Einl. §. 17, VI.)

$$y = a \text{ arc. cos.} \left(1 - \frac{x}{a}\right) + \sqrt{2ax - x^2}.$$

Differentiirt man diese Gleichung, so ist

$$dy = dx \sqrt{\frac{2a - x}{x}}$$

die Differentialgleichung der Cycloïs. Substituirt man diesen Werth von dy in den allgemeinen Ausdruck von ds, so hat man

$$ds = dx \sqrt{\frac{2a}{x}}$$

für das Differential des Bogens der Cycloïs. Da aber

$$d \cdot \sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

ist, so läßt sich von diesem Ausdrucke von ds der ursprüngliche Ausdruck, durch dessen Differentiation ds entstanden ist, sehr leicht angeben. Man hat nämlich

$$s = 2\sqrt{2ax},$$

und dadurch ist die Länge des Bogens der Cycloïs für jeden Werth von x bekannt. Nicht immer aber ist es so leicht, den ursprünglichen Ausdruck des Differentials ds anzugeben, oder, wie man sich auszudrücken pflegt, die gegebene Curve zu rectificiren. Selbst bey dem Kreise, in unserem ersten Beyspiele, kann diese Rectification nicht als gegeben vorausgesetzt werden, da man die Sinus für jeden Bogen, und die Größe π nur näherungsweise angeben kann, und da Ausdrücke der Art, wie sin. x, arc. sin. x u. f., wenn sie als bekannt angesehen werden sollen, die Berechnung unserer Tafeln der trigonometrischen Funktionen als bereits gegeben voraussetzen.

§. 89. (**Differential der Fläche einer krummen Linie.**) Nennt man F die Fläche, welche zwischen den geraden Linien BU, BM und UV, und zwischen dem Bogen MV einer krummen Linie (Fig. 31) enthalten ist, so wird der Theil BCNM derselben, welcher zwischen zwey einander unendlich nahen Ordinaten BM und CN enthalten ist, das Differential dieser Fläche seyn und durch dF bezeichnet werden.

Dieses Differential besteht aber aus dem Rechtecke BCaM und aus dem schon in §. 88 betrachteten rechtwinkligen Dreyecke MaN, dessen Hypotenuse die geradlinige Sehne $MN = ds$ ist. Da $BC = dx$ und $aN = dy$ ist, so ist die Fläche des Rechteckes $BCaM = ydx$, und die des Dreyeckes $MaN = \frac{1}{2}dxdy$, also ist auch das gesuchte Differential der Fläche der Curve

$$dF = ydx + \tfrac{1}{2}dxdy \quad \text{oder} \quad dF = (y + \tfrac{1}{2}dy)dx;$$

also auch, nach §. 25:

$$dF = ydx.$$

Ex. I. Für den Kreis ist $x^2 + y^2 = a^2$, also auch sofort

$$dF = dx\sqrt{a^2 - x^2},$$

und auch davon läßt sich der ursprüngliche Ausdruck in einer geschlossenen algebraischen Form nicht angeben.

Ex. II. Für die Apollonische Parabel hat man (Einl. 14.)

$$y^2 = 2px,$$

wo p den halben Parameter dieser Curve bezeichnet. Dieß gibt

$$dF = dx.\sqrt{2px},$$

und von dieser Größe ist, wie man leicht sieht, der ursprüngliche Ausdruck

$$F = \tfrac{2}{3}\sqrt{2p.x^3} = \tfrac{2}{3}xy,$$

so daß sich also jede zu einer gegebenen Abscisse x gehörende Fläche der Parabel angeben, oder, wie man sich auch auszudrücken pflegt, daß diese Curve quadrirt werden kann.

§. 90. (**Tangenten der Curven.**) Wenn man die geradlinige Sehne MN (Fig. 33), oder wenn man die Hypotenuse des unendlich kleinen Dreiecks MNa verlängert, bis sie die Abscissenaxe in T schneidet, so erhält man eine gerade Linie MT, die mit einer Seite des Polygons, welches die Gränze der krummen Linie darstellt, oder die mit einem Elemente dieser krummen Linie selbst zusammenfällt. Man nennt das Stück MT derselben die Tangente, und BT die Subtangente der Curve für den Punkt M, zu welchem die Abscisse AB = x und BM = y gehört. Man sieht daraus zugleich, daß die Tangente MT (Fig. 34) die Gränze der Secante NMS ist, und daß die Secante jene Gränze erreicht, wenn ihre beyden Durchschnittspunkte M und N mit der gegebenen Curve in einem einzigen Punkte M zusammenfallen.

Errichtet man auf dieser Tangente in dem Punkte M eine senkrechte Gerade MR (Fig. 33 oder 34), welche die Abscissenaxe in R schneidet, so heißt MR die Normale, und BR die Subnormale der Curve für den Punkt M.

Da die rechtwinkligen Dreyecke MaN, BMT und BMR ähnlich sind, so erhält man sofort folgende allgemeine Ausdrücke:

$$\text{Subtangente} = \frac{y\,dx}{dy}, \qquad \text{Tangente} = \frac{y\,ds}{dy},$$

$$\text{Subnormale} = \frac{y\,dy}{dx}, \qquad \text{Normale} = \frac{y\,ds}{dx},$$

wo, wie zuvor, $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ist. Man kann hier noch bemerken, daß man, wenn man nicht bloß die Größe, sondern auch die Lage der Subtangente berücksichtigen will, diese letzte gleich $-\frac{y\,dx}{dy}$ gesetzt werden soll.

Nennt man überdieß ω den Winkel $tMa = NMa$ oder MTA, den die Tangente mit der Abscissenaxe bildet, so hat man

$$\text{tang.}\,\omega = \frac{dy}{dx}, \text{ also auch}$$

$$\sin.\,\omega = \frac{dy}{ds} \text{ und } \cos.\,\omega = \frac{dx}{ds}.$$

Ex. Für die Parabel $y^2 = 2px$ findet man

$$\text{Subtang.} = 2x, \qquad \text{Tangente} = \frac{y}{p}\sqrt{p^2 + y^2},$$

$$\text{Subnorm.} = p, \qquad \text{Normale} = \sqrt{p^2 + y^2},$$

$$\text{und } \text{tang.}\,\omega = \frac{p}{y}.$$

§ 91. (**Andere Ableitung der Tangenten der Curven.**) Sey $y = fx$ die Gleichung irgend einer krummen Linie MN (Fig. 34) zwischen den Coordinaten x und y. Mit ihr sey eine andere Linie SMN, deren Gleichung zwischen den Coordinaten x' und y' gegeben ist, so verbunden, daß sie die erste Curve in zwey Punkten M und N schneide. Zieht man Ma mit der Abscissenaxe AC parallel, so ist klar, daß die

Werthe von BM und von aN in beyden Linien dieselben seyn müssen, d. h. daß man, wenn wieder $BC = h$ ist, die beyden Gleichungen hat:

$$y = y' \text{ und}$$

$$h\frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots = h\frac{dy'}{dx'} + \frac{h^2}{1.2}\frac{d^2y'}{dx'^2} + \ldots$$

Die letzte dieser Gleichungen, die sich in allen ihren Gliedern durch die Größe h dividiren läßt, geht, wenn man h unendlich klein annimmt oder wenn man die Gränze dieser Gleichung betrachtet, in $\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'}$ über. Durch diese Annahme von $h = o$ vereinigen sich aber die beyden Durchschnittspunkte M und N in einen einzigen M, und dieser Punkt M wird dadurch ein Berührungspunkt der beyden Linien, oder die Secante NMS geht in die Tangente tMT der Curve MN über, wie schon oben (§. 90) gezeigt worden ist. Dieses vorausgesetzt, wird man daher die beyden Bedingungsgleichungen haben:

$$y = y' \text{ und}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'}.$$

Ist nun die zweyte Linie, deren Gleichung zwischen x' und y' gegeben ist, eine Gerade, so hat man für sie

$$y' = ax' + b, \text{ also auch } \frac{dy'}{dx'} = a,$$

also sind auch jene beyden Bedingungsgleichungen

$$y = ax + b \text{ und}$$
$$a = \frac{dy}{dx}$$

woraus folgt $b = y - x\frac{dy}{dx}$. Dadurch sind also die beyden Größen a und b, und somit die Lage der zweyten geraden Linie, welche die erste in dem Punkte M berührt, vollkommen bestimmt, und man hat für die Gleichung dieser Tangente

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x),$$

in welcher x', y' die veränderlichen Größen der Gleichung sind, während die Größen x, y und $\frac{dy}{dx}$ aus der Gleichung der gegebenen Curve MN genommen werden, und sich auf den Punkt M dieser Curve beziehen, in welchen sie von der Geraden MT tangirt wird.

I. Daraus folgt sofort auch die Gleichung der Normale der

Curve MN in demselben Punkte M (Einl. §. 3, II.):

$$y' - y = -\frac{dx}{dy}(x' - x).$$

II. Nimmt man in diesen Gleichungen $y' = 0$, um den Durchschnittspunkt der Tangente oder der Normale mit der Axe der x zu finden, so hat man aus der ersten Gleichung

$$x' - x = -\frac{y\,dx}{dy}$$ für die Subtangente BT,

und aus der zweyten Gleichung

$$x' - x = \frac{y\,dy}{dx}$$ für die Subnormale BR, wie zuvor.

Ex. Für die Ellipse hat man (Einl. §. 14.)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

also ist auch $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$.

Substituirt man diesen Werth von $\frac{dy}{dx}$ in den beyden vorhergehenden Gleichungen, so erhält man für die Gleichung der Tangente der Ellipse

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1,$$

und für die der Normale

$$\frac{x}{a^2}(y' - y) - \frac{y}{b^2}(x' - x) = 0.$$

Für den Kreis des Halbmessers a ist die Gleichung der Tangente

$$xx' + yy' = a^2,$$

und die der Normale

$$xy' = x'y.$$

III. Um durch einen außer der Curve gegebenen Punkt, dessen Coordinaten α und β sind, an diese Curve eine Tangente zu ziehen, wird man in der Gleichung der Tangente der Curve die Größe $x' = \alpha$ und $y' = \beta$ setzen. So hatten wir für den Kreis $xx' + yy' = a^2$, also ist auch

$$\alpha x + \beta y = a^2,$$

und diese Gleichung mit der des Kreises oder mit $x^2 + y^2 = a^2$ verbunden, wird, durch Elimination, die Werthe von x und y oder die

Coordinaten des Punktes geben, in welchem die Tangente den Kreis berührt.

IV. Um an eine gegebene Curve eine Tangente zu ziehen, die mit der Abscissenaxe einen gegebenen Winkel θ bildet, wird man die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \text{tang.}\,\theta$$

mit jener der gegebenen Curve verbinden, um daraus wieder die Werthe von x und y zu finden. Für die Parabel z. B. ist $y^2 = 2px$, also auch $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$. Man hat daher die zwey Gleichungen

$$y^2 = 2px \quad \text{und} \quad \frac{p}{y} = \text{tang.}\,\theta,$$

woraus man findet

$$x = \frac{p}{2\,\text{tang.}^2\,\theta} \quad \text{und} \quad y = p\,\text{cotang.}\,\theta.$$

§. 92. **(Asymptoten der krummen Linien.)** Asymptote einer Curve wird diejenige Gerade genannt, welcher sich die Curve immer mehr nähert, ohne sie je zu erreichen.

Um die Entfernung der Punkte T und E von dem Anfangspunkte A (Fig. 34) zu finden, in welchem die Tangente MT von der durch den Punkt A gehenden Axe der x und der y geschnitten wird, setzt man in der Gleichung der Tangente

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x)$$

nach einander $y' = 0$ und $x' = 0$, wodurch man erhält

$$AT = x - \frac{y\,dx}{dy} \quad \text{und} \quad AE = y - \frac{x\,dy}{dx}.$$

Endlich ist noch das Loth An von dem Anfangspunkte auf die Tangente, wenn wieder $MTA = \omega$ ist,

$$An = AT\sin.\omega = \left(x - y\frac{dx}{dy}\right)\frac{dy}{ds} \quad \text{oder}$$

$$An = x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}.$$

Um daher zu untersuchen, ob eine gegebene Curve Asymptoten habe, wird man eine der beyden Coordinaten x oder y positiv oder negativ und unendlich groß annehmen, und dann die andere mit Hülfe der gegebenen Gleichung der Curve bestimmen. Substituirt man die so erhaltenen Werthe von x und y in die vorhergehenden Ausdrücke von

AT, AE und An, und erhält das Loth An, oder wenigstens eine der beyden Größen AT oder AE einen endlichen Werth, so hat die Curve eine Asymptote, und die Lage derselben wird entweder durch die zwey Größen AT und AE, oder durch eine derselben und durch den Winkel ω, oder endlich, wenn die Asymptote durch den Anfang der Coordinaten geht, bloß durch den Winkel ω bestimmt, in welchem letzten Falle die Größen AT, AE und An gleich Null werden.

Ist in einem speciellen Falle AT unendlich groß und $AE = An$ endlich, so liegt die Asymptote mit der Axe der x parallel; ist aber AE unendlich groß und $AT = An$ endlich, so liegt die Asymptote mit der Axe der y parallel. Wird endlich An, also auch AT und AE unendlich groß oder imaginär, so besitzt die Curve keine Asymptote.

Ex. I. Für die Kegelschnitte hat man (§. 14) die allgemeine Gleichung

$$y^2 = 2px - \frac{px^2}{a},$$

also ist auch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y} - \frac{px}{ay} = \text{tang.}\,\omega \quad \text{und}$$

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{y}\sqrt{y^2 + \left(p - \frac{px}{a}\right)^2}.$$

Man findet daher

$$AT = \frac{ax}{x-a} \quad \text{und} \quad AE = \sqrt{\frac{apx}{2a-x}}.$$

Setzt man also in diesen Ausdrücken x unendlich groß, so erhält man

$$AT = a \quad \text{und} \quad AE = \sqrt{-ap},$$

woraus folgt, daß nur die Hyperbel, in welcher a negativ genommen werden muß (§. 14), Asymptoten habe, und zwar zwey, wegen dem doppelten Werthe von AE. Da $p = \frac{b^2}{a}$ ist (§. 14), so ist

$$AE = \sqrt{b^2} = \pm b.$$

Die Parabel hat keine Asymptote, weil bey ihr die Größe a unendlich ist; und die Ellipse, weil in ihr weder x noch y unendlich groß werden kann und AE imaginär wird.

Ex. II. Für die Conchois (§. 15, IV.) hat man

$$\frac{y^2}{x^2} + 1 = \frac{b^2}{(x-a)^2}.$$

Setzt man y unendlich groß, so wird $x = a$, also ist die Gerade

APX (Fig. 10), welche alle durch den Pol B gehenden Sehnen halbirt, die Asymptote der Conchois. Eben so findet man, daß für die Cissois (Fig. 6) die auf AB senkrechte Gerade mBn die Asymptote der Curve ist, u. s. w.

§. 93. (**Die vorhergehenden Ausdrücke in Polarcoordinaten geben.**) Wenn für den Punkt M (Fig. 3) einer Curve die senkrechten Coordinaten $AP = x$ und $PM = y$ sind, und wenn man den Winkel $PAB = m$ und $MAB = \nu$, so wie den Radius Vector $AM = r$ setzt, so hat man

$$x = r\cos.(\nu - m), \quad y = r\sin.(\nu - m) \quad \text{und}$$
$$r^2 = x^2 + y^2,$$

also auch, wenn man differentiirt:

$$dx = dr\cos.(\nu - m) - rd\nu\sin.(\nu - m),$$
$$dy = dr\sin.(\nu - m) + rd\nu\cos.(\nu - m) \quad \text{und}$$
$$rdr = xdx + ydy.$$

Eliminirt man aus den beyden ersten dieser Differentialgleichungen die Größe dr, so erhält man

$$d\nu = \frac{dy}{r}\cos.(\nu - m) - \frac{dx}{r}\sin.(\nu - m);$$

oder, wenn man statt $\cos.(\nu - m)$ und $\sin.(\nu - m)$ ihre Werthe setzt:

$$d\nu = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2};$$

und eben so erhält man auch

$$dr = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Wenn die gegebene Gleichung zwischen r und ν den Winkel ν selbst enthält, so ist es unmöglich, daraus eine algebraische endliche Gleichung zwischen x und y abzuleiten. In diesem Falle werden aber die beyden vorhergehenden Ausdrücke von dr und $d\nu$ eine Differentialgleichung zwischen x und y ohne transcendente Größen geben. Ist z. B. die Gleichung $r^2 = a^2 . \nu$ gegeben, so findet man daraus $\nu - m = \text{arc.}\cos.\frac{x}{r}$. Differentiirt man aber die gegebene Gleichung und substituirt dann für dr und $d\nu$ die vorhergehenden Werthe, so hat man

$$2(x^2 + y^2)(xdx + ydy) = a^2(xdy - ydx),$$

einen Differentialausdruck ohne transcendente Größen.

I. Das Differential des Bogens einer Curve, durch rechtwinklige Coordinaten ausgedrückt, war

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Substituirt man in dieser Gleichung die vorhergehenden Werthe von dx und dy, so erhält man

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\nu^2}$$

für das Differential des Bogens in Polarcoordinaten ausgedrückt.

II. Wir haben oben (§. 89) für das Differential der Fläche $dF' = BCNM$ (Fig. 33) den Ausdruck $dF' = y\,dx$ erhalten, wo $AB = x$, $BM = y$ die senkrechten Coordinaten des Punktes M bezeichnen. Diesem gemäß ist also die ursprüngliche Größe, von welcher $y\,dx$ das Differential ist, gleich der ganzen Fläche $F' = OMB$. Nimmt man davon das rechtwinklige Dreyeck ABM, dessen Fläche $\frac{1}{2}xy$ ist, weg, so erhält man für die Fläche des Sectors OMA, die wir durch F bezeichnen wollen,

$$F = F' - \tfrac{1}{2}xy,$$

also auch für das Differential dieses Sectors

$$d.F = dF' - \tfrac{1}{2}d.xy.$$

Es ist aber

$$dF' = y\,dx \quad \text{und} \quad d.xy = x\,dy + y\,dx,$$

also ist auch das Differential des Sectors OMA, der zwischen der geraden Linie AO, zwischen dem Radius Vector AM und zwischen dem Bogen OM der Curve enthalten ist, gleich

$$d.F = \tfrac{1}{2}(y\,dx - x\,dy).$$

Oben hatten wir aber die Gleichung

$$d\nu = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} \quad \text{oder} \quad r^2 d\nu = x\,dy - y\,dx,$$

also ist auch das Differential des Sectors gleich $-\frac{1}{2}r^2 d\nu$, wo ν den Winkel MAB bezeichnet. Nimmt man dafür den Winkel OAM, der jenen zu 180 Graden ergänzt, so hat man für das Differential des Sectors OMA den Ausdruck

$$dF = \tfrac{1}{2}r^2 d\nu.$$

In der That, ist AMN (Fig. 35) dieser unendlich kleine Sector der Curve MN, und $AM = r$ der Radius Vector des Punktes M, und der Winkel $MAN = d\nu$, und zieht man aus dem Punkte A als Mittelpunkt mit den Halbmessern AM und AN die Kreisbogen Mm und Nn, so werden die beyden Kreissectoren MmA und NnA einander immer näher kommen, je kleiner der Bogen MN der Curve ist, und für einen unendlich kleinen Bogen MN werden jene Kreissectoren einander gleich, also auch gleich dem Sector $dF = MNA$ seyn, da der letzte immer zwischen jene beyde fällt. Der Kreissector MmA ist aber gleich der Fläche des geradlinigen Dreyecks, dessen Basis $Mm = rd\nu$, und dessen Höhe $AM = Am = r$ ist, also ist die Fläche dieses Kreissectors gleich $\frac{1}{2} r^2 d\nu$, und daher auch

$$dF = \tfrac{1}{2} r^2 d\nu, \text{ wie zuvor.}$$

Oder endlich, der Sector $dF = MNA$ besteht aus dem Dreyecke AMm, dessen Fläche $\frac{1}{2} r^2 d\nu$, und aus dem Dreyecke MNm, dessen Fläche $\frac{1}{2} Mm . Nm = \frac{1}{2} r d\nu . dr$ ist. Beyder Summe gibt daher

$$dF = \tfrac{1}{2} r^2 d\nu \left(1 + \frac{dr}{r}\right),$$

oder nach §. 25:

$$dF = \tfrac{1}{2} r^2 d\nu, \text{ wie zuvor.}$$

III. Ist $AP = x$, $PM = y$ (Fig. 35) und MT die Tangente irgend einer Curve MN in dem Punkte M, so hatten wir für die Subtangente derselben den Ausdruck erhalten:

$$PT = -\frac{y\,dx}{dy}.$$

Substituirt man in diesem Ausdrucke die vorhergehenden Werthe von y, dy und dx in r und ν, so findet man

$$PT = -r \sin.(\nu - m) \frac{dr \cos.(\nu - m) - r d\nu \sin.(\nu - m)}{dr \sin.(\nu - m) + r d\nu \cot.(\nu - m)}.$$

Allein dieses Resultat läßt sich sehr vereinfachen, wenn man bemerkt, daß die Lage der Abscissenaxe, in welcher PT liegt, willkürlich ist, und daß man folglich den Winkel $m = PAB$ immer so annehmen kann, daß $\nu - m$ oder PAM gleich 90^0 wird. Dann fällt aber die Ordinate PM mit dem Radius Vector $AM = r$ zusammen, und man hat, da $\sin.(\nu - m) = 1$ und $\cos.(\nu - m) = 0$ ist, für die

$$\text{Subtangente } AT' = \frac{r^2 d\nu}{dr}.$$

Ganz eben so erhält man

$$\text{Subnorm.} = -\frac{dr}{d\nu}, \quad \text{Tangente} = \frac{r\,ds}{dr} \text{ und Normale} = \frac{ds}{d\nu},$$

wo $ds^2 = dr^2 + r^2 d\nu^2$ ist.

IV. In der That, zieht man durch den Pol A die Linie T′AB senkrecht auf den Radius Vector AM, und durch M die Linie MR senkrecht auf die Tangente MT, so hat man, da die Dreyecke MAT′, MAR und MNm ähnlich sind:

$$Mm = r\,d\nu,\quad Nm = dr,\ \text{also auch}$$
$$MN = ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\nu^2},$$

und überdieß

$$Nm : Mm = AM : AT' \quad \text{oder} \quad \text{Subtang.}\ AT' = \frac{r^2 d\nu}{dr},$$

$$Mm : Nm = AM : AR \quad \text{oder} \quad \text{Subnorm.}\ AR = \frac{dr}{d\nu},$$

$$Nm : MN = AM : T'M \quad \text{oder} \quad \text{Tang.}\ T'M = \frac{r\,ds}{dr},$$

$$Mm : MN = AM : RM \quad \text{oder} \quad \text{Normale}\ MR = \frac{ds}{d\nu},$$

wie zuvor.

Nennt man noch ω den Winkel der Tangente mit dem Radius Vector, oder ist $AMT' = \omega$, so hat man

$$\text{tang.}\,\omega = \frac{1}{r}\,\text{Subtang.} \quad \text{oder} \quad \text{tang.}\,\omega = \frac{r\,d\nu}{dr},$$

also auch

$$\sin.\,\omega = \frac{r\,d\nu}{ds} \quad \text{und} \quad \cos.\,\omega = \frac{dr}{ds}.$$

Ist aber AQ senkrecht auf die Tangente MT, so hat man

$$AQ = r \sin.\,\omega = \frac{r^2 d\nu}{ds}.$$

Ex. Für die Archimedische Spirale ist $r = \frac{\nu}{2\pi}$, also auch $\text{tang.}\,\omega = 2\pi r$. Für die logarithmische Spirale ist $\nu = \log.\, r$, also auch $\text{tang.}\,\omega = 1$, oder der Winkel ω ist constant.

V. Nennt man endlich ψ den Winkel der Tangente mit der festen, durch A gehenden Linie TAP, von welcher man die Winkel $TAM = \nu$ zählt, oder ist $ATM = \psi$, so hat man $\omega = 180 - (\nu + \psi)$, und daher auch

$$\text{tang.}\,(\nu + \psi) = -\frac{r\,d\nu}{dr}.$$

Setzt man daher in der gegebenen Gleichung der Curve den Radius r unendlich groß, und sucht den dazu gehörenden Werth von ν, so substituire man diese Werthe von r und ν in den Gleichungen

$$\text{tang.}\,(\nu + \psi) = -\frac{r\,d\nu}{dr} \quad \text{und} \quad AQ = \frac{r^2 d\nu}{ds}.$$

Sind dann die Werthe von AQ und von ψ endlich und reell, so hat die Curve eine Asymptote, die um die Größe AQ von A absteht, und die gegen die feste Linie TAP unter dem Winkel ψ geneigt ist.

Ex. Für die hyperbolische Spirale hat man (§. 18, III.) die Gleichung

$$r \cdot \nu = 1, \text{ also auch } \frac{dr}{d\nu} = -\frac{r}{\nu},$$

und daher

$$ds = r\,d\nu \cdot \sqrt{r^2+1},$$

$$\text{Subtang.} = -1, \quad \text{Subnorm.} = -r^2,$$

$$\text{Tang.} = \sqrt{r^2+1}, \quad \text{Normale} = r\sqrt{r^2+1},$$

$$\text{tang.}\,\omega = -\frac{1}{r} \text{ und } AQ = \frac{r}{\sqrt{r^2+1}}.$$

Setzt man dann r unendlich groß, so ist $\nu = 0$, also auch $AQ = 1$ und $\text{tang.}(\nu+\psi) = 0$, oder $\nu + \psi = 180$, das heißt, da $\nu = 0$ ist, $\psi = 180^\circ$. Diese Spirale besitzt also eine Asymptote, die in dem Abstande 1 von dem Pole mit der festen Linie parallel liegt.

XII.

Berührungskreise und Abwicklungen der ebenen Curven.

§. 94. (**Berührungen der zweyten und höheren Ordnung.**) Aus der Ableitung der Gleichung für die Tangente einer krummen Linie, die wir oben (§. 91) gegeben haben, folgt von selbst, daß die, die Curve in einem Punkte berührende Linie nicht eben eine gerade Linie seyn muß, sondern daß man auch jede andere krumme Linie so stellen kann, daß sie mit der gegebenen Curve in irgend einem Punkte derselben ein Element gemeinschaftlich, oder daß sie, wie man zu sagen pflegt, mit der gegebenen Curve eine Berührung der ersten Ordnung hat.

Ist diese krumme Linie z. B. ein Kreis des Halbmessers ρ, und sind α und β die Coordinaten des Mittelpunktes dieses Kreises, so hat man für die Gleichung desselben

$$(x'-\alpha)^2 + (y'-\beta)^2 = \rho^2 \ldots (\text{I.}),$$

also auch, wenn man sie differentiirt:

$$\frac{dy'}{dx'} = -\frac{(x'-\alpha)}{y'-\beta}.$$

Da nun, wie dort, für eine Berührung der ersten Ordnung zwischen beyden Curven die zwey Bedingungsgleichungen bestehen:

$$y' = y \quad \text{und} \quad \frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx},$$

so hat man auch

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \rho^2 \quad \text{und}$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(x-\alpha)}{y-\beta}.$$

Eliminirt man aus diesen beyden Gleichungen die Größen b und a, so erhält man

$$\alpha = x - \rho \cdot \frac{dy}{ds} \quad \text{und} \quad \beta = y - \rho \cdot \frac{dx}{ds},$$

wo $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ist. Dadurch sind also die beyden Größen α und β für denjenigen Kreis bestimmt, der mit der Curve, deren Gleichung zwischen x und y gegeben ist, eine Berührung der ersten Ordnung hat. Dieser Kreis hat nämlich die Gleichung

$$\left(x' - x - \rho\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(y' - y - \rho\frac{dx}{ds}\right)^2 = \rho^2,$$

und in ihr sind x' und y' die veränderlichen Größen. Nennt man θ den Winkel, welchen die Normale der gegebenen Curve mit der Axe der x bildet, so ist

$$\sin.\theta = \frac{dx}{ds} \quad \text{und} \quad \cos.\theta = \frac{dy}{ds},$$

woraus also folgt, daß es unzählige Kreise gibt, welche die Curve in dem gegebenen Punkte berühren, und daß die Mittelpunkte dieser Kreise sämmtlich in jener Normale liegen, wobey der Halbmesser ρ dieser Kreise ganz unbestimmt bleibt.

So wie aber zwey krumme Linien, die einen Punkt gemeinschaftlich haben, in diesem Punkte eine Berührung der ersten Ordnung haben, wenn für sie die beyden Bedingungsgleichungen bestehen:

$$y = y' \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'},$$

so werden wir auch, analog verfahrend, annehmen können, daß diese beyden Curven eine Berührung der zweyten Ordnung haben, wenn für sie die drey Bedingungsgleichungen Statt haben:

$$y = y', \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'} \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y'}{dx'^2}.$$

Bey einer Berührung der ersten Ordnung fallen nämlich zwey nächste Punkte in beyden Curven zusammen, während bey einer Berührung der zweyten Ordnung drey dieser nächsten Punkte in beyden Curven zu einem einzigen sich vereinigen, oder dort haben beyde Curven ein Element, hier aber haben sie zwey nächste Elemente mit einander gemeinschaftlich.

So weiß man z. B. daß drey Punkte erfordert werden, um die Lage und Größe eines Kreises zu bestimmen. Man kann daher annehmen, daß diese drey einander nächsten Punkte auf der Peripherie der gegebenen Curve liegen, und dann denjenigen Kreis suchen, der durch diese drey Punkte geht, und sie daher mit jener Curve gemeinschaftlich hat. Dieser Kreis wird dann als die Gränze aller derjenigen Kreise zu betrachten seyn, welche mit der Curve, in demselben Punkte, bloß eine Berührung der ersten Ordnung geben, und deren Mittelpunkte, wie wir so eben gesehen haben, alle auf der Normale der Curve liegen, ganz eben so, wie oben (§. 90) die Tangente als die Gränze aller Secanten betrachtet worden ist, die mit dieser Tangente einen Punkt gemeinschaftlich haben. — Man sieht, wie man dieselben Betrachtungen auch auf die Berührungen der höheren Ordnungen fortsetzen kann.

§. 95. (**Berührungs- oder Osculations-Kreis.**) Um das Vorhergehende in der Sprache der Analysis auszudrücken, seyen die Gleichungen zweyer Curven gegeben, deren die erste die Coordinaten x, y und die zweyte die analogen Coordinaten x', y' enthalte. Wenn in diesen beyden Curven die Größe x in $x+h$, und die Größe x' in $x'+h$ übergeht, so hat man für die Ordinaten y und y' dieser Curven

$$y + h\frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{h^3}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots \quad \text{und}$$

$$y' + h\frac{dy'}{dx'} + \frac{h^2}{1.2}\frac{d^2y'}{dx'^2} + \frac{h^3}{1.2.3}\frac{d^3y'}{dy^3} + \ldots,$$

und die Differenz dieser beyden Ordinaten ist daher

$$\Delta = (y-y') + h\left(\frac{dy}{dx} - \frac{dy'}{dx'}\right) + \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2y'}{dx'^2}\right) + \ldots$$

Haben nun beyde Curven den Punkt, zu welchem die Ordinaten y und y' gehören, mit einander gemein, so ist $y - y' = o$, oder

$$y = y' \quad \text{und} \quad \Delta = h\left(\frac{dy}{dx} - \frac{dy'}{dx'}\right) + \ldots$$

Ist ferner h unendlich klein, und haben die beyden Curven auch noch den jenem ersten nächstfolgenden Punkt mit einander gemein, so ist auch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'} \quad \text{und} \quad \Delta = \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2y'}{dx'^2}\right) + \ldots;$$

und eben so, wenn sie auch noch den zweyten nächstfolgenden Punkt gemein haben:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y'}{dx'^2} \quad \text{und} \quad \Delta = \frac{h^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^3y'}{dx'^3}\right) + \ldots$$

Je weiter man auf diese Weise fortgeht, desto mehr nächstfolgende Punkte haben die beyden Curven mit einander gemein, oder desto inniger werden sie sich in dem ersten dieser Punkte, zu welchem $y = y'$ gehört, an einander anschließen, so zwar, daß, wenn unter diesen beyden Curven z. B. nur die drey ersten Bedingungsgleichungen $y = y'$, $dy = dy'$ und $d^2y = d^2y'$ Statt haben, keine andere dritte Curve, deren Gleichung zwischen x'' und y'' gegeben ist, zwischen jenen beyden mehr durchgehen kann, wenn nicht auch für diese dritte Curve dieselben Bedingungsgleichungen $y = y''$, $dy = dy''$ und $d^2y = d^2y''$ bestehen u. s. f. für jede höhere Ordnung der Berührungen.

Ist nun die zweyte Curve, deren Gleichung zwischen x' und y' ausgedrückt wird, ein Kreis, so ist die Gleichung dieser Curve, wie zuvor,

$$(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 = \rho^2.$$

Differentiirt man diese Gleichung zwey Mal nach einander, und setzt vorerst kein erstes Differential constant, so erhält man

$$(x' - \alpha)\,dx' + (y' - \beta)\,dy' = o \quad \text{und}$$
$$dx'^2 + dy'^2 + (x' - \alpha)\,d^2x' + (y' - \beta)\,d^2y' = o.$$

Da man aber die erwähnten Bedingungsgleichungen hat:

$$y' = y, \quad \frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx} \quad \text{und} \quad \frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{d^2y}{dx^2},$$

so werden die drey vorhergehenden Gleichungen auch dann noch bestehen, wenn man in ihnen die Accente der Größe x', y' und ihre Differentialien wegläßt, oder man wird auch die drey Gleichungen haben:

$$\left.\begin{array}{l}(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2,\\ (x-\alpha)\,dx+(y-\beta)\,dy=0,\\ dx^2+dy^2+(x-\alpha)\,d^2x+(y-\beta)\,d^2y=0\end{array}\right\}\ldots(A).$$

Sucht man aus diesen drey Gleichungen die Werthe der drey Größen α, β und ρ, so erhält man, wenn man wieder der Kürze wegen $ds^2 = dx^2 + dy^2$ setzt:

$$x-\alpha=\frac{ds^2\,dy}{dx\,d^2y-dy\,d^2x},$$

$$y-\beta=-\frac{ds^2\,dx}{dx\,d^2y-dy\,d^2x},$$

$$\rho=\frac{ds^3}{dx\,d^2y-dy\,d^2x},$$

und durch diese drey Größen α, β und ρ ist daher derjenige Kreis, seiner Größe und Lage nach, vollkommen bestimmt, der mit der gegebenen Curve, deren Gleichung zwischen x und y enthalten ist, eine Berührung der zweyten Ordnung hat. Man nennt ihn den Berührungs- oder auch den Osculations-Kreis der gegebenen Curve.

I. In den vorhergehenden Ausdrücken ist, wie gesagt, kein erstes Differential constant angenommen worden.

Setzt man aber dx constant, so findet man

$$x-\alpha=\frac{ds^2\,dy}{dx\,d^2y},\quad y-\beta=-\frac{ds^2}{d^2y},\quad \rho=\frac{ds^3}{dx\,d^2y}.$$

Setzt man dy constant, so ist

$$x-\alpha=-\frac{ds^2}{d^2x},\quad y-\beta=\frac{ds^2\,dx}{dy\,d^2x},\quad \rho=-\frac{ds^3}{dy\,d^2x},$$

Setzt man endlich ds constant, so hat man $dx\,d^2x + dy\,d^2y = 0$, also auch $d^2x^2 . dx^2 = d^2y^2 . dy^2$, und daher

$$\alpha-x=\frac{ds^2 . d^2x}{d^2x^2+d^2y^2}\quad\text{oder}\quad \alpha-x=\rho^2 . \frac{d^2x}{ds^2},$$

$$\beta-y=\frac{ds^2\,d^2y}{d^2x^2+d^2y^2}\quad\text{»}\quad \beta-y=\rho^2 . \frac{d^2y}{ds^2},\ \text{und}$$

$$\rho=\frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2+d^2y^2}}\ \text{(vergl. §. 85).}$$

II. Man kann bemerken, daß die Peripherie des Osculations-Kreises die Curve in dem Punkte, wo er sie berührt, auch zugleich durchschneidet, da die Differenz der zwey nächstfolgenden Ordinaten der beyden Curven, nach dem Vorhergehenden, gleich:

$$\Delta = \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{d^3 y}{d x^3} - \frac{d^3 y'}{d x'^3}\right)$$

ist, also Δ sein Zeichen wechselt, wenn man statt x den nächstfolgenden Werth $x + h$ oder den nächst vorhergehenden $x - h$ setzt.

Von den in §. 94 betrachteten Kreisen, die alle mit der Curve eine Berührung der ersten Ordnung haben, berühren nämlich die einen die Curve an ihrer concaven Seite oder von innen, und die andern an ihrer convexen Seite von außen, und der Osculations-Kreis liegt, als die Gränze aller jener Kreise, zwischen ihnen, indem er die Curve auf der einen Seite des Berührungspunktes von innen, und auf der andern von außen berührt. Die geradlinige Tangente im Gegentheile liegt ganz auf derselben Seite der Curve, weil für sie

$$\Delta = \frac{h^2}{1 \cdot 2}\left(\frac{d^2 y}{d x^2} - \frac{d^2 y'}{d x'^2}\right)$$

für $x + h$ und $x - h$ immer dasselbe Zeichen behält.

§. 96. (**Contingenzwinkel der krummen Linien.**) Man nennt den unendlich kleinen Winkel, welchen die Normalen von zwey nächsten Punkten einer Curve unter sich bilden, den Contingenzwinkel der Curve. Man sieht, daß dieser Winkel auch der von zwey nächsten Tangenten der Curve ist. Wir wollen ihn durch ω bezeichnen.

Seyen A und B die Cosinus der Winkel, welchen die erste dieser Tangenten mit der Axe der x und der y macht, so daß man daher (wie §. 94) hat

$$A = \frac{dx}{ds} \quad \text{und} \quad B = \frac{dy}{ds}.$$

Dieß vorausgesetzt, werden also auch die Cosinus der zweyten nächsten Tangente mit x und y durch

$$A + dA \quad \text{und} \quad B + dB$$

ausgedrückt werden können. Man hat aber (Einl. §. 3, I.)

$$\cos.\omega = A(A + dA) + B(B + dB),$$

und überdieß, da der Cosinus des Winkels einer jeden Geraden mit der Axe der y gleich dem Sinus des Winkels derselben Geraden mit der Axe der x ist:

$$A^2 + B^2 = 1, \text{ und eben so}$$

$$(A + dA)^2 + (B + dB)^2 = 1,$$

woraus sofort folgt

$$A dA + B dB = -\tfrac{1}{2}(dA^2 + dB^2).$$

Es geht daher der vorhergehende Ausdruck von cos. ω in den folgenden über:

$$\sin.^2 \omega = -2(A dA + B dB) - (A dA + B dB)^2;$$

oder endlich, wenn man (§. 25) die vierten und höheren Potenzen von dA und dB wegläßt:

$$\sin.^2 \omega = dA^2 + dB^2.$$

Substituirt man in diesem Ausdrucke die vorhergehenden Werthe von dA und dB, und bemerkt man, daß für den unendlich kleinen Winkel ω (nach §. 33) $\sin. \omega = \omega$ ist, so hat man

$$\omega = \sqrt{\left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2}$$

für den gesuchten Winkel der Contingenz einer Curve.

Setzt man in ihm ds constant voraus, so ist

$$\omega = \frac{1}{ds}.\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2}.$$

Da wir aber vorher (§. 95) für den Krümmungshalbmesser ρ der Curve erhalten haben

$$\rho = \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2}},$$

so ist auch

$$\rho = \frac{ds}{\omega} \quad \text{oder} \quad ds = \rho\omega.$$

Diese Gleichung zeigt, daß der Mittelpunkt des Osculations-Kreises einer Curve der Durchschnittspunkt von je zwey nächsten Normalen dieser Curve ist.

I. In der That, die Gleichung der Normale ist (§. 91, I.)

$$y' - y + (x' - x)\frac{dx}{dy} = 0.$$

Um den Durchschnittspunkt dieser Normale mit der nächstfolgenden Normale zu finden, wird man bloß die letzte Gleichung in Beziehung auf x und y differentiiren, wodurch man erhält

$$(y' - y)\,d^2y - ds^2 = 0.$$

Sucht man aus diesen zwey Gleichungen die Größen x' und y', und substituirt sie in dem allgemeinen Ausdrucke

$$(x' - x)^2 + (y' - y)^2$$

der Distanz zweyer Punkte, so erhält man für diese Distanz

$$\frac{d\,s^3}{d\,x\,d^2\,y} \text{ oder } \rho,$$

wie zuvor.

§. 97. (**Evoluten der krummen Linien.**) Da die Größen α und β, oder da die Coordinaten des Mittelpunktes des Osculations-Kreises Funktionen von x und y, also auch, vermöge der gegebenen Gleichung der Curve zwischen x und y, bloße Funktionen von x sind, so ändern sich jene beyden Größen, so wie sich x ändert, oder wie man von einem Punkte der Curve zu einem andern übergeht. Die Aufeinanderfolge aller dieser Mittelpunkte des Osculations-Kreises einer Curve bildet daher wieder eine andere Curve, die man die Evolute oder die Abgewickelte der gegebenen Curve nennt, so wie diese wieder die Evolvente der Abgewickelten heißt. Sind mM, m′M′ (Fig. 36) die Krümmungshalbmesser der Curve MM′, so ist MM′M″ die Evolvente, und mm′m″ die Evolute, wo $AP = x$, $PM = y$ die senkrechten Coordinaten der Evolvente, und $Ap = \alpha$, $pm = \beta$ die analogen Coordinaten der Evolvente sind.

Diese beyden Curven haben mehrere merkwürdige Relationen unter einander, die man leicht aus den drey Gleichungen (A) des §. 95 kennen lernt. Setzt man, wie gewöhnlich, dx constant, so sind diese Gleichungen:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \rho^2 \;\ldots\; (1),$$
$$(x-\alpha)\,dx + (y-\beta)\,dy = 0 \;\ldots\; (2),$$
$$dx^2 + dy^2 + (y-\beta)\,d^2y = 0 \;\ldots\; (3).$$

I. Eliminirt man nämlich zwischen der in xy gegebenen Gleichung der Evolvente und zwischen den Gleichungen (2) und (3) die beyden Größen x und y, so erhält man eine Gleichung zwischen α und β, die daher die Gleichung der Evolute seyn muß.

II. Da die Gleichung (2) auch so ausgedrückt werden kann:

$$\beta - y = -\frac{dx}{dy}(\alpha - x),$$

so gehört sie (§. 91, I.) für die Normale mM der Evolvente, d. h. für die gerade Linie, die von dem Punkte m, dessen Coordinaten α und β sind, senkrecht auf die Evolvente gezogen wird.

III. Differentiirt man die beyden ersten Gleichungen (1) und (2) nicht bloß in Beziehung auf x und y, sondern auch in Beziehung auf die Größe α, β und γ, da die letztern Größen Funktionen von x sind, so erhält man

$$(x-\alpha)dx + (y-\beta)dy - (x-\alpha)d\alpha - (y-\beta)d\beta = \rho d\rho$$

und

$$dx^2 + dy^2 + (y-\beta)d^2y - d\alpha dx - d\beta dy = o,$$

und diese Ausdrücke gehen mittelst der Gleichungen (2) und (3) in folgende über:

$$(x-\alpha)d\alpha + (y-\beta)d\beta + \rho d\rho = o \ldots (4)$$

$$d\alpha dx - d\beta dy = o \ldots (5).$$

Die letzte gibt $\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{dx}{dy}$, welcher Ausdruck die Gleichung

$$\beta - y = -\frac{dx}{dy}(\alpha - x)$$

in die folgende verwandelt:

$$y - \beta = \frac{d\beta}{d\alpha}(x-\alpha),$$

und diese letzte Gleichung zeigt, daß die Normale mM der Evolvente zugleich eine Tangente der Evolute ist (§. 91).

IV. Substituirt man den letzten Werth von $y-\beta$ in die Gleichungen (1) und (4), und eliminirt dann $x-\alpha$, so erhält man

$$d\rho^2 = d\alpha^2 + d\beta^2.$$

Da aber das Differential eines Bogens, oder da ds überhaupt gleich $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ ist, so zeigt die letzte Gleichung, daß der Halbmesser des Osculations-Kreises der Evolvente sich um dieselben Unterschiede ändert, als der Bogen der Evolute.

Aus III. und IV. folgt, daß ein vollkommen biegsamer, um die Evolute mm′m″ gelegter Faden, wenn er von derselben frey abgewickelt wird, so daß er in jedem Punkte, wo er die Evolute verläßt, eine Tangente derselben ist, mit jedem seiner bereits abgewickelten Punkte die Evolvente der Curve MM′... beschreibt; eine merkwürdige Eigenschaft, die bekanntlich in der Mechanik bereits eine sehr sinnreiche Anwendung gefunden hat.

V. Man sieht daraus zugleich, daß alle Evoluten rectificabel sind (§. 88, Ex. II.), das heißt, daß man die Länge dieser Curve zwischen zwey gegebenen Punkten derselben durch eine gerade Linie messen oder angeben kann, weil die Zunahme des Bogens der Evolute gleich der Zunahme des Krümmungshalbmessers der Evolvente ist, und weil der Krümmungshalbmesser einer jeden Curve immer angegeben werden kann, da er bloß die Anwendung der Differentialrechnung erfordert.

VI. Wir haben in I. gezeigt, wie man aus der Evolvente die Evolute finden kann. Um aber auch das umgekehrte Problem aufzulösen, so sey die Gleichung $\beta = \varphi\alpha$ der Evolute gegeben, und daraus die Gleichung $y = fx$ der Evolvente zu suchen.

Es war

$$\beta - y = \frac{ds^2}{d^2y} \quad \text{und} \quad \alpha - x + (\beta - y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Aus diesen beyden Ausdrücken folgt

$$\alpha - x = -\frac{ds^2 dy}{dx\, d^2y} \quad \text{und} \quad \varphi\alpha - y = \frac{ds^2}{d^2y}.$$

Eliminirt man aus diesen zwey Gleichungen die Größe α, so erhält man eine Differentialgleichung der zweyten Ordnung zwischen x und y, die also für die gesuchte Evolvente gehört.

VII. Dieselbe Aufgabe läßt sich auch so darstellen. Es war

$$y - \beta - (x - \alpha)\frac{d\beta}{d\alpha} = 0 \quad \text{und}$$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2.$$

Bemerkt man aber, daß $d\rho^2 = d\alpha^2 + d\beta^2$ ist, so erhält man aus diesen beyden Gleichungen, da $\beta = \varphi\alpha$ ist:

$$\left.\begin{aligned} \alpha - x &= \rho \cdot \frac{d\alpha}{d\rho} \\ \beta - y &= \rho \cdot \frac{d\beta}{d\rho} \end{aligned}\right\}.$$

Eliminirt man aus diesen beyden Gleichungen die Größe α, so wird das Resultat dieser Elimination die gesuchte Gleichung der Evolvente zwischen x und y seyn. Allein diese Elimination setzt voraus, daß man bereits γ durch α ausdrücken kann, d. h. da

$$d\gamma^2 = d\alpha^2 + d\beta^2$$

ist, daß man die gegebene Evolute rectificiren kann.

§. 98. (**Beyspiele für den Krümmungshalbmesser.**) I. Man suche den Krümmungshalbmesser der Linien der zweyten Ordnung. Die Gleichung dieser Linien ist (Einleit. §. 14)

$$y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}.$$

Dieß gibt sofort

$$dy = \left(1 - \frac{x}{a}\right) \cdot \frac{p\,dx}{y},$$

$$ds^2 = \left[y^2 + p^2\left(1 - \frac{x}{a}\right)\right] \cdot \frac{dx^2}{y^3} \text{ und}$$

$$d^2y = -\left[\frac{p}{a}y^2 + p^2\left(1 - \frac{x}{a}\right)\right] \cdot \frac{dx^2}{y^3};$$

also ist auch

$$\rho = \left[x\left(2 - \frac{x}{a}\right) + p\left(1 - \frac{x}{a}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{p}}.$$

Sucht man aber die Normale $N = \frac{y\,ds}{dx}$ dieser Curven, so findet man

$$N = p^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\left[x\left(2 - \frac{x}{a}\right) + p\left(1 - \frac{x}{a}\right)^2\right]};$$

also ist auch

$$\rho = \frac{N^3}{p^2}.$$

Für $x = 0$ hat man $\rho = p$. Für die Parabel ist a unendlich groß, also auch

$$\rho = \sqrt{\frac{(p + 2x)^3}{p}}.$$

Setzt man aber in dem Ausdrucke für die Ellipse statt x die Größe $a - x$, oder nimmt man den Anfangspunkt der Coordinaten im Mittelpunkte der Ellipse, so geht der vorhergehende Ausdruck von N in den folgenden über:

$$N = \frac{b}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^3}}, \text{ oder da}$$

$$b^2x^2 = a^2(b^2 - y^2) \text{ ist:}$$

$$N = \frac{1}{a}\sqrt{b^4 + (a^2 - b^2)y^2}.$$

II. Eben so erhält man für die Logistik, deren Gleichung $y = \log. x$ ist (§. 17, I.)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{ds}{dx} = \frac{1}{x}\sqrt{1 + x^2},$$

und daher

$$\rho = \frac{1}{x}(1 + x^2)^{\frac{3}{2}},$$

so wie

$$x - \alpha = -\frac{1}{x}(1 + x^2) \text{ und } y - \beta = 1 + x^2.$$

III. Für die gemeine Cycloïs endlich hat man (§. 17, VI.)

$$x = a \text{ arc. cos.} \left(1 - \frac{y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2},$$

wo (Fig. 26) $AP = x$, $PM = y$ ist.

Daraus erhält man sofort

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{2ay - y^2}} \text{ und } d^2y = -\frac{a\,dy^2}{2ay - y^2},$$

$$ds = dy \sqrt{\frac{2a}{2a - y}}; \text{ also auch}$$

$$\rho = 2\sqrt{2ay} = 2N,$$

wenn wieder N die Normale der Cycloïs für denselben Punkt bezeichnet.

§. 99. **(Beyspiele für die Evolute.)** I. Für die Apollonische Parabel hat man $y^2 = 2px$, also auch

$$dy = p\frac{dx}{y}, \quad d^2y = -p^2\frac{dx^2}{y^3} \text{ und}$$

$$x - \alpha = -\frac{1}{p}(p^2 + y^2), \quad y - \beta = y + \frac{y^3}{p^2} \text{ oder}$$

$$\alpha - x = p + 2x \text{ und } \beta = -\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2p}}.$$

Aus diesen beyden Gleichungen folgt durch Elimination von x

$$\beta^2 = \frac{8}{27p}(\alpha - p)^3,$$

oder endlich, wenn man $\alpha - p = \alpha'$ setzt:

$$\beta^2 = \frac{8\alpha'^3}{27p}$$

die gesuchte Gleichung der Evolute der Apollonischen Parabel, die also die Neil'sche Parabel ist (Einl. §. 15, I.).

In Fig. 37 ist MAM' die Apollonische Parabel, und mam' die Evolute derselben oder die Neil'sche Parabel.

Man wird dabey bemerken, daß der die Evolute bedeckende Faden, durch dessen Abwicklung die Evolvente entsteht, in unserm Beyspiele über den Scheitel a der Evolute nach um das Stück $aA = p$ in der Richtung der ersteren Tangente aX der Evolute herausreichen muß, damit der Endpunkt A dieses Fadens, bey seiner Abwicklung, in der That die Apollonische Parabel MAM beschreibe. Dieses Stück $aA = p$ ist gleich dem Krümmungshalbmesser der Apollonischen Parabel in ihrem Scheitel A. Würde man einen andern Punkt zwischen a und A, oder jenseits von A für den die Evolventen beschreibenden Punkt annehmen, so würde diese Evolvente auch nicht mehr die Apollonische Parabel, sondern irgend eine andere Curve seyn.

II. Für die gemeine Cyclois hat man, wie §. 98, III., wenn man wieder die Gleichung

$$x = a \text{ arc. cos.} \left(1 - \frac{y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2}$$

zu Grunde legt, wo (Fig. 26 und 38) $AP = x$, $PM = y$ ist,

$$\beta = -y \quad \text{und} \quad \alpha = x + 2\sqrt{-2a\beta - \beta^2}.$$

Substituirt man die aus diesen Ausdrücken folgenden Werthe von x und y in der vorhergehenden ursprünglichen Gleichung der Cyclois, so erhält man

$$\alpha = a \text{ arc. cos.} \left(1 + \frac{\beta}{a}\right) + \sqrt{-2a\beta - \beta^2}$$

für die gesuchte Gleichung der Evolute der Cyclois. Setzt man

$$\beta = -x' \quad \text{und} \quad \alpha = y',$$

so wird die letzte Gleichung

$$y' = a \text{ arc. cos.} \left(1 - \frac{x'}{a}\right) + \sqrt{2ax' - x'^2},$$

dieselbe, welche wir schon oben (Einl. §. 17, VI., A) ebenfalls für die Cyclois gefunden haben, wo $CQ = x'$ und $QM = y$ war.

Setzt man daher auch in Fig. 38 $Aq = x'$, und die darauf senkrechte Gerade $qm = y'$, so sieht man, daß die Evolute Amm' der Cyclois ACB wieder dieselbe Cyclois, nur in verkehrter Lage ist, so daß bey der ersten Cyclois AMB der Anfangspunkt in A und der Scheitel in C, bey der zweyten Amm' aber der Scheitel in A ist.

III. Für die Ellipse, deren halbe Axen a und b sind, hat man (§. 14)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

und daraus folgt

$$\alpha = \frac{a^2 - b^2}{a^4} x^3 \quad \text{und} \quad \beta = -\frac{(a^2 - b^2)}{b^4} y^3,$$

also auch

$$\frac{x}{a} = \sqrt[3]{\frac{a\alpha}{a^2 - b^2}} \quad \text{und} \quad \frac{y}{b} = -\sqrt[3]{\frac{b\beta}{a^2 - b^2}}.$$

Substituirt man diese Werthe von $\frac{x}{a}$ und $\frac{y}{b}$ in der ursprünglichen Gleichung der Ellipse, so erhält man

$$\left(\frac{a\alpha}{a^2-b^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{b\beta}{a^2-b^2}\right)^{\frac{2}{3}}=1,$$

oder, wenn man alle Glieder dieses Ausdrucks durch $\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^{\frac{2}{3}}$ multiplicirt:

$$\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{\beta}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$$

für die Gleichung der Evolute der Ellipse. Ihre Gestalt ist in Fig. 18 (§. 16, II.) gegeben worden. Setzt man die Größe b^2 negativ, so erhält man die Evolute der Hyperbel.

IV. Um endlich auch aus der gegebenen Evolute die ihrer Evolvente zu finden, wollen wir annehmen, daß die Evolute ein Kreis des Halbmessers a sey, so ist die Gleichung des Kreises zwischen den Coordinaten α und β

$$\alpha^2+\beta^2=a^2, \quad \text{oder auch}$$
$$\alpha=a\cos.\varphi \quad \text{und} \quad \beta=a\sin.\varphi,$$

wo φ den Winkel bezeichnet, der zu den Coordinaten α und β gehört. Nennt man ρ den diesem Winkel entsprechenden Kreisbogen, so ist $\rho=a\varphi$.

Dieß vorausgesetzt, hat man

$$\frac{d\alpha}{d\rho}=-\sin.\varphi \quad \text{und} \quad \frac{d\beta}{d\rho}=\cos.\varphi,$$

und sonach werden die beyden letzten Gleichungen des §. 97, VI.

$$x=a\cos.\varphi+a\varphi\sin.\varphi \quad \text{und}$$
$$y=a\sin.\varphi-a\varphi\cos.\varphi,$$

und die Elimination von φ aus diesen beyden Ausdrücken gibt die gesuchte Gleichung der Evolvente des Kreises.

§. 100. (**Anwendung des Vorhergehenden auf Polarcoordinaten.**) Wenn man, wie in §. 93, die Gleichungen

$$x=r\cos.\nu \quad \text{und} \quad y=r\sin.\nu$$

hat, wo der dort eingeführte Winkel m hier der Kürze wegen gleich Null gesetzt worden ist, so erhält man, wenn man diese Gleichungen zweymal differentiirt, ohne dabey ein erstes Differential als constant vorauszusetzen:

$$dx=dr\cos.\nu-rd\nu\sin.\nu,$$
$$dy=dr\sin.\nu+rd\nu\cos.\nu,$$
$$d^2x=d^2r\cos.\nu-2drd\nu\sin.\nu+rd\nu^2\cos.\nu-rd^2\nu\sin.\nu,$$
$$d^2y=d^2r\sin.\nu+2drd\nu\cos.\nu-rd\nu^2\sin.\nu+rd^2\nu\cos.\nu.$$

Es war aber der Ausdruck des Krümmungshalbmessers zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x und y, wenn ebenfalls kein erstes Differential constant vorausgesetzt wird (§. 95)

$$\rho = \frac{ds^3}{dx d^2y - dy d^2x}.$$

Substituirt man in dieser Gleichung die vorhergehenden Ausdrücke von dx, d^2x u. s., so erhält man

$$\rho = \frac{-ds^3}{r^2 d\nu^3 + 2dr^2 d\nu + r dr d^2\nu - r d\nu d^2 r},$$

$$\text{wo} \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\nu^2 \quad \text{ist},$$

und hier ist ebenfalls kein erstes Differential constant vorausgesetzt worden.

Ist daher $d\nu =$ const., so hat man

$$\rho = \frac{-ds^3}{r^2 d\nu^3 + 2dr^2 d\nu - r d\nu d^2 r},$$

und ist $dr =$ const., so ist

$$\rho = \frac{-ds^3}{r^2 d\nu^3 + 2dr^2 d\nu + r dr d^2\nu}.$$

Ex. Für die logarithmische Spirale hat man (§. 23, II.)

$$\nu = \log. r;$$

also ist auch

$$d\nu = \frac{dr}{r} \quad \text{und} \quad ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\nu^2} = dr . \sqrt{2}.$$

Diese Spirale läßt sich daher rectificiren, da der ursprüngliche Ausdruck der letzten Differentialgleichung

$$s = r . \sqrt{2} \quad \text{ist}.$$

Weiter ist für den Winkel ω der Tangente mit dem Radius Vector (§. 93, IV.)

$$\text{tang.}\, \omega = \frac{r d\nu}{dr} = 1, \quad \text{also constant}.$$

Um die Differentialgleichung dieser Spirale zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x und y zu erhalten, wird man, nach §. 93, in der Gleichung $r d\nu = dr$ statt $d\nu$ und dr ihre Werthe

$$d\nu = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad dr = \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

substituiren, wodurch man erhält

$$(x - y) dy = (x + y) dx,$$

und daher ist auch die zweyte Differentialgleichung dieser Spirale

$$(x - y)\, d^2 y = dx^2 + dy^2 \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Endlich erhält man die Evolute einer Curve, wenn man (nach §. 97) die Werthe von x und y aus den beyden Gleichungen

$$(x - \alpha)\, dx + (y - \beta)\, dy = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$dx^2 + dy^2 + (y - \beta)\, d^2 y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

sucht, und dieselben in der ursprünglichen Gleichung der Curve substituirt. Diesem gemäß findet man aus den Gleichungen (1) und (3) sofort $x = \beta$. Die Gleichung (2) aber gibt, da $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}$ ist:

$$x^2 + y^2 - \alpha (x - y) - \beta (x + y) = 0,$$

oder, da bereits $x = \beta$ gefunden wurde:

$$y^2 + (\alpha - \beta)\, y = \alpha\beta,$$

woraus sofort folgt $y = -\alpha$.

Wir haben daher $x = \beta$ und $y = -\alpha$, und daraus folgt, daß die Evolute der logarithmischen Spirale wieder eine der gegebenen gleiche und gleichliegende Spirale ist.

§. 101. (**Tangential-Coordinaten.**) Die Gleichungen der krummen Linien lassen sich auch noch auf andere Weise ausdrücken, als bisher, durch rechtwinklige oder durch Polar-Coordinaten, geschehen ist. Eine der merkwürdigsten ist die zwischen dem Radius Vector $AM = r$ (Fig. 39) und dem Lothe $AU = u$ aus dem Pole A auf die Tangente MT der Curve. Man kann diese beyden veränderlichen Größen die Tangential-Coordinaten nennen.

Um ihre Relation mit den Polar-Coordinaten zu erhalten, ziehe man aus dem Pole A mit dem Halbmesser $AM = r$ einen Kreisbogen Mm, welcher den nächsten Radius Vector AN der Curve in dem Punkte m schneidet, so ist $Nm = dr$, $MAN = d\nu$, also auch $Mm = r\, d\nu$. Da aber die Dreyecke MNm und NAU ähnlich sind, so hat man

$$\frac{MN}{Nm} = \frac{AN}{NU} \text{ oder } \frac{ds}{dr} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - u^2}} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(I) und}$$

$$\frac{MN}{Mm} = \frac{AN}{AU} \text{ oder } \frac{ds}{r\, d\nu} = \frac{u}{r} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II)},$$

wo $ds^2 = dr^2 + r^2 d\nu^2$ ist.

So hat man für den Kreis des Halbmessers a, wenn der Pol oder der Anfangspunkt der Coordinaten in der Peripherie liegt, wie bekannt:

$$r = 2a \cos. \nu \quad \text{oder} \quad dr = -2 a d\nu \sin. \nu,$$

also auch

$$ds = 2 a d\nu,$$

und daher nach (II)

$$\frac{ds}{r d\nu} = \frac{2a}{r} = \frac{r}{u}, \quad \text{oder}$$

$$r^2 = 2 a u,$$

welches die Gleichung des Kreises zwischen den Tangential-Coordinaten ist.

Eben so hat man für die Ellipse, wenn der Pol im Brennpunkte ist (§. 14),

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos. \nu},$$

$$\text{wo } \varepsilon = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - b^2} \text{ ist.}$$

Das Differential dieses Ausdrucks ist

$$\frac{dr}{d\nu} = \frac{r^2 \varepsilon \sin. \nu}{a(1 - \varepsilon^2)}.$$

Allein die erste Gleichung der Ellipse gibt

$$\sin. \nu = \frac{b}{r} \sqrt{\frac{2ar - r^2 - b^2}{a^2 - b^2}}, \quad \text{also ist auch}$$

$$\frac{dr}{d\nu} = \frac{r}{b} \sqrt{2ar - r^2 - b^2}.$$

Substituirt man dieß in der Gleichung

$$\frac{ds^2}{d\nu^2} = r^2 + \frac{dr^2}{d\nu^2}, \quad \text{so erhält man}$$

$$\frac{ds^2}{d\nu^2} = \frac{r^3}{b^2}(2a - r),$$

und damit erhält man aus der Gleichung (II)

$$u^2 = \frac{b^2 r}{2a - r} \quad \text{oder} \quad r = \frac{2 a u^2}{b^2 + u^2}$$

die gesuchte Gleichung der Ellipse zwischen den Tangential-Coordinaten.

Nimmt man aber den Pol im Mittelpunkte der Ellipse, so ist die Gleichung derselben

$$u^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2 - r^2}.$$

Für die Parabel endlich hat man, wenn der Pol im Scheitel liegt, und der halbe Parometer p ist:

$$u^2 = \tfrac{1}{2} p r.$$

I. Transformirt man die vier in §. 93, IV. gegebenen Ausdrücke mittelst der Gleichungen (I) und (II) in Tangential-Coordinaten, so erhält man

$$\text{Subtang.} = \frac{r u}{\sqrt{r^2 - u^2}}, \quad \text{Tang.} = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - u^2}},$$

$$\text{Subnorm.} = \frac{r}{u} \sqrt{r^2 - u^2}, \quad \text{Norm.} = \frac{r^2}{u},$$

so daß also diese vier Größen, die sonst Funktionen von Differentialien waren, hier unter der Form von endlichen Größen erscheinen.

Ex. Für die Ellipse war

$$u^2 = \frac{b^2 r}{2a - r};$$

also ist auch die Subtangente der Ellipse gleich

$$\frac{b r}{\sqrt{2ar - r^2 - b^2}},$$

wie man auch aus der Polargleichung

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos. \nu}$$

findet, wenn man daraus den Werth der Subtang. $= \frac{r^2 d\nu}{dr}$ sucht.

II. Auf dieselbe Weise erhält man auch den allgemeinen Ausdruck für den Krümmungshalbmesser der Curven zwischen Tangential-Coordinaten, wenn man in jenem des §. 100, wo dr constant ist, oder wenn man in der Gleichung

$$\rho = \frac{ds^3}{r^2 d\nu^3 + 2 dr^2 d\nu + r dr d^2\nu}$$

statt $\frac{dr}{d\nu}$, wie aus den Gleichungen (I) und (II) folgt; die Größe

$$\frac{dr}{d\nu} = \frac{r\sqrt{r^2 - u^2}}{u},$$

und deren Differential

$$r d^2\nu . \sqrt{r^2 - u^2} = dr\,du - dr\,d\nu \sqrt{r^2 - u^2} - (r dr - u du) \frac{r d\nu}{\sqrt{r^2 - u^2}}$$

substituirt, wodurch man für den gesuchten Krümmungshalbmesser erhält:

$$\rho = \frac{r\,dr}{du};$$

also einen Ausdruck, der nur von den ersten Differentialien der Größen u und r abhängt, wie es der Natur der Tangential-Coordinaten gemäß ist.

§. 102. (**Rolllinien.**) Beschließen wir diesen Gegenstand mit der Betrachtung eines zahlreichen Geschlechts von Curven, zu welchen die oben angeführte Cyclois nur als ein sehr specieller Fall gehört.

Eine gegebene Curve DE (Fig. 40), mit welcher ein Punkt M durch die Linie ME fest verbunden ist, wälze sich auf einer anderen gegebenen, fixen Curve AD. Die Curve mMn, welche der beschreibende Punkt M während der Bewegung der ersten Curve durchlauft, heißt Rolllinie.

Um die Gleichung der Linie mMn zu finden, ziehe man durch den gemeinschaftlichen Punkt D beyder Curven und durch den beschreibenden Punkt M die Gerade $DM = r$, und beschreibe dann aus D, als Mittelpunkt mit diesem Halbmesser r, einen Kreisbogen. Thut man dasselbe mit jedem andern nächstfolgenden Punkte D, der den beyden gegebenen Curven gemeinschaftlich ist, so werden die Durchschnittspunkte von je zwey nächsten dieser Kreisbogen in der Rolllinie liegen, und die letzte wird bloß in der Aufeinanderfolge aller dieser Durchschnittspunkte bestehen.

Sind $AP' = x'$ und $P'D = y'$ die Coordinaten der fixen Curve AD, und sind $AP = x$, $PM = y$ die Coordinaten des Punktes M der Rolllinie, so ist die Gleichung eines dieser Kreise

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 - r^2 = 0.$$

In dieser Gleichung ist die Größe y' sowohl, als auch die Größe r als eine Funktion von x' zu betrachten. Differentiirt man sie daher in Beziehung auf x', so hat man

$$x - x' + (y - y')\frac{dy'}{dx'} + \frac{r\,dr}{dx'} = 0,$$

und die Elimination von x' aus diesen beyden Gleichungen wird sofort die gesuchte Gleichung der Rolllinie zwischen x und y geben.

Setzt man der Kürze wegen

$$ds'^2 = dx'^2 + dy'^2,$$

so findet man aus diesen Gleichungen für die Werthe von x und y folgende Ausdrücke:

$$x = x' - \frac{1}{ds'^2}\left(r\,dr\,dx' + r\,dy'\sqrt{ds'^2 - dr^2}\right),$$

$$y = y' - \frac{1}{ds'^2}\left(r\,dr\,dy' - r\,dx'\sqrt{ds'^2 - dr^2}\right).$$

I. Sey, für einen speciellen Fall, die bewegliche Curve DE ein Kreis des Halbmessers a, und die feste Curve AD ebenfalls ein Kreis des Halbmessers b, und sey die unveränderliche Gerade, welche den beschreibenden Punkt M trägt, und ihn mit dem Mittelpunkte O des ersten Kreises verbindet, oder sey $MO = c$. Sey überdieß t der Bogen AD, also auch der Winkel am Mittelpunkte C des zweyten Kreises oder sey der Winkel $ACD = \frac{t}{b}$, so wie der Winkel

$180 - DOM = \frac{t}{a}$, so hat man

$$\frac{x'}{b} = 1 - \cos.\frac{t}{b} \text{ und } \frac{y'}{b} = \sin.\frac{t}{b}$$

und überdieß

$$r^2 = a^2 + c^2 + 2ac\cos.\frac{t}{a}.$$

Daraus folgt sofort

$$\frac{dx'}{dt} = \sin.\frac{t}{b},\quad \frac{dy'}{dt} = \cos.\frac{t}{b} \text{ und } \frac{r\,dr}{dt} = -c\sin.\frac{t}{a}.$$

Substituirt man diese Ausdrücke in dem vorhergehenden Werthe von x, so hat man

$$x = x' + c\sin.\frac{t}{a}\sin.\frac{t}{b} - r\cos.\frac{t}{b}\sqrt{1 - \frac{c^2}{r^2}\sin.^2\frac{t}{a}}, \text{ oder}$$

$$x = b - b\cos.\frac{t}{b} + c\sin.\frac{t}{a}\sin.\frac{t}{b} - \cos.\frac{t}{b}\sqrt{r^2 - c^2\sin.^2\frac{t}{a}},$$

oder endlich, wenn man in dieser Gleichung den oben gegebenen Werth von r^2 substituirt:

$$x = b - (a + b)\cos.\frac{t}{b} - c\cos.\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)t,$$

und eben so

$$y = (a + b)\sin.\frac{t}{b} + c\sin.\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)t,$$

und die Elimination der Größe t aus diesen beyden Gleichungen gibt die gesuchte Gleichung der Rolllinie, welche für diesen besonderen Fall die Epicyclois heißt. (Vergl. §. 17, VI.)

So oft die Größen a und b sich wie zwey ganze Zahlen verhalten, läßt sich aus den beyden letzten Gleichungen die Größe t so eliminiren, daß das Resultat zwischen x und y eine algebraische Gleichung gibt. Ist a negativ, so wälzt sich der bewegliche Kreis auf der inneren Seite der Peripherie des festen Kreises, und dann wird die von M beschriebene Curve die Hypocycloïs genannt. Ist endlich die feste Curve AD eine gerade Linie, und wählt man diese Gerade für die Axe der x', so ist $y' = o$ und $x' = t$, so wie

$$\frac{r\,dr}{dt} = c \sin.\frac{t}{a},$$

so daß daher die beyden vorhergehenden Gleichungen in die folgenden übergehen:

$$x = t - c \sin.\frac{t}{a},$$

$$y = a - c \cos.\frac{t}{a},$$

und die Elimination von t aus diesen zwey Ausdrücken gibt die Gleichung der Cycloïs, und zwar der verkürzten, wenn $a < c$, der verlängerten, wenn $a > c$, und endlich der gemeinen Cycloïs, wenn $a = c$ ist, übereinstimmend mit §. 17, VI.

XIII.

Besondere Punkte der krummen Linien.

§. 103. **(Verhalten der Curven gegen ihre Abscissenaxen.)** Eine Curve entfernt sich von der Abscissenaxe, oder sie nähert sich derselben, je nachdem, für ein positives dx, der Werth von y, also auch der von $\frac{dy}{dx}$ positiv oder negativ ist. Dabey wird demnach die Größe dx immer positiv angenommen, oder es wird vorausgesetzt, daß man in der Abscissenaxe immer in der Richtung der wachsenden positiven Abscissen fortgeht.

Für die Parabel z. B. ist $y^2 = 2px$, also auch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}.$$

Da also in derjenigen Hälfte dieser Curve, wo y positiv ist, auch

$\frac{dy}{dx}$ positiv ist, so entfernt sich der über der Abscissenaxe liegende Bogen der Parabel ins Unendliche von dieser Axe, und dasselbe gilt auch von dem andern, unter der Abscissenaxe liegenden Bogen. Denn für diesen Bogen ist y negativ, also auch, wenn man $y = -v$ setzt, wo v eine positive Größe ist,

$$\frac{dv}{dx} = \frac{p}{v};$$

so daß demnach $\frac{dv}{dx}$ wieder positiv ist.

Eben so hat man für den Kreis, dessen Halbmesser a ist,

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

also auch

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y};$$

und daraus folgt, daß sich die Curve in den beyden Quadranten, wo x und y positiv, und wo x positiv, y aber negativ ist, sich für wachsende x der Abscissenaxe nähert, für die beyden anderen Quadranten aber sich von ihr entfernt, wenn man nämlich in den beyden letzten Quadranten in derselben Richtung, wie bey den zwey ersten, in der Abscissenaxe fortgeht. So hat man für denjenigen Quadranten, wo x und y negativ ist, wenn man $x = -\xi$ und $y = -v$ setzt,

$$-\frac{dv}{dx} = \frac{\xi}{v} \quad \text{oder} \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{\xi}{v},$$

oder die Curve entfernt sich von der Abscissenaxe, wenn dx in derselben Richtung, wie zuvor, genommen wird.

§. 104. **(Concavität und Convexität der Curven gegen die Abscissenaxe.)** Eine Curve MNP (Fig. 31) ist gegen die Abscissenaxe AX concav oder convex, je nachdem die zweyte Differenz

$$Pb - Na = Pp$$

der Ordinaten negativ oder positiv ist. Nach dem Vorhergehenden (§. 87) ist aber $Pp = d^2 y$, wenn

$$Na = dy \quad \text{und} \quad BC = CD = dx$$

ist. Die Curve ist also in dem Punkte M gegen AX concav oder convex, wenn, für positive y, die Größe $\frac{d^2 y}{dx^2}$ negativ oder positiv ist.

Für negative Ordinaten y würde sich diese Regel umkehren. Man kann aber diese Duplicität der Vorschrift vermeiden, wenn man sagt, daß die Curve gegen AX concav oder convex ist, wenn y und $\frac{d^2y}{dx^2}$ entgegengesetzte oder gleiche Zeichen haben, oder kurz: Die Curve ist gegen die Abscissenaxe

concav, wenn das Produkt $y \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$ negativ, oder

convex, » » » » positiv ist.

Für die Parabel z. B. ist $y^2 = 2px$, also $\frac{y\,d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{y^2}$, oder diese Curve ist immer gegen die Abscissenaxe concav. Für die Cycloid hat man (nach §. 98, III.), wenn (Fig. 26) $AP = x$, $PM = y$ ist,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{y};$$

also ist auch diese Curve in allen ihren Theilen gegen die Abscissenaxe concav, da in ihr die Ordinate y immer positiv ist. Für die Logistik endlich ist (§. 17, I.) $y = \log. x$, wo (Fig. 21) $AP = x$, $PM = y$ ist; also ist auch

$$\frac{y\,d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}\log. x,$$

oder die Curve ist über der Abscissenaxe gegen sie concav, und unter derselben convex, weil in diesem zweyten Theile x kleiner als $AB = 1$, also log. x negativ ist.

§. 105. **(Wendepunkte der Curven.)** Wendepunkte einer Curve werden diejenigen Punkte genannt, wo die Ordinate y einen größten oder kleinsten Werth hat; diesen Ausdruck in der Bedeutung genommen, wie er oben (§. 83) aufgestellt worden ist. Für solche Wendepunkte wird also die Größe $\frac{dy}{dx}$ gleich Null, oder auch unendlich groß gesetzt werden müssen, woraus hervorgeht, daß für diese Punkte die Tangente der Curve zur Abscissenaxe parallel oder senkrecht steht, da (nach §. 90) $\tang. \omega = \frac{dy}{dx}$ ist. Hier wollen wir nur die ersten dieser beyden Fälle betrachten, wo $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, und den anderen Fall, wo $\frac{dy}{dx} = \infty$ ist, später eigens behandeln.

Wir haben aber bereits oben (§. 83) gesehen, daß die Bedingungsgleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ für einen größten oder kleinsten Werth der Größe y, das heißt also, für einen Wendepunkt der Curve allerdings nothwendig, aber nicht hinreichend ist, sondern daß auch für die Existenz eines solchen Werthes die Größe $\frac{d^2 y}{d x^2}$ nicht gleich Null seyn darf, oder wenn $\frac{d^2 y}{d x^2}$ verschwindet, daß dann auch $\frac{d^3 y}{d x^3}$ verschwinden muß, aber $\frac{d^4 y}{d x^4}$ nicht verschwinden darf u. s. w., so daß man daher zur Aufsuchung der Wendepunkte der Curven ganz dasselbe Verfahren anwenden wird, welches wir oben zur Bestimmung der größten und kleinsten Werthe der Funktionen gegeben haben.

So erhält man für die Ellipse, wenn man ihre Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

differentiirt, und $\frac{dy}{dx} = 0$ setzt, für die Abscisse $x = 0$, und da für diesen Werth von x die Größe $\frac{d^2 y}{d x^2}$ negativ wird, so gibt $x = 0$ den größten Werth $y = \pm b$, oder die beyden Wendepunkte der Ellipse gehören für die Abscisse $x = 0$. Nimmt man die kleine Axe der Ellipse für die der Abscisse x, so hat man

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

und man findet auch hier, daß $x = 0$ oder $y = \pm a$ zwey Wendepunkte der Ellipse gibt.

Für die Sinuslinie (§. 17, III. Fig. 23) ist $y = a \sin. x$, also gehören ihre Wendepunkte zu den Abscissen $x = \pm \frac{1}{2} n\pi$, wo $n = 1, 3, 5, 7 \ldots$

§. 106. (**Inflexions- und Beugungspunkte.**) Inflexionspunkte der Curven nennt man diejenigen, wo die Concavität derselben in eine Convexität gegen die Abscissenaxe oder auch gegen irgend eine andere feste Gerade übergeht. Für solche Punkte muß daher, nach dem in §. 104 Gesagten, der Werth von $\frac{d^2 y}{d x^2}$ gleich Null oder gleich unendlich seyn, oder der allgemeine Werth von $\frac{d^2 y}{d x^2}$ muß, für solche Punkte, von dem positiven Zustand in den negativen übergehen.

Hat man so, aus der gegebenen Gleichung der Curve, und aus der Bedingungsgleichung $\frac{d^2 y}{d x^2} = 0$ die Werthe $x = \alpha$ und $y = \beta$ der Coordinaten gefunden, für welche ein Inflexionspunkt Statt haben kann, so wird man, um die Existenz desselben zu constatiren, in der Gleichung $\frac{d^2 y}{d x^2}$ statt x die Größe $\alpha + h$ und $\alpha - h$ setzen, wo h unendlich klein ist, und zusehen, ob für diese kleinsten Werthe von h die Größe $\frac{d^2 y}{d x^2}$ auch in der That ihre Zeichen ändert.

Ist z. B. die Gleichung

$$y = \beta + (x - \alpha)^{\frac{3}{5}}$$

einer Curve gegeben, so findet man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{5(x - a)^{\frac{2}{5}}} \text{ und } \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{-6}{25(x - a)^{\frac{7}{5}}}.$$

Nimmt man hier $\frac{d^2 y}{d x^2} = \infty$, so erhält man $x = \alpha$. Setzt man aber $x = \alpha \pm h$, so wird

$$\left(\frac{d^2 y}{d x^2} =\right) \mp \frac{6}{25 h^{\frac{7}{5}}},$$

und da sonach ein Zeichenwechsel Statt hat, so hat die Curve einen Inflexionspunkt für $x = \alpha$ und $y = \beta$.

Auf diese Weise findet man, daß die Curve, deren Gleichung

$$y = \frac{a x^2}{a^2 + x^2}$$

ist, für $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$ einen Inflexionspunkt hat. Man sieht, daß in diesen Inflexionspunkten die Curve von der Tangente zugleich berührt und durchschnitten wird, wie in Fig. 41. Übrigens können diese Tangenten in jenen Punkten jede willkürliche Lage gegen die Abscissenaxe haben, da man, um diese Lage zu ändern, nur die Richtung der Coordinatenaxen (nach §. 4) verändern kann.

§. 107. (**Spitzen der Curven**) In den Spitzen vereinigen sich wenigstens zwey Äste der Curven, die daselbst eine gemeinschaftliche, zwischen diesen Ästen liegende Tangente haben, wie in Fig. 5 und 6. Verlegt man den Anfang der Coordinaten in diese Spitze, und die Abscissenaxe in jene Tangente, so können in der so veränderten Gleichung der Curve die kleinsten Werthe von x bloß positiv oder bloß negativ seyn, und die Größe $\frac{dy}{dx}$ wird für $x = 0$ bloß den einzigen Werth 0, für jede andere sehr kleine Abscisse x aber einen doppelten Werth mit verschiedenen Zeichen haben.

Für die Cissois (§. 15, II. Fig. 6) ist $x^3 = y^2(a - x)$, und diese Gleichung, oder

$$y = x\sqrt{\frac{x}{a - x}}$$

zeigt, daß für sehr kleine x diese Abscisse x nur positiv seyn kann. Diese Gleichung gibt aber

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3a - 2x)\sqrt{x}}{2\sqrt{(a - x)^3}},$$

woraus folgt, daß für $x = 0$ auch $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, und daß für sehr kleine Werthe von x die Größe $\frac{dy}{dx}$ einen doppelten Werth hat.

Eben so hat die Conchois (§. 15, IV. Fig. 10) die Gleichung

$$\frac{y^2}{x^2} + 1 = \left(\frac{b}{a - x}\right)^2,$$

wo $BQ = x$ und $MQ = y$ ist.

Setzt man also $a = b$, so hat man

$$y = x\sqrt{\frac{2ax - x^2}{a - x}} = x^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{2a - x}{a - x}};$$

also kann auch hier nahe bey dem Anfang der Coordinaten die sehr kleine Größe x nur positiv seyn, und da man für $x = 0$ auch $\frac{dy}{dx} = 0$, und für sehr kleine x den Werth von $\frac{dy}{dx}$ doppelt findet, so hat die Curve in dem Punkte B eine Spitze, wie schon in §. 15, IV. bemerkt worden ist. Eine ähnliche Spitze hat auch die Neil'sche Parabel (Fig. 5) in A, die Cyclois (Fig. 26) in A und B u. s.

§. 108. **(Schnäbel der Curven.)** Eine Spitze, in welcher die in diesem Punkte sich vereinigenden Äste beyde auf derselben Seite der gemeinschaftlichen Tangente liegen, heißt ein Schnabel. Für ihn gilt, was §. 107 von den Spitzen gesagt worden ist, nur mit dem Unterschiede, daß, wenn wie dort die Abscissenaxe in die gemeinschaftliche Tangente gelegt worden ist, für sehr kleine x der Werth von $\frac{dy}{dx}$ zwar auch doppelt ist, aber dasselbe Zeichen hat. Die oben (§. 16, IV. Fig. 20) angegebene Schnabellinie hat in dem Anfangspunkte A der Coordinaten einen solchen Schnabel. Setzt man daselbst $a = b = 1$, so wird die Gleichung dieser Linie

$$y = x^2 + \sqrt{x^5}, \text{ und diese gibt}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + \tfrac{5}{2} x^{\frac{3}{2}} \text{ und } \frac{d^2y}{dx^2} = 2 + \tfrac{15}{4}\sqrt{x}.$$

Setzt man in diesen Ausdrücken $x = 0$, so wird auch $\frac{dy}{dx} = 0$, oder beyde Äste AM und Am haben die Abscissenaxe AX zur gemeinschaftlichen Tangente. Für sehr kleine Werthe von x aber werden beyde Werthe von $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv. Einen ähnlichen Schnabel im Anfangspunkte der Coordinaten haben auch die Curven, deren Gleichungen

$$y = ax^3 + bx^3\sqrt{x} \text{ und } y = ax^{\frac{3}{4}} + bx^{\frac{3}{4}}\sqrt{x} \text{ sind.}$$

§. 109. (**Vielfache Punkte der Curven.**) Wenn zwey oder mehr Äste einer Curve sich in einem Punkte schneiden, ohne in demselben eine gemeinschaftliche Tangente zu haben, so wird ein solcher Punkt ein vielfacher Punkt genannt. Die Glockenlinie (§. 15, III. Fig. 9), deren Gleichung

$$ay^2 - x^3 - cx^2 = 0$$

ist, hat in A, wo jeder der beyden Äste AM und Am seine eigene Tangente hat, einen solchen doppelten Punkt, so wie die Conchois (Fig. 10) in B, die Lemniscate (Fig. 13) in A u. f.

§. 110. (**Conjugirte Punkte.**) Wenn die Gleichung einer Curve für einen bestimmten Werth von $x = a$ einen reellen Werth von y, aber für $x = a \pm h$, wo h sehr klein ist, einen imaginären Werth von y gibt, so gehört die Abscisse $x = a$ für einen conjugirten Punkt, der zwar von der eigentlichen Curve abgesondert und isolirt ist, aber demungeachtet einen integrirenden Theil derselben bildet. Für die Conchois (§. 15, IV. Fig. 10) ist

$$y^2 = x^2\left(\frac{b}{x - a}\right)^2 - x^2.$$

In dieser Gleichung gibt $x = 0$ auch $y = 0$. Setzt man aber $x = \pm h$, so wird y imaginär; also ist für $b < a$ der Anfangspunkt der Curve ein einfacher, conjugirter Punkt. Eben so erhält man für die Curve, deren Gleichung

$$y = (x + 1)\sqrt{x} \text{ ist,}$$

für $x = -1$ und $y = 0$ einen doppelten Punkt u. f.

XIV.
Differentiation der Gleichungen der Oberflächen.

§. 111. (Erstes Differential der Gleichung einer Fläche.) Jede einzelne Gleichung zwischen drey veränderlichen Größen x, y, z kann als die Gleichung einer Fläche betrachtet werden. Da aber eine einzige Gleichung auch nur eine einzige veränderliche Größe bestimmen kann, so müssen die zwey anderen unserer willkürlichen Annahme überlassen bleiben, oder man wird zwey dieser Größen, z. B. x und y nach Willkür annehmen, um dann durch sie den ihnen entsprechenden Werth von z so zu bestimmen, wie der letzte aus der vorgelegten Gleichung der gegebenen Fläche folgt. So kann man z. B. aus der bekannten Gleichung der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

deren Halbmesser a ist, den Werth von z erst dann erhalten, wenn man den Größen x und y zuvor bestimmte Werthe beygelegt hat, und da diese beyden Größen x und y durch keine weitere Relation unter sich verbunden, oder da sie von einander unabhängig sind, so wird man auch die eine derselben verändern können, während die andere ungeändert bleibt, so daß daher die Größe z auf zwey verschiedene Arten variiren kann, nämlich in Beziehung auf x sowohl, als auch in Beziehung auf y. Im ersten Falle betrachtet man in der gegebenen Gleichung zwischen x, y und z bloß die zwey Größen z und x, im zweyten aber bloß z und y als veränderlich. Bezeichnet man also wieder (wie oben §. 53) diese partiellen Differentialien von z in Beziehung auf x durch $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, und in Beziehung auf y durch $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, so hat man für die Differentialgleichung der Kugel

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{x}{z} \quad \text{und} \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{y}{z}.$$

Man sieht sonach, daß jede einzelne Gleichung zwischen drey veränderlichen Größen x, y, z, von welchen zwey, x und y, unabhängig sind, zu ihrem Differential zwey Gleichungen, aber zwischen partiellen Differentialien, hat, und daß man, wenn man zu den höheren Differentialien dieser Gleichung fortgehen will, die beyden ersten

Differentialien dx und dy der zwey als unabhängig angenommenen Größen constant setzen muß.

Sey also $u = o$ die Gleichung einer Fläche zwischen den drey veränderlichen Größen x, y und z. — Betrachtet man zuerst bloß die Größen z und x als variabel, so kann die Gleichung $u = o$ als eine Gleichung zwischen den zwey veränderlichen Größen z und x angesehen werden, und man hat daher, wie oben (§. 59, Gleichung I.)

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dz}\right) \cdot \frac{dz}{dx} = o \quad . \quad . \quad . \quad (X),$$

wo die in Klammern eingeschlossenen Größen die partiellen Differential-Coefficienten, die außer den Klammern stehenden Größen dx und dz aber gewöhnliche Differentialien bezeichnen.

Eben so erhält man, wenn man bloß z und y variabel annimmt:

$$\left(\frac{du}{dy}\right) + \left(\frac{du}{dz}\right) \cdot \frac{dz}{dy} = o \quad . \quad . \quad . \quad (Y).$$

Multiplicirt man die erste dieser Differentialgleichungen durch dx und die zweyte durch dy, so ist die Summe dieser Produkte

$$\left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy + \left(\frac{du}{dz}\right) \left[\frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy\right] = o.$$

Allein $\frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy$ ist nichts anderes, als das vollständige Differential von z, oder gleich dz; also geht auch die letzte Gleichung in folgende über:

$$\left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy + \left(\frac{du}{dz}\right) dz = o \quad . \quad . \quad . \quad (Z),$$

und dieser Ausdruck kann als das vollständige Differential der gegebenen Gleichung $u = o$ angesehen werden, wenn man nur bemerkt, daß sie eigentlich zwey anderen Differentialgleichungen gleichgeltend ist. Denn wenn man in ihr den Werth von dz oder

$$dz = \frac{dz}{dx} \cdot dx + \frac{dz}{dy} \cdot dy$$

substituirt, und dann die beyden Größen dx und dy als von einander unabhängig betrachtet, so findet man die zwey vorhergehenden Gleichungen (X) und (Y) wieder, denen diese Gleichung (Z) gleichgeltend ist.

§. 112. (Zweytes Differential der Gleichung einer Fläche.) Um das zweyte Differential einer Gleichung $u = o$ zwischen drey veränderlichen Größen zu erhalten, wird man jede der beyden vorhergehenden ersten Differentialgleichungen (X) und (Y) wieder in Beziehung auf z, x und auf z, y partiell differentiiren.

Differentiirt man die Gleichung (X) in Beziehung auf z und x, so gibt das erste Glied derselben, da nach dem Vorhergehenden dx und dy constant ist,

$$\left(\frac{d^2 u}{d x^2}\right) + \left(\frac{d^2 u}{d x d z}\right) \frac{d z}{d x},$$

und das zweyte Glied gibt

$$\left[\left(\frac{d^2 u}{d x d z}\right) + \left(\frac{d^2 u}{d z^2}\right) \frac{d z}{d x}\right] \frac{d z}{d x} + \left(\frac{d u}{d z}\right) \frac{d^2 z}{d x^2},$$

und daher die Summe beyder Glieder

$$\left(\frac{d^2 u}{d x^2}\right) + 2\left(\frac{d^2 u}{d x d z}\right) \frac{d z}{d x} + \left(\frac{d^2 u}{d z^2}\right) \frac{d z^2}{d x^2} + \left(\frac{d u}{d z}\right) \frac{d^2 z}{d x^2} = o \ldots (XX).$$

Differentiirt man aber (X) in Beziehung auf y, z, oder was dasselbe ist, differentiirt man (Y) in Beziehung auf x, z, indem man bemerkt, daß (nach §. 53, I.)

$$\frac{d^2 z}{d y d x} = \frac{d^2 z}{d x d y} \text{ ist, so erhält man:}$$

$$\left(\frac{d^2 u}{d x d y}\right) + \left(\frac{d^2 u}{d y d z}\right) \frac{d z}{d x} + \left(\frac{d^2 u}{d x d z}\right) \frac{d z}{d y} + \left(\frac{d u}{d z}\right) \frac{d^2 z}{d x d y}$$
$$+ \left(\frac{d^2 u}{d z^2}\right) \frac{d z}{d x} \cdot \frac{d z}{d y} = o \ldots (XY).$$

Differentiirt man endlich die Gleichung (Y) in Beziehung auf y und z, so erhält man

$$\left(\frac{d^2 u}{d z^2}\right) + 2\left(\frac{d^2 u}{d y d z}\right) \frac{d z}{d y} + \left(\frac{d^2 u}{d z^2}\right) \frac{d z^2}{d y^2} + \left(\frac{d u}{d z}\right) \frac{d^2 z}{d y^2} = o \ldots (YY),$$

und dieß sind die drey Differentialgleichungen der zweyten Ordnung von der gegebenen endlichen Gleichung u = o. Eine solche Gleichung zwischen drey veränderlichen Größen hat also zwey erste und drey zweyte Differentialgleichungen. Es ist leicht, dieß auch auf die Differentialgleichungen der höheren Ordnungen, und auf Gleichungen u = o zwischen mehr als drey veränderlichen Größen fortzusetzen.

Da in diesen drey Gleichungen (XX), (XY) und (YY) nur drey Differential-Coefficienten der zweyten Ordnung von der Größe z vorkommen, so wird man sie durch diese drey Gleichungen bestimmen können.

Man wird nämlich finden

den Werth von $\frac{d^2 z}{dx^2}$ aus (XX),

» » » $\frac{d^2 z}{dx\,dy}$ » (XY) und

» » » $\frac{d^2 z}{dy^2}$ » (YY).

Bemerken wir noch, daß wir in §. 111 für das vollständige erste Differential von z erhalten haben:

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy,$$

und daß man eben so das zweyte vollständige Differential von z, oder daß man $d^2 z$ erhalten wird, wenn man diesen Ausdruck von dz in Beziehung auf x und y differentiirt, und dabey dx und dy constant setzt, oder auch, wenn man in der Gleichung (II) des §. 60 die Größe $u = z$ und $d^2 y = 0$ setzt, so daß man daher hat

$$d^2 z = \frac{d^2 z}{dx^2} \cdot dx^2 + 2\frac{d^2 z}{dx\,dy} \cdot dx\,dy + \frac{d^2 z}{dy^2} \cdot dy^2.$$

Multiplicirt man aber die vorhergehenden Gleichungen (XX), (XY) und (YY) nach der Ordnung durch dx^2, $2dx\,dy$ und dy^2, so gibt die Summe dieser drey Produkte, wenn man dabey die so eben gegebenen Werthe von dz und $d^2 z$ berücksichtiget,

$$\left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right)dx^2 + \left(\frac{d^2 u}{dy^2}\right)dy^2 + \left(\frac{d^2 u}{dz^2}\right)dz^2$$
$$+ 2\left[\left(\frac{d^2 u}{dx\,dy}\right)dx\,dy + \left(\frac{d^2 u}{dx\,dz}\right)dx\,dz + \left(\frac{d^2 u}{dy\,dz}\right)dy\,dz\right]$$
$$+ \left(\frac{du}{dz}\right)d^2 z = 0,$$

derselbe Ausdruck oder dasselbe zweyte Differential der Gleichung $u = 0$ einer Fläche, den man auch erhalten wird, wenn man die vorhergehende erste Differentialgleichung

$$\left(\frac{du}{dx}\right)dx + \left(\frac{du}{dy}\right)dy + \left(\frac{du}{dz}\right)dz = 0$$

differentiirt, indem man in ihr die Größen x, y, z und dz veränderlich, die Größen dx und dy aber constant nimmt.

Ex. I. Sey die Gleichung gegeben

$$u = 0 = xy + xz + yz - a^2,$$ so hat man

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = y + z,\quad \left(\frac{du}{dy}\right) = x + z,\quad \left(\frac{du}{dz}\right) = x + y,$$

ferner

$$\left(\frac{d^2 u}{d x^2}\right) = \left(\frac{d^2 u}{d y^2}\right) = \left(\frac{d^2 u}{d z^2}\right) = 0,$$

und endlich

$$\left(\frac{d^2 u}{d x d y}\right) = \left(\frac{d^2 u}{d x d z}\right) = \left(\frac{d^2 u}{d y d z}\right) = 1.$$

Dieß vorausgesetzt, hat man also für die Gleichung

$$(X) \quad \ldots \quad (y + z) + (x + y) \frac{d z}{d x} = 0,$$

$$(Y) \quad \ldots \quad (x + z) + (x + y) \frac{d z}{d y} = 0,$$

$$(XX) \quad \ldots \quad z \cdot \frac{d z}{d x} + (x + y) \frac{d^2 z}{d x^2} = 0,$$

$$(XY) \quad \ldots \quad 1 + \frac{d z}{d x} + \frac{d z}{d y} + (x + y) \frac{d^2 z}{d x d y} = 0,$$

$$(YY) \quad \ldots \quad 2 \cdot \frac{d z}{d y} + (x + y) \frac{d^2 z}{d y^2} = 0,$$

und dieß sind daher die fünf Gleichungen, aus welchen man die Werthe der fünf Differential-Coefficienten

$$\frac{d z}{d x}, \quad \frac{d z}{d y}, \quad \frac{d^2 z}{d x^2}, \quad \frac{d^2 z}{d x d y} \quad \text{und} \quad \frac{d^2 z}{d y^2}$$

finden wird.

Ohne sich übrigens an diese allgemeinen Formeln zu halten, wird man, wie in §. 60, II., kürzer zu demselben Ziele gelangen, wenn man die gegebene Gleichung $u = 0$ auf die gewöhnliche Weise differentiirt. Auf diese Art erhält man sofort die Gleichung

$$(X) \quad \ldots \quad (x + y)\, d z + (y + z)\, d x = 0,$$

$$(Y) \quad \ldots \quad (x + y)\, d z + (x + z)\, d y = 0.$$

Ist dann $d x$ und $d y$ constant, so gibt die Differentiation der zwey letzten Gleichungen

$$(XX) \quad \ldots \quad 2 d x d z + (x + y)\, d^2 z = 0,$$

$$(XY) \quad \ldots \quad d x d y + d x d z + d y d z + (x + y)\, d^2 z = 0,$$

$$(YY) \quad \ldots \quad 2 d y d z + (x + y)\, d^2 z = 0, \quad \text{wie zuvor.}$$

Die gewählte Gleichung

$$u = 0 = x y + x z + y z - a^2$$

der zweyten Ordnung gehört übrigens für das sogenannte Hyperboloid mit einem Fache. Nennt man A, B, C die drey Hauptaxen dieses Hyperboloids, so hat man

$$A^2 = a^2,$$
$$B^2 = -2a^2(1+\sqrt{2}) \quad \text{und}$$
$$C^2 = -2a^2(1-\sqrt{2}),$$

also die zweyte Hauptaxe B imaginär, eine diesem Hyperboloid zukommende Eigenschaft. (M. s. Cauchy, Exercices de Mathem. III. année. Paris 1828.)

Ex. II. Für das Ellipsoid mit drey Axen a, b, c hat man die Gleichung

$$u = 0 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1.$$

Diese Gleichung gibt

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{c^2 x}{a^2 z} \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{c^2 y}{b^2 z}.$$

Differentiirt man die erste dieser Gleichungen in Beziehung auf z und x, so ist

$$-\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{c^2}{a^2 z^2}\left(z - x \cdot \frac{dz}{dx}\right),$$

oder, wenn man den Werth von $\frac{dz}{dx}$ substituirt:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{c^4}{a^2 b^2 z^3}(b^2 - y^2).$$

Differentiirt man eben so die erste jener Gleichungen in Beziehung auf y, oder die zweyte in Beziehung auf x, so erhält man

$$\frac{d^2 z}{dx\,dy} = -\frac{c^4 \cdot xy}{a^2 b^2 z^3}.$$

Differentiirt man endlich die zweyte jener Gleichungen in Beziehung auf y, so hat man

$$\frac{d^2 z}{dy^2} = -\frac{c^4}{a^2 b^2 z^3}(a^2 - x^2).$$

§. 113. **(Elimination der Constanten und selbst der willkürlichen Funktionen.)** Da die Gleichung $u = 0$ zwischen drey veränderlichen Größen zwey erste Differentialgleichungen hat, so kann man aus diesen drey Gleichungen zwey Constanten eliminiren, und das Resultat wird eine Gleichung zwischen x, y und z, und zwischen den partiellen Differentialien $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ seyn, die von jenen beyden Constanten ganz unabhängig ist.

Fügt man zu diesen Gleichungen noch die drey Differentialgleichungen der zweyten Ordnung von $u = o$ hinzu, so wird man aus diesen sechs Gleichungen fünf Größen eliminiren können u. s. w.

Auf diese Weise wird man selbst ganz unbekannte Funktionen einer gegebenen Gleichung eliminiren, und dieser Gleichung eine andere substituiren können, welche diese Funktion nicht mehr, aber dafür die partiellen Differentialien der Größen x, y und z enthält.

Ist z. B. die Gleichung gegeben

$$z = f(ax + by) \quad . \quad . \quad . \quad (I),$$

wo f was immer für eine, selbst unbekannte Funktion der Größe $(ax + by)$ bezeichnet, also z. B.:

$$z = (ax + by)^m, \text{ oder}$$
$$z = \sin. \sqrt{ax + by}, \text{ oder}$$
$$z = \log. (ax + by) \text{ u. s.},$$

so setze man der Kürze wegen $ax + by = t$, so daß man für die gegebene Gleichung den einfachen Ausdruck

$$z = f(t)$$

hat. Differentiirt man diesen Ausdruck in Beziehung auf z, x und auf z, y, so erhält man (§. 39)

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = a . f'(t) \text{ und } \left(\frac{dz}{dy}\right) = b . f'(t),.$$

wo f′t wieder irgend eine andere, ebenfalls unbekannte Funktion von t bezeichnet. Eliminirt man aus den beyden letzten Gleichungen diese Größe f′(t), so erhält man

$$a\left(\frac{dz}{dy}\right) - b\left(\frac{dz}{dx}\right) = o \quad . \quad . \quad . \quad (II),$$

und diese Gleichung ist der gegebenen

$$z = f(ax + by)$$

gleichgeltend, obschon sie die willkürliche Funktion nicht mehr enthält. Man sieht, daß jene als die erste Differentialgleichung von dieser angesehen werden kann.

I. Differentiirt man die so erhaltene Differentialgleichung

$$a\left(\frac{dz}{dy}\right) - b\left(\frac{dz}{dx}\right) = o,$$

noch einmal partiell, so erhält man

$$a\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) - b\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = o \text{ und } a\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - b\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) = o,$$

und eliminirt man aus diesen beyden Gleichungen die Größe $\frac{a}{b}$, so erhält man

$$\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right)^2 = \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) \cdot \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) \quad . \; . \; . \quad \text{(III)}.$$

Diese Gleichung ist die zweyte Differentialgleichung der Gleichung (I), und sie ist, wie man sieht, nicht nur von jener willkürlichen Funktion, sondern auch von den beyden Constanten a und b ganz unabhängig.

II. Sey für ein anderes Beyspiel die Gleichung

$$z = x.\varphi(\omega) + y.\psi(\omega) + \omega \quad . \; . \; . \quad \text{(A)}$$

gegeben, wo φ und ψ willkürliche, und selbst unbekannte Funktionen der Größe ω bezeichnen sollen.

Differentiirt man diese Gleichung partiell, so erhält man

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \varphi(\omega) \quad \text{und} \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = \psi(\omega),$$

woraus sofort folgt:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = f\left(\frac{dz}{dy}\right) \quad . \; . \; . \quad \text{(a)},$$

wenn f wieder irgend eine Funktion bezeichnet. Da aber

$$\omega = z - x\left(\frac{dz}{dx}\right) - y\left(\frac{dz}{dy}\right)$$

ist, so kann man die beyden vorhergehenden Gleichungen auch so ausdrücken:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \varphi.\left[z - x\left(\frac{dz}{dx}\right) - y\left(\frac{dz}{dy}\right)\right] \quad . \; . \; . \quad \text{(b)},$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \psi.\left[z - x\left(\frac{dz}{dx}\right) - y\left(\frac{dz}{dy}\right)\right] \quad . \; . \; . \quad \text{(c)},$$

und diese beyden Gleichungen (b) und (c), so wie auch die ihnen gleichgeltende (a), sind die ersten Differentialien der gegebenen Gleichung (A). Sie enthalten, wie man sieht, jede nur mehr eine jener zwey willkürlichen Funktionen, aber dafür die ersten partiellen Differentialien $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$.

Wenn man aber die vorhergehende Gleichung

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = f\left(\frac{dz}{dy}\right)$$

noch einmal partiell differentiirt, so hat man

$$\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) = \left(\frac{d^2 z}{d x d y}\right) f'\left(\frac{d z}{d y}\right) \text{ und } \left(\frac{d^2 z}{d x d y}\right) = \left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) f'\left(\frac{d z}{d y}\right);$$

also auch, wenn man die unbekannte Größe $f'\left(\frac{d z}{d y}\right)$ aus diesen zwey Gleichungen eliminirt:

$$\left(\frac{d^2 z}{d x d y}\right)^2 = \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right)\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) \ldots (d),$$

und dieß ist die zweyte Differentialgleichung der gegebenen endlichen Gleichung (A). Sie enthält keine der beyden ursprünglichen, durch φ und ψ bezeichneten Funktionen mehr, aber dafür partielle Differentialien der zweyten Ordnung. Auch ist sie, wie man sieht, identisch mit der Gleichung (III), obschon diese auf einem ganz andern Wege erhalten worden ist.

Dieß wird genügen, die Wichtigkeit und Allgemeinheit dieser Betrachtungen zu zeigen, auf welche wir später wieder zurückkommen werden. Man wird übrigens von selbst die sehr große Allgemeinheit der Gleichungen mit partiellen Differentialien bemerken, da sie, nicht nur von den constanten Größen, welche ihre ursprünglichen Gleichungen enthalten, unabhängig sind, wie wir dieses oben (§. 61, I) bey den Gleichungen mit gewöhnlichen Differentialien bemerkt haben, sondern da sie selbst von den ganz willkürlichen Funktionen von x und y befreyt seyn können, welche in den ursprünglichen oder endlichen Gleichungen derselben vorkommen.

XV.

Tangirende Ebenen der Flächen.

§. 114. **(Vorläufige Betrachtungen.)** Seyen (Fig. 42) XAZ YAZ und XAY die drey unter sich senkrechten coordinirten Ebenen, der xz, yz und xy, auf welche alle Punkte einer gegebenen Oberfläche bezogen werden. Wenn x allein variirt und $x + h$ wird, so geht man von dem Punkte M der Fläche zu dem Punkte M′ über, wo beyde Punkte M und M′ in einer zur Ebene der xz parallelen Ebene Q″Q′M′M liegen, und die Ordinate Q′M′ des Punktes M′ ist

$$z + h\left(\frac{d z}{d x}\right) + \frac{h^2}{1 \cdot 2}\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right) + \ldots$$

Wenn aber y allein variirt und $y + k$ wird, so geht man von dem Punkte M zu dem Punkte N über, wo diese zwey Punkte in einer zur Ebene yz parallelen Ebene PRNM liegen, und die Ordinate RN des Punktes N ist

$$z + k\left(\frac{dz}{dy}\right) + \frac{k^2}{1.2}\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) + \ldots$$

Wenn aber x und y zugleich variiren, so geht man von dem Punkte M zu einem andern Punkte N′ über, und zwar auf zwey verschiedene Arten, indem man nämlich in der ersten vorhergehenden Entwicklung $y + k$ statt y, oder indem man in der zweyten $x + h$ statt x setzt. Beyde Wege führen zu demselben Punkte N′, wenn anders die Oberfläche in der betrachteten Stelle stetig ist, und die Gleichung (§. 53)

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{d^2z}{dy\,dx}\right),$$

welche die Identität dieser beyden Verfahren ausdrückt, gründet sich allein auf dieses Gesetz der Stetigkeit der Fläche.

Diese Ordinate R′N′ wird daher, in ihrer Entwicklung, nach §. 53 zum Ausdrucke haben:

$$z + h\left(\frac{dz}{dx}\right) + k\left(\frac{dz}{dy}\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\left[h^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + 2hk\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right) + k^2\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right] + \ldots$$

Wir wollen sie der Kürze wegen so ausdrücken:

$$z + ph + qk + \tfrac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) + \ldots,$$

so daß man also hat

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right), \quad q = \left(\frac{dz}{dy}\right),$$
$$r = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right), \quad s = \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right), \quad t = \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right).$$

Dieß vorausgesetzt, ist also auch

$$r = \left(\frac{dp}{dx}\right), \quad s = \left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right) \text{ und } t = \left(\frac{dq}{dy}\right).$$

Wir werden diese Zeichen im Folgenden zur Abkürzung beybehalten, und bemerken hier nur, daß ihnen gemäß die allgemeine erste Differentialgleichung jeder Fläche

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

und daher auch die zweyte Differentialgleichung derselben

$$d^2z = rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2$$

seyn wird, weil $dp = rdx + sdy$ und $dq = sdx + tdy$ ist.

I. Diesem gemäß wird also die Gleichung (X) des §. 111 derjenigen Curve angehören, in welcher die mit xz parallele Ebene $Q''Q'M'M$ die Fläche $u = o$ schneidet, so wie die Gleichung (Y) für die Curve gehört, in welcher die mit yz parallele Ebene $PRNM$ die Fläche schneidet. In der ersten dieser Gleichungen ist $dz = Q'M' - QM$, und in der zweyten ist $dz = RN - QM$, oder dort ist das partielle $dz = pdx$, und hier ist es $dz = qdy$, beyder Summe aber ist das vollständige Differential von z oder $dz = R'N' - QM = pdx + qdy$.

§. 115. (**Verschiedene Grade der Berührungen der Flächen.**) Wir haben gesehen, daß für jede gegebene Fläche, deren Gleichung zwischen xyz ausgedrückt ist, wenn x in $x + h = x + dx$, und y in $y + k = y + dy$ übergeht, der dadurch veränderte Werth von z gleich ist

$$z + pdx + qdy + \tfrac{1}{2}(rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2) + \ldots$$

Eine zweyte Fläche, deren Gleichung zwischen den analogen Coordinaten $x'y'z'$ und mehreren Constanten gegeben ist, soll durch den Punkt der ersten Fläche gehen, dessen Coordinaten xyz sind. Geht dann auch ferner noch in ihr die Größe $x = x'$ in $x + dx$, und $y = y'$ in $y + dy$ über, so hat man für den veränderten Werth von z oder z' den Ausdruck:

$$z + p'dx + q'dy + \tfrac{1}{2}(r'dx^2 + 2s'dxdy + t'dy^2) + \ldots$$

Bestimmt man nun die Constanten der zweyten Gleichung so, daß $p' = p$ und $q' = q$ wird, so werden beyde Flächen, analog mit dem oben (§. 91) Gesagten, eine Berührung der ersten Ordnung haben, so daß in dem Berührungspunkte keine andere dritte Fläche zwischen jenen beyden durchgehen kann, wenn diese dritte Fläche nicht auch denselben Bedingungsgleichungen $p'' = p$ und $q'' = q$ genug thut. (Vergl. §. 94.)

Eben so werden diese beyden Flächen in ihrem gemeinschaftlichen Punkte eine Berührung der zweyten Ordnung haben, wenn man die Constanten der zweyten Fläche so bestimmt, daß nebst jenen beyden Bedingungsgleichungen auch noch die drey folgenden (vergl. §. 95) Statt haben:

$$r' = r, \quad s' = s \quad \text{und} \quad t' = t,$$

und man sieht, wie sich dieses auch auf die Berührungen der höheren Ordnungen fortsetzen läßt.

§. 116. (Tangirende Ebene der Flächen.) Sey die zweyte der in §. 115 betrachteten Flächen eine Ebene, und die Gleichung derselben

$$z' = Ax' + By' + D.$$

Die Bedingung, daß diese Ebene durch den Punkt der ersten Fläche, dessen Coordinaten x, y, z sind, geht, gibt

$$z = Ax + By + D.$$

Demnach wird die Gleichung unserer Ebene die Form haben:

$$z - z' = A(x - x') + B(y - y'),$$

in welcher nur noch die beyden Größen A und B zu bestimmen seyn werden.

Die Bedingung, daß die Ebene mit der Fläche eine Berührung der ersten Ordnung haben soll, gibt aber sofort

$$\left(\frac{dz'}{dx'}\right) = \left(\frac{dz}{dx}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{dz'}{dy'}\right) = \left(\frac{dz}{dy}\right),$$

oder was dasselbe ist,

$$A = \left(\frac{dz}{dx}\right) \quad \text{und} \quad B = \left(\frac{dz}{dy}\right);$$

und diese drey Gleichungen bestimmen die drey Größen A, B und D, so daß man daher für die Gleichung der gesuchten tangirenden Ebene hat

$$z' - z = (x' - x)\left(\frac{dz}{dx}\right) + (y' - y)\left(\frac{dz}{dy}\right) \quad \text{oder}$$

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y),$$

wo $x'y'z'$ die variabeln Größen der tangirenden Ebene sind.

I. Nennt man α, β, γ die Winkel, welche die tangirende Ebene der Flächen mit den coordinirten Ebenen der xy, xz und yz bildet, so hat man (Einl. §. 9, I.)

$$\cos.\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \cos.\beta = \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

$$\text{und} \quad \cos.\gamma = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

wo $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$ ist.

Ex. Die Gleichung des Ellipsoids mit drey Axen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

gibt sofort

$$p = -\frac{c^2 x}{a^2 z} \text{ und } q = -\frac{c^2 y}{b^2 z},$$

also ist auch die Gleichung der das Ellipsoid tangirenden Ebene

$$\frac{x x'}{a^2} + \frac{y y'}{b^2} + \frac{z z'}{c^2} = 1.$$

II. Diese tangirende Ebene berührt die gegebene Fläche nicht etwa bloß in dem Elemente einer Curve, die in dieser Fläche enthalten ist, sondern vielmehr in allen den Punkten, welche um den gemeinschaftlichen Punkt beyder Flächen, diesem Punkte in allen Richtungen zunächst liegen; oder mit andern Worten: die tangirende Ebene enthält die tangirenden Geraden von allen den Curven, die durch irgend eine Ebene entstehen, welche die Fläche in jenem gemeinschaftlichen Punkte schneidet. Denn wenn man die Gleichung der tangirenden Ebene in Beziehung auf ihre Coordinaten, d. h. in Beziehung auf x', y' und z' differentiirt, so erhält man

$$dz' = p\,dx' + q\,dy'.$$

Nimmt man also $dx' = dx$ und $dy' = dy$, so hat man

$$dz' = p\,dx + q\,dy = dz$$

so daß also für alle Punkte, welche den gemeinschaftlichen Punkt beyder Flächen zunächst umgeben, $dz' = dz$ ist.

III. Setzt man in der Gleichung der tangirenden Ebene eine der Coordinaten x', y' oder z' gleich Null, so erhält man die Gleichung der Knotenlinie (§. 8) der tangirenden Ebene in der coordinirten Ebene der beyden andern Coordinaten. Man könnte diese Gleichungen der Knotenlinien so benützen, wie oben die Subtangente, um zu einem gegebenen Punkte der Fläche die tangirende Ebene zu ziehen.

§. 117. (Normalen der Flächen und Curven des größten Abfalls.) Diejenige gerade Linie, welche in einem gegebenen Punkte auf der Fläche senkrecht steht, heißt die *Normale* der Fläche in diesem Punkte.

Da die Normale auch auf der tangirenden Ebene dieses Punktes senkrecht stehen muß, so hat man sofort für die Gleichungen der Normale (Einl. §. 11):

$$\left.\begin{array}{l} x' - x + (z' - z)\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0 \\ y' - y + (z' - z)\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0 \end{array}\right\} \text{ oder}$$

$$\left.\begin{array}{l} x' - x + p(z' - z) = 0 \\ y' - y + q(z' - z) = 0 \end{array}\right\}.$$

Nennt man $\alpha \beta \gamma$ die Winkel der Normale mit den drey Richtungen der Axen der $x y z$, so hat man, wenn $r = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$ ist:

$$\cos.\alpha = -\frac{p}{r}, \quad \cos.\beta = -\frac{q}{r} \quad \text{und} \quad \cos.\gamma = \frac{1}{r}.$$

I. Die Entfernung dieses Punktes $x y z$ der Fläche von irgend einem Punkte $x'' y'' z''$ der Normale ist gleich

$$\sqrt{(x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2},$$

also auch gleich

$$(z'' - z)\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Ist in diesem Ausdrucke $z'' = 0$, so erhält man für die Länge der Normale zwischen dem gegebenen Punkte der Fläche und demjenigen Punkte, wo die Normale die Ebene der $x y$ trifft, den Ausdruck

$$N = -z\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Ex. Für das eben angeführte Ellipsoid hat man

$$N = -\frac{1}{a^2 b^2}\sqrt{a^4 c^4 y^2 + b^4 c^4 x^2 + a^4 b^4 z^2}.$$

Für die Kugel ist $a = b = c$, also auch

$$N = a,$$

oder N gleich dem Halbmesser der Kugel.

Ist das Ellipsoid durch Umdrehung der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$ um die Axe der c entstanden, so hat man $\frac{x^2 + y^3}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, und ist es durch Umdrehung dieser Ellipse um die Axe der a entstanden, so hat man $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1$.

II. Unter allen den Curven, welche durch einen gegebenen Punkt der Fläche, in dieser Fläche, gezogen werden können, wird es eine geben, die, in diesem Punkte, die größte Neigung gegen eine der drey coordinirten Ebenen, z. B. gegen die Ebene der $x y$ hat. Man nennt sie die **Curve des größten Abfalls** (Courbe de la plus grande pente), und sie wird in den ausübenden Künsten oft mit Vortheil gebraucht.

Man wird diese Curve finden, wenn man unter allen den Geraden, die in der tangirenden Ebene durch den Berührungspunkt gezogen werden können, diejenige bestimmt, welche mit der Ebene der xy den größten Winkel bildet.

Allein die Knotenlinie der tangirenden Ebene mit der Ebene der xy ist

$$-z = p(x'-x) + q(y'-y),$$

und da die gesuchte Gerade auf dieser Knotenlinie senkrecht stehen muß, so ist (nach Einl. §. 3, I.) die Gleichung der gesuchten Geraden

$$p(y'-y) - q(x'-x) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

Diese Gleichung ist eigentlich die Projection der gesuchten Curve in der Ebene der xy. Verbindet man sie daher mit der Gleichung der Oberfläche

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

so wird man diese Curve selbst erhalten.

Ex. I. Die Gleichung einer Ebene ist

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

also ist auch $p = -\frac{A}{C}$ und $q = -\frac{B}{C}$, und daher die Gleichung (I)

$$\frac{y}{x} = \frac{B}{A} \quad \text{oder} \quad y = \frac{B}{A} . x.$$

Allein die Knotenlinie der gegebenen Ebene hat zur Gleichung (§. 7)

$$Ax + By + D = 0 \quad \text{oder} \quad y = -\frac{A}{B}x - \frac{D}{B},$$

und aus diesen beyden Gleichungen folgt (Einl. §. 3, II.), daß die gesuchte Linie des größten Abfalls auf der Knotenlinie der Ebene in xy senkrecht steht, wie bekannt.

Ex. II. Für die Kugel hat man die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Dieß gibt $p = -\frac{x}{z}$ und $q = -\frac{y}{z}$, so daß daher die Gleichung (I) in folgende übergeht:

$$x\,dy - y\,dx = 0, \quad \text{oder auch} \quad \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = 0.$$

Allein dieser Ausdruck entsteht (§. 28) durch Differentiation aus der ursprünglichen Gleichung

$$\frac{y}{x} = \text{Const.}$$

Die Projection der gesuchten Curve des größten Abfalls in der Ebene der xy ist also eine gerade, durch den Anfangspunkt der Coordinaten oder durch den Mittelpunkt der Kugel gehende Gerade. Diese Linie selbst entsteht daher durch den Schnitt der Kugel mit einer Ebene, die durch die Axe der z geht, oder diese Curve ist ein größter Kreis der Kugel, der durch den gegebenen Punkt derselben senkrecht auf der Ebene der xy steht. Liegt dieser Punkt im Scheitel oder in dem höchsten Punkte der Kugel, so ist $x = y = 0$, also auch jene Gleichung

$$\text{Const.} = \tfrac{0}{0};$$

oder, da dieser Ausdruck unbestimmt ist, so haben auch alle durch den Scheitel der Kugel gehende größte Kreise den stärksten Abfall gegen die Ebene der xy.

§. 118. (**Probleme über nach gegebenen Gesetzen bewegliche tangirende Ebenen.**) Um von dem oben erhaltenen Ausdrucke der tangirenden Ebene einer krummen Fläche einige Anwendungen zu geben, wollen wir zuerst folgendes allgemeine Theorem vorausschicken.

Wenn man zwischen den Größen $a\,b\,c$, $a'b'c'$, $a''b''c''$ und $R\,R'R''$ die zwey Systeme von Gleichungen hat:

$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= R^2 \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= R'^2 \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= R''^2 \end{aligned}\right\} \ldots (1) \quad \text{und}$$

$$\left.\begin{aligned} a\,a' + b\,b' + c\,c' &= 0 \\ a\,a'' + b\,b'' + c\,c'' &= 0 \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots (2),$$

so gelten für dieselben Größen sofort auch die zwey folgenden Systeme:

$$\left.\begin{aligned} \frac{a^2}{R^2} + \frac{a'^2}{R'^2} + \frac{a''^2}{R''^2} &= 1 \\ \frac{b^2}{R^2} + \frac{b'^2}{R'^2} + \frac{b''^2}{R''^2} &= 1 \\ \frac{c^2}{R^2} + \frac{c'^2}{R'^2} + \frac{c''^2}{R''^2} &= 1 \end{aligned}\right\} \ldots (3) \quad \text{und}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{ab}{R}+\frac{a'b'}{R'}+\frac{a''b''}{R''}&=0\\ \frac{ac}{R}+\frac{a'c'}{R'}+\frac{a''c''}{R''}&=0\\ \frac{bc}{R}+\frac{b'c'}{R'}+\frac{b''c''}{R''}&=0\end{aligned}\right\}\ldots(4).$$

Denn, nimmt man die drey unbestimmten Größen u, u', u'' so an, daß man hat

$$\begin{aligned}au+a'u'+a''u'&=p\\ bu+b'u'+b''u''&=p'\\ cu+c'u'+c''u''&=p''\end{aligned}$$

so hat man, wenn man die letzten drey Gleichungen quadrirt und ihre Summe nimmt, vermöge der Gleichungen (1) und (2):

$$R^2u^2+R'^2u'^2+R''u''^2=p^2+p'^2+p''^2\ldots(a).$$

Multiplicirt man aber dieselben drey Gleichungen nach der Ordnung durch abc, durch $a'b'c'$ und durch $a''b''c''$, so erhält man für die Summe dieser Produkte wieder vermöge der Gleichungen (1) und (2):

$$\begin{aligned}R^2u&=pa+p'b+p''c,\\ R'^2u'&=pa'+p'b'+p''c,\\ R''u''&=pa''+p'b''+p''c''.\end{aligned}$$

Sucht man endlich aus den drey letzten Gleichungen die Werthe von u^2, u'^2 und u''^2, und substituirt sie in der Gleichung (a), so erhält man

$$\begin{aligned}&p^2\left(\frac{a^2}{R^2}+\frac{a'^2}{R'^2}+\frac{a''^2}{R''^2}\right)\\ &+p'^2\left(\frac{b^2}{R^2}+\frac{b'^2}{R'^2}+\frac{b''^2}{R''^2}\right)\\ &+p''^2\left(\frac{c^2}{R^2}+\frac{c'^2}{R'^2}+\frac{c''^2}{R''^2}\right)\\ &+2pp'\left(\frac{ab}{B^2}+\frac{a'b'}{R'^2}+\frac{a''b''}{R''^2}\right)\\ &+2pp''\left(\frac{ac}{R^2}+\frac{a'c'}{R'^2}+\frac{a''c''}{R''^2}\right)\\ &+2p'p''\left(\frac{bc}{R^2}+\frac{b'c'}{R'^2}+\frac{b''c''}{R''^2}\right)=p^2+p'^2+p''^2.\end{aligned}$$

Da aber dieser letzte Ausdruck für alle Werthe von p, p', p'' gelten soll, so enthält er auch sofort die Gleichungen (3) und (4).

I. Dieß vorausgesetzt, sey die Gleichung gegeben

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

welche, wenn A, B, C positive Größen sind, bekanntlich für ein Ellipsoid gehört, dessen drey Axen $\frac{1}{\sqrt{A}}$, $\frac{1}{\sqrt{B}}$, $\frac{1}{\sqrt{C}}$ sind.

Suchen wir nun diejenige Fläche, welche durch die Bewegung des Durchschnittspunktes entsteht, in welchem sich drey Ebenen schneiden, die unter sich senkrecht stehen, und deren jede jenes Ellipsoid in einem Punkte tangirt.

Sind $x'y'z'$ die Coordinaten des Berührungspunktes des Ellipsoids mit der ersten Ebene, und bezeichnet man die Coordinaten der beyden andern Berührungspunkte mit zwey und mit drey Strichen, so hat man zuerst, da diese Berührungspunkte alle auf der Fläche des Ellipsoids liegen:

$$\left.\begin{array}{l} Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 = 1 \\ Ax''^2 + By''^2 + Cz''^2 = 1 \\ Ax'''^2 + By'''^2 + Cz'''^2 = 1 \end{array}\right\} \ldots (A).$$

Die Gleichungen der drey berührenden Ebenen selbst aber sind (nach §. 116, I):

$$\left.\begin{array}{l} Axx' + Byy' + Czz' = 1 \\ Axx'' + Byy'' + Czz'' = 1 \\ Axx''' + Byy''' + Czz''' = 1 \end{array}\right\}.$$

Da aber, der Aufgabe gemäß, diese drey tangirenden Ebenen auf einander senkrecht stehen sollen, so hat man (Einl. §. 10)

$$\left.\begin{array}{l} A^2x'x'' + B^2y'y'' + C^2z'z'' = 0 \\ A^2x'x''' + B^2y'y''' + C^2z'z''' = 0 \\ A^2x''x''' + B^2y''y''' + C^2z''z''' = 0 \end{array}\right\} \ldots (B).$$

Setzt man nun, der Kürze wegen,

$$\begin{array}{llll} Ax' = a & By' = b & \text{und} & Cz' = c, \\ Ax'' = a' & By'' = b' & \text{»} & Cz'' = c', \\ Ax''' = a'' & By''' = b'' & \text{»} & Cz''' = c'', \end{array}$$

so verwandeln sich die Gleichungen (B) in die oben mit (2) bezeichneten Ausdrücke, und die Gleichungen (A) gehen in folgende über:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a^2}{A} + \frac{b^2}{B} + \frac{c^2}{C} = 1 \\ \frac{a'^2}{A} + \frac{b'^2}{B} + \frac{c'^2}{C} = 1 \\ \frac{a''^2}{A} + \frac{b''^2}{B} + \frac{c''^2}{C} = 1 \end{array}\right\} \ldots (C).$$

Setzt man ferner

$$\left.\begin{array}{l} R^2 = a^2 + b^2 + c^2 \\ R'^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2 \\ R''^2 = a''^2 + b''^2 + c''^2 \end{array}\right\}$$

so sind diese drey letzten Gleichungen identisch mit den oben durch (1) bezeichneten Ausdrücken. Da also bereits die Gleichungen (1) und (2) auch hier gelten, so werden, nach dem Vorhergehenden, auch sofort die Gleichungen (3) und (4) Statt haben. Quadrirt man also die vorhergehenden drey Gleichungen der berührenden Ebenen, nachdem man die erste durch R, die zweyte durch R′ und die dritte durch R″ dividirt hat, so gibt die Summe dieser drey Quadrate, wenn man dabey die Gleichungen (3) und (4) berücksichtigt:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2} + \frac{1}{R''^2}.$$

Addirt man endlich eben so die Gleichungen (C), nachdem man die erste derselben durch R^2, die zweyte durch R'^2 und die dritte durch R''^2 dividirt hat, so erhält man

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2} + \frac{1}{R''^2} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C},$$

so daß man daher, vermöge der beyden letzten Gleichungen, hat

$$x^2 + y^2 + z^3 = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C},$$

und diese Gleichung zeigt, daß der bewegliche Durchschnittspunkt der drey unter einander senkrechten, das Ellipsoid stets berührenden Ebenen, eine Kugel beschreibt, die mit jenem Ellipsoid concentrisch ist, und deren Halbmesser gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der drey Axen des Ellipsoids ist.

Geht das Ellipsoid in eine Kugel über, deren Halbmesser r ist, so hat man $A = B = C = \frac{1}{r^2}$, also auch

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3r^2$$

für eine mit der gegebenen concentrische Kugel, deren Halbmesser gleich $r\sqrt{3}$ ist.

II. Seyen eben so drey concentrische Kugeln gegeben, und die Fläche zu suchen, welche durch die Bewegung des Durchschnittspunktes von drey unter sich stets senkrechten Ebenen entsteht, deren jede eine jener drey Kugeln berührt.

Sind a b c die drey rechtwinkligen Coordinaten des veränderlichen Punktes auf der Oberfläche der ersten Kugel, deren Halbmesser gleich R ist, in welchem diese Kugel von der einen dieser Ebene berührt wird, und bezeichnet man für die beyden andern Kugeln diese vier Größen mit einem und mit zwey Strichen, und nimmt man überdieß den gemeinschaftlichen Mittelpunkt dieser drey Kugeln für den Anfang der Coordinaten, so haben offenbar die vorhergehenden Gleichungen (1) auch hier Statt.

Die Gleichungen der drey berührenden Ebenen aber sind (nach §. 116, I.):

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= R^2, \\ a'x + b'y + c'z &= R'^2, \\ a''x + b''y + c''z &= R''^2. \end{aligned}$$

Da aber diese drey tangirenden Ebenen unter sich senkrecht seyn sollen, so haben (Einl. §. 9, II) auch die Gleichungen (2) Statt, und daher, nach dem Vorhergehenden, auch sofort die Gleichungen (3) und (4).

Wenn man aber die drey gegebenen Gleichungen der tangirenden Ebenen quadrirt, nachdem man die erste durch R, die zweyte durch R′ und die dritte durch R″ dividirt hat, so gibt die Summe dieser drey Quadrate, wenn man dabey die Gleichungen (3) und (4) berücksichtiget:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 + R'^2 + R''^2,$$

woraus folgt, daß die gesuchte Fläche, welche der Durchschnittspunkt jener drey Ebenen beschreibt, eine den gegebenen drey Kugeln concentrische Kugel des Halbmessers $\sqrt{R^2 + R'^2 + R''^2}$ ist.

Sind die Halbmesser der drey gegebenen Kugeln unter sich gleich, und ist jeder derselben gleich r, so wird dieses Problem mit dem besondern Falle der Nro. I. identisch, und man hat

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3r^2.$$

III. Seyen endlich zwey ihrer Gestalt und Lage nach gegebene Flächen gegeben: man suche diejenige Fläche, welche von einer beweglichen Ebene beschrieben wird, die zu jenen zwey Flächen immer Tangente bleibt.

Seyen die Gleichungen der zwey gegebenen Flächen

$$z = F(x, y) \quad \text{und} \quad z = f(x, y),$$

deren Differentialgleichungen wir so ausdrücken wollen:

$$dz = F'(xy) . dx + F''(xy) . dy \text{ und}$$
$$dz = f'(xy) . dx + f''(xy) . dy.$$

Nimmt man auf der ersten Fläche für den Berührungspunkt derselben mit der Ebene denjenigen an, dessen Coordinaten

$$x = A, \quad y = B \quad \text{und} \quad z = F(A, B)$$

sind, so ist die Gleichung der berührenden Fläche für diesen Punkt (§. 116)

$$z - F(A, B) = (x - A) F'(A, B) + (y - B) F''(A, B) \ldots (\text{I.})$$

Sind eben so

$$x = a, \quad y = b, \quad z = f(a, b)$$

die Coordinaten des Berührungspunktes auf der zweyten Fläche, so ist die Gleichung der berührenden Ebene für diesen Punkt

$$z - f(a, b) = (x - a) f'(a, b) + (y - b) f''(a, b) \ldots (\text{II.})$$

Da aber beyde tangirenden Ebenen zusammen fallen und nur eine einzige, beyde Flächen zugleich berührende Ebene bilden sollen, so müssen die drey Coefficienten von xyz in den beyden letzten Gleichungen identisch seyn, wodurch man erhält

$$\left.\begin{array}{c} F'(A, B) = f'(a, b), \\ F''(A, B) = f''(a, b), \\ F(A, B) - A . F'(A, B) - B . F''(A, B) \\ = f(a, b) - a . f'(a, b) - b . f''(a, b) \end{array}\right\} \ldots (\text{III.})$$

Eliminirt man daher aus den fünf Gleichungen I., II., III. die vier Größen A, B, a und b, so erhält man eine Gleichung in xyz, welche für die gesuchte bewegliche, beyde Flächen tangirende Ebene gehören wird.

Diese Elimination zu vereinfachen, kann man zuerst aus den Gleichungen I., II. und aus den zwey ersten der Gleichungen III. von den vier Größen A, B, a und b drey, z. B. die drey letzten eliminiren; dadurch erhält man eine Gleichung in xyz und A, die wir $M = 0$ nennen wollen, und diese Gleichung wird für die den beyden Flächen gemeinschaftliche tangirende Ebene gehören, deren Lage durch die unbestimmte Größe A particularisirt wird. Differentiirt man daher diese Gleichung zwey Mal in Beziehung auf A, so erhält man

$$M = 0, \quad \left(\frac{dM}{dA}\right) = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{d^2 M}{dA^2}\right) = 0.$$

Eliminirt man dann aus den beyden ersten dieser drey Gleichungen die Größe A, so erhält man, wie zuvor, die gesuchte Gleichung der die beyden gegebenen Flächen ringsum berührenden Fläche, oder man erhält die Gleichung der die beyden Flächen berührenden Ebene in allen Lagen der letzteren.

Diese beyden ersten Gleichungen $M = o$ und $\left(\frac{dM}{dA}\right) = o$ zusammen genommen, und ohne aus ihnen die Größe A zu eliminiren, gehören für den Durchschnitt zweyer nächsten tangirenden Ebenen, die also eine gerade Linie seyn wird, welche die erste gegebene Fläche in dem Punkte A tangirt. Läßt man dann in diesen beyden Gleichungen die Größe A in $A + dA$ übergehen, so werden die so entstehenden zwey neuen Gleichungen die nächstfolgende tangirende Gerade geben. Diese beyden tangirenden Geraden werden sich in irgend einem Punkte schneiden, und dieser Durchschnittspunkt wird offenbar derjenige Punkt der ersten Tangente seyn, für welchen die Werthe von xyz sich nicht ändern, während (in den beyden Gleichungen $M = o$ und $\left(\frac{dM}{dA}\right) = o$) der Werth von A in $A + dA$ übergeht. Wenn man daher diese beyden Gleichungen bloß in Beziehung auf A differentiirt, so werden die beyden so erhaltenen Gleichungen für jenen Durchschnittspunkt den zwey nächsten Tangenten gehören. Da dieser Punkt sich auch auf der ersten Tangente befindet, und da überdieß die Differentiation von $M = o$ die Gleichung $\left(\frac{dM}{dA}\right)$ hervorbringt, so wird man für den Durchschnittspunkt dieser zwey nächsten Tangenten die drey vorhergehenden Gleichungen haben:

$$M = o, \quad \left(\frac{dM}{dA}\right) = o, \quad \left(\frac{d^2M}{dA^2}\right) = o.$$

Diese Gleichungen werden die vier Größen xyz und A enthalten, und durch die letzte Größe A wird der Punkt auf der ersten Fläche angezeigt oder particularisirt, für welchen man den Durchschnittspunkt der zwey nächsten Tangenten gesucht hat. Will man daher diesen Durchschnittspunkt unabhängig von dieser Größe A erhalten, d. h. will man alle auf diese Weise entstehenden Durchschnittspunkte je zwey nächster Tangenten, oder will man die krumme Linie erhalten, in welcher alle diese Durchschnittspunkte liegen, so wird man, aus den drey letzten Gleichungen, die Größe A eliminiren, und das Resultat dieser Elimination wird die zwey Gleichungen dieser Curve der Durchschnittspunkte sämmtlicher Tangentenpaare geben. Man pflegt diese

Curve die Wendungscurve der die beyden gegebenen Flächen ringsum tangirenden Fläche zu nennen.

Eliminirt man endlich aus den drey Gleichungen (III.) die zwey Größen a und b, so wird man eine Gleichung zwischen A und B erhalten, welche für diejenige Curve gehört, in welcher unsere gesuchte tangirende Fläche die erste gegebene Fläche $z = F(xy)$ berührt. Da diese Curve selbst ganz in der gegebenen Fläche $z = F(x, y)$ enthalten seyn muß, so wird diese Curve durch die aus der so eben erwähnten Elimination resultirende Gleichung, und durch die Gleichung $z = F(x, y)$ vollständig dargestellt seyn. Eliminirt man eben so aus den drey Gleichungen (III.) die zwey Größen A und B, so wird die aus dieser Elimination hervorgehende Gleichung, verbunden mit der Gleichung $z = f(x, y)$, diejenige Curve darstellen, in welcher unsere gesuchte tangirende Fläche die zweyte gegebene Fläche $z = f(x, y)$ berührt.

Ist eine dieser Flächen leuchtend und die andere dunkel, so werden die gesuchten tangirenden Flächen diejenigen seyn, welche den Schatten und den Halbschatten des dunkeln Körpers begränzen. Die zwey so eben erwähnten Curven aber werden diejenigen seyn, die auf dem dunkeln Körper den beleuchteten Theil von dem beschatteten trennen, und die auf dem leuchtenden Körper den Theil, welcher sein Licht auf den dunkeln Körper sendet, von dem absondert, dessen Strahlen die dunkle Fläche nicht mehr erreichen.

Um das Vorhergehende auf ein Beyspiel anzuwenden, seyen die beyden gegebenen Flächen Kugeln. Sey R der Halbmesser der leuchtenden, r der dunkeln Kugel, c die Distanz ihrer Mittelpunkte, und endlich der Mittelpunkt der leuchtenden Kugel zugleich der Anfang der Coordinaten. Dieß vorausgesetzt, hat man für die Gleichungen der beyden Kugelflächen

$$z^2 = R^2 - x^2 - y^2,$$
$$z^2 = r^2 - (x-c)^2 - y^2.$$

Daraus folgen sofort die beyden Gleichungen, die wir oben durch (I.) und (II.) bezeichneten, nämlich

$$z = \frac{R^2 - A^2 - B^2 - A(x-A) - B(y-B)}{\sqrt{R^2 - A^2 - B^2}} \quad \ldots (I.)$$

und

$$z = \frac{r^2 - (a-c)^2 - b^2 - (a-c)(x-a) - b(y-b)}{\sqrt{r^2 - (a-c)^2 - b^2}} \quad \ldots (II.)$$

Setzt man die analogen Coefficienten dieser beyden Gleichungen einander gleich, so erhält man für die zwey ersten der Gleichungen (III.)

$$\frac{A}{\sqrt{R^2 - A^2 - B^2}} = \frac{a - c}{\sqrt{r^2 - (a-c)^2 - b^2}},$$

$$\frac{B}{\sqrt{R^2 - A^2 - B^2}} = \frac{b}{\sqrt{r^2 - (a-c)^2 - b^2}},$$

und endlich für die dritte der Gleichungen (III.)

$$\sqrt{R^2 - A^2 - B^2} - \sqrt{r^2 - (a-c)^2 - b^2} + \frac{A(A-a) + B(B-b)}{\sqrt{R^2 - A^2 - B^2}} = o.$$

Die zwey ersten dieser Gleichungen (III.) geben sofort durch Division

$$b = \frac{a-c}{A} \cdot B.$$

Substituirt man diesen Werth von b in dieselben zwey ersten Gleichungen III., so gibt jede derselben, wenn man sie quadrirt:

$$A^2 r^2 = (a-c)^2 \cdot R^2,$$

und die dritte der Gleichungen (III.) geht in folgende über:

$$(R^2 - Ac)\,A + R^2 c - R^2 a = o.$$

Diese beyden letzten Gleichungen geben

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{R}{c}(R \mp r) \quad \text{und} \\ a &= c - \frac{r}{c}(r \mp R) \end{aligned}\right\} \ldots (a).$$

Substituirt man aber diesen Werth von A in der vorhergehenden Gleichung (I.), so erhält man

$$z = \frac{R^2 c - Rx(R \mp r) - Bcy}{\sqrt{R^2 c^2 - R^2 (R \mp r)^2 - B^2 c^2}} \ldots (1),$$

und dieß ist die Gleichung zwischen xyz und B, welche wir oben durch M = o bezeichnet haben.

Differentiirt man sie zwey Mal in Beziehung auf die Größe B, so erhält man

$$Bcz = y\sqrt{R^2 c^2 - R^2 (R \mp r)^2 - B^2 c^2} \ldots (2) \quad \text{und}$$

$$Bcy = -z\sqrt{R^2 c^2 - R^2 (R \mp r)^2 - B^2 c^2} \ldots (3).$$

Von diesen gibt die Gleichung (2)

$$B^2 = \frac{y^2 [R^2 c^2 - R^2 (R \mp r)^2]}{c^2 (y^2 + z^2)},$$

und dieser Werth von B, in der Gleichung (1) substituirt, gibt

$$(y^2 + z^2).[c^2 - (R \mp r)^2] = [Rc - x(R \mp r)]^2 \;.\;.\;.\; (4),$$

die Gleichung der gesuchten Fläche, welche die beyden gegebenen Kugelflächen ringsum berührt. Diese Gleichung gehört, wie man sieht, für einen Kegel; das obere Zeichen für den vollen, das untere für den halben Schatten.

Die Gleichungen (2) und (3) geben durch Division

$$y^2 = - z^2 \quad \text{oder} \quad y^2 + z^2 = 0,$$

und diese letzte Gleichung, verbunden mit der Gleichung (4), gehört für die oben erwähnte Wendungscurve der tangirenden Fläche. Da aber die Gleichung $y^2 + z^2 = 0$ nur für die Werthe $y = 0$ und $z = 0$ bestehen kann, so gibt die Gleichung (4):

$$x = \frac{c}{1 \mp \frac{r}{R}}.$$

Die Wendungscurve ist also hier ein einziger Punkt, der Scheitel des Kegels und der letzte Werth von x ist die Entfernung des Scheitels von dem Mittelpunkte der leuchtenden, so wie

$$x - c = \frac{\pm c}{\frac{R}{r} \mp 1}$$

vom Mittelpunkte der dunkeln Kugel.

Substituirt man ferner die oben (Gleichungen (a)) gefundenen Werthe von A und a in den beyden Gleichungen

$$F(A, B)^2 = R^2 - A^2 - B^2 \quad \text{und}$$
$$f(a, b)^2 = r^2 - (a - c)^2 - b^2,$$

so erhält man

$$\left.\begin{aligned} F(A, B)^2 + B^2 &= R^2 - \frac{R^2}{c^2}(R \mp r)^2 \\ f(a, b)^2 + b^2 &= r^2 - \frac{r^2}{c^2}(r \mp R)^2 \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\; (5),$$

und die Gleichungen (a) und (5) sind die Gleichungen der acht Projectionen der vier Berührungscurven in den Ebenen der xy und der xz. Die Gleichungen (a) zeigen, daß diese Curven in einer auf xy senkrechten Ebene stehen, und daß sie vom Anfangspunkte der Coordinaten um die angezeigten Werthe von A und a entfernt sind. Die Gleichungen (5) aber zeigen, daß diese Curven Kreise sind, deren Halbmesser zum Ausdrucke haben

$$\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{c^2}(R \mp r)^2} \quad \text{und} \quad \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{c^2}(r \mp R)^2}.$$

Ist endlich $x = c + C$, so wird die Gleichung (4)

$$\sqrt{y^2 + z^2} = \frac{\pm\, r(c + C) - R \,.\, C}{\sqrt{c^2 - (R - r)^2}},$$

welches der Halbmesser des kreisförmigen Schnittes des vollen und des halben Schattens ist, der durch eine Ebene entsteht, die senkrecht auf xy ist, und die um die Größe C von dem Mittelpunkte der dunkeln Kugel entfernt ist.

XVI.

Krümmung der Flächen.

§. 119. (**Kugeln, welche eine gegebene Fläche berühren.**) Da zu einer Berührung der Flächen von der zweyten Ordnung, nach §. 115, fünf Bedingungsgleichungen befriedigt werden müssen, so kann eine Kugel, deren allgemeine Gleichung nur vier Constanten enthält, nicht in dem Sinne zur Krümmungskugel einer Fläche verwendet werden, wie wir oben den Kreis zum Krümmungskreis der Curven gebraucht haben, oder man kann im Allgemeinen keine Kugel angeben, die mit einer Fläche rings um den einen Punkt derselben zwey Elemente gemeinschaftlich hätte.

Diese Gleichung der Kugel ist nämlich

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2,$$

wo $a\,b\,c$ die Coordinaten ihres Mittelpunktes, und R ihr Halbmesser ist. Die ersten Differentialgleichungen derselben sind

$$x - a + p(z - c) = 0 \quad \text{und}$$
$$y - b + q(z - c) = 0.$$

Behandelt man diese Gleichungen analog mit jenen in §. 91 und §. 95, so erhält man für die drey Constanten a, b, c folgende Werthe:

$$a = x + \frac{pR}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad b = y + \frac{qR}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad c = z - \frac{R}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Bestimmt man also die Werthe von p, q aus der zwischen x, y und z gegebenen Gleichung der Fläche, und substituirt dann die so erhaltenen Werthe von a, b, c in der Gleichung

$$(x' - a)^2 + (y - b)^2 + (z' - c)^2 = R^2,$$

so erhält man die Gleichung einer Kugel, die mit der gegebenen Fläche eine Berührung der ersten Ordnung hat. In dieser Gleichung der Kugel sind $x' y' z'$ die veränderlichen Größen, und der Halbmesser der Kugel bleibt unbestimmt. Vergleicht man die vorhergehenden zwey Differentialgleichungen mit denen des §. 117, so sieht man, daß die Mittelpunkte aller dieser Kugeln in der **Normale** der Fläche liegen.

§. 120. **(Betrachtung der Kugel, welche die zwey höchsten Glieder der Entwicklung von z mit einer Fläche gemeinschaftlich hat.)** Wir haben oben (§. 115) gesehen, daß zwey Flächen in einem gemeinschaftlichen Punkte eine Berührung der zweyten Ordnung haben, wenn für sie die Bedingungsgleichung, die eigentlich fünf andern Gleichungen gleichgeltend ist, Statt hat:

$$(p' - p)\,dx + (q' - q)\,dy + \tfrac{1}{2}(r' - r)\,dx^2 + (s' - s)\,dx\,dy + \tfrac{1}{2}(t' - t)\,dy^2 = 0.$$

Den beyden ersten Gliedern dieser Bedingungsgleichung ist bereits durch die Kugel genüge gethan, die wir in §. 119 gefunden haben, wo aber der Halbmesser R derselben, wie man gesehen hat, noch unbestimmt geblieben ist. Man könnte nun in dieser Kugel den Halbmesser R so bestimmen, daß auch die drey folgenden Glieder unserer Bedingungsgleichung verschwinden, oder daß man hat

$$(r' - r) + 2(s' - s)\frac{dy}{dx} + (t' - t)\frac{dy^2}{dx^2} = 0.$$

Allein durch diese Annahme wird offenbar eine Relation zwischen den Größen dx und dy eingeführt, die doch sonst ganz unbestimmt waren.

In der allgemeinen Gleichung jeder Fläche

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

ist nämlich, wie bereits erinnert wurde, $dz = p\,dx$ das Differential der Ordinate z in dem Durchschnitte MM′ (Fig. 42) der Fläche mit einer der xz parallelen Ebene, und eben so ist $dz = q\,dx$ das Differential der Ordinate z in dem Durchschnitte MN der Fläche mit einer der yz parallelen Ebene. Sucht man aber das Differential der Ordinate für den Durchschnitt MN′R′Q der Fläche mit einer auf xy senkrechten, übrigens willkürlich gegen die Axe der x stehenden Ebene, so wird diese Ebene unsere Fläche in der krummen Linie M N′ schneiden und die Projektion dieser Curven in der Ebene der x y wird die gerade Linie Q R′ seyn. Diese Projektion Q R′ wird also zur Gleichung haben

$$y = \alpha x + \beta,$$

und dadurch wird eine Abhängigkeit unter die beyden Coordinaten x und y gebracht, die sonst, für die Fläche im Allgemeinen, nicht Statt hatte. Das Differential dieser Gleichung ist

$$\frac{dy}{dx} = \alpha,$$

und da diese Größe α die Tangente des Winkels bezeichnet, welche die Projektion Q R′ mit der Axe der x bildet, so ist durch diese Größe α oder $\frac{dy}{dx}$ die Richtung bestimmt, in welcher man bey der Fläche von einem Punkte derselben zu dem nächstfolgenden Punkte fortgehen muß, um die bestimmte Curve M N′ auf dieser Fläche zu erhalten.

Diesem gemäß drückt also unsere letzte Bedingungsgleichung aus, daß die durch sie bestimmte Kugel die Eigenschaft hat, daß keine andere Kugel zwischen ihr und zwischen der gegebenen Fläche in dem Punkte durchgehen kann, der zu den Coordinaten $x + dx$ und $y + dy$ gehört; oder wenn man die Größe $\frac{dy}{dx} = \omega$ setzt, und dieser Größe ω einen bestimmten Werth gibt, so wird die erwähnte Eigenschaft unserer Kugel für alle diejenigen Punkte gelten, für welche ω denselben Werth hat, d. h. für alle Punkte der Curve M N′, die in dem Durchschnitte einer ihrer Lage nach bestimmten, auf x y senkrechten Ebene, mit der gegebenen Fläche liegen.

Um nun den Halbmesser R dieser Kugel unserer Bedingungsgleichung

$$(r' - r) + 2\,(s' - s)\,\omega + (t' - t)\,\omega^2 = 0$$

gemäß zu bestimmen, so gibt die bereits in §. 119 aufgestellte Gleichung der Kugel

$$(x' - a)^2 + (y' - b)^2 + (z' - c)^2 = R^2,$$

wenn man ihre partiellen Differentialien sucht, da wegen dem gemeinschaftlichen Punkt beyder Flächen $x' = x$, $y' = y$ und $z' = z$ ist, folgende Gleichungen:

$$p' = -\frac{x-a}{z-c}, \quad q' = -\frac{y-b}{z-c},$$

$$r' = \frac{1+p^2}{c-z}, \quad s' = \frac{pq}{c-z}, \quad t' = \frac{1+q^2}{c-z},$$

so daß daher unsere Bedingungsgleichung in die folgende übergeht, wenn man die oben (§. 114) angenommene Bedeutung der Geißen r, s und t beybehält,

$$r + 2\omega s + \omega^2 t = \frac{1+p^2+2pq\omega+(1+q^2)\omega^2}{c-z},$$

oder da bereits (§. 119) wegen der Berührung der ersten Ordnung der Kugel mit der Fläche

$$c - z = \frac{-R}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

erhalten wurde,

$$R = \frac{-[1+p^2+2pq\omega+(1+q^2)\omega^2] \cdot \sqrt{1+p^2+q^2}}{r+2s\omega+t\omega^2},$$

und dieß ist der gesuchte Werth des Halbmessers der Kugel, welche die oben erwähnte Eigenschaft hat.

§. 121. (**Bestimmung des größten und kleinsten Werthes dieses Halbmessers R.**) Da in dem vorhergehenden Ausdrucke von R das Verhältniß $\omega = \frac{dy}{dx}$ willkürlich angenommen wurde, so wollen wir denjenigen Werth von ω suchen, für welchen R ein Größtes oder ein Kleinstes wird.

Allein der erwähnte Werth von R kann auch so gestellt werden

$$R = \frac{-[1+\omega^2+(p+q\omega)^2] \cdot \sqrt{1+p^2+p^2}}{r+2s\omega+t\omega^2},$$

und da zugleich

$$c - z = \frac{-R}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \text{ ist,}$$

so entspricht der größte oder kleinste Werth von R auch zugleich dem größten oder kleinsten Werthe von c. Eliminirt man daher die Größe R aus den beyden vorhergehenden Gleichungen, so erhält man

$$1+\omega^2+(p+q\omega)^2 = (c-z)(r+2s\omega+t\omega^2) \ldots \text{(I)}.$$

Differentiirt man diesen Ausdruck in Beziehung auf c und ω und setzt dann dc gleich Null, so hat man

$$\omega + (p + q\omega)\, q + (s + t\omega)\,(z - c) = o \;\ldots\; \text{(II)},$$

welche Gleichung, durch ω multiplicirt und von (I) subtrahirt, gibt

$$1 + p^2 + pq\omega + (r + s\omega)\,(z - c) = o \;\ldots\; \text{(III)}.$$

Eliminirt man aus (II) und (III) die Größe $z - c$, so erhält man für ω eine Gleichung der Form

$$A\omega^2 + B\omega - C = o \;\ldots\; \text{(IV)},$$

wo der Kürze wegen gesetzt wurde

$$\begin{aligned} A &= (1 + q^2)\, s - pqt, \\ B &= (1 + q^2)\, r - (1 + p^2)\, t, \\ C &= (1 + p^2)\, s - pqr. \end{aligned}$$

Löst man endlich die zuletzt gefundene Gleichung auf, so hat man

$$\omega = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A},$$

und dieser Werth von $\omega = \frac{dy}{dx}$ gehört also unter allen krummen Linien, welche durch den Berührungspunkt in der Fläche gezogen werden können, für jene Curven, welche die größte oder kleinste Krümmung haben. Da A, B, C Funktionen von x und y sind, so wird die letzte Gleichung selbst eine Differentialgleichung für x und y seyn, und sie sowohl, als auch ihre ursprüngliche Gleichung, aus deren Differentiation jene entstanden ist, wird die Gleichung der Projektion jener Curve in der Ebene der xy seyn.

Da der Werth von ω doppelt ist, so sieht man, daß jedem Punkte der Fläche im Allgemeinen zwey solche Curven der größten und kleinsten Krümmung entsprechen werden. Differentiirt man endlich den vorhergehenden Ausdruck von R noch einmal, so findet man leicht, daß in der letzten Gleichung das obere positive Zeichen für den größten und das untere negative für den kleinsten Werth von R gehört, so daß also unter allen Curven, welche durch einen Punkt der Fläche in dieser Fläche gezogen werden können, immer zwey sind, deren eine die größte, die andere aber die kleinste Krümmung hat.

I. Um den Halbmesser dieser beyden ausgezeichneten Curven zu erhalten, wird man den gefundenen Werth von ω in dem oben gegebenen Ausdrucke von R substituiren. Zu diesem Zwecke wird man am bequemsten so verfahren

Multiplicirt man die Gleichung (II) durch s und (III) durch t, so ist die Differenz dieser beyden Produkte

$$z - c = \frac{(1+p^2)\,t - pqs - A\omega}{s^2 - rt}.$$

Substituirt man in diesem Ausdrucke den oben gefundenen Werth von ω und setzt der Kürze wegen

$$h = (1+p^2)\,t + (1+q^2)\,r - 2pqs,$$

so erhält man

$$z - c = \frac{-h + \sqrt{B^2 + 4AC}}{2\,(rt - s^2)},$$

und daher auch

$$R = \frac{\left[-h + \sqrt{B^2 + 4AC}\right] \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2}}{2\,(rt - s^2)}.$$

Setzt man aber der Kürze wegen

$$k^2 = 1 + p^2 + q^2 \quad \text{und} \quad g = rt - s^2,$$

so wird

$$B^2 + 4AC = h^2 - 4k^2 \,.\, g,$$

so wie

$$z - c = \frac{-h + \sqrt{h^2 - 4k^2 \,.\, g}}{2g},$$

und man erhält daher für den gesuchten größten und kleinsten Halbmesser

$$R = \frac{k}{2g}\left[-h + \sqrt{h^2 - 4k^2 g}\right] = \frac{-2k^3}{h + \sqrt{h^2 - 4k^2 \,.\, g}}.$$

II. Da die Lage der Ebene der xy willkürlich ist, so kann man annehmen, daß sie der, die Fläche in dem gegebenen Punkte tangirenden Ebene parallel ist. Unter dieser Voraussetzung wird $p = q = 0$.

Sind aber α und β die zwey Werthe von ω, die der Gleichung

$$A\omega^2 + B\omega - C = 0$$

entsprechen, d. h. sind α und β die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche die beyden Curven in dem gegebenen Punkte der Fläche mit der Axe der x bilden, so ist (Einl. §. 3. I.) die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen jene beyden Curven unter einander in dem gegebenen Punkte bilden, gleich

$$\frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta} \quad \text{oder} \quad \frac{\sqrt{B^2 + 4AC}}{A - C}.$$

Da aber für $p=q=o$ auch $A-C=o$ ist, so ist die Tangente des letztgenannten Winkels unendlich oder die beyden Curven der größten und kleinsten Krümmung der Fläche stehen in ihrem Durchschnittspunkte auf einander senkrecht.

§. 122. (Andere Ableitung des Halbmessers dieser Kugel.) Stellt man durch $x y z$ die Coordinaten eines gegebenen Punktes der Fläche und durch $x' y' z'$ die des Mittelpunktes einer Kugel vor, die durch jenen Punkt der Fläche geht und R zum Halbmesser hat, so ist

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 = R^2 \ldots (1).$$

Differentiirt man diese Gleichung partiell, so hat man

$$x-x' + p(z-z') = o \ldots (2),$$
$$y-y' + p(z-z') = o \ldots (3),$$

welche beyden Gleichungen, nach §. 117, den Normalen der Fläche in dem gegebenen Punkt angehören.

Geht man aber von diesem Punkte der Fläche zu einem nächstfolgenden in irgend einer willkürlichen Richtung über, so werden die Normalen der Fläche in diesen beyden Punkten nur dann einander schneiden, wenn sich diese beyden Normalen in einer und derselben Ebene befinden, und dann wird dieser Durchschnittspunkt der beyden Normalen derjenige Punkt der ersten Normale seyn, für welchen die Coordinaten $x' y' z'$ sich nicht ändern, während x und y sich ändert. Denn in den Gleichungen (2) und (3) sind $x' y' z'$ die veränderlichen Coordinaten einer und derselben Normale, während die Größen $x y z$ und $p q$, die zu einen bestimmten Punkt der Fläche gehören, für dieselbe Normale constant und nur dann veränderlich sind, wenn man von einer Normale zu einer anderen übergeht. Differentiirt man also die Gleichungen (2) und (3), indem man $x' y' z'$ als constant betrachtet, so hat man

$$dx + p\,dz + (z-z')\,dp = o,$$
$$dy + q\,dz + (z-z')\,dq = o.$$

Eliminirt man aus diesen beyden Gleichungen die Größe $z-z'$, so erhält man

$$dp\,(dy+q\,dz) = dq\,(dx+p\,dz) \ldots (4).$$

Man hat aber, nach §. 124, die allgemeinen Bezeichnungen

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$
$$dp = r\,dx + s\,dy \text{ und}$$
$$dq = s\,dx + t\,dy,$$

so daß daher die beyden vorhergehenden Gleichungen die folgende Gestalt annehmen

$$dx + p^2 dx + pq\,dy + (z-z')(r\,dx + s\,dy) = 0 \ldots (5),$$
$$dy + pq\,dx + q^2 dy + (z-z')(s\,dx + t\,dy) = 0 \ldots (6),$$

oder auch, wenn man $\frac{dy}{dx}$ aus der ersten, und $z-z'$ aus der zweyten eliminirt und die oben angezeigte Größe A, B, C und g, h, k beybehält

$$g\,(z-z')^2 + h\,(z-z') + k^2 = 0 \ldots (7),$$
$$A \,.\, \frac{dy^2}{dx^2} + B \,.\, \frac{dy}{dx} - C = 0 \ldots (8).$$

Die vier Gleichungen (2, 3, 5 und 6) gehören für den Durchschnittspunkt der beyden Normalen. Da aber zur Bestimmung der Coordinaten $x'y'z'$ dieses Durchschnittspunktes schon die drey ersten dieser Gleichungen hinreichen, so ist die letzte (6), die keine dieser Coordinaten enthält, nichts anderes, als eine Bedingungsgleichung, welcher genug geschehen muß, damit die beyden nächsten Normalen sich in der That schneiden können. Diese letzte Gleichung gibt also den Werth von $\frac{dy}{dx}$, d. h. die Richtung, in welcher man von einem Punkte der Fläche zu einem anderen gehen muß, damit die Normalen beyder Punkte in einer Ebene liegen und sich daher schneiden.

I. Die Gleichung (5) gibt

$$z-z' = \frac{-h + \sqrt{h^2 - 4k^2 g}}{2g},$$

und diesen Werth von $z-z'$ in (2) und (3) substituirt, gibt

$$y-y' = q\left(\frac{h - \sqrt{h^2 - 4k^2 g}}{2g}\right),$$
$$x-x' = p\left(\frac{h - \sqrt{h^2 - 4k^2 g}}{2g}\right),$$

und diese Werthe von $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$ endlich in der Gleichung (1) substituirt, geben

$$R = \frac{k}{2g}\left[-h + \sqrt{h^2 - 4k^2 g}\right]$$

Resultate, die sämmtlich mit jenen des §. 121 übereinstimmen.

II. Dieser Halbmesser R läßt sich auch noch auf folgende Weise finden.

Substituirt man die Werthe von $x' - x$ und $y' - y$ aus den Gleichungen (2) und (3) in

$$R^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2,$$

so erhält man

$$R = (z' - z) \cdot \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Eliminirt man aber aus den beyden Gleichungen (5) und (6) die Größe $\frac{dy}{dx}$, so hat man

$$\frac{1 + p^2 - (z' - z) r}{p q - (z' - z) s} = \frac{p q - (z' - z) s}{1 + q^2 - (z' - z) t},$$

und wenn man hierin

$$z' - z = R (1 + p^2 + q^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{setzt, so ist}$$

$$(r t - s^2) R^2 - [(1 + p^2) t - 2 p q s + (1 + q^2) r] R \sqrt{1 + p^2 + q^2} + (1 + p^2 + q^2)^2 = 0 \ldots (9),$$

und aus dieser Gleichung findet man den gesuchten doppelten Werth von R, wie zuvor.

§. 123. (Anwendung des vorhergehenden auf besondere Fälle.) I. Die Gleichung des Ellisoids mit drey Axen ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Von dieser Gleichung sind die Werthe von p, q und von r, s, t bereits oben (§. 112, Ex. II) mitgetheilt worden. Substituirt man sie in der Gleichung (4) des §. 122, so erhält man

$$a^2 (b^2 - c^2) x y \frac{d y^2}{d x^2} + [b^2 (a^2 - c^2) x^2 - a^2 (b^2 - c^2) y^2 - a^2 b^2 (a^2 - b^2)] \frac{dy}{dx} - b^2 (a^2 - c^2) x y = 0,$$

oder einfacher

$$M x y \frac{d y^2}{d x^2} + (x^2 - M y^2 - N) \frac{dy}{dx} - x y = 0,$$

wenn man der Kürze wegen setzt

$$M = \frac{a^2 (b^2 - c^2)}{b^2 (a^2 - c^2)} \text{ und } N = \frac{a^2 (a^2 - b^2)}{a^2 - c^2}.$$

Diese Gleichung gibt also den Werth von $\frac{dy}{dx}$ oder die Richtung, in welcher man auf der gegebenen Fläche fortgehen muß, wenn die nächstfolgenden Normalen sich schneiden sollen, oder, was dasselbe ist, in welcher man fortgehen muß, um in den beyden Curven der größten und kleinsten Krümmung der Fläche zu bleiben.

Setzt man $a = b$, so daß das Ellisoid

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

durch die Umdrehung der Ellise $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$ um die Axe c entsteht, so ist $M = 1$ und $N = 0$, also auch jene Gleichung

$$xy \frac{dy^2}{dx^2} + (x^2 - y^2) \frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

Lößt man diese Gleichung in Beziehung auf $\frac{dy}{dx}$ auf, so findet man die zwey Werthe dieser Größe

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Die erste dieser Gleichungen gehört für eine gerade Linie, die durch den Anfang der Coordinaten geht, weil das Verhältniß der beyden Größen dy zu dx dasselbe ist, wie das der Größe y zu x. Die zweyte Gleichung aber folgt durch Differentiation des Ausdruckes

$$x^2 + y^2 = m^2,$$

und gehört also für einen Kreis. Jene ist die Projektion aller Meridiane auf die Ebene der xy, und diese ist die Projektion der Parallelkreise der Fläche in derselben Ebene der xy. Beyde Curven sind in der Oberfläche des Rotations-Sphäroids auf einander senkrecht, und zugleich diejenigen, in welchen sich die auf einander folgenden Normalen schneiden. Da in diesem Beyspiele die veränderlichen Größen x und y aus den Wurzelzeichen treten, so finden sich diese beyden Curven der größten und kleinsten Krümmung von einander unterschieden; wenn dieß nicht der Fall ist, sind beyde nur zwey Äste einer und derselben Curve.

II. In einem zweyten Beyspiele nehmen wir den sogenannten geraden Kegel von kreisförmiger Basis. Ist r der Halbmesser dieser

Basis und $\frac{r}{a}$ die Tangente des Winkels der Seitenlinie des Kegels mit der Axe, so ist die Gleichung des Kegels

$$x^2 + y^2 = \frac{r^2}{a^2}(z-a)^2.$$

Dieß vorausgesetzt hat man

$$p = \frac{a^2 x}{r^2 (z-a)}, \quad q = \frac{a^2 y}{r^2 (z-a)},$$

$$r = \frac{a^4 y^2}{r^4 (z-a)^3}, \quad s = \frac{-a^4 x y}{r^4 (z-a)^3}, \quad t = \frac{a^4 x^2}{r^4 (z-a)^3}.$$

Setzt man nun, wie in §. 121, II, die Größen $p = q = 0$, so ist

$$A = C = s \quad \text{und} \quad B = r - t.$$

Substituirt man diese Werthe in der oben (§. 121) erhaltenen Gleichung

$$\omega = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A},$$

so hat man

$$\omega = \frac{t - r \pm \sqrt{(t-r)^2 + 4s^2}}{2s},$$

oder wenn man darin die so eben gefundenen Ausdrücke von r, s und t setzt,

$$\omega = \frac{y^2 - x^2 \mp \sqrt{x^2 + y^2}}{2xy},$$

und diese Gleichung gibt für $\omega = \frac{dy}{dx}$ die zwey Werthe

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = +\frac{y}{x},$$

und diese zwey Ausdrücke sind den folgenden beyden gleichgeltend

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \text{und} \quad y = bx,$$

wo a und b constante Größen bezeichnen. Daraus folgt also, daß auf der Oberfläche eines Kegels die beyden Curven der größten und kleinsten Krümmung, in jedem Punkte des Kegels, durch die Seitenlinie des Kegels und durch den mit der Basis parallelen Kreis ausgedrückt werden.

III. Suchen wir endlich noch den Halbmesser der größten und kleinsten Krümmung für alle die Oberflächen, welche durch die Rotation einer auf der Ebene xy senkrechten Curve um die Axe der z entstanden sind. Diese Oberflächen haben, wie wir bald (§. 131) sehen werden, die Gleichung

$$z = f\,(x^2 + y^2),$$

wo f irgend eine willkürliche Funktion bezeichnet.

Sey der Kürze wegen

$$dz = (x\,dx + y\,dy)\,.\,f'\,(x^2 + y^2) \quad \text{und}$$
$$d\,.\,f'\,(x^2 + y^2) = (x\,dx + y\,dy)\,.\,f''\,(x^2 + y^2),$$

wo $f'\,(x^2 + y^2)$ und $f''\,(x^2 + y^2)$ wieder andere Funktionen von der Größe $(x^2 + y^2)$ bezeichnen, für welche wir abkürzend bloß f' und f'' schreiben wollen.

Dieß vorausgesetzt, hat man

$$p = xf', \quad q = yf',$$
$$r = f' + x^2 f'', \quad s = xyf'' \quad \text{und} \quad t = f' + y^2 f''.$$

Sucht man daraus die oben (§. 121, I) angeführten Werthe von g, h und k, so erhält man

$$g = f'^2 + (x^2 + y^2)\, f' f'',$$
$$h = 2f' + (x^2 + y^2)\,(f'^3 + f''),$$
$$k^2 = 1 + (x^2 + y^2)\, f'^2,$$

so wie

$$\sqrt{h^2 - 4k^2 g} = (x^2 + y^2)\,(f_,^3 - f'').$$

Substituirt man diese Ausdrücke in dem vorhergehenden Werthe

$$R = \frac{-2k^3}{h \pm \sqrt{h^2 - 4k^2 g}}$$

des größten und kleinsten Krümmungshalbmessers, so findet man, indem man das obere oder untere Zeichen nimmt,

$$R' = -\frac{1}{f'}\left[1 + (x^2 + y^2)\, f'^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

und

$$R'' = -\frac{\left[1 + (x^2 + y^2)\, f'^2\right]^{\frac{3}{2}}}{f' + (x^2 + y^2)\, f''}.$$

Nehmen wir für einen besonderen Fall das Ellisoid, welches durch die Umdrehung der Ellise

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

um die Axe der b entstanden ist, so hat man für die Gleichung desselben

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1.$$

Dieß vorausgesetzt ist also

$$p=-\frac{b^2x}{a^2z},\quad q=-\frac{b^2y}{a^2z},$$

$$r=-\frac{b^4}{a^4z^3}(a^2-y^2),\quad s=-\frac{b^4xy}{a^4z^3},\quad t=-\frac{b^4}{a^4z^3}(a^2-x^2),$$

also auch

$$f'=-\frac{b^2}{a^2z}\quad\text{und}\quad f''=-\frac{b^4}{a^4z^3},$$

so daß man daher für dieses Ellisoid erhält

$$R'=\frac{a}{b^2}\left[b^4+(a^2-b^2)\,z^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$R''=\frac{1}{b^4a}\left[b^4+(a^2-b^2)\,z^2\right]^{\frac{3}{2}}.$$

Für $z=0$ hat man $R'=a,\ R''=\frac{b^2}{a}$,

für $z=b$ ist $R'=R''=\frac{a^2}{b}$,

für $a=b$ endlich ist $R'=R''=a$.

Man kann noch bemerken, daß die Normale N der erzeugenden Ellise ist (§. 98)

$$N=\frac{1}{a}\left[b^4+(a^2-b^2)\,z^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

so daß man daher hat

$$R'=\frac{a^2}{b^2}\cdot N\quad\text{und}\quad R''=\frac{a^2}{b^4}N^3.$$

Wir haben aber ebendaselbst (§. 98) gesehen, daß der Krümmungshalbmesser ρ der erzeugenden Ellise

$$\rho=\frac{N^3}{p^2}=\frac{a^2N^3}{b^4}$$

ist, so daß man also hat

$$R'=\frac{a^2}{b^2}N\quad\text{und}\quad R''=\rho.$$

IV. Bemerken wir noch zum Schlusse dieses Gegenstandes, daß sich, dem Vorhergehenden zu Folge, jeder Punkt einer gegebenen Oberfläche auf zwey solchen Curven befindet, von welchen jene, die dem kleinsten Werthe von R entspricht, die Curve der größten Krümmung, und die dem größten Werthe von R entsprechende, die Curve der kleinsten Krümmung heißt. Haben diese beyden Werthe von R dasselbe Zeichen, so sind jene beyden Curven in demselben Sinne gekrümmt, so wie im entgegengesetzten, wenn sie verschiedene Zeichen haben.

Wenn man endlich zwischen der Gleichung der gegebenen Fläche, und zwischen den vier Gleichungen (3), (5), (6) und (8) des §. 122 die vier Größen x, y, z und $\frac{dy}{dx}$ eliminirt, so erhält man, durch die Coordinaten $x'y'z'$ ausgedrückt, die Gleichung derjenigen Oberfläche, welche der Ort der Mittelpunkte aller Krümmungskreise jener Curvenpaare ist, die auf der gegebenen Fläche gezogen werden können, und diese neue Fläche wird im Allgemeinen aus zwey Theilen bestehen, von welchen der eine alle Mittelpunkte der größten Krümmung, und der andere alle Mittelpunkte der kleinsten Krümmung enthalten wird.

XVII.

Tangenten und Krümmungskreise der Curven von doppelter Krümmung.

§. 124. (**Verschiedene Ordnungen der Berührung dieser Curven.**) Da eine einzelne Gleichung zwischen drey veränderlichen Größen für eine Oberfläche gehört, so gehören zwey solche Gleichungen, wenn sie zusammen betrachtet, oder als coexistirend angesehen werden, für den Durchschnitt zweyer Flächen. Dieser Durchschnitt wird im Allgemeiuen eine krumme Linie seyn, deren Elemente nicht in einer und derselben Ebene liegen, d. h. sie wird eine krumme Linie von doppelter Krümmung seyn.

Wenn aber ein Gegenstand, wie z. B. eine solche Curve von doppelter Krümmung, durch zwey Gleichungen ausgedrückt wird, so kann er offenbar auch durch zwey willkürliche Combinationen dieser Gleichungen ausgedrückt werden. Am einfachsten wird man im Allgemeinen diese beyden Gleichungen darstellen, wenn man aus der ersten z. B. die

Größe z, und aus der zweyten die Größe y eliminirt. Dadurch erhält man zwey andere Gleichungen der Form

$$y = \varphi(x) \quad \text{und} \quad z = \psi(x),$$

die ebenfalls dieselbe Curve von doppelter Krümmung, und zwar so ausdrücken, daß die erste $y = \varphi(x)$ die Projection jener Curve in der coordinirten Ebene der xy, und die zweyte $z = \varphi(x)$ die Projection derselben in der Ebene der xz gibt.

Man sieht, daß in einem solchen Gleichungspaare nur mehr eine einzige der drey veränderlichen Größen, z. B. die Größe x unabhängig ist, da für jeden gegebenen Werth von x auch das y durch die erste, und das z durch die zweyte Gleichung bestimmt wird. Läßt man also x in $x + h$ übergehen, so erhält man für die beyden andern Coordinaten die Werthe

$$y + h \frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{1.2} \frac{d^2y}{dx^2} + \ldots \quad \text{und}$$

$$z + h \frac{dz}{dx} + \frac{h^2}{1.2} \frac{d^2z}{dx^2} + \ldots$$

Eben so wird man für eine zweyte Curve, deren Gleichungen zwischen den Coordinaten x', y', z' und Constanten gegeben ist, wenn man ebenfalls x' in $x' + h$ übergehen läßt, für die beyden anderen Coordinaten

$$y' + h \frac{dy'}{dx'} + \frac{h^2}{1.2} \frac{d^2y'^2}{dx'} + \ldots \quad \text{und}$$

$$z' + h \frac{dz'}{dx'} + \frac{h^2}{1.2} \frac{d^2z'}{dx'^2} + \ldots$$

Sollen nun diese beyden Curven einen Punkt, zu welchem die Coordinaten x, y, z gehören, gemeinschaftlich haben, so gibt dieß die drey Bedingungsgleichungen

$$x = x', \quad y = y', \quad z = z'.$$

Sollen sie weiter, in diesem Punkte, eine Berührung der ersten Ordnung haben, so wird dieß durch die zwey neuen Bedingungsgleichungen ausgedrückt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'} \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz'}{dx'},$$

und eben so wird man für eine Berührung der zweyten Ordnung nebst den fünf vorhergehenden Bedingungsgleichungen, noch die zwey folgenden haben:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y'}{dx'^2} \quad \text{und} \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2z'}{dx'^2} \quad \text{u. s. w.}$$

Als Beyspiel für solche Curven von doppelter Krümmung hat man die Gleichungen $y^2 = ax$ und $z^2 = by$ für den Durchschnitt von zwey parabolischen Cylindern, von welchen der eine auf der Ebene der xy, und der andere auf yz senkrecht steht.

§. 125. **(Tangenten dieser Curven).** Um die Gleichungen der geradlinigen Tangente einer Curve von doppelter Krümmung, deren Gleichungen

$$y = \varphi(x) \quad \text{und} \quad z = \psi(x)$$

sind, zu finden, nehme man für die gesuchten Gleichungen dieser Tangente die folgenden an:

$$y' = ax' + \alpha,$$
$$z' = bx' + \beta.$$

Dieß vorausgesetzt, geben die drey ersten der in §. 124 angeführten Bedingungen, d. h. erstens die Bedingung, daß die Tangente durch den Punkt x, y, z der Curve gehen soll, die zwey Gleichungen

$$y' - y = a(x' - x),$$
$$z' - z = b(x' - x),$$

und eben so zweytens die Bedingung, daß die Gerade mit der Curve eine Berührung der ersten Ordnung haben soll, gibt

$$a = \frac{dy}{dx} \quad \text{und} \quad b = \frac{dz}{dx};$$

woraus daher sofort folgt, daß die gesuchten Gleichungen der Tangente der Curve sind:

$$\left.\begin{aligned} y' - y &= (x' - x)\frac{dy}{dx} \\ z' - z &= (x' - x)\frac{dz}{dx} \end{aligned}\right\}.$$

I. Am einfachsten ist es, diese Curven von doppelter Krümmung als Polygone von unendlich kleinen Seiten anzusehen, von welchen nur immer je zwey nächste in einer Ebene liegen; dann sind die Tangenten dieser Curven die Verlängerungen dieser Seiten des Polygons. Nennt man x, y, z die Coordinaten des Anfangspunkts einer dieser Seiten, so sind $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ die Coordinaten des Endpunkts desselben. Nennt man dann ds den Abstand dieser beyden Punkte, d. h. die Länge irgend eines Elements der Curve, so werden die Größen dx, dy, dz die Projectionen von ds auf den Axen der x, y, z seyn. Nennt man also auch α, β, γ die Winkel, welche die Tangente mit diesen drey Axen der x, y, z bildet, so hat man

$$\cos.\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos.\beta = \frac{dy}{ds} \quad \text{und} \quad \cos.\gamma = \frac{dz}{ds},$$

und auch durch diese Gleichungen läßt sich die Richtung der Tangente für jeden Punkt der Curve bestimmen. Sie können leicht auf die vorhergehenden Gleichungen der Tangente gebracht werden, da man hat

$$\frac{y' - y}{x' - x} = \frac{\cos.\beta}{\cos.\alpha} \quad \text{und} \quad \frac{z' - z}{x' - x} = \frac{\cos.\gamma}{\cos.\alpha}.$$

Substituirt man in diesen Ausdrücken die gefundenen Werthe von $\cos.\alpha$, $\cos.\beta$ und $\cos.\gamma$, so erhält man die vorhergehenden Gleichungen wieder.

II. Da zwischen diesen Cosinus die Bedingungsgleichung (Einl. §. 9) besteht:

$$\cos.^2\alpha + \cos.^2\beta + \cos.^2\gamma = 1,$$

so hat man auch

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

für das Element des Bogens der Curve.

§. 126. (**Normalebene dieser Curve.**) Eine Normale auf eine Curve von doppelter Krümmung zu ziehen, ist eine unbestimmte Aufgabe, da es unzählige Gerade gibt, welche durch einen gegebenen Punkt der Curve auf der Tangente derselben senkrecht stehen. Aber der Inbegriff aller dieser Geraden bildet eine auf die Tangente senkrechte Ebene, oder die Normalebene der Curve. Um sie zu bestimmen, hat man sofort (nach §. 11, I.)

$$(x - x')\cos.\alpha + (y - y')\cos.\beta + (z - z')\cos.\gamma = 0.$$

Substituirt man in diesem Ausdrucke die vorhergehenden Werthe von $\cos.\alpha$, $\cos.\beta$ und $\cos.\gamma$, so erhält man

$$(x - x')\,dx + (y - y')\,dy + (z - z')\,dz = 0$$

für die gesuchte Gleichung der Normalebene, die durch den Punkt xyz der Curve geht, und deren veränderliche Coordinaten $x'\,y'\,z'$ sind.

§. 127. (**Krümmungsebene dieser Curve.**) Diejenige Ebene, welche durch zwey nächstfolgende Tangenten einer Curve von doppelter Krümmung geht, heißt die Krümmungsebene dieser Curve.

Die Gleichung derselben in dem Punkte der Curve, dessen Coordinaten x, y, z sind, wird die Form haben:

$$z - z' = A(x - x') + B(y - y').$$

Differentiirt man diese Gleichung zweymal in Beziehung auf x und y, so erhält man, wenn man kein erstes Differential constant voraussetzt:

$$dz = A\,dx + B\,dy,$$
$$d^2z = A\,d^2x + B\,d^2y,$$

woraus folgt:

$$A = \frac{dz\,d^2y - dy\,d^2z}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} \text{ und } B = \frac{dx\,d^2z - dz\,d^2x}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

Setzt man daher der Kürze wegen

$$X = dy\,d^2z - dz\,d^2y,$$
$$Y = dz\,d^2x - dx\,d^2z,$$
$$Z = dx\,d^2y - dy\,d^2x,$$

so erhält man für die gesuchte Gleichung der Krümmungsebene, oder wie sie auch genannt wird, der Osculationsebene

$$(x' - x)X + (y' - y)Y + (z' - z)Z = 0,$$

in welcher man eines der ersten Differentialien, z. B. dx, als constant annehmen, also $d^2x = 0$ setzen wird. Diese Gleichung gibt ein Mittel, zu entscheiden, ob eine Curve von einfacher oder von doppelter Krümmung ist, da im ersten Falle die Osculationsebene für alle Punkte der Curve gelten oder dieselbe bleiben muß.

§. 128. (**Krümmungskreise dieser Curve.**) Um denjenigen Kreis zu finden, der mit der Curve von doppelter Krümmung eine Berührung der zweyten Ordnung hat, werden wir nicht nur die Größe dieses Kreises oder seinen Halbmesser und den Ort seines Mittelpunkts, sondern auch die Lage seiner Ebene im Raume bestimmen müssen, und daher für die Gleichung dieses Kreises das System einer Kugel, und eine durch den Mittelpunkt dieser Kugel gelegten Ebene nehmen. Ist ρ der Halbmesser dieser Kugel, und sind a, b, c die den Größen x, y, z parallelen Coordinaten des Mittelpunkts derselben, so ist die Gleichung der Kugel

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = \rho^2.$$

Die Gleichung einer Ebene aber, die durch den Mittelpunkt dieser Kugel geht, wird die Form haben:

$$x - a + (y - b) A + (z - c) B = o,$$

wo A und B zwey Constanten sind, welche die Lage dieser Ebene im Raume ausdrücken.

Soll der Kreis, der durch den Schnitt dieser Ebene mit der Kugel gegeben ist, mit einer Curve von doppelter Krümmung eine Berührung der zweyten Ordnung haben, oder soll ρ der Krümmungshalbmesser der Curve seyn, so müssen, nach dem Vorhergehenden, nicht nur die Werthe von x, y, z in beyden Gleichungen, sondern auch ihre ersten und zweyten Differentialien mit jenen der gegebenen Curve identisch seyn. Differentiirt man daher diese beyden Gleichungen zweymal, ohne irgend ein Differential als constant vorauszusetzen, so erhält man:

$$(x - a) dx + (y - b) dy + (z - c) dz = o,$$

$$dx + A dy + B dz = o,$$

$$(x - a) d^2 x + (y - b) d^2 y + (z - c) d^2 z + dx^2 + dy^2 + dz^2 = o,$$

$$d^2 x + A d^2 y + B d^2 z = o.$$

Die vierte und sechste dieser Gleichungen geben sofort, wenn man die vorhergehende Bezeichnung der Größen X, Y und Z beybehält,

$$A = \frac{Y}{X} \quad \text{und} \quad B = \frac{Z}{X}.$$

Substituirt man diese Werthe von A und B in der zweyten jener Gleichungen, so gibt die zweyte, dritte und fünfte, welche Gleichungen bloß die Größen a, b, c enthalten, wenn man wieder

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

setzt, nach einigen Reductionen:

$$a - x = \frac{(Y dz - Z dy) ds^2}{X^2 + X^2 + Z^2},$$

$$b - y = \frac{(Z dx - X dz) ds^2}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$c - z = \frac{(X dy - Y dx) ds^2}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

und durch diese drey Gleichungen werden die Coordinaten a, b, c des Mittelpunkts des Krümmungskreises bestimmt. Substituirt man endlich diese Werthe von $(a - x)$, $(b - y)$ und $(c - z)$ in der vorhergehenden Gleichung

$$\rho^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2,$$

so erhält man den Krümmungshalbmesser ρ durch folgenden Ausdruck:

$$\rho = \frac{ds^3}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

Setzt man in diesen Ausdrücken $z = c = o$, so ist auch $X = Y = o$, und man erhält die analogen Ausdrücke der Größen a, b und ρ für ebene Curven, die wir oben (§. 95) gefunden haben.

I. In den vorhergehenden Ausdrücken ist kein Differential constant angenommen worden. Setzt man aber ds constant, so ist

$$dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z = o, \quad \text{also auch}$$

$$Ydz - Zdy = ds^2 d^2x,$$

$$Zdx - Xdz = ds^2 d^2y,$$

$$Xdy - Ydx = ds^2 d^2z \quad \text{und}$$

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = ds^2 (d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2),$$

so daß man daher für die vier vorhergehenden Bestimmungsstücke erhält

$$a - x = \frac{ds^2 d^2x}{d^2x^2 + d^2y^4 + d^2z^2},$$

$$b - y = \frac{ds^2 d^2y}{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2},$$

$$c - z = \frac{ds^2 d^2z}{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2} \quad \text{und}$$

$$\rho = \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}}.$$

II. Man kann diesen Werth von ρ noch auf folgende einfache Art finden, indem man zuerst den Winkel u zweyer nächster Tangenten oder den Contingenzwinkel der Curve sucht (vergl. §. 96).

Sind nämlich A, B, C die Cosinus der Winkel, welche die erste Tangente der Curve mit den Axen der x, y, z bildet, also auch

$$A + dA, \quad B + dB, \quad C + dC$$

die analogen Winkel der nächstfolgenden Tangente, so hat man (Einl. §. 9, I.)

$$\cos.\,\omega = A(A + dA) + B(B + dB) + C(C + dC),$$

und da die drey Coordinaten unter sich rechtwinklig sind, so ist (ebendaselbst)

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1 \quad \text{und}$$

$$(A + dA)^2 + (B + dB)^2 + (C + dC)^2 = 1,$$

oder auch

$$AdA + BdB + CdC = -\tfrac{1}{2}(dA^2 + dB^2 + dC^2).$$

Allein der vorhergehende Ausdruck von $\cos.\omega$ gibt auch

$$\begin{aligned}\sin.^2\omega = &- 2(A\,dA + B\,dB + C\,dC)\\ &- (A\,dA + B\,dB + C\,dC)^2,\end{aligned}$$

so daß man daher hat, wenn man die vierten und höheren Potenzen von dA, dB, dC wegläßt:

$$\sin.^2\omega = dA^2 + dB^2 + dC^2.$$

Es ist aber (§. 125, I.)

$$A = \frac{dx}{ds},\quad B = \frac{dy}{ds},\quad C = \frac{dz}{ds};$$

also auch, wenn man den Bogen statt dem Sinus nimmt:

$$\omega^2 = \left(d\,.\,\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\,.\,\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\,.\,\frac{dz}{ds}\right)^2,$$

und dieß ist der gesuchte Ausdruck des Winkels der Contingenz der Curve. Da nun, wenn wieder ρ den Krümmungshalbmesser der Curve bezeichnet,

$$\rho = \frac{ds}{\omega}\ \text{ist,}$$

so hat man auch

$$\rho = \frac{ds}{\sqrt{\left(d\,.\,\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\,.\,\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\,.\,\frac{dz}{ds}\right)^2}},$$

wie zuvor.

III. Wenn man in der vorhergehenden Gleichung

$$\omega^2 = dA^2 + dB^2 + dC^2$$

die Werthe von $A = \frac{dx}{ds}$, $B = \frac{dy}{ds}$, $C = \frac{dz}{ds}$ (aus §. 125, I.) substituirt, so hat man

$$dA = \frac{ds^2\,d^2x - dx\,ds\,d^2s}{ds^3},$$

oder da

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2\ \text{und}$$
$$ds\,d^2s = dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z\ \text{ist,}$$

$$dA = \frac{dy}{ds^3}(dy\,d^2x - dx\,d^2y) + \frac{dz}{ds^3}(dz\,d^2x - dx\,d^2z),$$

oder nach der in §. 127 eingeführten Bezeichnung

$$dA = \frac{Y\,dz - Z\,dy}{ds^3},\ \text{und eben so}$$

$$dB = \frac{Z\,dx - X\,dz}{ds^3},$$

$$dC = \frac{X dy - Y dx}{ds^3},$$

und daher, wenn man diese Werthe in dem vorhergehenden Ausdrucke von ω substituirt:

$$\omega = \frac{1}{ds^2} \cdot \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

ein anderer Ausdruck des Winkels der Contingenz.

IV. Nennt man eben so $A' B' C'$ die Cosinus der Winkel, welche die Normale der Curve mit der Osculationsebene (§. 127) derselben bildet, so hat man

$$A' = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

$$B' = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

$$C' = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

Nennt man aber θ den Winkel, welchen zwey nächstfolgende Osculationsebenen unter sich bilden, oder was dasselbe ist, nennt man θ den Winkel zweyer nächster Normalen der Curve, so hat man wieder, wie zuvor,

$$\theta^2 = (dA')^2 + (dB')^2 + (dC')^2.$$

Man pflegt diesen Winkel θ zweyer nächster Osculationsebenen den Flexionswinkel der Curven zu nennen, und man sieht, daß sein Ausdruck in x, y, z die dritten Differentialien dieser Coordinaten enthält.

V. Um auf die vorhergehenden allgemeinen Ausdrücke ein Beyspiel anzuwenden, sey die Curve von doppelter Krümmung gegeben, deren Gleichungen sind

$$y^2 = ax \quad \text{und} \quad z^2 = a^2 - y^2.$$

Diese Curve gehört demnach für den Durchschnitt eines parabolischen und eines kreisförmigen Cylinders. Die Gleichungen derselben geben, wenn man dx constant setzt,

$$dy = \frac{a\,dx}{2y}, \qquad dz = -\frac{a\,dx}{2z},$$

$$d^2y = -\frac{a^2 dx^2}{4y^3}, \qquad d^2z = -\frac{a^2 dx^2}{4z^3} \quad \text{und}$$

$$ds^2 = (a^4 + 4y^2z^2)\frac{dx^2}{4y^2z^2}.$$

Dieß vorausgesetzt, hat man

$$X = \frac{a^5 d x^3}{8 y^3 z^3}, \quad Y = -\frac{a^2 d x^3}{4 z^3}, \quad Z = -\frac{a^2 d x^3}{4 y^3},$$

also auch

$$\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \frac{a^2 d x^3}{8 y^3 z^3} \sqrt{a^6 + 4 y^6 + 4 z^6},$$

und daher der gesuchte Krümmungshalbmesser

$$\rho = \frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{(a^4 + 4 y^2 z^2)^3}{a^6 + 4 y^6 + 4 z^6}}.$$

XVIII.

Erzeugung der Flächen.

§. 129. (**Cylindrische Flächen.**) Ein Cylinder, in der allgemeinsten Bedeutung des Worts, entsteht durch die Bewegung einer geraden Linie, die während ihrer Bewegung einer anderen, unbeweglichen Geraden, immer parallel bleibt. Seyen die Gleichungen dieser *erzeugenden Geraden* in irgend einer Lage derselben

$$x = a z + \alpha \quad \text{und} \quad y = b z + \beta.$$

In diesen Gleichungen sind die Größen a und b constant, die beyden andern Größen α und β aber sind entweder zugleich constant, oder zugleich veränderlich; also muß auch jede derselben eine Funktion der anderen seyn, oder man muß haben $\beta = \varphi \alpha$, d. h.:

$$y - b z = \varphi (x - a z) \quad . \;.\; . \quad (I).$$

Differentiirt man diese Gleichung partiell, so hat man

$$b \left(\frac{d z}{d x}\right) = - \varphi' + a \left(\frac{d z}{d x}\right) . \varphi' \quad \text{und}$$

$$1 - b \left(\frac{d z}{d y}\right) = - a \left(\frac{d z}{d y}\right) . \varphi',$$

wo φ' eine andere Funktion der Größe $(x - a z)$ ausdrückt. Eliminirt man aus diesen beyden Gleichungen die Größe φ', so hat man

$$1 = a \left(\frac{d z}{d x}\right) + b \left(\frac{d z}{d y}\right) \quad . \;.\; . \quad (II),$$

und die Gleichung (I) sowohl, als auch ihre Differentialgleichung (II) kann als die allgemeine Gleichung der Cylinder angesehen werden, welches auch diejenige Curve seyn mag, durch welche die erzeugende Gerade während ihrer Bewegung gehen soll, eine Curve, welche wir die leitende Curve nennen wollen.

I. Wenn man die Gleichungen der erzeugenden und die der leitenden Linie kennt, so kann man die cylindrische Fläche finden, welche durch diese Bewegung der erzeugenden Linie entsteht. Sind nämlich $U = o$ und $V = o$ die gegebenen Gleichungen der leitenden Curve, und sind, wie zuvor, die Gleichungen der erzeugenden Geraden

$$x - az = \alpha \quad \text{und} \quad y - bz = \varphi\alpha,$$

so wird man aus diesen vier Gleichungen die drey Größen x, y, z eliminiren, und als Resultat dieser Elimination eine Gleichung zwischen α und $\varphi\alpha$ finden, wodurch die Form dieser Funktion $\varphi\alpha$ bestimmt wird.

Ex. Ist die leitende Curve ein Kreis in der Ebene der xy, dessen Halbmesser r, und dessen Coordinaten des Mittelpunkts A und B sind, so hat man für die beyden Gleichungen $U = o$ und $V = o$ der leitenden Curve

$$z = o \quad \text{und}$$
$$(x - A)^2 + (y - B)^2 = r^2.$$

Verbindet man damit jene zwey Gleichungen der erzeugenden Geraden, so gibt die erwähnte Elimination

$$(\alpha - A)^2 + (\varphi\alpha - B)^2 = r^2.$$

Substituirt man aber in dieser Gleichung für α und $\varphi\alpha$ die vorigen Werthe $x - az$ und $y - bz$, so erhält man

$$(x - az - A)^2 + (y - bz - B)^2 = r^2,$$

und dieß ist die gesuchte Gleichung des Cylinders.

II. Wäre die erzeugende Gerade und irgend eine Fläche $W = o$ gegeben, und sucht man den Cylinder, welcher diese Fläche ringsum berührt, so wird man aus der Gleichung $W = o$ die partiellen Differentialien von $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ suchen, und sie in der allgemeinen Gleichung (II) des Cylinders substituiren, wodurch man eine Gleichung $T = o$ erhält. Behandelt man dann diese beyden Gleichungen $W = o$ und $T = o$, wie vorhin die Gleichungen $U = o$ und $V = o$, so erhält man die gesuchte Gleichung des die Fläche $W = 0$ umschließenden Cylinders.

Ex. Ist die gegebene Fläche ein Ellipsoid, so hat man

$$W = 0 = \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} - 1,$$

also auch

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{C^2 x}{A^2 z}, \left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{C^2 y}{B^2 z}.$$

Soll nun die erzeugende Gerade in einer der xy parallelen Ebene liegen, so werden ihre beyden Gleichungen seyn:

$$x = \alpha \text{ und } y = bz + \varphi\alpha;$$

also wird auch die allgemeine Gleichung (II) des Cylinders seyn:

$$1 = b\left(\frac{dz}{dy}\right) \text{ oder}$$

$$T = 0 = 1 + \frac{bC^2 y}{B^2 z}.$$

Diesem gemäß, haben wir also die folgenden vier Gleichungen:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} - 1 = 0, \quad bC^2 y + B^2 z = 0,$$

$$x = \alpha, \qquad y = bz + \varphi\alpha.$$

Eliminirt man daraus die Größen x, y, z, so erhält man

$$A^2 (\varphi\alpha)^2 = (A^2 - \alpha^2)(B^2 + b^2 C^2);$$

also ist auch die gesuchte Gleichung des das Ellipsoid umschließenden Cylinders

$$A^2 (y - bz)^2 = (A^2 - x^2)(B^2 + b^2 C^2).$$

Bemerken wir noch, daß man, wenn man die vorhergehende allgemeine Gleichung (II) des Cylinders noch einmal differentiirt, erhält:

$$\frac{a}{b}\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = 0 \text{ und}$$

$$\frac{a}{b}\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) + \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = 0.$$

Eliminirt man aus diesen beyden Gleichungen die Größe $\frac{a}{b}$, so hat man

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right)^2,$$

und auch diese Gleichung muß einer Fläche angehören, die durch die Bewegung einer geraden Linie entsteht; allein diese Bewegung ist nicht mehr an ihren früheren Parallelismus gebunden, da diese Gleichung von a und b ganz unabhängig ist (vergl. §. 113).

§. 130. (**Conische Flächen.**) Eine conische Fläche wird durch die Bewegung einer Geraden erzeugt, die immer durch einen gegebenen festen Punkt, und durch eine gegebene krumme Linie, die leitende Curve, geht.

Sind a, b, c die Coordinaten des festen Punkts, so werden die Gleichungen der erzeugenden Geraden die Form haben:

$$x - a = \alpha(z - c) \quad \text{und} \quad y - b = \beta(z - c),$$

und man wird, wie in §. 129, schließen, daß $\beta = \varphi\alpha$ eine Funktion von α seyn muß, woraus sofort folgt, daß die allgemeine Gleichung der conischen Flächen

$$\frac{y - b}{z - c} = \varphi\left(\frac{x - a}{z - c}\right) \quad . \; . \; . \; \text{I},$$

und daß ihre, eben so allgemeine Differentialgleichung ist:

$$c - z = (a - x)\left(\frac{dz}{dx}\right) + (b - y)\left(\frac{dz}{dy}\right) \quad . \; . \; . \; \text{II}.$$

I. Sind also die Gleichungen $U = 0$ und $V = 0$ der leitenden Curve gegeben, so wird man aus ihnen und aus den beyden Gleichungen

$$\frac{x - a}{z - c} = \alpha \quad \text{und} \quad \frac{y - b}{z - c} = \varphi\alpha$$

die Größen x, y, z eliminiren, und dadurch die Gleichung des Kegels erhalten, der durch diese Bewegung der erzeugenden Geraden entsteht.

Ex. Ist die erzeugende Gerade ein Kreis des Halbmessers r, der in einer der Ebene xy parallelen, und von ihr um die Größe C abstehenden Entfernung liegt, und dessen Coordinaten des Mittelpunkts A und B sind, so hat man für die Gleichungen der leitenden Curve

$$(x - A)^2 + (y - B)^2 = r^2 \quad \text{und} \quad z = C.$$

Verbindet man damit die beyden vorhergehenden Gleichungen der erzeugenden Geraden, so findet man

$$(A - a - C\alpha)^2 + (B - b - C\varphi\alpha)^2 = r^2,$$

und die gesuchte Gleichung des Kegels ist

$$[(a - A)z + (x - a)C]^2 + [(b - B)z + (y - b)C]^2 = r^2 z^2.$$

II. Um aber die Gleichung desjenigen Kegels zu erhalten, der eine gegebene Fläche $W = o$ ringsum berührt, wird man die Werthe von $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ aus dieser Gleichung in der vorhergehenden allgemeinen Gleichung (II) des Kegels substituiren, wodurch man eine Gleichung $T = o$ erhält, und mit diesen beyden Gleichungen $W = o$, $T = o$ wird man, wie zuvor mit den Gleichungen $U = o$, $V = o$ verfahren.

Ex. Sey die gegebene Fläche eine Kugel des Halbmessers r, deren Mittelpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten liegt, so ist

$$W = o = x^2 + y^2 + z^2 - r^2.$$

Dieß gibt

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{x}{z} \text{ und } \left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{y}{z},$$

also auch, mittelst der Gleichung (II),

$$T = o = (z - c)\, z + x^2 + y^2 = o.$$

Ist aber der feste Punkt irgendwo in der Axe der z, so ist $a = b = o$, und man hat daher für die Gleichungen der erzeugenden Geraden

$$\frac{x}{z - c} = \alpha, \quad \frac{y}{z - c} = \varphi \alpha.$$

Die Combination dieser vier Gleichungen gibt

$$\alpha^2 + (\varphi \alpha)^2 = \frac{r^2}{c^2 - r^2},$$

also ist auch die Gleichung des gesuchten Kegels

$$x^2 + y^2 = \frac{r^2 . (z - c)^2}{c^2 - r^2}.$$

Ist der feste Punkt ein leuchtender Punkt, so ist die Curve, in welcher sich die gegebene Fläche und der Kegel berührt, und deren Gleichungen sind $W = o$ und $T = o$, diejenige Curve, welche auf der gegebenen Fläche den beleuchteten Theil von dem beschatteten trennt. Ist aber der feste Punkt das Auge des Beobachters, so ist jene Berührungscurve der scheinbare Umfang, unter welchem dem Auge jene Fläche erscheint.

Differentiirt man endlich auch hier die Gleichung (II) noch einmal, so erhält man

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right)^2,$$

wie zuvor, für eine Fläche, die durch die willkürliche Bewegung einer geraden Linie entstanden ist.

§. 131. (**Rotationsflächen.**) Eine Rotationsfläche entsteht durch die Drehung einer Curve um eine feste Gerade. Sind

$$x = Az + a \quad \text{und} \quad y = Bz + b$$

die Gleichungen dieser festen Geraden oder der Rotationsaxe, so wird die Gleichung einer, auf diese Axe senkrechten Ebene (nach Einleit. §. 11, I.) die Form haben:

$$Ax + By + z = \alpha.$$

Eine Kugel aber, deren Mittelpunkt in dem Punkte liegt, in welchem die Rotationsaxe die Ebene der xy schneidet, und deren Halbmesser β ist, wird zur Gleichung haben:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = \beta^2,$$

und jene Ebene sowohl, als auch diese Kugel wird die gesuchte Rotationsfläche immer in einem Kreise schneiden, woraus sofort wieder folgt, daß β eine Funktion von α, oder daß $\beta^2 = \varphi\alpha$ seyn wird, das heißt, daß man hat

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = \varphi(Ax + By + z) \;.\;.\;. \text{(I)},$$

und dieß ist die allgemeine Gleichung der Rotationsflächen. Die ihr gleichgeltende Differentialgleichung aber ist

$$(b - y + Bz)\left(\frac{dz}{dx}\right) - (a - x + Az)\left(\frac{dz}{dy}\right) + A(b - y) - B(a - x) = 0 \;.\;.\;. \text{(II)}.$$

Ist für einen speciellen Fall die Rotationsaxe zugleich die Axe der z, so ist $A = B = a = b = 0$, und man hat daher

$$x^2 + y^2 = \varphi z \;.\;.\;. \text{(I')} \quad \text{und}$$

$$x\left(\frac{dz}{dy}\right) - y\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0 \;.\;.\;. \text{(II')}.$$

I. Sind wieder $U = 0$, $V = 0$ die gegebenen Gleichungen einer Curve, die um eine gegebene Axe rotiren soll, so wird man aus der Verbindung dieser Gleichungen mit den beyden folgenden

$$Ax + By + z = \alpha \quad \text{und}$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = \varphi\alpha$$

die Gleichung der gesuchten Rotationsfläche, wie zuvor, ableiten.

Ex. Ist diese Curve eine Ellipse in der Ebene der xz, deren Halbaxen m und n sind, und deren Mittelpunkt von dem Anfang der Coordinaten um die Größe $x = p$ entfernt ist, so sind die Gleichungen dieser Ellipse

$$\left(\frac{x-p}{m}\right)^2 + \left(\frac{z}{n}\right)^2 - 1 = 0 \quad \text{und} \quad y = 0.$$

Ist die Rotationsaxe zugleich die Axe der z, so hat man

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varphi\alpha \quad \text{und} \quad z = \alpha,$$

woraus man sofort für die gesuchte Rotationsfläche findet:

$$p + \frac{m}{n}\sqrt{n^2 - z^2} = \sqrt{x^2 + y^2};$$

für $p = 0$ erhält man

$$\frac{x^2 + y^2}{m^2} + \frac{z^2}{n^2} = 1$$

für die Fläche, welche durch Rotation der Ellipse um die Axe n entsteht. Ist $p = m$, so hat man

$$mn + m\sqrt{n^2 - z^2} = n\sqrt{x^2 + y^2}$$

für die Fläche, welche durch die Rotation der Ellipse um den Scheitel der Axe m entsteht. Setzt man in der letzten Gleichung $m = n$, so erhält man

$$m + \sqrt{m^2 - z^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

oder

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4m^2(x^2 + y^2)$$

für die Fläche, welche durch die Rotation eines Kreises des Halbmessers m um eine Axe entsteht, welche den Kreis am Endpunkte eines seiner Durchmesser berührt.

Wir haben bereits oben (§. 113) auf die große Allgemeinheit der Gleichungen mit partiellen Differentialien aufmerksam gemacht. Die Gleichung einer Oberfläche, die durch die Rotation eines Kreises des Halbmessers a um seinen Durchmesser entsteht, ist

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Das Differential dieser Gleichung

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$$

aber drückt alle die so entstandenen Oberflächen aus, welches auch der Halbmesser des sie erzeugenden Kreises seyn mag. Allein die Gleichung

$$y\left(\frac{dz}{dx}\right) - x\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0,$$

die, wie wir gesehen haben, aus der endlichen Gleichung

$$z = \varphi\,(x^2 + y^2)$$

entstanden ist, drückt bloß aus, daß die Fläche durch die Rotation irgend einer Curve, deren Ebene auf jener der xy senkrecht ist, um die Axe der z entstanden ist, ohne etwas über die Natur, Größe und Lage dieser Curve festzusetzen, die daher auch ganz willkürlich, selbst discontinuirlich und sogar völlig gesetzlos seyn kann.

§. 132. (**Wendelflächen.**) So werden diejenigen Flächen, analog mit unsern Wendeltreppen, genannt, die durch die Bewegung einer Geraden entstehen, die immer durch die Axe der z und durch eine gegebene Curve gehend, der Ebene der xy parallel bleibt.

Diese Fläche wird die Eigenschaft haben, daß jede durch die Axe der z gelegte Ebene jene Fläche in einer der xy parallelen Geraden schneidet. Die Gleichung einer solchen Ebene ist aber

$$y = ax,$$

und die einer der xy parallelen Geraden ist

$$z = b.$$

Da auch hier wieder die Größen a und b von einander abhängig seyn müssen, so hat man für die Gleichung dieser Fläche

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{I},$$

oder die Differentialgleichung derselben

$$x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{II}.$$

Ex. I. Ist die leitende Curve ein auf xy senkrechter Kreis des Halbmessers r, und liegt der Mittelpunkt dieses Kreises in der Axe der x vom Anfangspunkte um die Größe c entfernt, so sind die Gleichungen dieses Kreises

$$x = c \quad \text{und} \quad y^2 + z^2 = r^2.$$

Verbindet man sie mit den folgenden

$$\frac{y}{x} = a \quad \text{und} \quad z = \varphi a,$$

so erhält man, wie zuvor, für die Gleichung unserer Fläche

$$\frac{c^2 y^2}{x^2} = (r^2 - z^2),$$

die bekanntlich von manchem unserer Gewölbe gebildet wird.

Ex. II. Sey die leitende Curve die Schraubenlinie, das heißt, eine Gerade, die auf der Oberfläche eines senkrechten Cylinders mit kreisförmiger Basis aufgewickelt ist. Ist r der Halbmesser dieser kreisförmigen Basis, und ist die Axe des Cylinders zugleich die Axe der z, und ist endlich die Gleichung der aufzuwindenden Geraden, so lange sie noch in der Ebene der yz liegt,

$$y = \frac{r}{A} . z,$$

so sind die Gleichungen der Schraubenlinie

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{und}$$

$$z = A . \text{arc. sin.} \frac{x}{r}.$$

Verbindet man sie mit den zwey vorhergehenden Gleichungen

$$y = ax \quad \text{und} \quad z = \varphi a,$$

so erhält man für die gesuchte Gleichung unserer Fläche

$$z = A . \text{arc. tang.} \frac{x}{y} \quad \text{oder}$$

$$x = y \text{ tang.} \frac{z}{A}.$$

§. 133. (**Einhüllende Flächen.**) Sey $U = o$ die Gleichung einer Fläche zwischen xyz und einer constanten Größe ω. Gibt man dieser Größe ω nach und nach alle möglichen Werthe, so erhält man eine Folge von Flächen, deren jede von der anderen nur durch ihren besondern Werth von ω verschieden ist. Die Reihe aller dieser Flächen aber wird durch eine andere Fläche begränzt werden, von welcher letzteren alle jene umschlossen und berührt werden, und die wir daher die einhüllende Fläche nennen wollen.

Gibt man in der Gleichung der eingehüllten Fläche $U = o$ der Größe ω den nächstfolgenden Werth $\omega + d\omega$, so erhält man die Gleichung der nächstfolgenden eingehüllten Fläche, die in Gestalt und Lage von der vorhergehenden nur unendlich wenig verschieden seyn, und dieselbe in irgend einer Curve schneiden wird. Diese Curve wird die gemeinschaftliche Berührungslinie der beyden eingehüllten Flächen mit ihrer einhüllenden seyn, und die Punkte dieser Curve werden diejenigen Punkte der ersten Fläche $U=0$ seyn, für welche die Werthe von $x\,y\,z$ sich nicht ändern, während ω in $\omega + d\omega$ übergeht. Das heißt also: Differentiirt man die Gleichung $U=0$ bloß in Beziehung auf ω, so gehört die resultirende Gleichung für jene Curve, und da diese Curve nothwendig auf der ersten eingehüllten Fläche liegt, so sind die beyden Gleichungen dieser Curve, in welcher sich zwey nächste eingehüllte Flächen schneiden, oder in welcher zwey nächste eingehüllte Flächen von der einhüllenden berührt werden:

$$U = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{I}),$$

$$\left(\frac{dU}{d\omega}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{II}).$$

Wir wollen diese Curve die **Charakteristik** der einhüllenden Fläche nennen.

Gibt man also in diesen beyden Gleichungen der Größe ω nach und nach alle möglichen Werthe, so erhält man alle auf einander folgenden Charakteristiken, die sich alle auf der einhüllenden Fläche befinden, und aus denen allein, wenn man sich so ausdrücken darf, diese einhüllende Fläche zusammengesetzt ist. Eliminirt man daher aus jenen beyden Gleichungen die Größe ω, so erhält man in $x\,y\,z$ eine Gleichung, die von ω unabhängig ist, und daher für **alle** Charakteristiken, d. h. für die **einhüllende Fläche** selbst gehört.

Wenn man aber in diesen **beyden** Gleichungen (I), (II), nachdem man der Größe ω einen bestimmten Werth gegeben hat (wodurch die Lage der Charakteristik im Raume für einen besondern Fall bestimmt wird), diese Größe ω in $\omega + d\omega$ übergehen läßt, so werden die zwey neuen Gleichungen (I), (II) für die nächstfolgende Charakteristik gehören, die der Form und Lage nach von der vorhergehenden wieder nur unendlich wenig verschieden seyn, und sie im Allgemeinen in einem oder auch in mehreren Punkten schneiden wird. Dieser Durchschnittspunkt zweyer nächster Charakteristiken wird offenbar derjenige Punkt der ersten Charakteristik seyn, für welchen die Werthe von $x\,y\,z$ sich nicht ändern, wenn sich (in den Gleichungen I und II) der Werth von ω ändert. Wenn man daher diese beyden Gleichungen bloß in Beziehung auf ω differentiirt, so werden die beyden so erhaltenen Gleichungen für jenen Durchschnittspunkt der zwey nächsten Charakteristiken gehören, und da dieser Punkt sich auch zugleich auf der ersten Charakteristik befindet, da überdieß die Differentiation von (I) die Gleichung (II) wieder hervorbringt, so hat man für diesen Durchschnittspunkt je zwey nächster Charakteristiken die drey Gleichungen:

$$U = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (I),$$

$$\left(\frac{dU}{d\omega}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (II),$$

$$\left(\frac{d^2 U}{d\omega^2}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (III),$$

in welchen wieder der Werth von ω diejenige von allen andern Charakteristiken bestimmt, auf welcher man den Durchschnitt derselben mit der nächstfolgenden Charakteristik genommen hat. (Vergl. §. 118, III.)

Gibt man daher in den drey vorhergehenden Gleichungen der Größe ω nach und nach alle möglichen Werthe, so erhält man die Aufeinanderfolge jeder zwey nächsten Charakteristiken, d. h. eliminirt man aus jenen drey Gleichungen die Größe ω, so erhält man zwey andere Gleichungen in xyz ohne ω, welche zwey Gleichungen für diejenige Curve gehören werden, welche von den sämmtlichen Durchschnittspunkten jeder Charakteristik mit der ihr nächstfolgenden gebildet werden. Diese Curve wollen wir die Wendungscurve (Arete de rebroussement) der einhüllenden Fläche nennen.

Man sieht, daß diese Wendungscurve von allen Charakteristiken eben so berührt wird, wie die einhüllende Fläche von allen eingehüllten berührt wird. Daß sich dieselben Betrachtungen auch auf ebene Curven oder auf eine Gleichung $U = 0$ zwischen zwey veränderlichen Größen anwenden lassen, ist für sich klar.

Ex. I. In der Ebene der xy sey irgend eine Curve verzeichnet, deren Gleichung $y = \varphi x$ seyn soll. Der Mittelpunkt einer Kugel, deren Halbmesser r ist, bewege sich auf jener Curve. Der Raum, welchen die Kugel durchläuft, wird die einhüllende Fläche aller dieser Kugeln seyn.

Ist ω der Werth von x für irgend eine bestimmte Lage des Mittelpunktes der Kugel, so ist die Gleichung der Kugel

$$(x - \omega)^2 + (y - \varphi\omega)^2 + z^2 = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad (I).$$

Setzt man der Kürze wegen $\varphi'\omega = \frac{d.\varphi\omega}{d\omega}$ und $\varphi''\omega = \frac{d.\varphi'\omega}{d\omega}$, und differentiirt man die vorhergehende Gleichung zwey Mal in Beziehung auf ω, so erhält man

$$(x-\omega) + (y-\varphi\omega) \,.\, \varphi'\omega = 0 \quad . \;\; . \;\; . \quad (\mathrm{II}),$$

$$(y-\varphi\omega) \,.\, \varphi''\omega - (\varphi'\omega)^2 - 1 = 0 \quad . \;\; . \;\; . \quad (\mathrm{III}).$$

Dieß vorausgesetzt, gehören also die Gleichungen I und II zusammen genommen für jede einzelne Charakteristik der einhüllenden Fläche.

Eliminirt man aber ω aus I und II, so erhält man die Gleichung der einhüllenden Fläche selbst.

Ferner gehören die Gleichungen I, II und III zusammen genommen für den Durchschnittspunkt von je zwey nächsten Charakteristiken.

Eliminirt man aber die Größe ω aus I, II und III, so erhält man die beyden Gleichungen in xyz, welche für die Wendungscurve der einhüllenden Fläche gehören.

Ist nun, um dieß auf ein besonderes Beyspiel fortzuführen, die feste Curve, auf welcher sich der Mittelpunkt jener Kugel bewegt, ein Kreis des Halbmessers R, so ist

$$\varphi\omega = \sqrt{R^2-\omega^2}, \text{ also auch}$$

$$\varphi'\omega = -\frac{\omega}{\sqrt{R^2-\omega^2}} \text{ und } \varphi''\omega = -\frac{\omega^2}{(R^2-\omega^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{R^2-\omega^2}}.$$

Diesem gemäß sind jene drey Gleichungen

$$(x-\omega)^2 + (y-\sqrt{R^2-\omega^2})^2 + z^2 - r^2 = 0 \quad . \;\; . \;\; . \quad (\mathrm{I}),$$

$$x = \frac{\omega y}{\sqrt{R^2-\omega^2}} \quad . \;\; . \;\; . \quad (\mathrm{II}),$$

$$y = 0 \quad . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \quad (\mathrm{III}).$$

Eliminirt man ω aus I und II, so ist die gesuchte Gleichung der einhüllenden Fläche

$$R + \sqrt{r^2-z^2} = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Die zwey Gleichungen I und II zusammen genommen gehören für die Charakteristik, und man sieht, daß diese Charakteristik eine ebene Curve ist, da ihre Projection in xy (Gleichung II) eine Gerade ist. Diese Curve liegt also in einer auf xy senkrechten Ebene. Für den besondern Werth von $\omega = 0$ ist auch $x = 0$, und daher die Gleichung (I)

$$(y-R)^2 + z^2 = r^2,$$

also die Charakteristik ein Kreis, dessen Halbmesser r, und dessen Mittelpunkt von dem Anfangspunkte der Coordinaten um die Größe R absteht.

Bewegt sich auf demselben festen Kreise des Halbmessers R der Mittelpunkt eines Ellipsoids, das durch die Rotation einer Ellipse um die Axe der z entstanden ist, und sind A und B die halben Axen dieses Ellipsoids, so hat man

$$x^2 + y^2 + \frac{B^2 z^2}{A^2} = B^2,$$

also auch

$$(x - \omega)^2 + (y - \varphi\omega)^2 + \frac{B^2}{A^2}(z^2 - A^2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (I),$$

$$x - \omega + (y - \varphi\omega) \cdot \varphi'\omega = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (II),$$

$$(y - \varphi\omega) \cdot \varphi''\omega - (\varphi'\omega)^2 - 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (III).$$

Da hier die Größe $\varphi\omega = \sqrt{R^2 - \omega^2}$ ist, wie zuvor, so gibt die Gleichung (II) sofort

$$x = \frac{\omega y}{\sqrt{R^2 - \omega^2}} \quad \text{oder} \quad \omega^2 = \frac{R^2 x^2}{x^2 + y^2},$$

und mit diesem Werthe von ω findet man aus der Gleichung (I)

$$R + \frac{B}{A}\sqrt{A^2 - z^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

für die einhüllende Fläche, übereinstimmend mit der Rotationsfläche, die wir oben (§. 131) gefunden haben, wenn man daselbst $n = A$, $m = B$ und $p = R$ setzt.

Ex. II. Für die Gleichung eines Kegels mit kreisförmiger Basis, dessen Spitze im Anfange der Coordinaten ist, und dessen Seitenlinie mit der Axe des Kegels, die zugleich die Axe der z seyn soll, einen Winkel bildet, dessen Tangente a ist, hat man (§. 130)

$$x^2 + y^2 = a^2 z^2.$$

Es bewege sich die Spitze dieses Kegels in der Peripherie eines Kreises des Halbmessers R, der in der Ebene der xy liegt, und dessen Mittelpunkt im Anfange der Coordinaten ist, so hat man für die Gleichung dieses beweglichen Kegels

$$(x - \omega)^2 + (y - \sqrt{R^2 - \omega^2})^2 = a^2 z^2 \quad . \quad . \quad . \quad (I).$$

Das Differential dieser Gleichung in Beziehung auf ω gibt

$$x - \omega - (y - \sqrt{R^2 - \omega^2}) \cdot \frac{\omega}{\sqrt{R^2 - \omega^2}} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (II),$$

woraus sofort folgt

$$\omega = \frac{Rx}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

und dieser Werth von ω, in der Gleichung (I) substituirt, gibt die Gleichung der alle diese Kegel einhüllenden Fläche

$$(x\sqrt{x^2 + y^2} - Rx)^2 + (y\sqrt{x^2 + y^2} - Ry)^2 = a^2 z^2 (x^2 + y^2);$$

oder, wenn man diese Quadrate auflöst und alle Glieder durch $(x^2 + y^2)$ dividirt:

$$x^2 + y^2 - 2R\sqrt{x^2 + y^2} = a^2 z^2 - R^2.$$

Setzt man in diesem Ausdrucke $z = b$, so erhält man für den Durchschnitt dieser einhüllenden Fläche mit einer der xy parallelen und von ihr um die Größe b abstehenden Ebene die Gleichung

$$x^2 + y^2 = (R \pm ab)^2.$$

Dieser Schnitt ist daher ein doppelter, concentrischer Kreis, dessen Halbmesser $R + ab$ und $R - ab$ ist.

§. 134. (**Developpable Flächen.**) Wenn eine Fläche durch die Bewegung einer geraden Linie entsteht, deren je zwey nächste Lagen immer in einer Ebene sind, so wird diese Fläche developpabel genannt. Diese Flächen können nämlich als aus ebenen Elementen von unbestimmter Länge, aber von unendlich kleiner Breite bestehend betrachtet werden. Da je zwey nächste dieser Elemente sich in einer geraden, in der erzeugenden geraden Linie schneiden, so läßt sich die ganze Fläche in eine einzige Ebene, ohne Bruch und ohne Verdopplung, ausbreiten, oder sie läßt sich developpiren. Die cylindrischen und conischen Flächen (§. 129, 130) sind nur sehr specielle Fälle der developpablen Flächen.

Wenn sich eine Ebene so bewegt, daß sie durch alle auf einander folgenden Punkte einer gegebenen Curve von doppelter Krümmung auf dieser Curve senkrecht steht, so werden die Durchschnitte je zwey nächster dieser normalen Ebenen eine developpable Fläche bilden. Diese geradlinigen Durchschnitte von je zwey nächsten Ebenen nennt man die Charakteristik der developpablen Fläche. Da endlich je zwey nächste dieser Charakteristiken immer in einer Ebene liegen, so werden sie (wenn sie anders nicht parallel sind, wie bey den cylindrischen Flächen) sich in irgend einem Punkte schneiden, und die Aufeinanderfolge aller dieser Durchschnittspunkte der Charakteristiken werden eine Curve bilden, die man, analog mit §. 133, die **Wendungscurve** der developpablen Fläche nennt, und zu welcher die Charakteristiken die auf einander folgenden Tangenten sind.

Man sieht aus dem Gesagten, daß man die developpablen Flächen auch als solche betrachten kann, die durch die Bewegung einer Geraden entstehen, die immer Tangente einer Curve von doppelter Krümmung ist.

Seyen also $x = fz$ und $y = Fz$ die Gleichungen einer Curve. Betrachtet man auf ihr einen Punkt, dessen Ordinate $z = \omega$ ist, so werden die beyden andern Coordinaten dieses Punktes $x = f\omega$ und $y = F\omega$ seyn. — Sey ferner

$$z = Ax + By + C$$

die Gleichung einer Ebene. Soll diese Ebene durch den Punkt $z = a$ jener Curve gehen und auf dieser Curve senkrecht stehen, so ist durch diese zwey Bedingungen die Lage der Ebene vollkommen bestimmt, also sind auch die Größen A, B, C bestimmt, und man sieht, daß diese Größen mit dem Werthe von ω sich zugleich ändern werden, daß sie also Funktionen von ω seyn müssen, so daß man daher hat

$$z = x\varphi\omega + y\psi\omega + \omega \quad . \quad . \quad . \quad (A).$$

Dieß ist aber dieselbe Gleichung, die wir schon oben (§. 113, II) behandelt haben. Wir haben aus ihr a. a. O. die folgenden vier Gleichungen durch Differentiation der Größen x, y und z abgeleitet:

$$p = fq \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a),$$
$$p = \varphi(z - px - qy) \quad . \quad . \quad . \quad (b),$$
$$q = \psi(z - px - qy) \quad . \quad . \quad . \quad (c),$$
$$\text{und} \quad s^2 = rt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d),$$

wenn man die Bedeutung der Größen p, q, r, s und t nach §. 114 beybehält.

Jede der drey ersten Differentialgleichungen (a), (b) oder (c), die nur mehr eine willkürliche Funktion enthalten, ist die gesuchte Gleichung der developpablen Fläche, und eben so ist auch die zweyte Differentialgleichung (d), die keine weiter willkürliche Funktion, aber dafür partielle Differential-Coefficienten der zweyten Ordnung enthält, eine eben so allgemeine Gleichung der developpablen Fläche. Diese letzte Gleichung (d) wurde auch schon oben (§. 129, 130) aus den cylindrischen und conischen Flächen abgeleitet, wenn man die Gleichungen der letzteren durch Differentiation von den sie particularisirenden Größen a und b unabhängig macht.

I. Die vorhergehenden Ausdrücke sind durch Differentiation der Gleichung (A) in Beziehung auf die veränderlichen Größen xyz entstanden. Allein dieselbe Gleichung (A) läßt sich auch in Beziehung auf die ebenfalls veränderliche Größe ω auf eine ähnliche Weise behandeln. — Gibt man nämlich dieser Größe ω nach und nach alle möglichen Werthe, so erhält man die Folge aller auf die gegebene Curve senkrechten Ebenen, deren je zwey nächste sich in einer geraden Linie, der Charakteristik, schneiden. Differentiirt man also die Gleichung (A) in Beziehung auf ω, so erhält man

$$x\varphi'\omega + y\psi'\omega + 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (B),$$

und die zwey Gleichungen (A) und (B), zusammen genommen, sind die der Charakteristik. Da aber die Gleichung (A) die einer Ebene überhaupt, und da die Gleichung (B) die einer andern auf xy senkrechten Ebene ist (Einl. §. 8), so ist die Charakteristik eine gerade Linie, wie zuvor.

Eliminirt man aber aus den beyden Gleichungen (A), (B) die jede einzelne Charakteristik particularisirende Größe ω, so wird das Resultat dieser Elimination die Aufeinanderfolge dieser verschiedenen Charakteristiken, d. h. die Gleichung der developpirten Ebene ausdrücken.

Differentiirt man die Gleichung (B) wieder in Beziehung auf ω, so erhält man

$$x\varphi''\omega + y\psi''\omega = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (C),$$

und diese Gleichung wird für die nächstfolgende Charakteristik gehören, wie (B) für die zunächst vorhergehende gehört. Beyde zusammen genommen, werden daher für den Durchschnittspunkt dieser zwey nächsten Charakteristiken gehören, d. h. sie werden einen Punkt der Wendungscurve anzeigen. Eliminirt man daher aus den drey Gleichungen (A), (B), (C) die diesen Punkt der Wendungscurve particularisirende Größe ω, so erhält man zwey Gleichungen, die von ω unabhängig sind, und daher allen Punkten der Wendungscurve angehören.

Die Elimination der Größe ω aus den beyden Gleichungen (A), (B) gibt daher die gesuchte Gleichung der developpablen Fläche in endlichen Ausdrücken, und die Elimination derselben Größe ω aus den drey Gleichungen (A), (B), (C) gibt die zwey Gleichungen der Wendungscurve der developpablen Fläche.

II. Betrachtet man aber, nach dem Vorhergehenden, die developpablen Flächen als solche, die durch die Bewegung einer Geraden entstehen, welche immer Tangente einer Curve von doppelter Krümmung ist, so seyen wieder

$$y = fz \quad \text{und} \quad y = Fz$$

die Gleichungen dieser Curve. Wählt man in ihr einen Punkt, dessen Coordinate $z = \omega$ ist, so hat man für diesen Punkt

$$x = f\omega \quad \text{und} \quad y = F\omega;$$

und wenn man diesen Punkt der Curve als den Berührungspunkt der Tangente betrachtet, so hat man für die Gleichungen dieser Tangente (§. 125):

$$x - f\omega = (z - \omega) \cdot f'\omega,$$
$$y - F\omega = (z - \omega) \cdot F'\omega,$$

und die Elimination von ω aus diesen beyden Gleichungen wird die allgemeine Gleichung der developpablen Fläche seyn. In der That, differentiirt man die erste Gleichung in Beziehung auf x, z und die zweyte in Beziehung auf y, z, so erhält man

$$1 = p \cdot f'\omega \quad \text{und} \quad 1 = q \cdot F'\omega,$$

woraus wieder folgt

$$p = fq, \text{ wie zuvor.}$$

§. 135. (**Ueber die Differentiation der constanten Größen einer gegebenen Gleichung.**) Die Methode, eine gegebene Gleichung zwischen x, y und einer constanten Größe in Beziehung auf diese Constante zu differentiiren, und dann aus den so erhaltenen zwey Gleichungen diese Constante zu eliminiren, ein Verfahren, dessen wir uns zur Auffindung der einhüllenden Flächen (§. 133) bedient haben, läßt sich auch noch bey vielen andern Problemen vortheilhaft anwenden. Wir wollen, zum Schlusse dieses Abschnittes, nur einige derselben näher anzeigen.

I. Eine Gerade bewege sich so, daß die Summe ihrer Entfernungen vom Anfangspunkte der Coordinaten, in der Axe der x und y gezählt, immer gleich einer constanten Größe c sey. Um die Curve zu finden, welche durch die auf einander folgenden Durchschnittspunkte dieser Geraden mit ihrer nächstliegenden entsteht, oder welche diese Gerade in allen ihren Lagen berührt, sey a die Entfernung der Geraden vom Anfange in der Richtung der Axe der x, und b in jener der y, so hat man, wie man leicht sieht,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1;$$

und da nach der Bedingung der Aufgabe $a + b = c$ seyn soll, so ist auch die Gleichung dieser Geraden

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{c - a} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad \text{(I)}.$$

Das Differential dieser Gleichung in Beziehung auf a gibt aber

$$a = \tfrac{1}{2}(c + x - y),$$

und wenn man diesen Werth von a in der Gleichung (I) substituirt, so erhält man

$$(y - x)^2 - 2c(x + y) + c^2 = 0,$$

die Gleichung der gesuchten Curve, die also eine Parabel ist.

Soll sich aber die Gerade so bewegen, daß ihr senkrechter Abstand von dem Anfange der Coordinaten immer gleich einer constanten Größe R ist, so hat man, wenn α den Winkel der Geraden mit der Axe der x bezeichnet, für die Gleichung dieser Geraden

$$x \sin.\alpha + y \cos.\alpha = R.$$

Das Differential dieses Ausdrucks in Beziehung auf α gibt $\text{tang.}\,\alpha = \frac{x}{y}$, und wenn man diesen Werth von α in der vorhergehenden Gleichung substituirt, so erhält man

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

die Gleichung des Kreises, dessen Halbmesser R ist.

Wenn sich endlich zwey Gerade, deren Gleichungen

$$y = ax + b \quad \text{und} \quad y = a'x + b'$$

sind, so bewegen, daß sie sich immer unter demselben Winkel m schneiden, so hat man

$$\text{tang.}\,m = \frac{a' - a}{1 + a'a};$$

und wenn man in diesem Ausdrucke für a und a' ihre Werthe $\frac{y - b}{x}$ und $\frac{y - b'}{x}$ substituirt, so erhält man für die Gleichung der Curve, in welcher die auf einander folgenden Durchschnittspunkte der beyden Geraden liegen:

$$x^2 + (y-b)(y-b') - x(b-b') \text{ cotang. } \omega = 0,$$

oder einen Kreis, dessen Halbmesser gleich $\frac{1}{2}\left(\frac{b-b'}{\sin. m}\right)$ ist.

II. Sey mMm' (Fig. 45) eine gegebene Curve, deren Coordinaten $AP = x'$ und $PM = y'$, und C ein fixer Punkt, dessen Coordinaten $AB = \alpha$, $BC = \beta$ sind. Man ziehe CM und durch den Punkt M die Gerade MSE so, daß die Normale MR der gegebenen Curve den Winkel CMS halbirt, oder daß $CMR = RMS$ ist. Thut man dasselbe für alle nächstfolgenden Punkte M der gegebenen Curve, so werden die so entstehenden Geraden MS sich je zwey in einem Punkte schneiden, und die Folge aller dieser Durchschnittspunkte S wird eine andere Curve sSs' bilden, die man die Brennlinie (Catacaustik) der gegebenen Curven mMm' nennt, weil in der That bey der Reflexion des Lichtes von einem Spiegel mMm' der einfallende Strahl CM mit der Normale MR denselben Winkel, wie der zurückgeworfene Strahl MS, bildet.

Dieß vorausgesetzt, wollen wir die Gleichung der Brennlinie zwischen den rechtwinkligen Coordinaten $AT = x$ und $TS = y$ suchen.

Die Gleichung der Geraden CM ist (Einl. §. 3, IV.):

$$y - y' = \frac{(\beta - y')}{\alpha - x'}(x - x').$$

Wird daher der Winkel $MDR = \theta$ gesetzt, so ist $\text{tang. } \theta = \frac{\beta - y'}{\alpha - x'}$. Allein es ist auch

$$\text{tang. } DRM = \frac{dx'}{dy'} \text{ und}$$

$$\text{tang. } DMR = \text{tang. } (180 - D - R) = -\text{tang. } (D + R) \text{ oder}$$

$$\text{tang. } DMR = \frac{1 + \theta\frac{dy'}{dx'}}{\theta - \frac{dy'}{dx'}},$$

welchen Ausdruck wir der Kürze wegen durch θ' bezeichnen wollen.

Endlich ist noch

$$\text{tang. } REM = \text{tang. } (DRM - RME),$$

und da $RME = DMR$ ist:

$$\text{tang. REM} = \frac{1 - \theta' \frac{dy'}{dx'}}{\theta' + \frac{dy'}{dx'}};$$

und da die Gerade MSE zugleich die Tangente der gesuchten Curve sSs' seyn muß, so hat man für die Gleichung dieser Curve

$$y - y' = \frac{\theta' \frac{dy'}{dx'} - 1}{\theta' + \frac{dy'}{dx'}} (x - x').$$

Differentiirt man aber diese Gleichung in Beziehung auf x', und setzt der Kürze wegen $p' = \frac{dy'}{dx'}$ und $q' = \frac{dp'}{dx'}$, so erhält man

$$x = x' - \frac{(1 + p'^2)(p' + \theta')}{(1 + p'^2)\frac{d\theta'}{dx'} + q'(1 + \theta'^2)} \quad \ldots \quad \text{(II)},$$

und wenn man aus den beyden letzten Gleichungen die Größe $(x - x')$ eliminirt:

$$y = y' + \frac{(1 + p'^2)(1 - p'\theta')}{(1 + p'^2)\frac{d\theta'}{dx'} + q'(1 + \theta'^2)} \quad \ldots \quad \text{(III)}.$$

In den beyden letzten Ausdrücken kann man aber mittelst der gegebenen Gleichung der Curve mMm' zwischen x' und y' alles, was rechts von dem Gleichheitszeichen ist, auf eine Funktion der einzigen Größe x' zurückbringen. Eliminirt man dann aus den beyden letzten Gleichungen diese Größe x', so erhält man die gesuchte Gleichung in xy, welche für die Catacaustik gehört.

Ex. I. Ist die gegebene Curve eine Ellipse, deren Mittelpunkt der Anfang der Coordinaten und deren Excentricität c ist, so hat man, wenn der fixe Punkt C einer der beyden Brennpunkte der Ellipse ist, $\alpha = -c$ und $\beta = 0$, also auch $\theta = \frac{y'}{c + x'}$, und die beyden Gleichungen (II) und (III) gehen in folgende über:

$$x = + c \quad \text{und} \quad y = 0,$$

woraus folgt, daß die Brennlinie der Ellipse ein Punkt, und zwar der andere Brennpunkt ist, so daß die aus einem Brennpunkte dieser Curve ausgehenden Strahlen, nach ihrer Reflexion, sich in dem andern Brennpunkte wieder vereinigen.

Ex. II. Ist die gegebene Curve ein Kreis, dessen Gleichung $y'^2 = 2ax' - x'^2$ ist, und ist der strahlende Punkt in dem Endpunkte eines Durchmessers dieses Kreises, so ist $\alpha = \beta = 0$ und

$$\theta = \frac{y'}{x'},\quad p' = \frac{a - x'}{y'},\quad \theta' = \frac{y'}{x'},\quad q' = -\frac{a^2}{y'^3},$$

also auch

$$p' + \theta' = \frac{3a - 2x'}{y'},\quad 1 + p'^2 = \frac{a^2}{y'^2},\quad 1 + \theta^2 = \frac{2a}{x'},$$

$$\frac{d\theta'}{dx'} = -\frac{a}{x'y'}.$$

Dieß vorausgesetzt, hat man für die Gleichungen (II) und (III):

$$x = \frac{6ax' - 2x'^2}{3a} \quad \text{und} \quad y = \frac{4ay' - 2xy'}{3a}.$$

Eliminirt man aus diesen beyden Ausdrücken und aus der gegebenen Gleichung $y'^2 = 2ax' - x'^2$ die beyden Größen x' und y', so erhält man

$$y^4 + (18x^2 + 12a^2 - 36ax)\tfrac{1}{9}y^2$$
$$+ \frac{48a^2x^2 - 36ax^3 - \frac{64}{3}a^3x + 9x^4}{9} = 0,$$

oder wenn man $a = \frac{3}{2}A$ setzt:

$$y^4 + x^4 + (2x^2 + 3A^2 - 6Ax)y^2 + 12A^2x^2 - 6Ax^3 - 8A^3x = 0;$$

oder endlich, wenn man statt x die Größe $2A - x$ setzt:

$$y^4 + x^4 - (A^2 + 2Ax - 2x^2)y^2 - 2Ax^3 = 0$$

für die gesuchte Brennlinie, die also die Cardioide ist (Einl. §. 15, IV.).

Nimmt man überhaupt an, daß die Strahlen CM alle unter sich parallel und senkrecht auf die Absciſſenaxe AP auffallen, daß also der strahlende Punkt C unendlich entfernt ist, so hat man $p' = \theta'$, und die beyden oben gefundenen Gleichungen gehen in folgende einfachere über:

$$x = x' - \frac{p'}{q'} \quad \ldots\ldots \quad \text{(II')}$$

$$\text{und} \quad y = y' + \frac{1 - p'^2}{2q'} \quad \ldots \quad \text{(III')}.$$

Ex. III. Ist die gegebene Curve die Parabel $y'^2 = ax'$, so hat man

$$p' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x'}} \quad \text{und} \quad q' = -\frac{1}{4x'}\sqrt{\frac{a}{x'}},$$

also auch jene zwey Gleichungen

$$x = 3x' \quad \text{und} \quad y = \sqrt{ax'} - \left(1 - \frac{a}{4x'}\right)\frac{2x\sqrt{x'}}{\sqrt{a}},$$

woraus man, durch Elimination von x', für die Gleichung der Brennlinien erhält

$$y^2 = \frac{ax}{3}\left(\frac{3}{2} - \frac{2x}{3a}\right)^2.$$

Wenn aber die Strahlen CM parallel mit der Abscissenaxe AP einfallen, so vereinigen sie sich, nach der Reflexion, in dem Brennpunkte der Parabel, wie man aus den beyden Gleichungen (II') und (III') leicht findet.

III. Beschließen wir diesen Gegenstand noch mit folgendem interessanten Probleme.

Der Scheitel eines geradlinigen Winkels bewege sich auf der Peripherie einer Ellipse, während seine beyden Schenkel eine andere concentrische Ellipse berühren, die mit der ersten Ellipse dieselbe Lage hat. Man suche diejenige Curve, welche von der Sehne immer berührt wird, die durch die beyden Berührungspunkte der zweyten Ellipse mit den Schenkeln des Winkels geht.

Sey die Gleichung der von dem Winkel tangirten Ellipse

$$A^2x^2 + B^2y^2 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad (A),$$

und überdieß die Gleichung der sie tangirenden Geraden

$$y = Px + Q.$$

Da der Scheitel des Winkels durch einen Punkt der ersten Ellipse gehen soll, dessen Coordinaten a und b seyn mögen, so hat man auch $b = Pa + Q$, und daher für die Gleichung der letzten Geraden

$$y - b = P(x - a).$$

Da ferner diese Gerade die zweyte Ellipse berühren soll, so müssen die Werthe von $\frac{dy}{dx}$ aus der letzten Gleichung und aus der Gleichung (A) einander gleich seyn, wodurch man erhält

$$P = -\frac{A^2x}{B^2y}.$$

Demnach sind die Gleichungen der tangirenden Geraden

$$y - b + \frac{A^2x}{B^2y}(x - a) = 0 \quad \text{und}$$

$$A^2ax + B^2by = 1 \quad . \quad . \quad . \quad (B),$$

und diese letzte Gleichung ist die Gleichung der erwähnten Sehne für irgend eine Lage des Scheitels des Winkels, welche Lage durch die beyden Größen a und b particularisirt wird.

Um daher den Durchschnittspunkt dieser Sehne mit der nächstfolgenden Sehne zu erhalten, wird man die Gleichung (B) in Beziehung auf die Größen a und b differentiiren, wodurch man erhält

$$A^2 x\, da + B^2 y\, db = 0.$$

Da aber der Scheitel des Winkels, nach der Bedingung der Aufgabe, sich auf einer Ellipse bewegen soll, so sey die Gleichung dieser Ellipse

$$A'^2 a^2 + B'^2 b^2 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad (C).$$

Da nun die Werthe von $\frac{db}{da}$ aus den beyden letzten Gleichungen identisch seyn müssen, so hat man

$$A'^2 B^2 a y - A^2 B'^2 b x = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (D),$$

und die Gleichungen B, C und D sind die verlangten. Sucht man aus B und D die Werthe von x und y, so erhält man den Ort des Durchschnittspunktes von je zwey nächsten Sehnen, nämlich

$$x = \frac{A'^2 a}{A^2 (A'^2 a^2 + B'^2 b^2)} \quad \text{und} \quad y = \frac{B'^2 b}{B^2 (A'^2 a^2 + B'^2 b^2)};$$

oder nach der Gleichung C einfacher ausgedrückt:

$$x = \frac{A'^2}{A^2} \cdot a \quad \text{und} \quad y = \frac{B'^2}{B^2} \cdot b.$$

Allein diese Durchschnittspunkte hängen noch von den Werthen der Größen a und b, d. h. von der Lage des Scheitels des beweglichen Winkels ab. Will man sie also davon unabhängig machen, so wird man diese Größen a und b aus den drey Gleichungen B, C und D eliminiren, wodurch man eine Gleichung in xy erhält:

$$A'^2 B'^2 = A^4 B'^2 x^2 + A'^2 B^4 y^2,$$

welche für die gesuchte Curve gehört, zu welcher jene Sehne, in jeder ihrer Lage, Tangente ist. Die gesuchte Curve ist also, wie die letztere Gleichung zeigt, wieder eine Ellipse, die mit den beyden vorhergehenden Ellipsen concentrisch und von derselben Lage ist.

Nennt man a' und b' die halbe große und kleine Axe der ersten Ellipse, in welcher sich der Scheitel des Winkels bewegt, und sind eben so a und b dieselben Größen für die zweyte Ellipse, welche von den Schenkeln des beweglichen Winkels tangirt wird, und sind endlich a'' und b'' dieselben Größen für die dritte Ellipse, so hat man

$$aA = bB = a'A' = b'B' = 1 \quad \text{und}$$

$$a'' = \frac{A'}{A^2} = \frac{a^2}{a'},$$

$$b'' = \frac{B'}{B^2} = \frac{b^2}{b'},$$

oder die Axen der dritten Ellipse sind die dritten Proportionalzahlen zu den analogen Axen der beyden ersten Ellipsen.

Wären endlich die beyden ersten Ellipsen Kreise und $a = b = r$, so wie $a' = b' = r'$ die Halbmesser dieser Kreise, so wäre auch die gesuchte Curve ein den beyden vorhergehenden concentrischer Kreis, dessen Halbmesser $\frac{r^2}{r'}$ ist.

Wir werden in der nun folgenden zweyten Abtheilung dieses Werkes auf die Differentiation der Gleichungen in Beziehung auf die in ihnen enthaltenen constanten Größen wieder zurück kommen, da diese Betrachtungen einen der wichtigsten Zweige der neueren Analysis bilden.