Integralrechnung.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

XIX.

Einfachste Integralformeln.

§. 136. (**Begriff der Integralrechnung.**) So wie wir im Vorhergehenden das Differential von irgend einem gegebenen endlichen Ausdruck, z. B. von x^m, durch die Vorsetzung des Zeichens d angezeigt haben, wodurch wir $d \,.\, x^m = m x^{m-1} dx$ erhielten, eben so wollen wir auch, wenn umgekehrt das Differential $m x^{m-1} dx$ gegeben und der ursprüngliche endliche Ausdruck zu suchen ist, durch dessen Differentiation dieses Differential $m x^{m-1} dx$ erhalten wird, diesen ursprünglichen Ausdruck durch die Vorsetzung des Zeichens $\int$ anzeigen, so daß man also hat

$$\int m x^{m-1} dx = x^m.$$

Man nennt aber diesen ursprünglichen endlichen Ausdruck eines Differentials das Integral dieses Differentials. Demnach ist x^m das Integral von $m x^{m-1} dx$, da das Differential der ersten Größe gleich der zweyten ist.

Dasselbe Integral läßt sich auch so ausdrücken

$$m \int x^{m-1} dx = x^m,$$

da der unveränderliche Faktor m auf die Differentiation, also auch auf die Integration keinen Einfluß hat. Eben so können wir schon jetzt bemerken, daß man jedem Integral auch irgend eine constante Größe C hinzufügen kann, da diese durch die Differentiation wieder verschwindet, so daß wir daher in unserem gewählten Beyspiele haben werden

$$m \int x^{m-1} dx = x^m + C.$$

Der eigentliche Werth dieser Constante wird leicht gefunden, wenn man den Werth des Integrals für irgend einen besonderen Fall kennt. Weiß man z. B., daß das Integral gleich a wird, wenn $x = 0$ ist, so hat man, wenn m eine positive Zahl ist

$$a = 0 + C \quad \text{oder} \quad C = a.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wird aber das Integral gleich B, wenn $x = A$ ist, so hat man

$$B = A^m + C \quad \text{oder} \quad C = B - A^m.$$

Eben so haben wir oben für die natürlichen Logarithmen gefunden $d \,.\, \log. x = \frac{dx}{x}$, also ist auch $\int \frac{dx}{x} = \log. x + C$, oder, was dasselbe ist, $\int \frac{dx}{x} = \log. x + \log. C = \log. Cx$. Ist hier für einen besondern Fall das Integral gleich $\log. a$, wenn $x = b$ ist, so hat man $a = Cb$ oder $C = \frac{a}{b}$, also auch für das gesuchte Integral

$$\int \frac{dx}{x} = \log. \frac{ax}{b}.$$

Diese Constante wollen wir in der Folge bey jedem Integral der Kürze wegen als hinzugesetzt annehmen.

I. Dieß vorausgesetzt, erhalten wir sofort eine Anzahl einfacher Integrale durch unmittelbare Umkehrung der in dem Vorhergehenden aufgestellten Differentialausdrücke. So geben die im §. 35 gesammelten Formeln:

$$\int x^m dx = \frac{x^{m-1}}{m+1},$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log. \text{nat}\, x,$$

$$\int dx \sin. x = -\cos. x,$$

$$\int dx \cos. x = \sin. x,$$

$$\int \frac{dx}{\cos.^2 x} = \text{tang.}\, x,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log. \text{nat.}\, a},$$

$$\int e^x dx = e^x, \quad \text{wo } \log. \text{nat.}\, e = 1,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = \frac{1}{b} \text{arc.} \sin. \frac{bx}{a} = -\frac{1}{b} \text{arc.} \cos. \frac{bx}{a},$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{ab} \text{arc. tang.} \frac{bx}{a} = -\frac{1}{ab} \text{arc. cotang.} \frac{bx}{a},$$

aus welchen sich ohne Mühe noch mehrere andere Ausdrücke zusammen setzen lassen. So ist z. B.

$$\frac{1}{1 - x^2} = \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2(1-x)},$$

also ist auch

$$\int\frac{dx}{1-x^2}=\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x}+\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{1-x},$$

und daher nach dem Vorhergehenden

$$\int\frac{dx}{1-x^2}=\tfrac{1}{2}\log.(1+x)-\tfrac{1}{2}\log.(1-x)=\tfrac{1}{2}\log.\frac{1+x}{1-x}\text{ u. f.}$$

II. Eben so hat man, wie schon für sich klar ist,

$$\int\frac{dx}{a+bx}=\frac{1}{b}\log.(a+bx),$$

$$\int(a+bx)^m dx=\frac{1}{(m+1)\,b}(a+bx)^{m+1},$$

$$\int\frac{dx}{(a+bx)^m}=-\frac{1}{(m-1)\,b\,(a+bx)^{m-1}},$$

$$\int(a+bx^n)^m\,.\,x^{n-1}dx=\frac{(a+bx^n)^{m+1}}{nb\,(m+1)},$$

In diesen Ausdrücken ist die veränderliche Größe außer den Klammern das vollständige Differential derjenigen in den Klammern. So ist in dem letzten Beyspiele $x^{n-1}dx$ bis auf die constante Größe das Differential von x^n. Man vereinfacht diese Ausdrücke, wenn man $a+bx$ oder $a+bx^2$ gleich einer einfachen veränderlichen Größe z setzt.

§. 137. (**Anwendung auf Binomialformeln.**) Setzt man in den beyden vorhergehenden Gleichungen

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\text{arc. sin. }x\quad\text{und}\quad\int\frac{dx}{1+x^2}=\text{arc. tang. }x$$

statt x die Größe $x\sqrt{-1}$, so erhält man

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{-1}}\,.\,\text{arc. sin. }x\sqrt{-1}$$

und

$$\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{\sqrt{-1}}\,.\,\text{arc. tang. }x\sqrt{-1}.$$

Es ist aber (§. 68)

$$\alpha=-\frac{1}{\sqrt{-1}}\log.(\cos.\alpha-\sqrt{-1}\,.\,\sin.\alpha).$$

Setzt man also $x\sqrt{-1}=\sin.\alpha$, so ist auch $\sqrt{1+x^2}=\cos.\alpha$, und daher

$$\text{arc. sin. }x\sqrt{-1}=-\frac{1}{\sqrt{-1}}\log.(x+\sqrt{1+x^2}),$$

also auch die erste jener Gleichungen

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log.\,(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Eben so war

$$\alpha = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log. \frac{1 + \sqrt{-1}\,.\,\text{tang.}\,\alpha}{1 - \sqrt{-1}\,.\,\text{tang.}\,\alpha},$$

also auch, wenn $\text{tang.}\,\alpha = -x\sqrt{-1}$ ist,

$$\text{arc. tang.}\,x\sqrt{-1} = -\frac{1}{2\sqrt{-1}} \log. \frac{1+x}{1-x},$$

und daher die zweyte jener Gleichungen

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \tfrac{1}{2} \log. \frac{1+x}{1-x},$$

wie im §. 136, I.

I. Wir haben sonach die Integrale

$$\int \frac{dx}{1+x^2},\quad \int \frac{dx}{1-x^2},\quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{und} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Setzt man in ihnen $x\sqrt{\frac{b}{a}}$ statt x, so erhält man folgende vier Ausdrücke,

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\,\text{arc. tang.}\,x\sqrt{\frac{b}{a}},$$

$$\int \frac{dx}{a-bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \log. \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \log. \left[x\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{1 + \frac{bx^2}{a}}\right],$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\,\text{arc. sin.}\,x\sqrt{\frac{b}{a}},$$

und statt der dritten dieser Gleichungen kann man auch nehmen

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \log. [x\sqrt{b} + \sqrt{a+bx^2}] - \frac{1}{\sqrt{b}} \log. \sqrt{a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}} \log. [x\sqrt{b} + \sqrt{a+bx^2}],$$

da die Constante $\frac{1}{\sqrt{b}} \log. \sqrt{a}$, nach dem Vorhergehenden, ohnehin besonders bestimmt werden muß.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 138. (Anwendung auf Trinomialformeln.) Setzt man in den vorhergehenden vier Gleichungen $x + c$ statt x, und schreibt man, nach der Entwickelung dieses Ausdruckes,

statt a die Größe $\frac{4ac - b^2}{4c}$,

» b » » c,

» c » » $\frac{b}{2c}$,

so erhält man

$$\int \frac{dx}{a + bx + cx^2} = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \text{ arc. tang. } \frac{b + 2cx}{\sqrt{4ac - b^2}},$$

$$\int \frac{dx}{a + bx + cx^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \log. \frac{b + 2cx - \sqrt{b^2 - 4ac}}{b + 2cx + \sqrt{b^2 - 4ac}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \log. \left[b + 2cx + 2\sqrt{c(a + bx + cx^2)}\right],$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \text{ . arc. sin. } \frac{2cx - b}{\sqrt{4ac + b^2}}.$$

Von den beyden ersten dieser Formeln wird man die erste oder die zweyte nehmen, wenn $4ac - b^2$ positiv oder negativ ist, um imaginäre Ausdrücke zu vermeiden. Ist aber $4ac = b^2$, so wird für diesen besondern Fall $a + bx + cx^2 = (\sqrt{a} + x\sqrt{c})^2$, und daher das algebraische Integral

$$\int \frac{dx}{(\sqrt{a} + x\sqrt{c})^2} = -\frac{1}{cx + \sqrt{ac}}.$$

Setzt man aber in den beyden letzten dieser vier Formeln $-\frac{1}{x}$ statt x, also auch $\frac{dx}{x^2}$ statt dx, und verwechselt man die Buchstaben a, b, c mit c, $-b$, a, so erhält man die Formeln

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \log. \frac{2\sqrt{a} \, . \, \sqrt{a + bx + cx^2} - 2a - bx}{x},$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{-a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \text{ arc. sin. } \frac{bx - 2a}{x\sqrt{4ac + b^2}}.$$

Ist in diesen Ausdrücken $a = 0$, so hat man das algebraische Integral

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{bx + cx^2}} = -\frac{2\sqrt{bx + cx^2}}{bx}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

I. Ist der Kürze wegen $X = a + bx + cx^2$, so hat man überhaupt, wie man sich sogleich durch Differentiation überzeugen kann,

$$\int\frac{dx}{xX} = \frac{1}{2a}\log.\frac{x^2}{X} - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{X}$$

und

$$\int\frac{x\,dx}{X} = \frac{1}{2c}\log.X - \frac{b}{2c}\int\frac{dx}{X},$$

so daß man also $\int\frac{dx}{xX}$ und $\int\frac{x\,dx}{X}$ findet, da man $\int\frac{dx}{X}$ bereits aus dem Vorhergehenden kennt.

II. Eben so ist auch

$$\int\frac{dx}{X^n} = \frac{b + 2cx}{(n-1)(4ac-b^2)X^{n-1}} + \frac{2(2n-3)c}{(n-1)(4ac-b^2)}\int\frac{dx}{X^{n-1}}$$

und

$$\int\frac{x\,dx}{X^n} = \frac{-1}{2(n-1)cX^{n-1}} - \frac{b}{2c}\int\frac{dx}{X^{n-1}},$$

und durch diese beyden Ausdrücke wird man, da man bereits $\int\frac{dx}{X}$ kennt, auch $\int\frac{dx}{X^2}$ und $\int\frac{x\,dx}{X^2}$ finden, wenn man $n=2$ setzt, und dann eben so $\int\frac{dx}{X^3}$ und $\int\frac{x\,dx}{X^3}$, wenn man $n=3$ setzt u. s. w. Auf diese Weise erhält man z. B.

$$\int\frac{(A + Bx)\,dx}{X} = \frac{B}{2c}\log.X + \frac{(2Ac - Bb)}{2c}\int\frac{dx}{X},$$

$$\int\frac{(A + Bx)\,dx}{X^n} = \frac{2Ac(b + 2cx) - B(4ac - b^2)}{2(n-1)c(4ac - b^2)X^{n-1}}$$
$$+ \left[\frac{2A(2n-3)c}{(n-1)(4ac - b^2)} - \frac{Bb}{2c}\right].\int\frac{dx}{X^{n-1}}.$$

III. Das vorzüglichste Geschäft der Integralrechnung, so fern sie sich auf Differential-Ausdrücke einer einzigen veränderlichen Größe bezieht, besteht, wie man schon aus dem bisher Gesagten sieht, in der Zurückführung jedes solchen gegebenen Ausdruckes auf jene ursprünglichen, die schon unmittelbar aus der Differentialrechnung durch bloße Reversion folgen, oder überhaupt auf der Reduktion des gegebenen Ausdruckes auf einfachere, wie sie im §. 136, I. zusammen gestellt worden sind.

Diesen Zweck erreicht man im Allgemeinen auf drey verschiedenen Wegen. 1. Durch Zerlegung des gegebenen Differentials, in

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Partialbrüche, wie wir sogleich im Kap. XX sehen werden. II. Durch Einführung anderer veränderlichen Größen, also durch Substitution, wie Kap. XXI u. f. Endlich III. durch Anwendung gewisser Formeln involutorischer Art, mit deren Hülfe ein vorgelegtes Integral unmittelbar auf ein einfacheres, und dieses wieder auf ein einfacheres u. f. gebracht wird, wovon wir im Kap. XXII. u. f. mehrere Beyspiele finden werden. Diese letzten Mittel, die fruchtbarsten von allen, beziehen sich beynahe durchaus auf die sogenannte theilweise Integration. Ist nämlich u sowohl als ν irgend eine Funktion von x, so hat man (§. 27)

$$d \,.\, u\nu = u d\nu + \nu du,$$

also ist auch, wenn man von jedem Gliede dieses Ausdruckes das Integral nimmt,

$$\int u d\nu = u\nu - \int \nu du.$$

Ist daher von den beyden Integralen $\int u d\nu$ oder $\int \nu du$ das eine bereits aus dem Vorhergehenden bekannt, so ist durch diese Gleichung sofort auch das andere gegeben.

Um dieß durch ein Beyspiel zu erläutern, sey das Integral $y = \int \frac{x^2 dx}{(1-x^2)^2}$ zu suchen.

Nimmt man die Größen u und ν so, daß man hat $u = \frac{1}{2}x$ und $d\nu = \frac{2xdx}{(1-x^2)^2}$, also auch $\nu = \frac{1}{1-x^2}$, so gibt die vorhergehende Gleichung

$$y = \frac{\frac{1}{2}x}{1-x^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-x^2}.$$

Allein das Integral $\int \frac{dx}{1-x^2}$ haben wir schon oben gleich $\frac{1}{2} \log. \frac{1+x}{1-x}$ gefunden, also ist auch das gesuchte Integral

$$y = \int \frac{x^2 dx}{(1-x^2)^2} = \frac{\frac{1}{2}x}{1-x^2} - \frac{1}{4} \log. \frac{1+x}{1-x}.$$

XX.
Integration der rationellen Funktionen.

§. 139. (Zerlegung gebrochener rationaler Funktionen in ihre binomischen Partialbrüche.) Wenn in dem Integrale $\int X dx$ die Größe X eine ganze oder auch eine gebrochene rationale Funktion von x ist, so läßt sich ein solches Integral immer auf die Form

$$\int (a+bx)^m dx \quad \text{oder} \quad \int \frac{dx}{(a+bx)^m}$$

zurückführen, und da diese Integrale schon oben (§. 136, I) gegeben sind, so kann auch die Integration der rationellen Funktionen als gegeben angesehen werden.

Sey nämlich $y = \int \frac{X}{X'} dx$ und X sowohl als auch X′ eine ganze rationelle Funktion von x. Man kann diesen Bruch $\frac{X}{X'}$ immer so annehmen, daß die höchste Potenz von x im Zähler kleiner ist, als im Nenner, da, wenn dieses nicht statt haben sollte, die Division von X durch X′ sofort einen anderen Bruch geben wird, welcher die angeführte Eigenschaft hat. Wäre z. B.

$$y = \int \frac{x^3+1}{x^2-1} dx$$

gegeben, so erhält man durch Division

$$y = \int x dx + \int \frac{x+1}{x^2-1} dx,$$

wo der erste Theil $\int x dx = \frac{1}{2} x^2$ sich nach §. 136 integriren läßt.

Einen solchen Bruch $\frac{X}{X'}$, also vorausgesetzt, zerlege man den Nenner desselben in seine einfachen Faktoren

$$a + bx, \quad a' + b'x, \quad a'' + b''x \ldots$$

und unterscheide dann folgende Fälle.

I. Wenn alle diese Faktoren unter sich ungleich sind, so setze man

$$\frac{X}{X'} = \frac{A}{a+bx} + \frac{A'}{a'+b'x} + \frac{A''}{a''+b''x} + \ldots,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wo A, A', A'' ... constante Größen sind, die sich durch Vergleichung der beyden Formen des Bruches auf die bekannte Weise bestimmen lassen.

Ex. Sey $y = \int \frac{x^2 + 1}{x^3 - 7x - 6} dx$ gegeben, so hat man

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 - 7x - 6} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3},$$

woraus man sofort findet $A = -\frac{1}{2}$, $B = 1$ und $C = \frac{1}{2}$, so daß man daher hat

$$y = -\tfrac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{x+2} + \tfrac{1}{2}\int \frac{dx}{x-3}$$

oder

$$y = \log.(x+2) \cdot \sqrt{\frac{x-3}{x+1}}.$$

II. Wenn der Nenner X' des Bruches $\frac{X}{X'}$ mehrere z. B. n gleiche Faktoren von der Form $a + bx$ und überdieß die unter sich ungleichen Faktoren hat,

$$\alpha + \beta x,\ \alpha' + \beta' x,\ \alpha'' + \beta'' x \ldots,$$

so wird man annehmen

$$\frac{X}{X'} = \frac{A}{(a+bx)^n} + \frac{A'}{(a+bx)^{n-1}} + \frac{A''}{(a+bx)^{n-2}} + \ldots + \frac{A^{n-1}}{a+bx}$$
$$+ \frac{B}{\alpha + \beta x} + \frac{B'}{\alpha' + \beta' x} + \frac{B''}{\alpha'' + \beta'' x} +,$$

wo dann die Größen A, A'... und B, B'... wie zuvor bestimmt werden.

Ex. Sey $y = \int \frac{dx}{x^3 + 2x^2 + x}$, so hat man

$$\frac{1}{x^3 + 2x^2 + x} + \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x},$$

woraus folgt $A = B = -1$ und $C = 1$, also ist auch

$$y = -\int \frac{dx}{(1+x)^2} - \int \frac{dx}{1+x} + \int \frac{dx}{x}$$

oder

$$y = \frac{1}{1+x} + \log.\frac{x}{1+x}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 140. (Zerlegung gebrochener rationeller Funktionen in trinomische Partialbrüche.) Unter den einfachen binomischen Faktoren, die wir im §. 139 betrachtet haben, wird es öfter imaginäre Größen geben. Diese zu vermeiden, wird man daher je zwey der zusammen gehörenden binomischen Faktoren dieser Art durch einen einzelnen trinomischen Faktor darstellen, der, wie bekannt, immer eine reelle Form hat.

Hat also der Nenner X' des Bruches $\frac{X}{X'}$ die unter sich ungleichen trinomischen Faktoren

$$a + bx + cx^2, \quad a' + b'x + c'x^2 + \ldots,$$

so wird man annehmen

$$\frac{X}{X'} = \frac{A + Bx}{a + bx + cx^2} + \frac{A' + B'x}{a' + b'x + c'x^2} + \ldots$$

Hat aber der Nenner dieses Bruches mehrere z. B. n gleiche Faktoren der Form $a + bx + cx^2$, und überdieß die unter sich ungleichen Faktoren

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2, \quad a' + \beta' x + \gamma' x^2 + \ldots,$$

so wird man annehmen

$$\frac{X}{X'} = \frac{A + Bx}{(a + bx + cx^2)^n} + \frac{A' + B'x}{(a + bx + cx^2)^{n-1}} + \frac{A'' + B''x}{(a + bx + cx^2)^{n-2}} + \ldots$$
$$+ \frac{A^{n-1} + B^{n-1}x}{a + bx + cx^2} + \frac{C + Dx}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} + \frac{C' + D'x}{\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2} + \ldots$$

und durch dieses Verfahren wird man das Integral $y = \int \frac{X}{X'} dx$ auf die Form bringen

$$\int \frac{(A + Bx)\,dx}{a + bx + cx^2} \quad \text{oder} \quad \int \frac{(A + Bx)\,dx}{(a + bx + cx^2)^m},$$

die wir schon oben (§. 138, II) gegeben haben.

Ex. Ist $y = \int \frac{(2 - x^2)\,dx}{x^3 - 5x^2 + 9x - 5}$ gegeben, so hat man

$$\frac{2 - x^2}{x^3 - 5x^2 + 9x - 5} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B + Cx}{x^2 - 4x + 5}.$$

Dieß gibt $A = B = \frac{1}{2}$ und $C = -\frac{3}{2}$, also ist auch

$$y = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x - 1} + \frac{1}{2}\int \frac{(1 - 3x)\,dx}{x^2 - 4x + 5} \quad \text{oder}$$

$$y = \frac{1}{2}\log.(x - 1) - \frac{3}{2}\log.\sqrt{x^2 - 4x + 5} - \frac{5}{2}\,\text{arc. tang.}\,(x - 2).$$

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

XXI.

Reduktion der irrationalen Binomialformeln auf rationale.

---

§. 141. **(Wenn X blosz eine Art von irrationalen Binom enthält.)** Wenn in dem Ausdrucke $dy = X dx$ die Größe X bloß die irrationalen Größen

$$\left(\frac{a+bx}{f+gx}\right)^{\frac{1}{m}},\ \left(\frac{a+bx}{f+gx}\right)^{\frac{1}{n}},\ \left(\frac{a+bx}{f+gx}\right)^{\frac{1}{p}} \text{ u. f.}$$

enthält, so setze man

$$\frac{a+bx}{f+gx} = z^{mnp} \ldots,$$

wodurch man, wenn $m n p \ldots = t$ ist, erhält

$$dx = \frac{t\,(bf-ag)\,.\,z^{t-1}\,dz}{(b-gz^t)^2},$$

so daß also dy rational wird und nach Kap. XX integrirt werden kann.

§. 142. **(Die Grösze $x^m dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ rational machen.)** Der Ausdruck

$$dy = x^m dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$$

läßt sich in folgenden Fällen rational machen.

I. Wenn $\frac{p}{q}$ eine ganze Zahl bezeichnet, wie für sich klar ist.

II. Wenn $\frac{m+1}{n}$ eine ganze Zahl ist. Denn setzt man

$$a + bx^n = z^q,$$

so wird

$$dy = \frac{1}{nb}\,q\,z^{p+q-1}\,.\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} dz.$$

Ex Ist $dy = x^3 dx\,\sqrt{1-x^2}$, so findet man

$$y = \tfrac{1}{5}\,(1-x^2)^{\frac{5}{2}} - \tfrac{1}{3}\,(1-x)^{\frac{3}{2}}.$$

III. Wenn $\frac{m+1}{n} + \frac{p}{q}$ eine ganze Zahl ist. Denn der gegebene Ausdruck von dy kann auch so geschrieben werden

$$dy = x^{m+\frac{np}{q}} (b + ax^{-n})^{\frac{p}{q}} dx,$$

und dieser ist, nach II, rational, wenn $\dfrac{m + \frac{np}{n} + 1}{n} = \frac{m+1}{n} + \frac{p}{q}$ eine ganze Zahl ist.

Ex. Ist $dy = \frac{dx}{x^3(1+x^2)^2}$, so findet man

$$y = \frac{1}{2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} - \tfrac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \log.\left(1+\frac{1}{x^2}\right).$$

§. 143. **(Andere Grölzen rational machen.)** Wenn in dem Ausdrucke

$$dy = X \,.\, dx$$

die Größe X bloß die irrationale Größe $\sqrt{a + bx + cx^2}$ enthält, so kann man dy rational machen, wenn man annimmt

$$\sqrt{a + bx + cx^2} = \sqrt{a} + xz$$

oder

$$\sqrt{a + bx + cx^2} = x\sqrt{c} + z.$$

I. Um auch den transcendenten Ausdruck

$$dy = \frac{dx}{a + b\cos. x}$$

auf eine rationale Form zu bringen, sey $\cos. x = 1 - z \sin. x$, so ist

$$\sin. x = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos. x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \text{ und daher } dx = \frac{2dz}{1+z^2}.$$

Wir haben demnach

$$dy = \frac{2dz}{a + b + (a-b)z^2},$$

und dieser Ausdruck läßt sich nach den in §. 137 angeführten Formeln integriren. Man findet

für $a > b$ $\quad y = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \text{ arc. cos. } \frac{b + a\cos. x}{a + b\cos. x},$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

für $a < b$ $\quad y = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \log. \frac{b + a \cos. x + \sin. x . \sqrt{b^2 - a^2}}{a + b \cos. x}$,

für $a = b$ $\quad y = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{1 + \cos. x} = \frac{1}{a} \text{ tang. } \frac{1}{2} x$.

Daraus folgt auch sofort das Integral $\int \frac{dx}{(a + b \cos. x)^m}$, wenn m eine ganze positive Zahl ist.

XXII.

Reduktion algebraischer Ausdrücke auf einfachere Formen.

§. 144. (**Reduktion der Größe $x^m dx (a + bx^n)^p$.**) Sey der Ausdruck gegeben

$$dy = x^m dx (a + bx^n)^p,$$

wo m, n und p willkürliche ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahlen bezeichnen.

Setzen wir der Kürze wegen

$$a + bx^n = X \quad \text{und} \quad x^{m+1} . X^p = U,$$

so ist

$$dU = (m + 1) x^m . X^p dx + p x^{m+1} . X^{p-1} dX$$

oder

$$dU = (m + 1) x^m . X^p dx + npb x^{m+n} . X^{p-1} dx \ldots (1).$$

Ferner ist

$$X^p = X^{p-1} . (a + bx^n),$$

also auch, wenn man diesen Werth von X^p in (1) substituirt,

$$dU = (m + 1) a x^m . X^{p-1} dx$$
$$+ (m + 1 + np) b x^{m+n} . X^{p-1} dx \ldots (2).$$

Endlich ist $bx^n = X - a$, also auch die Gleichung (1)

$$dU = (m + 1 + np) x^m . X^p dx - npa x^m . X^{p-1} dx \ldots (3).$$

Integrirt man die einzelnen Glieder dieser Gleichungen (1, 2, 3) nach der Ordnung, so hat man aus (1)

$$\int x^m X^p dx = \frac{x^{m+1} . X^p}{m+1} - \frac{npb}{m+1} \int x^{m+n} . X^{p-1} dx,$$

$$\int x^{m+n} X^{p-1} dx = \frac{x^{m+1} . X^p}{npb} - \frac{m+1}{npb} \int x^m X^p dx,$$

und aus (2)

$$\int x^m X^{p-1} dx = \frac{x^{m+1} . X^p}{(m+1) a} - \frac{(m+1+n) b}{(m+1) a} \int x^{m+n} . X^{p-1} dx,$$

$$\int x^{m+n} . X^{p-1} dx = \frac{x^{m+1} . X^p}{(m+1+np) b} - \frac{(m+1) a}{(m+1+np) b} \int x^m . X^{p-1} dx,$$

und endlich aus (3)

$$\int x^m X^p dx = \frac{x^{m+1} . X^p}{m+1+np} + \frac{npa}{m+1+np} \int x^m . X^{p-1} dx,$$

$$\int x^m . X^{p-1} dx = - \frac{x^{m+1} X^p}{npa} + \frac{m+1+np}{npa} \int x^m X^p dx.$$

Setzt man in der zweyten und vierten dieser sechs Gleichungen $m - n$ statt m und $p + 1$ statt p, und in der dritten und sechsten derselben bloß $p + 1$ statt p, so erhält man

$$\int x^m X^p dx = \frac{x^{m+1} . X^p}{m+1} - \frac{npb}{m+1} \int x^{m+n} . X^{p-1} dx \ldots \text{(I.)}$$

$$\int x^m X^p dx = \frac{x^{m-n+1} . X^{p+1}}{nb(p+1)} - \frac{(m-n+1)}{nb(p+1)} \int x^{m-n} X^{p+1} dx \ldots \text{(II.)}$$

$$\int x^m X^p dx = \frac{x^{m+1} . X^{p+1}}{a(m+1)} - \frac{(m+n+np+1)b}{a(m+1)} \int x^{m+n} . X^p dx \ldots \text{(III.)}$$

$$\int x^m X^p dx = \frac{x^{m-n+1} . X^{p+1}}{b(m+np+1)} - \frac{(m-n+1)a}{b(m+np+1)} \int x^{m-n} . X^p dx \ldots \text{(IV.)}$$

$$\int x^m X^p dx = \frac{x^{m+1} . X^p}{m+np+1} + \frac{npa}{m+np+1} \int x^m . X^{p-1} dx \ldots \text{(V.)}$$

$$\int x^m . X^p dx = - \frac{x^{m+1} . X^{p+1}}{an(p+1)} + \frac{(m+n+np+1)}{an(p+1)} \int x^m . X^{p+1} dx \ldots \text{(VI.)}$$

wo immer $X = a + bx^n$ ist.

Diese sechs Gleichungen sind sehr nützlich, um das Integral

$$y = \int x^m (a + bx^n)^p dx$$

auf einfachere und schon aus dem Vorhergehenden bekannte Integrale zurück zu führen.

In der Gleichung (I.) wird der Exponent p von X^p um die Einheit vermindert, aber dabey der Exponent m der Größe x^m um die Größe n vermehrt, oder das Integral

$$\int x^m X^p dx \quad \text{wird auf} \quad \int x^{m+n} \,.\, X^{p-1} dx$$

gebracht. Setzt man dann, in derselben Gleichung (I.), statt m und p die Größe $m + n$ und $p - 1$, so wird dadurch das Integral

$$\int x^m X^p dx \quad \text{auf} \quad \int x^{m+2n} \,.\, X^{p-2} dx$$

gebracht, und wenn man in (I.) statt m und p die Größe $m + 2n$ und $p - 2$ setzt, so wird dadurch das Integral

$$\int x^m X^p dx \quad \text{auf} \quad \int x^{m+3n} \,.\, X^{p-3} dx$$

gebracht, und so kann man fortfahren, bis man zu einem letzten Integral der Form

$$\int x^{m+rn} \,.\, X^{p-r} dx$$

kömmt, das man bereits aus dem Vorhergehenden integriren kann, wodurch also auch die Größe

$$\int x^m \,.\, X^p dx$$

selbst integrirt seyn wird.

Ähnliche Bemerkungen gelten auch für die übrigen fünf Gleichungen. In der Gleichung (II.) z. B. wird der Exponent von X immer um die Einheit vermehrt und der von x und n vermindert, daher diese Formel gut anwendbar ist, wenn p negativ und m positiv ist. In den Gleichungen (III) und (IV.) bleibt im Gegentheile der Exponent von X ungeändert, während der von x vermehrt oder vermindert wird. In den Gleichungen (V.) und (VI.) endlich wird der Exponent von X stets um die Einheit vermindert oder vermehrt, während der Exponent von x ganz ungeändert bleibt.

Wir wollen auf diese wichtigen Formeln einige Beyspiele anwenden, um den Gebrauch derselben deutlicher zu machen.

§. 145. (Beyspiele zu den vorhergehenden sechs Gleichungen.) Sey $dy = x^{-6} \,.\, (1 - x^2)^{\frac{5}{2}} dx$ gegeben.

Hier ist also

$$m = -6, \; n = 2, \; a = -b = 1 \text{ und } p = \tfrac{5}{2}.$$

Wendet man darauf die Gleichung (I.) an, so hat man

$$y = -\frac{X^{\frac{5}{2}}}{5x^5} - \int x^{-4} \,.\, X^{\frac{3}{2}} dx.$$

Setzt man in derselben Gleichung (I.) $m = -4$ und $p = \frac{3}{2}$, während a, b und n wie zuvor bleiben, so ist

$$\int x^{-4} \,.\, X^{\frac{3}{2}} dx = -\frac{X^{\frac{3}{2}}}{3x^3} - \int x^{-2} \,.\, X^{\frac{1}{2}} dx.$$

Setzt man endlich in (I.) $m = -2$ und $p = \frac{1}{2}$, so ist

$$\int x^{-2} \,.\, X^{\frac{1}{2}} dx = -\frac{X^{\frac{1}{2}}}{x} - \int X^{-\frac{1}{2}} \,.\, dx.$$

Substituirt man diese Ausdrücke in einander, so erhält man

$$y = -\frac{X^{\frac{5}{2}}}{5x^5} + \frac{X^{\frac{3}{2}}}{3x^3} - \frac{X^{\frac{1}{2}}}{x} - \int \frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

Auf diese Weise ist also das gegebene Integral auf das einfache

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin. x$$

zurückgebracht, und man hat daher

$$y = \int x^{-6} (1-x^2)^{\frac{5}{2}} dx$$

$$= -\frac{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}{5x^5} + \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3x^3} - \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x} - \text{arc. sin. } x.$$

I. Beyspiel zu der Gleichung II.

Sey $dy = x^4 (1+x^2)^{-3} dx$ gegeben. Setzt man in der Gleichung (II.)

$$a = b = 1, \quad n = 2 \quad \text{und} \quad m = 4, \quad p = -3,$$

so erhält man

$$\int x^4 \,.\, X^{-3} dx = -\tfrac{1}{4} x^3 X^{-2} + \tfrac{3}{4} \int x^2 \,.\, X^{-2} dx.$$

Ist dann $m = 2$, $p = -2$, so hat man eben so

$$\int x^2 \,.\, X^{-2} dx = -\tfrac{1}{2} x \,.\, X^{-1} + \tfrac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2},$$

und da $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc. tang. } x$ ist, so hat man

$$y = \int x^4 (1+x^2)^{-3} dx$$

$$= -\frac{x^3}{4(1+x^2)^2} - \frac{3x}{8(1+x^2)} + \tfrac{3}{8} \text{ arc. tang. } x$$

Eben so findet man nach der Gleichung (IV.)

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1+x^2}} = -\frac{x}{4} (x^2 + \tfrac{3}{2}) \sqrt{1+x^2} + \tfrac{3}{8} \text{ arc. sin. } x,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und nach der Gleichung (V.), wenn man $n = 2$ und $m = 0$ setzt,

$$\int dx\sqrt{a+bx^2} = \tfrac{1}{2}x\sqrt{a+bx^2} + \frac{a}{2\sqrt{b}}\log.\left[x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2}\right]$$

und

$$\int dx\sqrt{a-bx^2} = \tfrac{1}{2}x\sqrt{a-bx^2} + \frac{a}{2\sqrt{b}}\,\text{arc. sin.}\,x\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

§. 146. (**Allgemeines Beyspiel zu den vorhergehenden sechs Gleichungen.**) Nützlicher noch ist es, statt den einzelnen Beyspielen, wie sie der §. 145 enthält, ganze zusammengehörende Gattungen von Formeln wenigstens bis auf eine gewisse Gränze zu entwickeln, um sie dann bey vorkommenden Fällen anwenden zu können.

Ein solcher Ausdruck ist der folgende

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

wo m nach der Ordnung die natürlichen Zahlen 1, 2, 3 ... bezeichnet.

Setzt man in der Gleichung (IV.) $a = -b = 1$, $n = 2$ und $p = -\tfrac{1}{2}$, so erhält man

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m}\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Setzt man in diesem Ausdrucke zuerst $m = 1, 3, 5, 7 \ldots$, und bemerkt, daß

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} \quad \text{und} \quad \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc. sin. } x$$

ist, so findet man

$$\int\frac{x^3.dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{x^2}{3}+\frac{1.2}{1.3}\right)\sqrt{1-x^2},$$

$$\int\frac{x^5.dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{x^4}{5}+\frac{1.4}{3.5}x^2+\frac{1.2.4}{1.3.5}\right)\sqrt{1-x^2},$$

$$\int\frac{x^7.dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{x^6}{7}+\frac{1.6}{5.7}x^4+\frac{1.4.6}{3.5.7}x^2+\frac{1.2.4.6}{1.3.5.7}\right)\sqrt{1-x^2}$$

u. s. f.

Setzt man dann in demselben Ausdrucke $m = 2.4.6 \ldots$, so erhält man

$$\int\frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\,\text{arc. sin. } x,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{x^3}{4} + \frac{1.3}{2.4}x\right)\sqrt{1-x^2} + \frac{1.3}{2.4}\text{ arc. sin. } x,$$

$$\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{x^5}{6} + \frac{1.5}{4.6}x^3 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x\right)\sqrt{1-x^2}$$

$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6}\text{ arc. sin. } x \quad \text{u. s. f.}$$

Eben so wird man den Werth von

$$\int \frac{dx}{x^m \sqrt{1-x^2}}$$

für $m = 1, 2, 3 \ldots$ bestimmen, wenn man in der Gleichung (III) $a = -b = 1$, $p = -\frac{1}{2}$ und m negativ setzt, wodurch man erhält:

$$\int \frac{dx}{x^m \sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(m-1)\,x^{m-1}} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{1-x^2}}.$$

Setzt man dann in den so erhaltenen Ausdrücken

$$x = \frac{1}{x'}, \text{ also } dx = -\frac{dx'}{x'^2}, \text{ so wird}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dx'}{x'\sqrt{x'^2-1}} = -\text{ arc. sin. } \frac{1}{x'},$$

wodurch man also auch die Werthe von

$$\int \frac{dx'}{x'^m \sqrt{x'^2-1}}$$

für $m = 1, 2, 3 \ldots$ erhält.

Das Vorhergehende wird hinreichen, die am Ende dieser Schrift gesammelten Integralformeln Nr. I., II. und III. zu erläutern.

XXIII.

Reduktion des Ausdrucks $\int x^m (a + bx + cx^2)^p \, . \, dx$ auf einfachere Formen.

§. 147. (Das Integral $\int dx\,(a + bx + cx^2)^p$ auf $\int dx\,(a + bx + cx^2)^{p-1}$ zurückzuführen.) Setzt man in den vorhergehenden Gleichungen (V) des §. 144 die Größe $m = 0$ und $n = 2$ und $x = c + x$, so erhält man

$$\int [a + b(c+x)^2]^p dx = \frac{(c+x)[a+b(c+x)^2]}{2p+1}$$
$$+ \frac{2pa}{2p+1} \int [a + b(c+x)^2]^{p-1} dx.$$

Setzt man aber in diesem Ausdrucke, wie oben §. 138,

statt a die Größe $\frac{4ac - b^2}{4c}$,

» b » » c,

» c » » $\frac{b}{2c}$,

so geht $a + b(c+x)^2$ über in $a + bx + cx^2$, und man erhält sofort

$$\int dx (a + bx + cx^2)^p = \frac{(b+2cx)(a+bx+cx^2)^p}{2c(2p+1)}$$
$$+ \frac{p(4ac - b^2)}{2c(2p+1)} \int (a + bx + cx^2)^{p-1} dx.$$

Ganz auf dieselbe Weise erhält man auch aus der Gleichung (VI), wenn man überdieß p negativ setzt,

$$\int \frac{dx}{(a+bx+cx^2)^p} = \frac{b + 2cx}{(p-1)(4ac-b^2)(a+bx+cx^2)^{p-1}}$$
$$+ \frac{2c(2p-3)}{(p-1)(4ac-b^2)} \int \frac{dx}{(a+bx+cx^2)^{p-1}}.$$

Durch diese Ausdrücke wird man also auch das Integral

$$\int dx \sqrt{a + bx \pm cx^2}$$

auf das schon in §. 138 gegebene Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx \pm cx^2}}$$

zurückführen.

§. 148. (Trinomische Integrale auf binomische bringen.) Da sich das Trinom $\alpha + \beta x + \gamma x^2$ auf das Binom $a + bz^2$ zurückbringen läßt, wenn man $x = z - \frac{\beta}{2\gamma}$ setzt, wo dann $a = \alpha - \frac{\beta^2}{4\gamma}$ und $b = \gamma$ wird, so hat man

$$\int x^m dx (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^p = (-1)^m \int \left(\frac{\beta}{2\gamma} - z\right)^m . (a + bz^2)^p . dz.$$

Ist aber m eine ganze positive Zahl, so läßt sich das Binom

$\left(\frac{\beta}{2\gamma} - z\right)^m$ in eine endliche Anzahl Glieder entwickeln, und man wird dann eine eben so große Anzahl von Integralen der Form

$$\int z^r \cdot (a + b z^2)^p dz$$

erhalten, die man nach dem Vorhergehenden (§. 144) angeben kann.

§. 149. (Das Integral $\int \frac{dx}{x^m \sqrt{X}}$ auf $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$ und $\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ bringen.) Setzt man auch hier, der Kürze wegen, $X = a + bx + cx^2$, und differentiirt man die Größe $x^{m-1} X$, so erhält man

$$d \cdot x^{m-1} X^{\frac{1}{2}} = \frac{(m-1) x^{m-2} X dx}{\sqrt{X}} + \frac{x^{m-1} (b + 2cx) dx}{2\sqrt{X}} \text{ oder}$$

$$d \cdot x^{m-1} X^{\frac{1}{2}} = \frac{a(m-1)}{\sqrt{X}} x^{m-2} dx + \frac{b(2m-1)}{2\sqrt{X}} x^{m-1} dx + \frac{c m x^m dx}{\sqrt{X}},$$

also auch, wenn man vor jedes dieser Glieder das Integralzeichen $\int$ setzt, da

$$\int d \cdot x^{m-1} X^{\frac{1}{2}} = x^{m-1} X^{\frac{1}{2}} \text{ ist,}$$

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{X}} = \frac{x^{m-1} X^{\frac{1}{2}}}{cm} - \frac{b(2m-1)}{2cm} \int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{X}} - \frac{a(m-1)}{cm} \int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{X}}.$$

Setzt man in diesem Ausdruck m statt 2 — m, so erhält man

$$\int \frac{dx}{x^m \sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{a(m-1) x^{m-1}} - \frac{b(2m-3)}{2a(m-1)} \int \frac{dx}{x^{m-1} \sqrt{X}}$$
$$- \frac{c(m-2)}{a(m-1)} \int \frac{dx}{x^{m-2} \sqrt{X}}.$$

I. Um eben so das Integral $\int x^m dx \sqrt{X}$ auf $\int x dx \sqrt{X}$ und $\int dx \sqrt{X}$ zu bringen, differentiirt man das Produkt $x^{m-1} X^{\frac{3}{2}}$, so hat man

$$d \cdot x^{m-1} X^{\frac{3}{2}} = (m-1) x^{m-2} X^{\frac{3}{2}} dx + \tfrac{3}{2} x^{m-1} (b + 2cx) X^{\frac{1}{2}} dx,$$

woraus, wie zuvor, folgt:

$$\int x^m dx \sqrt{X} = \frac{x^{m-1} X^{\frac{3}{2}}}{c(m+2)} - \frac{b(2m+1)}{2c(m+2)} \int x^{m-1} dx \sqrt{X}$$
$$- \frac{a(m-1)}{c(m+2)} \int x^{m-2} dx \sqrt{X},$$

wo $X = a + bx + cx^2$ ist.

Das Vorhergehende genügt, die Formeln der Nr. IV. der erwähnten Tafel zu erklären.

§. 150. (Integral der Form $\int x^q dx (ax^r + bx^s)^p$.) Da sich dieses Integral auch so darstellen läßt:

$$\int x^{q+rp} dx (a + bx^{s-r})^p,$$

so setze man $q + rp = m$ und $s - r = n$, wodurch man wieder die Form

$$\int x^m dx (a + bx^n)^p$$

erhält, die wir schon oben (Kap. XXII.) behandelt haben, so daß sich aus den dort (§. 144) gegebenen Ausdrücken auch leicht die folgenden Reductionsformeln ableiten lassen, wo der Kürze wegen

$X = 2ax - x^2$ gesetzt wurde,

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{X}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{X}}{m} + \frac{(2m-1)a}{m} \int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{X}},$$

$$\int \frac{dx}{x^m \sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{(2m-1)ax^m} + \frac{(m-1)}{(2m-1)a} \int \frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{X}} \text{ u. s. w.}$$

M. s. die am Ende beygefügte Tafel Nr. III.

§. 151. (Integrale der Form $\int \frac{x^r dx}{(x+a)^m (x+b)^n}$.) Integrale dieser Form lassen sich durch Zerlegung des Ausdrucks

$$\frac{1}{(x+a)^m (x+b)^n}$$

in seine Partialbrüche, nach §. 139 und 140, auf die bereits früher betrachteten Ausdrücke

$$\int \frac{x^m dx}{(a+x)^p} \quad \text{oder} \quad \int \frac{x^m dx}{(a+bx+cx^2)^p}$$

zurückführen. Ist z. B. $dy = \frac{x dx}{(x+a)(x+b)}$ gegeben, so findet man

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{x+a} - \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{x+b},$$

also ist auch

$$y = \frac{1}{b-a} \int \frac{x dx}{x+a} - \frac{1}{b-a} \int \frac{x dx}{x+b}.$$

Da aber

$$\int \frac{x dx}{x+a} = x - a \log.(x+a), \text{ und eben so}$$

$$\int \frac{x dx}{x+b} = x - b \log.(x+b) \text{ ist, so hat man}$$

$$y = \frac{1}{b-a} [b \log.(x+b) - a \log.(x+a)].$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ist in einem zweyten Beyspiele

$$dy = \frac{dx}{(x^2 + ax + b)(x + c)}$$

gegeben, so setze man nach §. 139 und 140,

$$\frac{1}{(x^2 + ax + b)(x + c)} = \frac{A + Bx}{x^2 + ax + b} + \frac{C}{x + c},$$

so ist $A = \frac{c - a}{m}$, $B = -\frac{1}{m}$ und $C = \frac{1}{m}$, wo $m = c^2 - ac + b$ ist.

Dieß gibt daher

$$y = \frac{c - a}{m}\int\frac{dx}{x^2 + ax + b} - \frac{1}{m}\int\frac{x\,dx}{x^2 + ax + b} + \frac{1}{m}\int\frac{dx}{x + c}.$$

Da aber

$$\int\frac{dx}{x + c} = \log.(x + c) \quad \text{und}$$

$$\int\frac{(2x + a)\,dx}{x^2 + ax + b} = \log.(x^2 + ax + b)$$

ist, so hat man auch

$$y = \frac{c - \frac{1}{2}a}{c^2 - ac + b}\left[\int\frac{dx}{x^2 + ax + b} + \frac{1}{2c - a}\log.\frac{(x + c)^2}{x^2 + ax + b}\right],$$

wo das Integral

$$\int\frac{dx}{x^2 + ax + b}$$

schon in §. 138 gegeben ist.

Auf diese Weise wird man die Formeln der Nr. V. der erwähnten Tabelle erläutern.

XXIV.

Integration der trigonometrischen und logarithmischen Differentialausdrücke.

§. 152. (Integrale $\int dx\,\sin.^m x\,\cos.^n x$, $\int dx\,\sin.^m x$, $\int dx\,\cos.^m x$.) Setzt man in den sechs Gleichungen des §. 144

statt p die Größe $\frac{1}{2}(n - 1)$,
» n » » 2,
» $a = -b$ » » 1,
» x » » $\sin. x$,

so erhält man sofort die sechs ersten Formeln der Nr. VI. der angehängten Tafel. Diese Formeln führen, wenn m und n ganze Zahlen sind, das gegebene Integral

$$\int dx \sin.^m x \cos.^n x,$$

zuletzt auf die einfachen Formeln zurück:

$$\int dx \sin. x = -\cos. x,$$

$$\int dx \cos. x = \sin. x,$$

$$\int \frac{dx}{\sin. x} = \log. \text{tang.} \frac{x}{2},$$

$$\int \frac{dx}{\sin. x \cos. x} = \log. \text{tang.} x \quad \text{und}$$

$$\int dx \text{ tang. } x = -\log. \cos. x.$$

I. Ausdrücke der Form

$$dx \sin.^m x \quad \text{und} \quad dx \cos.^m x$$

lassen sich sofort integriren, wenn man statt $\sin.^m x$ und $\cos.^m x$ die oben (§. 49) gegebenen Werthe dieser Größen in Sinus und Cosinus der vielfachen Winkel x verwandelt.

Ist z. B. $dy = dx \sin.^3 x$ gegeben, so hat man

$$\sin.^3 x = \tfrac{3}{4} \sin. x - \tfrac{1}{4} \sin. 3x, \quad \text{also auch}$$

$$y = -\tfrac{3}{4} \cos. x + \tfrac{1}{12} \cos. 3x.$$

II. Eben so wird man

$$dy = \int dx \sin. mx \cos. nx$$

integriren, wenn man nach einem bekannten Ausdruck setzt:

$$\sin. mx \cos. nx = \tfrac{1}{2} \sin. (m+n) x + \tfrac{1}{2} \sin. (m-n) x.$$

§. 153. (Integrale $\int X (\log. x)^n . dx$.) Da das Produkt $u\nu$ von zwey veränderlichen Größen u und ν das Differential gibt:

$$d . u\nu = u d\nu + \nu du,$$

so hat man auch, wenn man von jedem Gliede dieser Ausdrücke das Integral nimmt:

$$\int u d\nu = u\nu - \int \nu du \quad . \quad . \quad . \quad (A),$$

woraus folgt, daß in allen den Fällen, wo eines der beyden Integrale

$$\int u d\nu \quad \text{oder} \quad \int \nu du$$

bekannt ist, auch das andere als gegeben betrachtet werden kann. Diese sogenannte theilweise Integration, deren wir uns schon öfter im Vorhergehenden bedient haben, kann besonders hier mit Nutzen angewendet werden (vergl. §. 138, III.).

Ist der Ausdruck

$$y = \int X\,(\log. x)^n \,.\, dx$$

gegeben, wo X irgend eine Funktion von x bezeichnet, so setze man

$$u = (\log. x)^n \quad \text{und} \quad d\nu = X\,dx, \quad \text{so wird}$$

$$du = n\,(\log. x)^{n-1}\frac{dx}{x} \quad \text{und} \quad \nu = \int X\,dx.$$

Setzt man der Kürze wegen den letzten Ausdruck

$$\int X\,dx = X',$$

so erhält man, nach der Gleichung (A)

$$\int X\,(\log. x)^n \,.\, dx = X'\,(\log. x)^n - n\int\frac{X'}{x}(\log. x)^{n-1}\,dx \ldots (a),$$

oder auch, wenn man in diesem Ausdrucke $1-n$ statt n setzt:

$$\int\frac{X'\,dx}{x\,(\log. x)^n} = \frac{-X'}{(n-1)\,(\log. x)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int\frac{X\,dx}{(\log. x)^{n-1}} \ldots (b),$$

wo also $X = \frac{d\,.\,X'}{dx}$ ist.

Ex. Ist $X = x^m$, so ist

$$X' = \int X\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

also auch die erste (a) der vorhergehenden Gleichungen

$$\int x^m\,(\log. x)^n\,dx = \frac{x^{m+1}\,(\log. x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int x^m\,(\log. x)^{n-1}\,dx.$$

Setzt man in diesem Ausdrucke statt n die Größen $n-1$, $n-2$, $n-3\ldots$, so erhält man

$$\int x^m\,(\log. x)^n\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\Big[(\log. x)^n - \frac{n}{m+1}(\log. x)^{n-1} + \frac{n\,(n-1)}{(m+1)^2}(\log. x)^{n-2} - \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{(m+1)^3}(\log. x)^{n-3} + \ldots\Big]$$

eine endliche Reihe, wenn n eine ganze positive Zahl ist.

Für den besondern Fall $m = -1$ hat man

$$\int\frac{(\log. x)^n\,dx}{x} = \frac{(\log. x)^{n+1}}{n+1}.$$

Eben so erhält man durch die zweyte (b) der vorhergehenden Gleichungen

$$\int \frac{x^m\,dx}{(\log.x)^n} = -\frac{x^{m+1}}{n-1}\left[\frac{1}{(\log.x)^{n-1}} + \frac{m+1}{(n-2)(\log.x)^{n-2}} + \frac{(m+1)^2}{(n-2)(n-3)(\log.x)^{n-3}} + \ldots\right],$$

auf welchem Wege man endlich zu dem letzten Gliede oder zu deren Integral kömmt:

$$\frac{(m+1)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1}\int \frac{x^m\,dx}{\log.x}.$$

I. Setzt man $z = x^{m+1}$, so wird dieses Integral

$$\int \frac{x^m\,dx}{\log.x} = \int \frac{dz}{\log.z}.$$

Um das letzte Integral zu finden, hat man, nach dem Vorhergehenden (§. 43),

$$a^x = 1 + x\log.a + \frac{x^2}{2}(\log.a)^2 + \frac{x^3}{2.3}(\log.a)^3 + \ldots$$

Multiplicirt man alle Glieder dieses Ausdrucks durch $\frac{dx}{x}$ und integrirt diese Produkte, so hat man

$$\int \frac{a^x\,dx}{x} = \log.x + x\log.a + \frac{(x\log.a)^2}{2^2} + \frac{(x\log.a)^3}{2.3^2} + \frac{(x\log.a)^4}{2.3.4^2} + \ldots$$

Ist nun $a^x = z$, so ist

$$x\log.a = \log.z,\quad dx = \frac{dz}{z\log.a} \text{ und}$$

$$\log.x = \log.(\log.z) - \log.(\log.a).$$

Läßt man daher die constante Größe $-\log.(\log.a)$ weg, da man sie als in der allgemeinen Constante C der Integration begriffen annehmen kann, die überhaupt jedem Integral (nach §. 135) beygefügt werden muß, so erhält man

$$\int \frac{dz}{\log.z} = \log.(\log.z) + \log.z + \frac{(\log.z)^2}{1.2^2} + \frac{(\log.z)^3}{1.2.3^2} + \frac{(\log.z)^4}{1.2.3.4^2},$$

und man nennt diesen Ausdruck $\int \frac{dz}{\log.z}$ den Integral-Logarithmus von z.

§. 154. (Integral $\int X a^x dx$.) Setzt man in der Gleichung (A) des §. 153 die Größe $u = X$ und $dv = a^x dx$, also auch

$$du = dX \text{ und } v = \frac{a^x}{\log.a},$$

so erhält man

$$\int X a^x dx = \frac{X a^x}{\log.a} - \frac{1}{\log a}\int \left(\frac{dX}{dx}\right) a^x dx,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

also auch, wenn man in diesem Ausdrucke statt X die Größe $\left(\frac{dX}{dx}\right)$ setzt:

$$\int\left(\frac{dX}{dx}\right)a^x dx = \frac{\left(\frac{dX}{dx}\right)a^x}{\log. a} - \frac{1}{\log. a}\int\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)a^x dx,$$

und eben so

$$\int\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)a^x dx = \frac{\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)a^x}{\log. a} - \frac{1}{\log. a}\int\left(\frac{d^3X}{dx^3}\right)a^x dx \text{ u. s. w.}$$

Substituirt man diese Ausdrücke in einander, so erhält man

$$\int X a^x dx =$$

$$\frac{a^x}{\log. a}\left[X - \frac{1}{\log. a}\left(\frac{dX}{dx}\right) + \frac{1}{(\log. a)^2}\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right) - \frac{1}{(\log. a)^3}\left(\frac{d^3X}{dx^3}\right) + \ldots\right].$$

Ist nun X eine solche Funktion von x, daß für irgend einen Werth von n der Differential-Coefficient $\left(\frac{d^nX}{dx^n}\right)$, also auch alle folgenden verschwinden, so bricht die vorhergehende Reihe ab.

Ex. I. Ist $X = x^n$, so findet man

$$\int x^n . a^x dx =$$

$$\frac{a^x}{\log. a}\left[x^n - \frac{n x^{n-1}}{\log. a} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{(\log. a)^2} + \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{(\log. a)^n}\right].$$

Ex. II. Ist aber $X = \frac{1}{x^n}$, so setze man wieder

$$u = a^x \quad \text{und} \quad d\nu = \frac{dx}{x^n}, \quad \text{also auch}$$

$$\nu = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}},$$

wodurch die Gleichung (A) des §. 153 in folgende übergeht:

$$\int\frac{a^x dx}{x^n} = -\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{\log. a}{(n-1)}\int\frac{a^x dx}{x^{n-1}}.$$

Behandelt man diesen Ausdruck wie zuvor, indem man n in n — 1, n — 2, n — 3... übergehen läßt, so findet man

$$\int\frac{a^x dx}{x^n} = -\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}}\left[1 + \frac{x \log. a}{n-2} + \frac{(x\log. a)^2}{(n-2)(n-3)}\right.$$
$$\left. + \frac{(x\log. a)^3}{(n-2)(n-3)(n-4)} + \ldots + \frac{(x\log. a)^{n-2}}{(n-2)(n-3)\ldots 3.2.1}\right]$$
$$+ \frac{(\log. a)^{n-1}}{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 3.2.1}\int\frac{a^x x d}{x}.$$

Wir kommen daher hier in dem letzten Gliede der Entwicklung auf das Integral $\int \frac{a^x dx}{x}$, oder auf den bereits oben (§. 153, I.) angeführten Integral-Logarithmus, da man, wenn man $a^x = z$ setzt, erhält:

$$\int \frac{a^x dx}{x} = \int \frac{dz}{\log. z}.$$

Über die vorhergehenden Integrale s. m. die Nr. VI. der angehängten Tabelle.

XXV.

Integration durch Reihen.

§. 155. (**Integral $\int \frac{x^m dx}{a^n + x^n}$ durch eine Reihe.**) Wenn alle vorhergehenden Versuche, ein vorgelegtes Differential auf einen einfacheren Ausdruck, dessen Integral man bereits kennt, zurückzuführen, nicht zum Zwecke führen, so bleibt nichts mehr übrig, als das gegebene Differential durch Entwicklung desselben in eine Reihe aufzulösen, und dann die Glieder desselben einzeln zu integriren. Daß die so erhaltenen Reihen zur Ausübung nur brauchbar sind, wenn sie convergiren, ist für sich klar.

Wäre z. B. $dy = \frac{a^2 dx}{a^2 + x^2}$ gegeben, so würde man, wenn auch das gesuchte Integral $y = a \text{ arc. tang. } \frac{x}{a}$ noch nicht bekannt wäre, durch die Division der Einheit durch $a^2 + x^2$ erhalten:

$$y = dx - \frac{x^2 dx}{a^2} + \frac{x^4 dx}{a^4} - \ldots,$$

wo dann die Integration der einzelnen Glieder gibt:

$$y = x - \frac{x^3}{3a^2} + \frac{x^5}{5a^4} - \frac{x^7}{7a^6} + \ldots,$$

wenn man annimmt, daß x mit y zugleich verschwindet, oder daß die Constante der Integration (§. 135) gleich Null ist. Dieß ist aber derselbe Ausdruck, welchen wir oben (§. 46) für $a \text{ arc. tang. } \frac{x}{a}$ erhalten haben.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ist $dy = \frac{x^m dx}{a^n + x^n}$ gegeben, so findet man

$$\frac{x^m}{a^n + x^n} = \frac{x^m}{a} - \frac{x^{m+n}}{a^{2n}} + \frac{x^{m+2n}}{a^{3n}} - \ldots \text{ oder auch}$$

$$\frac{x^m}{x^n + a^n} = x^{m-n} - a^n x^{m-2n} + a^{2n} x^{m-3n} - \ldots$$

und daher

entweder $y = \frac{x^{m+1}}{(m+1)a^n} - \frac{x^{m+n+1}}{(m+n+1)a^{2n}} + \frac{x^{m+2n+1}}{(m+2n+1)a^{3n}} - \ldots$

oder $y = \frac{x^{m-n+1}}{m-n+1} - \frac{a^n \cdot x^{m-2n+1}}{m-2n+1} + \frac{a^{2n} \cdot x^{m-3n+1}}{m-3n+1} - \ldots$

Ist x sehr klein, so convergirt die erste dieser Reihen, und die zweyte, wenn x sehr groß ist.

§. 156. (Integral $y = \int x^m dx\,(a + bx^n)^{\frac{r}{s}}$.) Wir haben bereits oben (§. 142 und 144) die Fälle angegeben, in welchen sich dieser Ausdruck integriren läßt. Für alle anderen Fälle wird man ihn daher in Reihen entwickeln.

Es ist aber, nach Newtons Binom

$$(a + bx^n)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{r}{s}}\left(1 + \frac{b}{a}x^n\right)^{\frac{r}{s}}$$

$$= a^{\frac{r}{s}}\left[1 + \frac{r}{s}\cdot\frac{b}{a}x^m + \frac{r(r-s)}{2s^2}\cdot\frac{b^2}{a^2}x^{2m} + \ldots\right],$$

oder auch

$$(a + bx^n)^{\frac{r}{s}} = x^{\frac{rn}{s}}(b + ax^{-n})^{\frac{r}{s}}$$

$$= x^{\frac{rn}{s}}\cdot b^{\frac{r}{s}}\left[1 + \frac{r}{s}\cdot\frac{a}{b}x^{-m} + \frac{r(r-s)}{2s^2}\cdot\frac{a^2}{b^2}x^{-2m} + \ldots\right],$$

so daß man daher hat:

$$y = a^{\frac{r}{s}}\left[\frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{r}{s}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{x^{m+n+1}}{m+n+1} + \frac{r(r-s)}{2s^2}\cdot\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^{2m+n+1}}{2m+n+1} + \ldots\right]$$

und

$$y = b^{\frac{r}{s}}\left[\frac{sx^t}{rn + s(m+1)} + r\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{x^{t-m}}{rn + s(m-n+1)} + \frac{r(r-s)}{2s}\cdot\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{x^{t-2n}}{rn + s(m-2n+1)} + \ldots\right],$$

wo $t = m + 1 + \frac{rn}{s}$ ist, und wo die erste Reihe nach den steigenden, die zweyte aber nach den fallenden Potenzen von x fortgeht.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 157. (Integral $y = \int dx \sqrt{\frac{1 - e^2 x^2}{1 - x^2}}$.) Da

$$\sqrt{1 - e^2 x^2} = 1 - \tfrac{1}{2} e^2 x^2 - \frac{1.1}{2.4} e^4 x^4 - \frac{1.1.3}{2.4.6} e^6 x^6 - \ldots,$$

so findet man sofort

$$y = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} - \tfrac{1}{2} e^2 \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{1.1}{2.4} e^4 \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1 - x^2}} - \ldots.$$

Allein diese Integrale sind bereits oben (§. 146) gefunden worden. Substituirt man sie daher in der gegenwärtigen Reihe, so erhält man

$$y = \text{arc. sin. } x + \tfrac{1}{2} e^2 [\tfrac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2} - \tfrac{1}{2} \text{arc. sin. } x]$$
$$+ \frac{1.1}{2.4} e^4 \left[\left(\frac{x^3}{4} + \frac{1.3}{2.4} x\right) \sqrt{1 - x^2} - \frac{1.3}{2.4} \text{arc.sin.} x\right]$$
$$+ \frac{1.1.3}{2.4.6} e^6 \left[\left(\frac{x^5}{6} + \frac{1.5}{4.6} x^3 + \frac{1.3.5}{2.4.6} x\right) \sqrt{1 - x^2}\right.$$
$$\left. - \frac{1.3.5}{2.4.6} \text{arc. sin. } x\right] + \ldots,$$

und diese Reihe convergirt, wenn e sehr klein ist.

I. Eben so findet man

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(a + x)}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{1}{2a\sqrt{a}} \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$
$$+ \frac{1.3}{2.4 a^2 \sqrt{a}} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^2}} - \ldots$$

§. 158. (**Bernoulli's und Taylor's Reihen.**) Wenn man in der Gleichung (A) des §. 153, das heißt, wenn man in der Gleichung

$$\int u\,d\nu = u\nu - \int \nu\,du \quad \text{setzt:}$$
$$u = X \quad \text{und} \quad \nu = x, \quad \text{so erhält man}$$
$$\int X dx = Xx - \int x \left(\frac{dX}{dx}\right) dx.$$

Dieselbe Gleichung (A) gibt aber, wenn

$$u = \left(\frac{dX}{dx}\right) \quad \text{und} \quad \nu = \tfrac{1}{2} x^2 \quad \text{ist:}$$
$$\int x \left(\frac{dX}{dx}\right) dx = \frac{x^2}{2} \left(\frac{dX}{dx}\right) - \tfrac{1}{2} \int x^2 \left(\frac{d^2 X}{dx^2}\right) dx,$$

und eben so, wenn

$$u = \left(\frac{d^2 X}{dx^2}\right) \quad \text{und} \quad \nu = \tfrac{1}{3} x^3 \quad \text{ist:}$$
$$\int x^2 \left(\frac{d^2 X}{dx^2}\right) dx = \frac{x^3}{3} \left(\frac{d^2 X}{dx^2}\right) - \tfrac{1}{3} \int x^3 \left(\frac{d^3 X}{dx^3}\right) dx.$$

Setzt man dieß fort, und substituirt dann diese Größen in einander, so erhält man

$$\int X dx = Xx - \frac{x^2}{1.2}\left(\frac{dX}{dx}\right) - \frac{x^3}{1.2.3}\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right) - \frac{x^4}{1.2.3.4}\left(\frac{d^3X}{dx^3}\right) - \ldots,$$

welches die gesuchte, von Joh. Bernoulli gegebene Reihe ist, durch welche man jedes Integral der Form $\int X dx$ in eine nach den Potenzen von x fortgehende Reihe entwickeln kann.

Ex. Ist $X = \frac{1}{1+x}$, also auch

$$\left(\frac{dX}{dx}\right) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad \left(\frac{d^2X}{dx^2}\right) = \frac{1.2}{(1+x)^3} \quad \text{u. f.},$$

so findet man

$$y = \int \frac{dx}{1+x} = \frac{x}{1+x} + \frac{x^2}{2(1+x)^2} + \frac{x^3}{3(1+x)^3} + \ldots,$$

welche Reihe also auch gleich $\log.(1+x)$ ist, wie man findet, wenn man in dem Ausdrucke $\log.(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \ldots$ des §. 42 die Größe x in $\frac{x}{1+x}$ verwandelt.

I. Da die Quotienten $\left(\frac{dX}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)\ldots$ öfter eine unbequeme Gestalt annehmen, so kann man die Größe X von einer anderen ω abhängen lassen, die selbst wieder eine Funktion x ist, so daß man hat (§. 30, I.)

$$\left(\frac{dX}{dx}\right) = \left(\frac{dX}{d\omega}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right).$$

Setzen wir überdieß, der Kürze wegen,

$$dp = x d\omega, \quad dp' = p d\omega, \quad dp'' = p' d\omega \quad \text{u. f.}$$

Sey nun wieder in der Gleichung (A) des §. 153 die Größe $u = X$ und $v = x$, so erhält man, wie zuvor,

$$\int X dx = Xx - \int\left(\frac{dX}{dx}\right) x dx,$$

oder nach unserer eingeführten Bezeichnung

$$\int X dx = Xx - \int\left(\frac{dX}{d\omega}\right) dp.$$

Ist dann in der Gleichung (A) die Größe

$$u = \left(\frac{dX}{d\omega}\right) \quad \text{und} \quad v = p,$$

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

so hat man

$$\int\left(\frac{dX}{d\omega}\right)dp = \left(\frac{dX}{d\omega}\right)p - \int\left(\frac{d^2X}{d\omega^2}\right)dp'.$$

Ist ferner

$$u = \left(\frac{d^2X}{d\omega^2}\right) \text{ und } d\nu = dp' = p\,d\omega \text{ oder } \nu = p',$$

so hat man

$$\int\left(\frac{d^2X}{d\omega^2}\right)dp' = \left(\frac{d^2X}{d\omega^2}\right)p' - \int\left(\frac{d^3X}{d\omega^3}\right)p'' \text{ u. s. f.}$$

Auf diese Weise erhält man

$$\int X dx = Xx - p\left(\frac{dX}{d\omega}\right) - p'\left(\frac{d^2X}{d\omega^2}\right) - p''\left(\frac{d^3X}{d\omega^3}\right) - \ldots,$$

welches die von Taylor für das Integral $\int X dx$ gegebene Reihe ist.

Ex. Sey

$$dy = dx\sqrt{a^2 - x^2}$$

gegeben. Hier ist also

$$X = \sqrt{a^2 - x^2}, \text{ und daher } \left(\frac{dX}{dx}\right) = -\frac{x}{X}.$$

Setzt man daher $d\omega = x\,dx$, so wird man haben

$$\left(\frac{dX}{d\omega}\right) = -\frac{1}{X}, \quad \left(\frac{d^2X}{d\omega^2}\right) = -\frac{1}{X^3},$$

$$\left(\frac{d^3X}{d\omega^3}\right) = -\frac{3}{X^5}, \quad \left(\frac{d^4X}{d\omega^4}\right) = -\frac{3.5}{X^7} \text{ u. f.}$$

Ferner ist

$$p = \int x\,d\omega = \int x^2 dx = \tfrac{1}{3}x^3,$$

$$p' = \frac{1}{3.5}x^5, \quad p'' = \frac{1}{3.5.7}x^7 \text{ u. f.,}$$

so daß man daher für das gesuchte Integral erhält:

$$\int dx\sqrt{a^2 - x^2} = Xx + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{X} - \frac{1.1}{3.5}\cdot\frac{x^5}{X^3} + \frac{1.1.3}{3.5.7}\cdot\frac{x^7}{X^5} - \ldots$$

XXVI.

Allgemeine annähernde Methode, begränzte Integrale zu bestimmen.

§. 159. (Begränzte Integrale.) Sey $X dx$ ein gegebener Differentialausdruck, dessen Integral die Größe

$$X' + C$$

vorstellen mag, wo C die Constante der Integration bezeichnet, die, nach dem Vorhergehenden (§. 135), jedem Integrale hinzugefügt werden muß. Da diese Constante im Allgemeinen unbestimmt ist, und ihr Werth erst dann angegeben werden kann, wenn man den Werth des Integrals X' für einen bestimmten Werth von x kennt (wenn man z. B. weiß, daß $X' = A$ für $x = a$ wird), so nennt man diese Integrale unbestimmte oder unbegränzte Integrale.

Hat man z. B. den Differentialausdruck $dy = x^2 dx$ gegeben, so ist bekanntlich das Integral desselben

$$y = \tfrac{1}{3}x^3 + C,$$

ein unbestimmtes Integral, da der letzte Ausdruck gilt, wo man auch, das x zu zählen, anfangen oder aufhören mag. Nehmen wir aber z. B. an, daß wir diese Größe x mit dem Werthe $x = a$ zu zählen anfangen, und daß für diesen Werth von x die Größe y oder das gesuchte Integral gleich Null sey, so hat man

$$0 = \tfrac{1}{3}a^3 + C,$$

und dadurch ist die Constante C der Integration bestimmt worden, da man hat $C = -\tfrac{1}{3}a^3$, so daß also unser, wenigstens in seinem Anfange bestimmte Integral gleich ist

$$y = \tfrac{1}{3}(x^3 - a^3),$$

und dieser Ausdruck von y gilt für jeden Werth von x, wie groß oder wie klein man auch denselben annehmen mag. Er ist daher in Beziehung auf seine Ausdehnung, auf das Ende von der veränderlichen Größe x, noch immer unbestimmt. Will man aber auch dieses Ende von x, oder will man auch die zweyte Gränze des Integrals festsetzen, und nimmt man z. B. an, daß das Integral mit $x = a$ anfangen, und mit $x = b$ enden soll, so hat man ein an seinen beyden Gränzen be-

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

stimmtes Integral, und solche Integrale werden **begränzte Integrale** (Intégrales définies) genannt. Man pflegt sie auf folgende Art zu bezeichnen:

$$\int_b^a x^2\,dx = \tfrac{1}{3}(b^3 - a^3),$$

indem man dem Integralzeichen $\int$ die beyden Werthe von x beyfügt, für welchen das Integral anfangen und enden soll.

Wir haben oben (§. 146) die unbestimmten Integrale des Ausdrucks

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

gegeben, wo m die natürlichen Zahlen 1, 2, 3... bezeichnet. Sucht man aber die begränzten Integrale dieses Ausdrucks, und zwar zwischen den Gränzen $x = 0$ und $x = 1$, so hat man das unbestimmte Integral

$$y = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C;$$

für $x = 0$ wird $y' = 1$, und für $x = 1$ wird $y'' = 0$. Subtrahirt man also den zweyten dieser Werthe von y von dem ersten, so erhält man das begränzte Integral

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1.$$

Eben so war das unbestimmte Integral

$$y = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\text{arc. sin. } x.$$

Da aber arc. sin. $0 = 0$ und arc. sin. $1 = \frac{1}{2}\pi$ ist, so hat man für das begränzte Integral

$$\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \tfrac{1}{4}\pi.$$

Behandelt man eben so alle übrigen, in §. 146 angeführten Integrale, so erhält man, wenn man der Kürze wegen X statt $\sqrt{1-x^2}$ schreibt:

$$\int_0^1 \frac{dx}{X} = \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{und} \quad \int_0^1 \frac{x\,dx}{X} = 1,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{X} = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\pi \quad \text{»} \quad \int_0^1 \frac{x^3\,dx}{X} = \tfrac{2}{3},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4\,dx}{X} = \frac{1.3}{2.4}\cdot\tfrac{1}{2}\pi \quad \text{»} \quad \int_0^1 \frac{x^5\,dx}{X} = \frac{2.4}{3.5},$$

$$\int_0^1 \frac{x^6\,dx}{X} = \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\tfrac{1}{2}\pi \quad \text{»} \quad \int_0^1 \frac{x^7\,dx}{X} = \frac{2.4.6}{3.5.7} \quad \text{u. f.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

so daß man daher allgemein erhält:

$$\int_0^1 \frac{x^{2n}\,dx}{X} = \frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{2.4.6.8\ldots\;\;2n}\cdot\frac{\pi}{2} \text{ und}$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}\,dx}{X} = \frac{2.4.6.8\ldots\;\;2n}{3.5.7.9\ldots(2n+1)},$$

und daher auch

$$\int_0^1 \frac{x^{2n}\,dx}{X}\cdot\int_0^1 \frac{x^{2n+1}\,dx}{X} = \frac{1}{2n+1}\cdot\tfrac{1}{2}\pi.$$

Wir werden diese durch das gesammte Gebiet der mathematischen Analysis sehr wichtigen begränzten Integrale in einem der folgenden Abschnitte dieser Schrift näher betrachten.

§. 160. (**Analogie der Integrale mit den Summen der Differentiale.**) Nennt man $F(x) + C$ das unbestimmte Integral des Differentialausdrucks $f(x)\,dx$, und nimmt man dieses Integral zwischen den beyden Gränzen $x = a$ und $x = b$, so hat man, nach §. 159, für dieses so begränzte Integral den Ausdruck

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Wenn man nun der Größe x nach und nach unzählig viele Werthe beylegt, die in unendlich kleinen Abstufungen von $x = a$ bis $x = b$ wachsen, und wenn man diese allmähligen Vergrößerungen von x durch dx bezeichnet, so läßt sich leicht zeigen, daß die Summe aller so entstehender Werthe von $f(x)\,dx$ gleich dem begränzten Integrale

$$F(b) - F(a) \text{ ist.}$$

Denn wenn man, nach dem Geiste der Differentialrechnung, die höheren Differentiale gegen das erste wegläßt, so hat man, schon nach dem ersten Begriff eines Differentials, den Ausdruck

$$F(x + dx) - F(x) = f(x)\,dx.$$

Bezeichnet man demnach durch $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \ldots \delta_n$ eine unbegränzte Anzahl von unendlich kleinen Größen, so daß man hat

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_n = b - a,$$

und nimmt man für die beyden Größen x und dx nach und nach die Größenpaare

$$a \text{ und } \delta_1,$$
$$a + \delta_1 \;\text{»}\; \delta_2,$$

$$a + \delta_1 + \delta_2 \quad \text{und} \quad \delta_3,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$b - \delta_n \quad \text{„} \quad \delta_n,$$

so erhält man

$$\begin{aligned}
&F(a + \delta_1) &&- F(a) &&= f(a).\delta_1,\\
&F(a + \delta_1 + \delta_2) &&- F(a + \delta) &&= f(a + \delta_1).\delta_2,\\
&F(a + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3) &&- F(a + \delta + \delta_2) &&= f(a + \delta_1 + \delta_2).\delta_3\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot &&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot &&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&F(b) &&- F(b - \delta_n) &&= f(b - \delta_n).\delta_n,
\end{aligned}$$

und die Summe dieser Gleichungen ist

$$F(b) - F(a) = f(a).\delta_1 + f(a + \delta_1).\delta_2 + f(a + \delta_1 + \delta_2).\delta_3 + \ldots$$
$$+ f(b - \delta_n).\delta_n,$$

wodurch der oben ausgesprochene Satz bestätiget wird.

Man kann sich diesen Satz versinnlichen, wenn man sich durch die Größen δ_1, $\delta_2 \ldots$ die Zuwachse der Abscissen, und durch $f(a)$, $f(a + \delta_1) \ldots$ die zu diesen Abscissen gehörenden Ordinaten einer Curve MNPQ (Fig. 31) vorstellt, so daß $AB = a$, $AU = b$ und $BC = \delta_1$, $CD = \delta_2 \ldots$; ferner $BM = f(a)$, $CN = f(a + \delta_1) \ldots$, und endlich die Flächenräume $AHMB = F(a)$, $AHNC = F(a + \delta_1) \ldots$ und $AHVU = F(b)$ ist.

Übrigens setzt das Vorhergehende, wie man sieht, voraus, daß die Funktion $f(x)$ zwischen den beyden Gränzen $x = a$ und $x = b$ stetig fortgehe, und nicht etwa irgendwo unendlich groß werde. Wir werden auf diese wichtige Bemerkung später wieder zurückkommen.

§. 161. (Allgemeine annähernde Integration.) Alle bisher betrachteten Integralausdrücke lassen sich unter der Form $\int f(x)\,dx$ darstellen, und man kann, nach §. 89, diesen Ausdruck immer als die Fläche einer Curve betrachten, von welcher x die Abscisse und $y = f(x)$ die dazu gehörende Ordinate ist. Nimmt man die Quadratur dieser Fläche zwischen den beyden Gränzen $x = a$ und $x = b$, so erhält man das begränzte Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Es sey also der Ausdruck

$$y = \int f(x)\,dx$$

gegeben, wo dieses Integral durch keines der bisher angeführten Mittel, selbst nicht durch Reihen (§. 155), zu finden ist, ja wo selbst die Funktion f(x) noch unbekannt seyn kann, so daß man bloß die Werthe dieser Funktion für einige gegebene Werthe ihrer Stammgröße x kennt. Nehmen wir z. B. an, daß man folgende zusammenhängende Werthe von x und f(x) habe:

$$\begin{array}{llllll} x \;.\;.\;.\; & 0, & a, & b, & c, & d \;.\;.\;. \\ f(x) \;.\;.\;. & A, & B, & C, & D, & E \;.\;.\;. \end{array}$$

Dieß vorausgesetzt, sieht man leicht, daß f(x) unter die folgende Form gebracht werden kann:

$$f(x) = \frac{x-a\,.\,x-b\,.\,x-c\,.\,x-d\ldots}{a\,.\,b\,.\,c\,.\,d} A$$
$$+ \frac{x\,.\,x-b\,.\,x-c\,.\,x-d\ldots}{a\,.\,a-b\,.\,a-c\,.\,a-d\ldots} B$$
$$+ \frac{x\,.\,x-a\,.\,x-c\,.\,x-d\ldots}{b\,.\,b-a\,.\,b-c\,.\,b-d\ldots} C + \text{u. f.}$$

(M. s. Cauchy's Cours d'Analyse. I. p. 525.)

Multiplicirt man alle Glieder dieses Ausdrucks durch dx, und setzt ihnen dann das Integralzeichen $\int$ vor, so erhält man

$$y = \int f(x)\,dx = \frac{A}{a\,.\,b\,.\,c\,.\,d\ldots} \int dx\,.\,a-x\,.\,b-x\,.\,c-x\,.\,d-x\ldots$$
$$+ \frac{B}{a.b-a.c-a.d-a\ldots} \int x\,dx\,.\,b-x.c-x.d-x\ldots$$
$$+ \frac{C}{b.a-b.c-b.d-b\ldots} \int x\,dx.a-x.c-x.d-x\ldots$$
$$+ \frac{D}{c.a-c.b-c.d-c\ldots} \int x\,dx.a-x.b-x.d-x\ldots$$

u. s. w.

Hat man daher nur zwey Werthe von f(x) = A, und B für x = 0 und a, so wird der vorhergehende Ausdruck

$$y = \int_0^a f(x)\,dx = \frac{A}{a} \int dx\,(a-x) + \frac{B}{a} \int x\,dx;$$

also auch, wenn man nach den Integrationen x = a setzt:

$$y = \tfrac{1}{2} a\,(A + B),$$

so daß dann die Fläche y, gleich dem arithmetischen Mittel, zwischen den Größen aA und aB ist.

Hat man aber drey Werthe von f(x) = A, B, C... für x = 0, a, b, so geht der vorhergehende allgemeine Ausdruck in den folgenden über:

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

$$y = \int_0^b f(x)\,dx = \frac{A}{ab}\int dx\,(a-x)(b-x)$$
$$+ \frac{B}{a(b-a)}\int x\,dx\,(b-x) + \frac{C}{b(a-b)}\int x\,dx\,(a-x).$$

Setzt man hier, nach den Integrationen $x = b$, so erhält man für den gesuchten Werth des gegebenen Integrals

$$y = \frac{Ab}{6a}(3a-b) + \frac{Bb^3}{6a(b-a)} + \frac{Cb(3a-2b)}{6(a-b)},$$

und so kann man fortgehen, indem man vier, fünf und mehr der gegebenen Größen $A, B, C \ldots$ in Betrachtung zieht. Allein viel einfacher werden diese resultirenden Gleichungen, wenn man die Differenzen der auf einander folgenden Werthe von x unter sich gleich groß nimmt, d. h. wenn man $b - a = c - b = d - c \ldots$ setzt. Auf diese Weise findet man für das Integral $y = \int f(x)\,dx$ zwischen den beyden Gränzen $x = a$ und $x = a + m$ nach der Ordnung folgende Ausdrücke:

$$\int_a^{a+m} f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}m\,[f(a) + f(a+m)]$$
$$= \tfrac{1}{6}m\,[f(a) + 4f(a+\tfrac{1}{2}m) + f(a+m)]$$
$$= \tfrac{1}{8}m\,[f(a) + 3f(a+\tfrac{1}{3}m) + 3f(a+\tfrac{2}{3}m) + f(a+m)]$$

u. s. f.

Läßt man also die Größe $x = a$ durch gleiche Intervalle δ wachsen, so daß x nach der Ordnung gleich a, $a+\delta$, $a+2\delta$, $a+3\delta \ldots$ wird, bis endlich der letzte dieser Werthe von $x = b$ wird, so wird man unser zwischen diesen beyden Gränzen $x = a$ und $x = b$ eingeschlossenes Integral, auf folgende Weise darstellen.

I. Wenn man bloß zwey Werthe von x, nämlich $x = a$ und $x = b$ kennt:

$$y = \int_a^b f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}\delta\,[f(a) + f(b)].$$

II. Wenn man drey Werthe $x = a$, $a + \delta$ und b kennt:

$$y = \tfrac{1}{3}\delta\,[f(a) + 4f(a+\delta) + f(b)].$$

III. Wenn man vier Werthe $x = a$, $a+\delta$, $a+2\delta$ und b kennt:

$$y = \tfrac{3}{8}\delta\,[f(a) + 3f(a+\delta) + 3f(a+2\delta) + fb].$$

IV. Wenn man fünf Werthe $x = a$, $a+\delta$, $a+2\delta$, $a+3\delta$ und b kennt:

$$y = \tfrac{2}{45}\delta\,[7f(a) + 32f(a+\delta) + 12f(a+2\delta) + 32f(a+3\delta) + 7f(b)]$$

u. s. f.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ex. Um auf die vorhergehenden Ausdrücke ein specielles Beyspiel anzuwenden, sey

$$y = \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

gegeben, so daß man daher das Integral $\int \frac{dx}{x}$ zwischen den beyden Gränzen $x = 1$ bis $x = 2$ in Zahlen angeben soll. Es ist bekannt, daß $y = \log. \text{nat.}\, 2 = 0.6931472$ ist, eine Zahl, welche die vorhergehenden Ausdrücke desto genauer wieder geben sollen, je weiter man in ihnen fortgeht.

Für unser Beyspiel ist $a = 1$ und $b = 2$, $f(a) = \frac{1}{a} = 1$, $f(a + \delta) = \frac{1}{a + \delta}$ und $f(b) = \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$.

Setzt man also in I. die Größe $\delta = 1$, so ist

$$y = \tfrac{1}{2}(1 + \tfrac{1}{2}) = 0.75.$$

In II. aber ist $\delta = \frac{1}{2}$, also auch

$$y = \tfrac{1}{6}(1 + \tfrac{8}{3} + \tfrac{1}{2}) = 0.694.$$

In III. ist

$$\delta = \tfrac{1}{3} \text{ und } y = \tfrac{1}{8}(1 + \tfrac{9}{4} + \tfrac{9}{5} + \tfrac{1}{2}) = 0.69375.$$

In IV. endlich ist

$$\delta = \tfrac{1}{4} \text{ und } y = \tfrac{1}{90}(7 + \tfrac{128}{5} + \tfrac{48}{6} + \tfrac{128}{7} + \tfrac{7}{2}) = 0.693174,$$

also das letzte Resultat nur mehr um 0.000027 zu groß.

§. 162. (**Andere Darstellung des Vorhergehenden.**) Da diese ganz allgemeine Methode der Integration von so großer Wichtigkeit ist, so wird es nicht unangemessen seyn, sie noch auf eine andere Weise darzustellen.

Nehmen wir, wie zuvor, an, daß die Größe $x = a$ nach und nach um die kleine Größe δ wachse und in a, $a + \delta$, $a + 2\delta$, $a + 3\delta$, ... übergehe, bis sie endlich $a + n\delta = b$ wird, so daß demnach zwischen den beyden äußersten Werthen a und b eine Anzahl von $n - 1$ Zwischengliedern enthalten ist, und daß wieder, wie oben (§. 160), $F(x)$ das unbestimmte Integral von $\int f(x)\,dx$, also auch

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

das begränzte Integral $\int f(x)\,dx$ von $x = a$ bis $x = b$ ausdrücke.

Wenn nun a in seinen nächstfolgenden Werth $a + \delta$ übergeht, so hat man, nach Taylor's Theorem (§. 39):

$$F(a+\delta) = Fa + \delta.\frac{dFa}{da} + \frac{\delta^2}{1.2}.\frac{d^2Fa}{da^2} + \frac{\delta^3}{1.2.3}.\frac{d^3Fa}{da^3} + \dots$$

Setzen wir der Kürze wegen $\frac{dfx}{dx} = f'x$, $\frac{d^2fx}{dx^2} = f''x$, u. f.

Da nun $Fx = \int fx.dx$ ist, so hat man auch $\frac{d.Fx}{dx} = fx$, und eben so $\frac{d.Fa}{da} = fa$, $\frac{d^2\,Fa}{da^2} = \frac{d.fa}{da} = f'a$ u. f., so daß daher der vorhergehende Ausdruck von $F(a+\delta)$ auch so geschrieben werden kann:

$$F(a+\delta) = Fa + \delta.fa + \tfrac{1}{2}\delta^2.f'a + \tfrac{1}{6}\delta^3.f''a + \dots,$$

und ganz eben so erhält man auch für die nächstfolgenden Werthe

$$F(a+2\delta) = F(a+\delta) + \delta.f(a+\delta) + \tfrac{1}{2}\delta^2.f'(a+\delta) + \dots$$
$$F(a+3\delta) = F(a+2\delta) + \delta.f(a+2\delta) + \tfrac{1}{2}\delta^2.f'(a+2\delta) + \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$F(a+n\delta) = F(a+n\delta-\delta) + \delta.f(a+n\delta-\delta)\,\tfrac{1}{2}\delta^2.f'(a+n\delta-\delta) + \dots$$

Addirt man aber alle diese Reihen zusammen und bemerkt, daß $n\delta = b - a$ ist, so erhält man

$$F(b) - F(a) = \delta.\Sigma f(a+i\delta) + \tfrac{1}{2}\delta^2.\Sigma f'(a+i\delta)$$
$$+ \tfrac{1}{6}\delta^3.\Sigma f''(a+i\delta) + \dots \quad (a),$$

wo i nach der Reihe die Zahlen 0, 1, 2, 3, ..., und wo Σ das Summenzeichen anzeigt, das sich auf die n Werthe von δ bezieht, die zwischen $i = 0$ und $i = n - 1$ enthalten sind, so daß man z. B. hat

$$\Sigma f(a+i\delta) = fa + f(a+\delta) + f(a+2\delta) + \dots + f(a+n\delta-\delta).$$

Nimmt man nach und nach die Größen fx und $f'x$, oder $f'x$ und $f''x$ u. s. w. statt den Größen Fx und fx, so erhält man eben so

$$fb - fa = \delta.\Sigma f'(a+i\delta) + \tfrac{1}{2}\delta^2\Sigma f''(a+i\delta) + \dots,$$
$$f'b - f'a = \delta.\Sigma f''(a+i\delta) + \dots$$

Dieß vorausgesetzt, wird man, wenn man die dritten und höheren Potenzen der sehr kleinen Größe δ wegläßt, in der Gleichung (a)

statt $\frac{1}{2}\delta^2.\Sigma f'(a+i\delta)$ setzen können $\frac{1}{2}\delta(fb-fa) - \frac{1}{4}\delta^2(f'b-f'a)$,
und statt $\frac{1}{6}\delta^3.\Sigma f''(a+i\delta)$ » » $\frac{1}{6}\delta^2(f'b - f'a)$.

Diesem gemäß wird also auch die Gleichung (a) in folgende übergehen:

$$F(b) - F(a) = \delta.\Sigma f(a+i\delta) + \tfrac{1}{2}\delta.(fb - fa)$$
$$- \tfrac{1}{12}\delta^2.(f'b - f'a);$$

oder was dasselbe ist, man wird haben

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$y = \int_a^b f(x)\,dx$$
$$= \delta.\left[\tfrac{1}{2} fa + f(a+\delta) + f(a+2\delta) + \ldots + f(a+n\delta-\delta) + \tfrac{1}{2} fb\right]$$
$$- \tfrac{1}{12}\delta^2.(f'b - f'a) \;\ldots\; (A),$$

und dieser Ausdruck wird das gesuchte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ desto genauer darstellen, je kleiner die Größe δ oder $\frac{1}{n}(b-a)$ ist, und je langsamer die Funktion $f(x)$ zwischen ihren beyden Gränzen a und b sich ändert. In den meisten Fällen wird man das letzte, in δ^2 multiplicirte Glied, ganz weglassen können, so daß dann die Gleichung (A) nur die besondern Werthe von $f(x)$ enthält, die in Zahlen gegeben seyn können, ohne daß die Form dieser Funktion bekannt zu seyn braucht.

Ex. Wenden wir dieses auf unser vorhergehendes Beyspiel an, wo $y = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ zu suchen ist, so hat man $f(x) = \frac{1}{x}$, also auch

$$fa = \frac{1}{a},\quad fb = \frac{1}{b},\quad f(a+\delta) = \frac{1}{a+\delta},\quad f(a+2\delta) = \frac{1}{a+2\delta},\ \text{u. f.}$$

Nimmt man auch noch das letzte in δ^2 multiplicirte Glied der Gleichung (A) in Rücksicht, so ist

$$f'a = -\frac{1}{a^2} \quad \text{und} \quad f'b = -\frac{1}{b^2}.$$

Theilt man dann das Intervall $b-a$ in n gleiche Theile, und nennt jeden dieser Theile δ, so ist $\delta = \frac{1}{n}(b-a)$, und daher die Gleichung (A)

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \delta.\left[\frac{1}{2}.\frac{1}{a} + \frac{1}{a+\delta} + \frac{1}{a+2\delta} + \frac{1}{a+3\delta} + \ldots\right.$$
$$\left. + \frac{1}{a+(n-1)\delta} + \frac{1}{2}.\frac{1}{a+n\delta}\right] - \tfrac{1}{12}\delta^2\left[\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right],$$

oder da $a=1$ und $b=2$ ist:

$$y = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \delta\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{1+\delta} + \frac{1}{1+2\delta} + \ldots\right.$$
$$\left. + \frac{1}{1+(n-1)\delta} + \frac{1}{2(n+n\delta)}\right] - \tfrac{1}{16}\delta^2.$$

Nimmt man bloß drey Theile, oder ist $n=3$ und $\delta = \frac{1}{3}$, so hat man

$$y = \tfrac{1}{3}\left[\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{5} + \tfrac{1}{4}\right] - \tfrac{1}{144} = 0.693056.$$

Nimmt man aber vier Theile, oder ist $n=4$ und $\delta = \frac{1}{4}$, so hat man

$$y = \tfrac{1}{4}\left[\tfrac{1}{2} + \tfrac{4}{5} + \tfrac{4}{6} + \tfrac{4}{7} + \tfrac{1}{4}\right] - \tfrac{1}{256} = 0.69312 \text{ u. f. w.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

XXVII.

Integration der vollständigen Differentialausdrücke von zwey oder mehr veränderlichen Größen.

§. 163. (**Integration der vollständigen Differentialausdrücke für zwey Variable.**) Ist u eine Funktion von zwey veränderlichen Größen x und y, so hat das Differential dieser Funktion (nach §. 54) die Form

$$du = P\,dx + Q\,dy,$$

wo $P = \left(\frac{du}{dx}\right)$, $Q = \left(\frac{du}{dy}\right)$ die partiellen Differential-Coefficienten von u in Beziehung auf x und y sind. Soll nun der gegebene Ausdruck $P\,dx + Q\,dy$ ein vollständiges Differential seyn, d. h. soll sich in der That ein endlicher Ausdruck von x und y angeben lassen, der das Integral von $P\,dx + Q\,dy$ ist, so muß, nach §. 58, die Bedingungsgleichung bestehen:

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) - \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (I).$$

Nehmen wir daher an, daß diese Bedingungsgleichung in der That Statt habe, und suchen wir das Integral u des gegebenen Ausdrucks $du = P\,dx + Q\,dy$.

Zu diesem Zwecke wollen wir zuerst die Gleichung $P = \frac{du}{dx}$ oder $du = P\,dx$ bloß in Beziehung auf x integriren, so daß man hat

$$u = \int^{x} P\,dx + Y,$$

wo Y, als eine noch unbestimmte Funktion von y, die Stelle der Constante der Integration (§. 135) vertritt. Setzen wir, der Kürze wegen, dieses Integral $\int^{x} P\,dx = U$, so daß man hat

$$u = U + Y.$$

Um nun die Constante Y zu bestimmen, so gibt die letzte Gleichung, wenn man sie in Beziehung auf y differentiirt:

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = \left(\frac{dU}{dy}\right) + \frac{dY}{dy},$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

oder da $\left(\frac{du}{dy}\right) = Q$ ist:

$$dY = \left[Q - \left(\frac{dU}{dy}\right)\right],$$

oder, wenn man integrirt:

$$Y = \int\left[Q - \left(\frac{dU}{dy}\right)\right] dy.$$

Substituirt man aber den so gefundenen Werth von Y in der vorhergehenden Gleichung $u = U + Y$, so hat man für das gesuchte Integral der gegebenen Gleichung $du = P dx + Q dy$

$$u = U + \int\left[Q - \left(\frac{dU}{dy}\right)\right] dy;$$

ein Ausdruck, der vollständig bestimmt werden kann, da die Größe $\left[Q - \left(\frac{dU}{dy}\right)\right] = S$ bloß eine Funktion von y ist, die kein x enthält. Denn differentiirt man diese Größe bloß in Beziehung auf x, so hat man

$$\left(\frac{dS}{dx}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) - \left(\frac{d^2U}{dy\,dx}\right),$$

oder da $\left(\frac{d^2U}{dy\,dx}\right) = \left(\frac{dP}{dy}\right)$ ist:

$$\left(\frac{dS}{dx}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) - \left(\frac{dP}{dy}\right),$$

also vermöge der oben aufgestellten Bedingungsgleichung

$$\left(\frac{dS}{dx}\right) = 0,$$

zum Zeichen, daß die Größe S von x ganz unabhängig seyn muß.

I. Wäre man, statt von P, von der Größe Q ausgegangen, und hätte man das in Beziehung auf y genommene Integral

$$\overset{y}{\int} Q\,dy = V$$

gesetzt, so würde man für das gesuchte Integral des Ausdruckes $du = P dx + Q dy$ erhalten haben

$$u = V + \int\left[P - \left(\frac{dV}{dx}\right)\right] dx,$$

wo wieder die Größe $P - \left(\frac{dV}{dx}\right)$ eine bloße Funktion von x ohne y ist.

Ex. I. Ist der Ausdruck $du = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}$ gegeben, welcher der Bedingungsgleichung (I) genügt, da $P = \frac{y}{x^2+y^2}$ und $Q = -\frac{x}{x^2+y^2}$

ist, so hat man

$$U = \int^{x} \frac{y\,dx}{y^2 + x^2} = \text{arc. tang.}\,\frac{x}{y} \quad \text{und} \quad \left(\frac{dU}{dy}\right) = -\frac{x}{x^2 + y^2},$$

also auch

$$Q - \left(\frac{dU}{dy}\right) = 0,$$

und daher für das gesuchte Integral

$$u = \text{arc. tang.}\,\frac{x}{y}.$$

Ex. II. Ist der Ausdruck

$$du = \frac{dx}{x} + \frac{dx + dy}{2(x+y)} - \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

gegeben, welcher der Gleichung (I) ebenfalls genug thut, so hat man

$$Q = \frac{1}{2(x+y)} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ also auch}$$

$$V = \int^{y} Q\,dy = \tfrac{1}{2}\log.(x+y) - \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad P - \left(\frac{dV}{dx}\right) = \frac{1}{x},$$

und daher das gesuchte Integral

$$u = \tfrac{1}{2}\log.(x+y) + \log.x - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

§. 164. (**Integration der vollständigen Differentialausdrücke von drey Variablen.**) Die Differentiale dieser Gattung haben die allgemeine Form

$$du = P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

und wenn dieser Ausdruck ein vollständiges Differential, d. h. wenn er in der That integrabel seyn soll, so müssen zwischen den Größen P, Q, R die drey oben (§. 58, I) aufgestellten Bedingungsgleichungen Statt haben.

Dieß vorausgesetzt, wird man, um das Integral u zu finden, zuerst nach §. 163 das Integral von $P\,dx + Q\,dy$ suchen. Sey dieses Integrale gleich W, so hat man

$$u = \int (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = W + Z,$$

wo Z bloß eine Funktion von Z seyn wird. Das vollständige Differential der letzten Gleichung ist aber, da W eine Funktion von x, y und z ist:

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \left(\frac{dW}{dx}\right) dx + \left(\frac{dW}{dy}\right) dy + \left(\frac{dW}{dz}\right) dz + dZ.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nimmt man daher je zwey der Variablen x, y, z als constant an, so erhält man

$$P = \left(\frac{dW}{dx}\right), \quad Q = \left(\frac{dW}{dy}\right) \quad \text{und} \quad R = \left(\frac{dW}{dz}\right) + \frac{dZ}{dz}.$$

Die letzte dieser drey Gleichungen gibt sofort

$$Z = \int \left[B - \left(\frac{dW}{dz}\right)\right] dz,$$

und somit ist das gesuchte Integral

$$u = W + \int \left[R - \left(\frac{dW}{dz}\right)\right] dz,$$

wo wieder $R - \left(\frac{dW}{dz}\right)$ eine bloße Funktion von z ist.

Ex. Sey die Gleichung gegeben

$$du = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{z\,dx - x\,dz}{x^2 + z^2} + z\,dz,$$

die, wie man sieht, den drey Bedingungsgleichungen des §. 58, I. entspricht.

Setzt man nun $P dx + Q dy = dW$, so erhält man, nach §. 163

$$W = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \text{arc. tang.} \frac{x}{z};$$

also ist auch

$$\left(\frac{dW}{dz}\right) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{x}{x^2 + z^2} \quad \text{und} \quad R - \left(\frac{dW}{dz}\right) = z$$

so wie

$$\int \left[R - \left(\frac{dW}{dz}\right)\right] dz = \tfrac{1}{2} z^2,$$

und daher das gesuchte Integral

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \text{arc. tang.} \frac{x}{z} + \tfrac{1}{2} z^2.$$

Man sieht, wie sich dieß auch auf Funktionen von mehr als drey Variablen fortsetzen läßt.

XXVIII.

Integration der Differentialausdrücke der zweyten und höheren Ordnung.

§. 165. (Integral von $d^2y = Xdx^2$). Bisher haben wir nur die Ausdrücke der Form

$$dy = Xdx$$

behandelt, wo X irgend eine Funktion von x bezeichnet. Es sey nun der Differentialausdruck

$$d^2y = Xdx^2$$

gegeben, wo X wieder eine Funktion von x ist. Da man diesen Ausdruck auch so schreiben kann:

$$\frac{d^2y}{dx} = Xdx,$$

so hat man sofort, wenn man dx als constant betrachtet, für das Integral des letzten Ausdrucks

$$\frac{dy}{dx} = \int Xdx + C.$$

Setzt man dann $P = \int Xdx$, so ist $dy = Pdx + Cdx$, und daher, wenn man wieder integrirt:

$$y = \int Pdx + Cx + C',$$

wo C und C' die Constanten der beyden Integrationen sind. Stellt man den Werth von P wieder her, so hat man

$$y = \int dx \int Xdx + Cx + C' \quad . \quad . \quad . \quad (I).$$

I. Man kann aber auch, mittelst der theilweisen Integration (§. 153), dieses doppelte Integral auf zwey einfache zurückführen. Denn setzt man in der Gleichung $\int u d\nu = u\nu - \int \nu du$ die Größe $u = P$ und $x = \nu$, so hat man

$$\int Pdx = Px - \int xdP = x\int Xdx - \int Xxdx,$$

also auch für das gesuchte Integral

$$y = x\int Xdx - \int Xxdx \quad . \quad . \quad . \quad (II),$$

in welchem Ausdrucke man eigentlich

$$\int Xdx + C \quad \text{statt} \quad \int Xdx, \quad \text{und}$$

$$\int X x dx + C' \text{ statt } \int X x dx$$

setzen muß.

Ex. Ist die Gleichung $d^2 y = x^2 dx^2$ gegeben, so ist $X = x^2$, also auch

$$\int X dx = \tfrac{1}{3}x^3 \quad \text{und} \quad \int dx \int X dx = \int dx \,.\, \tfrac{1}{3}x^3 = \frac{x^4}{3.4},$$

und daher, nach der Gleichung (I):

$$y = \frac{x^4}{3.4} + Cx + C'.$$

Eben so ist

$$x \int X dx = x \int x^2 dx = x(\tfrac{1}{3}x^3 + C) \quad \text{und}$$

$$\int X x dx = \tfrac{1}{4}x^4 + C',$$

also auch beyder Differenz nach der Gleichung (II):

$$y = \frac{x^4}{3.4} + Cx - C'$$

wie zuvor, da die Größe C' positiv oder negativ seyn kann.

§. 166. (**Differentialausdrücke der dritten und höheren Ordnung.**) Ist ein Differentialausdruck $d^3 y = X dx^3$ gegeben, wo X eine Funktion von x, und wo dx constant vorausgesetzt wird, so hat man auch

$$\frac{d^3 y}{dx^2} = d \,.\, \frac{d^2 y}{dx^2} = X dx, \text{ und daher } \frac{d^2 y}{dx^2} = \int X dx + C.$$

Aus der letzten Gleichung aber folgt

$$\frac{d^2 y}{dx} = dx \int X dx + C dx \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = \int dx \int X dx + Cx + C',$$

und daher, wenn man noch einmal integrirt:

$$y = \int dx \int dx \int X dx + Cx^2 + C'x + C'',$$

da man offenbar statt $\frac{1}{2}C$ auch die unbestimmte Constante C substituiren kann. Eben so wird man für $d^4 y = X dx^4$ das Integral erhalten

$$y = \int dx \int dx \int dx \int X dx + Cx^3 + C'x^2 + C''x + C''' \text{ u. f.}$$

Ex. Die Gleichung $d^3 y = x^2 dx^3$ gibt $X = x^2$, also auch

$$\int X dx = \tfrac{1}{3}x^3 + C,$$

$$\int dx \int X dx = \int (\tfrac{1}{3}x^3 + C) dx = \frac{x^4}{3.4} + Cx + C',$$

$$\int dx \int dx \int X dx = \int \left(\frac{x^4}{3.4} + Cx + C'\right) dx$$

$$= \frac{x^5}{3.4.5} + \tfrac{1}{2}Cx^2 + C'x + C''.$$

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

I. Auch kann man, wie in §. 165, I., diese zusammengesetzten Integrale auf einfache zurückbringen. So haben wir aus der Gleichung $\frac{d^2 y}{d x^2} = X$ am angeführten Orte bereits erhalten:

$$y = x\int X dx - \int X x dx = \int\int X dx^2.$$

Ist nun die nächstfolgende Gleichung $d^3 y = X dx^3$ gegeben, so hatten wir bereits oben für das Integral derselben gefunden

$$y = \int dx \int dx \int X dx = \int dx \int\int X dx^2.$$

Substituirt man in diesem Ausdrucke den vorhergehenden Werth von $\int\int X dx^2$, so erhält man

$$y = \int x dx \int X dx - \int dx \int X x dx.$$

Setzt man aber in der Gleichung $\int u d\nu = u\nu - \int \nu du$

$$u = \int X dx \text{ und } \nu = \tfrac{1}{2} x^2, \text{ so ist}$$

$$\int x dx \int X dx = \tfrac{1}{2} x^2 \int X dx - \tfrac{1}{2} \int x^2 X dx.$$

Setzt man in derselben Gleichung

$$u = \int X x dx \text{ und } \nu = x, \text{ so ist}$$

$$\int dx \int X x dx = x \int X x dx - \int x^2 X dx.$$

Substituirt man endlich diese Werthe in dem vorhergehenden Ausdrucke von y, so erhält man für das Integral der Gleichung $d^3 y = X dx^3$

$$y = \tfrac{1}{2} x^2 \int X dx - x \int X x dx + \tfrac{1}{2} \int X^2 dx.$$

Fährt man so fort, so erhält man die folgenden Integrale:

Von der Gleichung	ist das Integral:
$dy = X dx$	$y = \int X dx,$
$d^2 y = X dx^2$	$y = \frac{1}{1}[x \int X dx - \int X x dx],$
$d^3 y = X dx^3$	$y = \frac{1}{1 \cdot 2}[x^2 \int X dx - 2x \int X x dx + \int X x^2 dx],$
$d^4 y = X dx^4$	$y = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}[x^3 \int X dx - 3x^2 \int X x dx + 3x \int X^2 dx - \int X^3 dx]$ u. f.,

wo die numerischen Coefficienten die des Binomiums sind, und wo das Gesetz des Fortgangs dieser Reihen für sich deutlich ist. Übrigens müssen auch hier die Constanten jeder einzelnen Integration besonders berücksichtiget werden, wie dieß schon oben (§. 165, I) bemerkt worden ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

XXIX.

Quadratur der Curven.

§. 167. (**Quadratur der Parabeln und Hyperbeln.**) Wir wollen nun in diesem und den zwey nächstfolgenden Abschnitten die bisher vorgetragenen Vorschriften der Integralrechnung auf die Geometrie anwenden.

Nennt man F die Fläche, welche zwischen zwey Ordinaten einer ebenen Curve enthalten und auf der einen Seite von der Abscissenaxe, auf der andern aber durch den Bogen der Curve begränzt ist, so haben wir bereits oben (§. 89) für das Differential dieser Fläche den Ausdruck

$$dF = y\,dx$$

gefunden. Wenn man daher aus der gegebenen Gleichung der Curve diesen Ausdruck auf die Form

$$dF = X\,dx$$

bringt, wo X irgend eine Funktion von x ist, so wird man, durch die Integration dieser Gleichung, nach den vorhergehenden Regeln, den Werth der erwähnten endlichen Fläche F, durch x oder y ausgedrückt, bestimmen, und in dieser Bestimmung besteht die sogenannte Quadratur der Curven.

§. 168. (**Quadratur der Parabel.**) So haben wir a. a. O. für die Apollonische Parabel, deren halber Parameter p ist, die Gleichung $y^2 = 2px$, also auch

$$dF = dx\,.\sqrt{2px}$$

erhalten. Das Integral dieser Gleichung ist

$$F = \tfrac{2}{3}\sqrt{2px^3} + C \quad \text{oder}$$
$$F = \tfrac{2}{3}xy + C.$$

Zählt man diese Fläche φ von dem Scheitel der Parabel, so ist $\varphi = 0$ für $x = 0$, also auch $C = 0$, und man erhält

$$F = \tfrac{2}{3}xy.$$

Zählt man aber diese Fläche von derjenigen Ordinate, die durch den Brennpunkt der Parabel geht, und für die $y = p$, also auch $x = \frac{1}{2}p$ ist, so verschwindet das Integral

$$F = \tfrac{2}{3}\sqrt{2px^3} + C$$

für $x = \tfrac{1}{2}p$, wodurch die Constante $C = -\tfrac{1}{3}p^2$, und daher die gesuchte Fläche

$$F = \tfrac{2}{3}xy - \tfrac{1}{3}p^2$$

wird. Sucht man endlich diejenige Fläche, welche zwischen den beyden Ordinaten $y = a$ und $y = b$ enthalten ist, so findet man

$$\int_a^b y\,dx = \frac{1}{3p}(b^3 - a^3).$$

I. Die Parabeln der höheren Ordnungen haben die Gleichung

$$y^n = ax^m,$$

woraus folgt

$$F = \int y\,dx = \int a^{\frac{1}{n}}.x^{\frac{m}{n}}\,dx = \frac{n a^{\frac{1}{n}}}{m+n}.x^{\frac{m+n}{n}} + C.$$

II. Eben so hat man für die Hyperbeln der höheren Ordnungen

$$x^m y^n = a,$$

also auch

$$F = \int y\,dx = \frac{n a^{\frac{1}{n}}}{n-m}\,x^{\frac{n-m}{n}} + C.$$

§. 169. (Quadratur des Kreises und der Ellipse.) Ist $BP = x$ (Fig. 11), $FM = y$ und der Halbmesser des Kreises $BA = a$, so ist die Fläche des Abschnittes BMP

$$F = \int y\,dx = \int dx\sqrt{2ax - x^2},$$

also auch

$$F = -\tfrac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax - x^2} + \tfrac{1}{2}a^2 \text{ arc. cos. } \frac{a-x}{a} + C.$$

Da für $x = 0$ auch $F = 0$ wird, so ist auch $C = 0$. Man erkennt leicht in dem ersten Theile dieses Integrals die Fläche des Dreyecks APM, und in dem zweyten die Fläche des Kreissectors BMA. Für $x = 2a$ erhält man die Fläche des Halbkreises $= \tfrac{1}{2}a^2\pi$, also auch die des ganzen Kreises $= a^2\pi$.

Ist aber der Anfang der Coordinaten im Mittelpunkte A des Kreises und $AP = x'$, $PM = y$, so hat man für die Fläche NAPM oder

$$F = \int dx'\sqrt{a^2 - x'^2} = \tfrac{1}{2}x'\sqrt{a^2 - x'^2} + \tfrac{1}{2}a^2 \text{ arc. sin. } \frac{x'}{a} + C.$$

I. Für die Ellipse, deren Halbaxen a und b sind, hat man, wenn

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der Anfang der Coordinaten im Scheitel der großen Axe 2 a ist:

$$y^2 = \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2},$$

also auch für die Fläche BMP

$$F = \frac{b}{a}\int dx \sqrt{2ax - x^2},$$

woraus durch Integration folgt

$$F = \tfrac{1}{2} a b \text{ arc. cos. } \frac{a - x}{a} - \frac{b(a - x)}{2a}\sqrt{2ax - x^2}.$$

Wenn man also über der großen Axe der Ellipse, als Durchmesser, einen Kreis beschreibt, so verhält sich der elliptische Abschnitt zu dem des Kreises, wenn beyde dieselbe Abscisse haben, wie $\frac{b}{a}$ zur Einheit. Also ist auch die Fläche der ganzen Ellipse gleich $\frac{b}{a} \cdot a\pi = ab\pi$.

II. Eben so findet man für das Differential des elliptischen Ausschnittes

$$d \,.\, BAM = -\frac{a b\, dx}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = dF.$$

Verlängert man die Ordinate PM, bis sie den erwähnten Kreis in M′ schneidet, und nennt F′ den Kreisausschnitt BAM′, so ist

$$d \,.\, BAM' = -\frac{a^2\, dx}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = dF',$$

also wieder $\frac{dF}{dF'} = \frac{ab}{a^2} = \frac{b}{a}$, und daher auch $\frac{F}{F'} = \frac{b}{a}$.

III. Für die Hyperbel, deren Halbaxen a und b sind, hat man

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

also ist auch der hyperbolische Ausschnitt, der zwischen der halben Axe a, zwischen einem Bogen der Hyperbel und zwischen der geraden Linie enthalten ist, welche den Endpunkt dieses Bogens mit dem Mittelpunkte der Hyperbel verbindet, gleich

$$\tfrac{1}{2} a b \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \tfrac{1}{2} a b \log. (2x + 2\sqrt{x^2 - a^2}).$$

Zieht man diese Fläche von der des rechtwinkligen Dreyecks ab, dessen Catheten x und y sind, so erhält man für die Fläche OBM der Hyperbel (Fig. 33), deren Scheitel in O liegt:

$$OBM = \tfrac{1}{2}xy - \tfrac{1}{2}ab\log.(2x + 2\sqrt{x^2 - a^2}) + C;$$

oder da $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ ist, und da diese Fläche OBM für $x = a$ verschwinden soll:

$$OBM = \frac{bx}{2a}\sqrt{x^2 - a^2} - \tfrac{1}{2}ab\log.\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}.$$

§. 170. (**Quadratur der transcendenten Curven.**) I. Für die Logistik ist $y = \log.x$, wo $AP = x$, $PM = y$ (Fig. 21), also auch

$$\int y\,dx = \int dx\log.x = x\log.x - x + C.$$

Soll die Fläche zugleich mit x verschwinden, so findet man $C = 0$. Endlich hat man für $x = AB = 1$ den asymptotischen Raum $ABmn = -1$.

II. Für die Cyclois hat man (Fig. 43), wenn $CQ = x$, $QM = y$ ist (§. 22, I):

$$y = a\,\mathrm{arc.cos.}\left(1 - \frac{x}{a}\right) + \sqrt{2ax - x^2},$$

also auch

$$dy = \frac{(2a - x)\,dx}{\sqrt{2ax - x^2}}.$$

Es ist daher die Fläche $CMQ = \int y\,dx = xy - \int x\,dy$.

Allein das Integral $\int x\,dy = \int dx\sqrt{2ax - x^2}$ ist gleich der Kreisfläche CNQ des die Cyclois erzeugenden Kreises. Vollendet man daher das Rechteck CQMG, dessen Fläche xy ist, so ist die cycloidische Fläche GMC gleich der Kreisfläche CNQ. Für $x = CD = 2a$ ist die Fläche des Halbkreises $\frac{1}{2}a^2\pi$ gleich der Fläche AMCE, und da die Fläche des Rechteckes $ADCE = 2a^2\pi$ ist, so ist auch die Fläche AMCD der halben Cyclois gleich $\frac{3}{2}a^2\pi$.

§. 171. (**Quadratur der Spiralen.**) Für die Spiralen (§. 23) wird es bequemer seyn, die Quadratur derselben nach den Polarcoordinaten (§. 93, II) vorzunehmen. Nach diesen hat man für die Fläche F, die der Radius Vector zurücklegt, während er um den Pol einen Winkel v beschreibt:

$$F = \tfrac{1}{2}\int r^2\,dv.$$

Um dieß auf die Spiralen anzuwenden, deren allgemeine Glei-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

chung $r = a \, . \, \nu^n$ ist, so hat man sofort

$$F = \frac{a^2 \, . \, \nu^{2n+1}}{2(2n+1)} + C.$$

Ist die Größe n positiv und wird die Fläche F von der festen Geraden CA (Fig. 27) gezählt, von welcher auch die Winkel ν gerechnet werden, so verschwindet die Constante C der Integration, und man hat

$$F = \frac{a^2 \, . \, \nu^{2n+1}}{2(2n+1)}.$$

Für die Spirale des Archimedes (§. 23, I) ist $n = 1$ und $a = \frac{1}{2\pi}$, also auch $r = \frac{\nu}{2\pi}$, und daher

$$F = \frac{\nu^3}{24\pi^2}.$$

Nach einer vollen Drehung des Radius oder für $\nu = 2\pi$ ist die Fläche $F' = \frac{1}{3}\pi$. Nach zwey Revolutionen ist $\nu = 4\pi$ und $F'' = \frac{8}{3}\pi$. Nach drey Revolutionen ist $F = \frac{27}{3}\pi$. Überhaupt hat man nach der n^{ten} Drehung $F^n = n^3 \, . \, \frac{1}{3}\pi$, und nach der $(n+1)^{sten}$ Drehung $F^{n+1} = (n+1)^3 \, . \, \frac{1}{3}\pi$, so daß also die Fläche, die zunächst nach der n^{ten} Drehung noch zu den vorhergehenden hinzukömmt, gleich ist

$$F^{n+1} - F^n = \left[(n+1)^3 - n^3\right] \tfrac{1}{3}\pi.$$

Für die logarithmische Spirale (§. 23, II) ist $\nu = \log . r$, also auch

$$F = \tfrac{1}{2}\int r^2 \, d\nu = \tfrac{1}{4} r^2 + C.$$

§. 172. (**Quadratur zwischen schiefwinkligen Coordinaten.**) Man bemerke noch, daß sich die Quadratur der Curven auch zwischen schiefwinkligen Coordinaten auf dieselbe Weise vornehmen läßt. Ist nämlich α der Winkel, welchen die beyden Coordinaten x und y unter sich bilden, so wird man nun in dem rechtwinkligen Coordinatensysteme statt y die Größe $y \sin . \alpha$ setzen, und dann für den Raum, der von diesen schiefen Coordinaten und von der Curve begränzt wird, den Ausdruck haben

$$F = \int (y \sin . \alpha) \, dx,$$

oder da α constant ist:

$$F = \sin . \alpha \int y \, dx.$$

Sind a und b die Halbaxen einer Hyperbel AM (Fig 44), und nimmt man die Abscissen $CP = x$ von dem Mittelpunkte C der Hyperbel auf der einen Asymptote derselben und die Ordinaten $PM = y$

der andern Asymptote parallel, so ist die bekannte Gleichung dieser Curve

$$y x = \varepsilon^2, \text{ wo } \varepsilon = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} \text{ ist.}$$

Dieß gibt

$$F = \varepsilon^2 \sin.\alpha \int \frac{dx}{x} = \varepsilon^2 \sin.\alpha \,.\, \log.x + C,$$

wo $\log.x$ den natürlichen Logarithmus von x bezeichnet. Ist die Abscisse des Scheitels A der Hyperbel oder ist $x = CB = \varepsilon$, so hat man, wenn man die Fläche $F = ABPM$ von der Ordinate AB aus zählt, $C = - \varepsilon^2 \sin.\alpha \log.\varepsilon$, also auch

$$F = ABPM = \varepsilon^2 \sin.\alpha \,.\, \log.\frac{x}{\varepsilon}.$$

Setzt man $\varepsilon = 1$, so ist $F = \sin.\alpha \,.\, \log.x$, also $\sin.\alpha$ der Model des Systems.

Für $\alpha = 45^0\, 44'\, 25''$ ist $\sin.\alpha = 0.434294$ der Model des Briggischen Systems.

Für $a = b$ ist die Hyperbel gleichseitig und $xy = \tfrac{1}{2}a^2$, also auch, da hier $\alpha = 90^0$ ist:

$$F = \int y\,dx = \tfrac{1}{2}a^2 \log.x + C.$$

Zählt man auch hier die Fläche φ von der Ordinate AB des Scheitels A, so ist $F = 0$ für $x = CB = AB = \sqrt{\tfrac{1}{2}a^2}$, also

$$C = - \tfrac{1}{2}a^2 \log.\sqrt{\tfrac{1}{2}a^2} \quad \text{oder}$$

$$F = ABPM = \tfrac{1}{2}a^2 \log.\frac{x\sqrt{2}}{a}.$$

Nimmt man $AB = BC = 1$ oder $a = \sqrt{2}$, so ist

$$F = ABPM = \log.x.$$

§. 173. (**Vereinfachung dieses Verfahrens, wenn die Curve durch zwey Gleichungen ausgedrückt wird.**) Öfter ist es, zu bestimmten Zwecken, bequemer, den analytischen Ausdruck einer ebenen Curve, nicht wie bisher, durch eine einzige Gleichung zwischen x und y, sondern durch zwey Gleichungen zu geben, deren eine den Werth von x und die andere von y durch eine dritte Größe φ bezeichnet. Ein Beyspiel einer solchen Zerlegung haben wir bereits oben (Einl. §. 22) bey der Cycloïs gesehen, deren zwey Gleichungen sind

$$x = a(\varphi - \sin.\varphi) \quad \text{und} \quad y = a(1 - \cos.\varphi).$$

Die erste dieser Gleichungen gibt

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$dx = a\,d\varphi\,(1 - \cos.\varphi),$$

also ist auch sofort

$$F = \int y\,dx = a^2 \int d\varphi\,(1 - \cos.\varphi)^2 \quad \text{oder}$$
$$F = a^2 (\tfrac{3}{2}\varphi - 2\sin.\varphi + \tfrac{1}{4}\sin.2\varphi).$$

Für $\varphi = \pi$, d. h. für die halbe Cyclois, hat man

$$F = \tfrac{3}{2} a^2 \pi, \text{ wie zuvor.}$$

I. Auf gleiche Art läßt sich auch die Ellipse behandeln, deren Gleichung ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Setzt man $x = a\cos.\varphi$ und $y = b\sin.\varphi$, so kann man der vorhergehenden Gleichung diese beyden substituiren, und da dann $dx = -a\,d\varphi \sin.\varphi$ ist, so hat man

$$F = \int y\,dx = ab \int d\varphi \sin.^2\varphi = \tfrac{1}{2} ab \int d\varphi\,(1 - \cos.2\varphi)$$
$$\text{oder} \quad F = \tfrac{1}{2} ab\,(\varphi - \tfrac{1}{2}\sin.2\varphi).$$

Für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ erhält man die Fläche des elliptischen Quadranten gleich $\frac{1}{4} ab\pi$, also auch die Fläche der ganzen Ellipse gleich $ab\pi$, wie zuvor.

II. Bemerken wir bey dieser Gelegenheit, daß dasselbe Verfahren auch oft vortheilhaft auf die Gleichungen der Flächen angewendet werden kann, die man auf diese Weise durch drey Gleichungen zwischen zwey willkürlichen Hülfsgrößen φ und ψ ausdrücken wird.

So hat man für die Fläche, welche durch die Rotation einer Ellipse um ihre kleine Axe b entstanden ist, die Gleichung

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

und dieser Gleichung kann man auch die drey folgenden substituiren:

$$x = a\cos.\varphi\cos.\psi, \quad y = a\sin.\varphi\cos.\psi, \quad z = b\sin.\psi.$$

Für das Ellipsoid mit drey Axen endlich, oder für die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

kann man auch folgende drey Gleichungen setzen:

$$x = a\cos.\varphi\cos.\psi, \quad y = b\sin.\varphi\cos.\psi, \quad z = c\sin\psi,$$

wo man über die Bedeutung dieser Hülfsgrößen φ und ψ dasjenige nachsehen kann, was wir oben (Einl. §. 12, II) gesagt haben.

§. 174. (**Fläche, die zwischen zwey Curven enthalten ist.**) Seyen zwey Curven gegeben, die beyde dieselbe Axe der x und in dieser Axe denselben Anfangspunkt der Coordinaten haben. In dem Endpunkte P der beyden Curven gemeinschaftlichen Abscisse x errichte man auf die Abscissenaxe eine senkrechte Gerade, welche die erste Curve in dem Punkte M, und die zweyte in dem Punkte M′ schneidet. Setzt man diese zwey Ordinaten $PM = y$ und $PM' = y'$, so hat man für die erste Curve, deren Gleichung zwischen x und y gegeben ist, für das Differential der zwischen ihr und der Abscissenaxe enthaltenen Fläche, wie bisher, den Ausdruck $\int y\,dx$. Für die zweyte Curve, deren Gleichung zwischen x und y′ gegeben ist, wird die analoge Fläche gleich $\int y'dx$ seyn, so daß man daher für diejenige Fläche, welche zwischen diesen beyden Curven und zwischen denjenigen zwey Ordinaten enthalten ist, die zu den gemeinschaftlichen Abscissen α und β gehören, den Ausdruck haben wird

$$F = \int_\beta^\alpha (y - y')\,dx,$$

der y größer als y′ voraussetzt. Für den entgegengesetzten Fall $y < y'$ wird man haben

$$F = \int_\beta^\alpha (y' - y)\,dx.$$

Sey z. B. AMBDC (Fig. 46) ein Kreis des Halbmessers a. Auf den Durchmesser $AD = 2a$ dieses Kreises sey die Ellipse AMB′D beschrieben, deren halbe große und kleine Axe $AC = CD = a$ und $CB' = b$ ist. Nimmt man die gemeinschaftliche Abscisse $AP = x$ von dem Scheitel beyder Curven, so hat man für den Kreis

$$PM = y = \sqrt{2ax - x^2},$$

und für die Ellipse

$$PM' = y' = \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2},$$

und daher für die zwischen Kreis und Ellipse enthaltene Fläche AM′M

$$F = \int (y - y')\,dx \quad \text{oder}$$

$$F = \int \left(\sqrt{2ax - x^2} - \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}\right) dx$$
$$= \left(1 - \frac{b}{a}\right)\int dx\sqrt{2ax - x^2}.$$

Das Integral $\int dx\sqrt{2ax - x^2}$ wurde aber schon oben (§. 170) gleich

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\tfrac{1}{2} a^2 \text{ arc. cos.} \frac{a-x}{a} - \tfrac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax - x^2}$$

gefunden, so daß man daher hat

$$F = AMM' = \tfrac{1}{2} a (a-b) \text{ arc. cos.} \frac{a-x}{a}$$

$$- \frac{1}{2a}(a-b)(a-x)\sqrt{2ax - x^2} \quad . \; . \; . \quad (I).$$

Für $x = a$ gibt dieser Ausdruck die Fläche $ABB' = \tfrac{1}{4} a (a-b)\pi$, und wenn man diesen Werth vier Mal nimmt, so erhält man für den Raum, der zwischen dem Kreise und der ganzen Ellipse enthalten ist, den Ausdruck

$$a(a-b)\pi.$$

I. Noch einfacher gelangt man zu demselben Resultate, wenn man die oben (§. 174, I) für den Kreis und für die Ellipse eingeführten Bezeichnungen gebraucht. Dann ist nämlich

$$x = a \cos.\varphi, \quad y = a \sin.\varphi \quad \text{und} \quad y' = b \sin.\varphi,$$

also auch

$$F = \int (y - y') dx = a(a-b) \int d\varphi \sin.^2\varphi \quad \text{oder}$$

$$F = \tfrac{1}{2} a (a-b)(\varphi - \tfrac{1}{2} \sin. 2\varphi) \quad . \; . \; . \quad (II),$$

wenn F mit φ zugleich verschwindet. Für $\varphi = \tfrac{1}{2}\pi$ erhält man die Fläche $ABB' = \tfrac{1}{4} a (a-b)\pi$, wie zuvor.

Setzt man in dem letzten Ausdrucke (II) von F für $\cos.\varphi$ den Werth $\frac{a-x}{a}$, so ist $\sin.\varphi = \frac{1}{a}\sqrt{2ax - x^2}$ und

$$\sin. 2\varphi = 2 \sin.\varphi \cos \varphi = \frac{2(a-x)}{a^2}\sqrt{2ax - x^2}.$$

Substituirt man diese Werthe von $\varphi = \text{arc. cos.} \frac{a-x}{a}$ und von $\sin. 2\varphi$ in der Gleichung (II), so erhält man die Gleichung (I) wieder.

II. Denselben Ausdruck der Quadratur

$$F = \int (y - y') dx$$

wird man auch in allen denjenigen Fällen anwenden, wo die Curve, deren Quadratur man sucht, von der Axe der x nicht geschnitten wird, sondern z. B. als eine geschlossene krumme Linie ganz über oder unter dieser Axe liegt, vorausgesetzt, daß die Ordinate y der Curve für jede Abscisse x einen doppelten Werth gibt. So hat man für einen Kreis des Halbmessers a, wenn man die Abscissen $AP = x$ (Fig. 47) auf einer seiner Tangenten nimmt, für die Ordinate $y = a \pm \sqrt{a^2 - x^2}$. Setzt man daher

$PM = y = a + \sqrt{a^2 - x^2}$ und $PM' = y' = a - \sqrt{a^2 - x^2}$,
so hat man

$$dF = (y - y')\,dx = 2\sqrt{a^2 - x^2}\,.\,dx,$$

also auch für die Fläche $F = ABMM'$ den Ausdruck

$$F = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \text{ arc. sin. } \frac{x}{a}.$$

Für $x = a$ ist $F = \frac{1}{2}a^2\pi$ die Fläche des Halbkreises, wie zuvor.

III. Wenn die beyden oben erwähnten Curven sich in zwey Punkten schneiden oder auch berühren, und wenn $x = \alpha$ und $x = \beta$ die Abscissen dieser zwey Punkte sind, so wird auch hier der Ausdruck

$$F = \int_\beta^\alpha (y - y')\,dx$$

die zwischen den beyden Curven eingeschlossene Fläche geben, und dieß wird auch noch der Fall seyn, wenn y und y' zwey verschiedene Ordinaten einer einzigen, geschlossenen Curve bezeichnen, wo dann α und β die kleinste und die größte aller Abscissen sind, die den verschiedenen Punkten der Curve entsprechen. Wäre z. B. die Gleichung

$$x^{2m} + y^{2m} = 1$$

einer Curve gegeben, so findet man daraus

$$y = -(1 - x^{2m})^{\frac{1}{2m}} \quad \text{und} \quad y' = (1 - x^{2m})^{\frac{1}{2m}},$$

und daher auch

$$F = 2\int_\beta^\alpha (1 - x^{2m})^{\frac{1}{2m}}\,dx.$$

Da übrigens $\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{x}{y}\right)^{2m-1}$ ist, so wird die Tangente der Curve mit der Axe der y parallel seyn, wenn man hat $y = 0$, das heißt, wenn $x = -1$ und $x = +1$ ist, und diese beyden Werthe von x sind offenbar auch die kleinste und größte unter allen möglichen Abscissen. Demnach hat man

$$F = 2\int_{-1}^{1} (1 - x^{2m})^{\frac{1}{2m}}\,dx,$$

wofür man auch setzen kann (s. unten §. 240)

$$F = 4\int_0^1 (1 - x^{2m})^{\frac{1}{2m}}\,dx.$$

Für den besondern Fall $m = 1$ wird die Curve ein Kreis des

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Halbmessers 1, und daher $F=\pi$, wie zuvor. Für den Fall $m=\frac{1}{3}$ aber ist die Gleichung der Curve

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1, \text{ und daher}$$

$$F=4\int_0^1(1-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\,dx.$$

Setzt man $x=\sin.^3\varphi$, so wird

$$F=12\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\cos.^4\varphi-\cos.^6\varphi)\,d\varphi=6\pi\left(\frac{1.3}{2.4}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)=\frac{3}{8}\pi.$$

IV. Der vorhergehende allgemeine Ausdruck für F wird selbst dann noch bestehen, wenn die Größen y und y' ihre Form mit der Abscisse x ändern, und nach und nach anderen Curven zugehören. Um dieß durch ein Beyspiel deutlich zu machen, sey die Gleichung gegeben

$$y=1-x^2,$$

die einer Parabel mDn (Fig. 22) zugehört, deren Scheitel in D, und wo der Anfangspunkt der Coordinaten in A ist, so daß man hat $AC=AC'=1$.

Zieht man durch diesen Punkt A eine Gerade AM, deren Gleichung $y=\frac{5}{6}x$ ist, und zieht man auf der andern Seite von AD eine zweyte Gerade, deren Gleichung $y=-\frac{3}{2}x$ ist, so hat man für die Differenz der Ordinaten der Parabel und dieser beyden Geraden auf der ersten Seite der positiven x

$$y=1-x^2-\frac{5}{6}x,$$

und auf der Seite der negativen x

$$y'=1-x^2+\frac{3}{2}x.$$

Von diesen beyden Werthen von y verschwindet der erste für $x=\frac{2}{3}$, und der zweyte für $x=-\frac{1}{2}$. Will man daher die Fläche bestimmen, die, auf der Seite CDC′ der positiven y, zwischen der Parabel und zwischen jenen beyden geraden Linien enthalten ist, so wird man in dem allgemeinen Ausdrucke von F die Größen $\alpha=\frac{2}{3}$ und $\beta=-\frac{1}{2}$ nehmen, und sonach erhalten

$$F=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}}(y'-y)\,dx$$

oder auch (s. unten §. 240)

$$F=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}y'\,dx+\int_0^{\frac{2}{3}}y\,dx,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

das heißt

$$F = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} (1 - x^2 + \tfrac{3}{2}x)\,dx + \int_{0}^{\frac{2}{3}} (1 - x^2 - \tfrac{5}{6}x)\,dx.$$

Nimmt man diese Integrale zwischen den angezeigten Gränzen, so erhält man

$$F = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{24} - \tfrac{3}{16} + \tfrac{2}{3} - \tfrac{8}{81} - \tfrac{5}{27} = \tfrac{847}{1296}.$$

XXX.

Rectification der Curven.

§. 175. (**Rectification der Parabel.**) Da für rechtwinklige Coordinaten x und y das Differential des Bogens s einer ebenen Curve bereits oben (§. 88) gleich

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

gefunden worden ist, so wird man auch die Länge dieses Bogens zwischen zwey gegebenen Punkten desselben erhalten, wenn man mittelst der gegebenen Gleichung der Curve den vorhergehenden Ausdruck von ds auf die Form $f(x).dx$ oder $f(y).dy$ bringt, und dann diesen Ausdruck zwischen den beyden gegebenen Gränzen desselben integrirt.

Für die Parabel hat man $y^2 = ax$, also ist auch

$$dy = \tfrac{1}{2}dx\sqrt{\frac{a}{x}} \quad \text{und} \quad ds = \tfrac{1}{2}dx\sqrt{\frac{a+4x}{x}},$$

oder auch, wenn man $a = 4b$ setzt:

$$ds = \int dx\sqrt{\frac{b+x}{x}}.$$

Es ist aber

$$\sqrt{\frac{b+x}{x}} = \frac{x}{\sqrt{bx+x^2}} + \frac{b}{\sqrt{bx+x^2}},$$

und nach dem Vorhergehenden

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{bx+x^2}} = \sqrt{bx+x^2} - \tfrac{1}{2}b\int\frac{dx}{\sqrt{bx+x^2}} \quad \text{und}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{bx+x^2}} = \log.(b + 2x + 2\sqrt{bx+x^2}),$$

also hat man auch, wenn man dieses Integral mit x zugleich verschwinden läßt:

$$s = \sqrt{bx + x^2} + \tfrac{1}{2} b \log. \frac{b + 2x + 2\sqrt{bx + x^2}}{b},$$

wo man wieder den Werth von $b = \frac{1}{4} a$ substituiren kann. Auch hat man $ds = \frac{dy}{a} \sqrt{a^2 + 4y^2}$, und daher

$$s = \frac{y}{2a} \sqrt{a^2 + 4y^2} + \tfrac{1}{4} a \log. \frac{2y + \sqrt{a^2 + 4y^2}}{a}.$$

§. 176. (**Rectification der Ellipse.**) Für die Ellipse hat man die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

also auch, wenn man $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \varepsilon^2$ setzt:

$$ds = \frac{dx}{a} \sqrt{\frac{a^2 - \varepsilon^2 x^2}{a^2 - x^2}},$$

oder wenn man $x = ax'$ setzt:

$$ds = dx' \sqrt{\frac{1 - \varepsilon^2 x'^2}{1 - x'^2}}.$$

Das Integral dieses Ausdrucks wurde aber schon oben (§. 157) gegeben, so daß man daher hat

$$s = a \text{ arc. sin.} \frac{x}{a} + \tfrac{1}{2} a \varepsilon^2 \left[\frac{x}{2a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - \tfrac{1}{2} \text{arc. sin.} \frac{x}{a}\right]$$
$$+ \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot a\varepsilon^4 \left[\left(\frac{x^3}{4a^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x}{a}\right) \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \text{ arc. sin.} \frac{x}{a}\right] + \text{etc.}$$

wo die Constante der Integration verschwindet, wenn $s = 0$ für $x = 0$ ist. Für den Quadranten der Ellipse wird man in dem vorhergehenden Ausdrucke $x = a$ setzen. Nimmt man dann den so erhaltenen Bogen vier Mal, so erhält man für den Umfang der ganzen Ellipse den Ausdruck

$$2a\pi \left[1 - (\tfrac{1}{2}\varepsilon)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \varepsilon^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \varepsilon^3\right)^2 \right.$$
$$\left. - \frac{1}{7}\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \varepsilon^4\right)^2 - \ldots\right].$$

Für $a = b$ oder $\varepsilon = 0$ erhält man den Umfang des Kreises $= 2a\pi$, wie bekannt.

Legt man aber, wie zuvor (§. 174, I), für die Ellipse die beyden Gleichungen zu Grunde

$$x = a \sin.\varphi \quad \text{und} \quad y = b \cos.\varphi,$$

so erhält man sofort

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = a\,d\varphi\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin.^2\varphi}.$$

Löst man diese Wurzelgröße nach dem Binom auf, und substituirt dann statt $\sin.^2\varphi$, $\sin.^4\varphi$, $\sin.^6\varphi$, ... die oben (§. 49) gegebenen Ausdrücke in Sinus der vielfachen Bogen φ, so erhält man sofort

$$\frac{s}{a} = \varphi - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\left(\tfrac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2^2}\sin.2\varphi\right)$$
$$- \frac{1.1}{2.4}\varepsilon^4\left(\frac{1.3}{2.4}\varphi - \frac{4}{2^4}\sin.2\varphi + \frac{1}{2^4.2}\sin.4\varphi\right)$$
$$- \frac{1.1.3}{2.4.6}\varepsilon^6\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\varphi - \frac{15}{2^6}\sin.2\varphi + \frac{6}{2^6.2}\sin.4\varphi\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2^6.3}\sin.6\varphi\right) \text{ u. s. f.}$$

Oft ist es auch nothwendig, den Bogen $OM = s$ (Fig. 33) der Ellipse nicht durch den vorhergehenden Winkel φ, sondern durch den Winkel $MRO = \omega$ ausgedrückt zu erhalten, welchen die Normale MR der Ellipse in dem Punkte M mit der großen Axe derselben bildet.

Behält man die vorhergehende Bedeutung von a, b und ε bey, so findet man aus der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ der Ellipse

$$x = \frac{a \cos.\omega}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin.^2\omega}} \quad \text{und} \quad y = \frac{a(1-\varepsilon^2)\sin.\omega}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin.^2\omega}},$$

so daß

$$x^2 + y^2 = a\sqrt{\frac{1 + (1-\varepsilon^2)\,\text{tang.}^2\omega}{1 + (1-\varepsilon^2)\,\text{tang.}^2\omega}}$$

wird, wo dann die Normale

$$MR = \frac{a}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin.^2\omega}},$$

und der Krümmungshalbmesser ρ der Ellipse in dem Punkte M

$$\rho = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2\omega)^{\frac{3}{2}}}$$

wird. Differentiirt man die vorhergehenden Ausdrücke von x und y in Beziehung auf ω, und substituirt dann diese Werthe von dx und dy in der Gleichung

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

so erhält man

$$ds = \frac{a(1-\varepsilon^2)\,d\omega}{(1-\varepsilon^2 \sin.^2\omega)^{\frac{3}{2}}},$$

woraus zugleich folgt, daß für die Curven der zweyten Ordnung auch

$$ds = \rho\,.\,d\omega$$

ist. Entwickelt man aber in diesem Ausdrucke von ds die Wurzelgröße $(1-\varepsilon^2 \sin.^2\omega)^{-\frac{3}{2}}$ nach dem Binom, und integrirt man dann die einzelnen Glieder, wie zuvor, so erhält man, wenn man der Kürze wegen setzt

$$\alpha = \frac{3}{2^2},\quad \beta = \frac{3.5}{4^2}\alpha,\quad \gamma = \frac{5.7}{6^2}\beta,\quad \delta = \frac{7\cdot 9}{8^2}\gamma \text{ u. s. w.},$$

für den elliptischen Bogen $AM = s$ oder für

$$\begin{aligned}\frac{a\,.\,s}{b^2} = {} & (1 + \alpha\varepsilon^2 + \beta\varepsilon^4 + \gamma\varepsilon^6 + \delta\varepsilon^8 + \ldots)\frac{\pi\omega}{180} \\ & - (\alpha\varepsilon^2 + \beta\varepsilon^4 + \gamma\varepsilon^6 + \delta\varepsilon^8 + \ldots\ldots)\sin.\omega\cos.\omega \\ & - \tfrac{2}{3}(\beta\varepsilon^4 + \gamma\varepsilon^6 + \delta\varepsilon^8 + \ldots\ldots\ldots)\sin.^3\omega\cos.\omega \\ & - \frac{2.4}{3.5}(\gamma\varepsilon^6 + \delta\varepsilon^8 + \ldots\ldots\ldots\ldots)\sin.^5\omega\cos.\omega \\ & - \frac{2.4.6}{3.5.7}(\delta\varepsilon^8 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)\sin.^7\omega\cos.\omega \\ & \text{u. s. f.}\end{aligned}$$

Für $\omega = 90^\circ$ verschwinden alle Glieder dieser Reihen, außer den ersten, und wenn man dann dieses Glied vier Mal nimmt, so erhält man für den Umfang der ganzen Ellipse den Ausdruck

$$\frac{2b^2.\pi}{a}(1 + \alpha\varepsilon^2 + \beta\varepsilon^4 + \gamma\varepsilon^6 + \delta\varepsilon^8 + \ldots).$$

§. 177. (**Rectification der Hyperbel.**) Für diese Curve hat man

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ also auch}$$

$$dy = \frac{b^2 x}{a^2 y}dx \quad\text{und}\quad ds = \frac{dx}{\varepsilon}\sqrt{\frac{x^2 - \varepsilon^2 a^2}{x^2 - a^2}},$$

wenn $\varepsilon^2 = \dfrac{a^2}{a^2 + b^2}$ gesetzt wird.

Entwickelt man die Wurzelgröße $\sqrt{x^2 - \varepsilon^2 a^2}$ nach dem Binom, so erhält man

$$\sqrt{x^2 - a^2\varepsilon^2} = x - \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2\varepsilon^2}{x} - \frac{1}{8}\cdot\frac{a^4\varepsilon^4}{x^3} - \ldots,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

so daß dann die einzelnen Glieder, in welche ds aufgelöst wird, alle die Form

$$\frac{dx}{x^m \sqrt{x^2 - a^2}}$$

erhalten, wo m eine ungerade Zahl ist. Man hat aber aus dem Vorhergehenden

$$\int \frac{dx}{x^m \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{(m-1)a^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^{m-1}} + \frac{m-2}{(m-1)a^2} \int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{x^2 - a^2}},$$

durch welchen Ausdruck man endlich auf das Glied

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \text{ arc. cos. } \frac{a}{x} \quad \text{oder} \quad = a \text{ arc. sec. } \frac{x}{a}$$

kömmt. Nimmt man die angezeigte Entwicklung vor, und setzt man der Kürze wegen

$$\alpha = \tfrac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1.1}{2.4}, \quad \gamma = \frac{1.1.3}{2.4.6}, \quad \delta = \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} \text{ u. s.},$$

so erhält man für den gesuchten hyperbolischen Bogen, von dem Scheitel der Curve gezählt, wo $x = a$ ist, den folgenden Ausdruck

$$s = \frac{(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon} \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{2}\beta\varepsilon^4 . \frac{a^2}{x^2} - \frac{1}{4}\gamma\varepsilon^6 \left(\frac{a^4}{x^4} + \frac{3}{2} . \frac{a^2}{x^2}\right) \\ - \frac{1}{6}\delta\varepsilon^8 \left(\frac{a^6}{x^6} + \frac{5}{4} . \frac{a^4}{x^4} + \frac{5.3}{4.2} . \frac{a^2}{x^2}\right) - \ldots \end{array} \right\}$$

$$- \varepsilon \left[\alpha + \tfrac{1}{2}\beta\varepsilon^2 + \frac{1.3}{2.4}\gamma\varepsilon^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\delta\varepsilon^6 + \ldots\right] a \text{ arc. sec. } \frac{x}{a}.$$

Setzt man auch hier, wie bey der Ellipse, $x = a \sin.\varphi$ und $y = b\sqrt{-1} . \cos.\varphi$, so erhält man für den Bogen der Hyperbel

$$s = \int a\, d\varphi . \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin.^2 \varphi},$$

wo $a^2 + b^2 = a^2 \varepsilon^2$ ist.

Man sieht, daß die elliptischen und hyperbolischen Bogen eine eigene Klasse transcendenter Größen bilden, da sie aus einer unendlichen Reihe von Gliedern bestehen, deren jedes selbst wieder eine unendliche Reihe ist. Die Parabel ist, wie wir gesehen haben, durch einen einfachen logarithmischen Ausdruck rectificabel, aber nicht die beyden andern Curven der zweyten Ordnung, die weder unmittelbar von dem Kreise, noch von den Logarithmen abhängen.

§. 178. **(Rectification der höheren Parabeln.)** Diese Curven haben die Gleichung

$$x = a \cdot y^m,$$

wo m eine ganze oder gebrochene positive Zahl bezeichnet. Daraus folgt

$$ds = dy\sqrt{1 + a^2 m^2 y^{2m-2}},$$

und das Integral dieses Ausdrucks ist, nach dem Vorhergehenden, algebraisch, wenn m gleich $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \ldots$ ist.

Für $m = \frac{3}{2}$ ist $x^2 = a^2 y^3$, oder, wenn man $\frac{1}{a}$ statt a^2 setzt, $a x^2 = y^3$ die Gleichung der Neil'schen Parabel. Für sie ist

$$ds = dy\sqrt{1 + \frac{9y}{4a}},$$

also auch

$$s = \frac{8}{27} a\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27} a.$$

§. 179. **(Rectification der Cissois.)** Für sie hat man die Gleichung (Einl. §. 14, Fig. 6)

$$y^2 (a - x) = x^3.$$

Dieß gibt

$$ds = \frac{a\,dx}{2(a-x)}\sqrt{\frac{4a - 3x}{a - x}}.$$

Setzt man $\frac{4a - 3x}{a - x} = u^2$, so folgt

$$a - x = \frac{a}{u^2 - 3} \quad \text{und} \quad dx = \frac{2 a u\,du}{(u^2 - 3)^2},$$

also auch

$$ds = \frac{a u^2\,du}{u^2 - 3} = a\,du + \frac{3 a\,du}{u^2 - 3},$$

und davon ist das Integral

$$s = au + \tfrac{1}{2} a\sqrt{3} \,.\, \log.\frac{u - \sqrt{3}}{u + \sqrt{3}} + \text{Const.}$$

Ist $s = 0$ für $x = 0$ oder für $u = 2$, so ist die Constante der Integration

$$\text{Const.} = -2a - \tfrac{1}{2} a\sqrt{3} \,.\, \log.\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}},$$

und daher

$$s = a(u - 2) + a\sqrt{3} \,.\, \log.\frac{(2 + \sqrt{3})(u - \sqrt{3})}{\sqrt{u^2 - 3}},$$

wo man statt u seinen Werth $\frac{4a - 3x}{a - x}$ substituiren kann.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 180. (Rectification der Evolute der Ellipse.) Für diese Curve haben wir oben (§. 99, III., Fig. 18) die Gleichung erhalten

$$\left(\frac{x}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$\frac{a^2 - b^2}{b} = c \quad \text{und} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = m,$$

so hat man

$$m x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}},$$

woraus sofort folgt

$$ds = dx \sqrt{1 - m^3 + m^2 c^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{2}{3}}},$$

wovon, nach §. 141, das Integral rational ist. Man findet

$$s = \frac{1}{1 - m^3} \left[(1 - m^3)\, x^{\frac{2}{3}} + m^2 c^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}} + \text{Const.}$$

Ist $s = 0$ für $x = 0$, so ist Const. $= -\dfrac{m^3 c}{1 - m^3}$.

§. 181. (Rectification derselben Curve für $m = 1$.) Mit dieser Curve ist diejenige nahe verwandt, deren Gleichung

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

ist. Man findet sie als Auflösung des folgenden Problems.

Eine Gerade von gegebener Länge a bewege sich so, daß ihre beyden Endpunkte immer auf den Schenkeln eines rechten Winkels bleiben. Man suche die Curve, welche diese Gerade in allen ihren Lagen berührt, oder was dasselbe ist, die Curve, welche durch die auf einander folgenden Durchschnitte dieser beweglichen Geraden entsteht.

Sind die Schenkel des rechten Winkels zugleich die Axen der Coordinaten x und y, und ist der Scheitel des Winkels der Anfang der Coordinaten, so hat man für die Größe der gegebenen Geraden

$$a = \frac{x\,ds}{dx} - \frac{y\,ds}{dy} \quad . \quad . \quad . \quad (\text{I.})$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

oder auch, da $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ist,

$$\frac{dx^2}{xdyds} - \frac{dx}{yds} = \frac{dx}{ady}.$$

Dieser Gleichung Differential, für ein constantes dx, ist

$$\left(\frac{xds}{dx} - a\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{xdy}{dx} - y\right)\frac{d^2s}{dx^2} = 0,$$

oder da $\frac{d^2s}{dx^2} = \frac{dyd^2y}{dx^2ds}$ ist,

$$\left(\frac{xds}{dx} - a\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{xdy}{dx} - y\right)\frac{dy}{dx^2}\cdot\frac{d^2y}{ds} = 0.$$

Da die letzte Gleichung durch $\frac{d^2y}{dx^2}$ theilbar ist, so ist sie den folgenden zwey Gleichungen gleichgeltend

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad \text{und}$$

$$\frac{xds}{ds} - a + \left(\frac{xdy}{dx} - y\right)\frac{dy}{ds} = 0 \;\ldots\; \text{(II.)}$$

Die erste dieser zwey Gleichungen gibt nach einer doppelten Integration

$$y = Cx + C',$$

wo C und C' constante Größen bezeichnen. Diese Gleichung gehört also für eine gerade und zwar für die gegebene gerade Linie a selbst.

Wenn man aber die beyden Gleichungen (I.) und (II.) im Zusammenhange betrachtet, und aus ihnen die Constante a eliminirt, so erhält man

$$\frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = 0,$$

wovon das Integral ist

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \text{Const.}$$

Es ist aber $y = a$ für $x = 0$, also hat man für die gesuchte Gleichung der Curve

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Die Gestalt derselben ist nahe die in Fig. 18 gegebene.

Um noch die Rectification dieser Curve zu finden, so ist das Differential der letzten Gleichung

$$x^{-\frac{1}{3}}dx + y^{-\frac{1}{3}}dy = 0,$$

also auch

$$ds = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}} dx \quad \text{oder} \quad s = \tfrac{3}{2} \sqrt[3]{a x^2} + \text{Const.}$$

Ist $s = 0$ für $x = 0$, so verschwindet auch diese Constante, und man hat

$$s = \tfrac{3}{2} \sqrt[3]{ax^2} \quad \text{oder endlich} \quad s = \tfrac{3}{2} a \left[1 - \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\right].$$

§. 182. (Rectification der transcendenten Curven.) Für die Logistik hat man

$$x = a \log. y,$$

also ist auch

$$ds = \frac{dy}{y} \sqrt{a^2 + y^2},$$

wovon das Integral ist

$$s = \sqrt{a^2 + y^2} + a \log. \frac{\sqrt{a^2 + y^2} - a}{y} + C.$$

Ist $y = b$ für $s = 0$, so ist die Constante der Integration

$$C = -\sqrt{a^2 + b^2} - a \log. \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{b}.$$

Dieselbe Gleichung $x = a \log. y$ gibt auch

$$y = e^{\frac{x}{a}} \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{a} e^{\frac{x}{a}}.$$

Setzt man aber $\frac{dy}{dx} = \text{tang.}\, \omega$, so ist

$$ds = \frac{dx}{\cos.\, \omega} \quad \text{und} \quad dx = \frac{a\, d\omega}{\sin.\, \omega \cos.\, \omega},$$

also auch

$$s = a \int \frac{d\omega}{\sin.\, \omega \cos.^2 \omega}.$$

Da aber

$$\frac{1}{\sin.\, \omega \cos.^2 \omega} = \frac{1}{\sin.\, \omega} + \frac{\sin.\, \omega}{\cos.^2 \omega} \quad \text{und}$$

$$\int \frac{d\omega}{\sin.\, \omega} = \log. \text{tang.} \frac{\omega}{2}, \quad \int \frac{d\omega \sin.\, \omega}{\cos.^2 \omega} = \frac{1}{\cos.\, \omega} \quad \text{ist,}$$

so hat man auch für den gesuchten Bogen

$$s = a \left(\frac{1}{\cos.\, \omega} + \log. \text{tang.} \frac{\omega}{2}\right) + \text{Const.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

I. Für die Cycloïs hat man (Einl. §. 22, I.)

$$y = a \text{ arc. cos.} \left(1 - \frac{x}{a}\right) + \sqrt{2ax - x^2},$$

wo (Fig. 26) $CQ = x$, $QM = y$ ist. Dieß gibt

$$dy = \frac{(2a - x)\,dx}{\sqrt{2ax - x^2}} \quad \text{und} \quad ds = dx \sqrt{\frac{2a}{x}},$$

so daß man daher hat

$$s = 2\sqrt{2ax},$$

wo s mit x zugleich verschwindet. Für $x = 2a$ ist $s = 4a$, also ist auch der ganze Bogen der Cycloïs

$$ACB = 8a.$$

Auch findet man aus den beyden Gleichungen (§. 174)

$$x = a(\varphi - \sin.\varphi) \quad \text{und} \quad y = a(1 - \cos.\varphi)$$

für $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ den Ausdruck

$$ds = 2a\,d\varphi \sin.\tfrac{1}{2}\varphi, \quad \text{also auch} \quad s = -4a\cos.\frac{\varphi}{2} + C.$$

Ist $s = 0$ für $\varphi = 0$ so ist $C = 4a$ und daher

$$s = 4a(1 - \cos.\tfrac{1}{2}\varphi) = 8a\sin.^2\tfrac{1}{4}\varphi.$$

Für $\varphi = \pi$ ist $\cos.\frac{1}{2}\varphi = 0$, also auch die Hälfte des ganzen elliptischen Bogens gleich $4a$, wie zuvor.

II. Für die Evolvente des Kreises endlich hatten wir oben (§. 99, IV.)

$$x = a\cos.\varphi + a\varphi\sin.\varphi \quad \text{und} \quad y = a\sin.\varphi - a\varphi\cos.\varphi.$$

Dieß gibt sofort

$$ds = a\varphi\,d\varphi, \quad \text{also auch} \quad s = \tfrac{1}{2}a\varphi^2.$$

§. 183. (**Rectification für Polarcoordinaten.**) Da für solche Coordinaten das Differential des Bogens

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\nu^2}$$

ist (§. 93, III.), so hat man für die Archimedische Spirale, deren Gleichung (§. 23, I.)

$$r = \frac{\nu}{2\pi}$$

war, auch sofort

$$s = \frac{1}{2\pi} \int d\nu \,.\, \sqrt{1 + \nu^2} \quad \text{oder}$$

$$s = \frac{1}{4\pi} \,.\, \nu \,.\, \sqrt{1 + \nu^2} + \tfrac{1}{2} \log. (\nu + \sqrt{1 + \nu^2}),$$

wenn s mit ν verschwindet.

Für die logarithmische Spirale ist $r = a^\nu$, also auch

$$ds = a^\nu d\nu \,.\, \sqrt{1 + \log.^2 a} \quad \text{oder}$$

$$s = r \,.\, \frac{\sqrt{1 + \log.^2 a}}{\log. a},$$

wenn wieder s mit r zugleich verschwindet. Ist $\log. a = 1$, so ist $s = r \sqrt{2}$.

§. 184. (**Auffindung rectificabler Curven.**) Um solche Curven zu finden, für welche der Ausdruck von $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ein algebraisches Integral gibt, hat man, wenn $dy = p\,dx$ gesetzt wird,

$$ds = \sqrt{1 + p^2}.$$

Es ist aber der allgemeine Ausdruck für die Ordinate

$$y = \int p\,dx \quad \text{oder} \quad y = px - \int x\,dp,$$

und eben so ist auch

$$s = x\sqrt{1 + p^2} - \int \frac{p\,x\,dp}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Diese beyden Integralien kann man als Funktionen einer anderen veränderlichen Größe u ansehen. Nimmt man dann an

$$\int x\,dp = P \quad \text{und} \quad \int \frac{p\,x\,dp}{\sqrt{1 + p^2}} = Q,$$

so hat man

$$x = \frac{dP}{dp}, \quad y = px - P \quad \text{und} \quad s = x\sqrt{1 + p^2} - Q,$$

wo die Constante der Integration noch zu bestimmen ist.

Da aber $x\,dp = dP$ und $\dfrac{p\,x\,dp}{\sqrt{1 + p^2}} = dQ$ ist, so hat man auch

$$p\,dP = dQ\,\sqrt{1 + p^2} \quad \text{und} \quad p = \frac{dQ}{\sqrt{dP^2 - dQ^2}}.$$

Nimmt man nun für P und Q zwey Funktionen von u an, so wird auch p und dp und daher auch x durch u ausgedrückt werden können, so wie auch y durch die Gleichung

$$y = px - P.$$

Eliminirt man aber dann aus diesen Werthen von x und y die Größe u, so findet man die gesuchte Gleichung der rectificablen Curve zwischen x und y, und daraus auch den Bogen s derselben durch die Gleichung

$$s = x\sqrt{1+p^2} - Q.$$

Ex. Ist $P = u$ und $Q = \frac{u^2}{2a}$, so ist $dP = du$, $dQ = \frac{udu}{a}$,

$$p = \frac{u}{\sqrt{a^2-u^2}},\quad dp = a^2 (a^2-u^2)^{-\frac{3}{2}} du,\quad x = \frac{1}{a^2} (a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}$$

und $y = -\frac{u^3}{a^2}$.

Eliminirt man die Größe u aus den beyden letzten Gleichungen, so erhält man

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

wie in §. 181, woraus man dann den Bogen s entweder durch

$$s = \int\sqrt{dx^2+dy^2} = \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{ax^2} + \text{Const.},$$

oder auch durch die Gleichung erhält,

$$s = \sqrt{1+p^2} - Q.$$

XXXI.

Complanation der Flächen.

§. 185. (Rotationsflächen.) Wenn eine Curve OMN (Fig. 33) sich um eine Gerade OC dreht, so beschreibt jeder Punkt M derselben einen Kreis, dessen Ebene senkrecht auf der Rotationsaxe OC und dessen Mittelpunkt in einem Punkte B dieser Axe liegt. Ist also $AB = x$ und $BM = y$ der Halbmesser dieses Kreises, so ist der Umfang desselben gleich $2\pi y$, wo die Axe der x zugleich die Rotationsaxe der Curve ist. Dieß vorausgesetzt, wird das Element $MN = ds$

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

des Bogens dieser Curve die Oberfläche eines abgekürzten Kegels beschreiben, dessen eine Grundfläche den Umfang $2\pi y$ hat, und das Element der Oberfläche des so, durch Rotation einer Curve um die Axe der x entstehenden Körpers wird seyn

$$\Phi = 2\pi \int y\,ds,$$

wo $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ist.

Die Complanation der Flächen besteht in der Bestimmung dieses Werthes von Φ.

Ex. I. Für die Ellipse hat man die Gleichung, wenn die Abscissen x auf der großen Axe $2a$ von dem Mittelpunkte genommen werden

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Wird diese Ellipse um die Axe der x, also um ihre große Axe gedreht, so hat man, wenn $a^2 e^2 = a^2 - b^2$ ist,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}},$$

und daher

$$\Phi = 2\pi \int y\,ds = \frac{2b\pi}{a}\int dx\sqrt{a^2 - e^2 x^2}.$$

Das Integral dieses Ausdruckes ist

$$\Phi = \frac{b\pi x}{a}\sqrt{a^2 - e^2 x^2} + \frac{ab\pi}{e}\,\text{arc.}\sin.\frac{ex}{a}.$$

Dieses Integral von $x = o$ bis $x = u$ doppelt genommen, gibt für die Oberfläche des ganzen verlängerten Sphäroids

$$2b^2\pi + \frac{2ab\pi}{e}\,\text{arc.}\sin.e.$$

Nimmt man $e = o$ oder $a = b$, so wird $\frac{1}{e}\,\text{arc.}\sin.e = 1$, und daher die Oberfläche der Kugel, deren Halbmesser a ist, gleich $4a^2\pi$.

Ex. II. Werden aber die Abscissen x auf der kleinen Axe $2b$ wieder vom Mittelpunkte genommen, so ist die Gleichung der Ellipse

$$y = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2},$$

also auch, wenn wieder $a^2 e^2 = a^2 - b^2$ ist,

$$\Phi = 2\pi \int y\,ds = \frac{2a\pi}{b^2}\int dx\sqrt{b^4 + a^2 e^2 x^2}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Davon ist aber das Integral

$$\Phi = \frac{a\pi x}{b^2}\sqrt{b^4 + a^2 e^2 x^2} + \frac{b^2\pi}{e}\log.(aex + \sqrt{b^4 + a^2e^2x^2}) + \text{Const.}$$

Soll Φ mit x zugleich verschwinden, so ist

$$\text{Const.} = -\frac{2b^2\pi}{e}\log.b.$$

Setzt man in diesem Ausdrucke zuerst $x = +b$ und dann $x = -b$, so erhält man für die Differenz dieser beyden Werthe, d. h. für die Oberfläche des ganzen abgeplatteten Sphäroids

$$2a^2\pi + \frac{b^2\pi}{e}\log.\frac{1+e}{1-e}.$$

Für $e = 0$ oder für $a = b$ ist $\frac{1}{e}\log.\frac{1+e}{1-e} = 2$, also ist auch die Oberfläche der Kugel, deren Halbmesser a ist, gleich $4a^2\pi$, wie zuvor.

Ex. III. Für die Parabel, deren Gleichung $y^2 = ax$, hat man, wenn sie sich um die Axe der x dreht,

$$\Phi = 2\pi\int y\,ds = \pi\int dx\sqrt{a^2 + 4ax},$$

also auch

$$\Phi = \frac{\pi}{6a}(a^2 + 4ax)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{6}a^2\pi,$$

wenn Φ mit x zugleich verschwindet.

Nimmt man aber die Ordinate y auf der Tangente der Parabel im Scheitel derselben, und ist diese Tangente die Axe der Abscissen und zugleich die Drehungsaxe der Curve, so ist

$$\Phi = 2\pi\int x\,ds \quad \text{oder} \quad \Phi = \pi\int dx\sqrt{ax + 4x^2},$$

und davon ist das Integral, wenn $a = 8b$ gesetzt wird,

$$\Phi = \pi(b+x)\sqrt{2bx + x^2} - \pi b^2\log.\frac{b + x + \sqrt{2bx + x^2}}{b},$$

wenn Φ mit x verschwindet.

Ex. IV. Für die Hyperbel hat man

$$xy = \tfrac{1}{2}a^2 \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x},$$

und daher

$$\Phi = 2\pi\int y\,ds = \frac{a^2\pi}{2}\int\frac{dx}{x^3}\sqrt{a^4 + 4x^4}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Setzt man $\frac{dy}{dx} = \text{tang.}\,\omega$, so ist

$$x^2 = \frac{a^2}{2\,\text{tang.}\,\omega} \quad \text{und} \quad \frac{dx}{x} = -\frac{d\omega}{2\sin.\omega\cos.\omega},$$

also auch

$$\Phi = -\frac{a^2\pi}{2}\int\frac{d\omega}{\sin.\omega\,\cos.^2\omega}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem in §. 182 erhaltenen, so sieht man, daß diese von dem hyperbolischen Bogen durch Rotation erzeugte Fläche gleich dem Produkte der Oberfläche eines Halbkreises des Radius a in den Bogen der Curve $y = e^x$ ist.

Ex. V. Die Cycloïs (Fig. 26) drehe sich um die Axe CD. Ist $CQ = x$ und $QM = y$, so hat man

$$y = a\,\text{arc.}\cos.\left(1 - \frac{x}{a}\right) + \sqrt{2ax - x^2},$$

also auch

$$dy = \frac{(2a - x)\,dx}{\sqrt{2ax - x^2}} \quad \text{und} \quad ds = dx\sqrt{\frac{2a}{x}}.$$

Dieß vorausgesetzt ist die gesuchte Oberfläche der Cycloïs

$$\Phi = 2\pi\,.\,(2a)^{\frac{1}{2}}\int\frac{y\,dx}{\sqrt{x}},$$

welches Integral für $x = 0$ verschwinden soll. Integrirt man theilweise und substituirt den vorhergehenden Werth von dy, so ist

$$\Phi = 4\pi y\sqrt{2ax} - 4\pi\,(2a)^{\frac{1}{2}}\,.\int dx\sqrt{2a - x},$$

also auch

$$\Phi = 4\pi y\sqrt{2ax} + \frac{8\pi}{3}\sqrt{2a(2a - x)^3} - \frac{32}{3}a^2\pi.$$

Für den halben Bogen CA der Cycloïs ist $x = 2a$ und $y = a\pi$, also auch

$$\Phi = 8a^2\pi\left(\pi - \frac{4}{3}\right).$$

Wenn sich aber der Bogen CM der Cycloïs um eine durch den Punkt C mit der Geraden AB parallele Axe dreht, so sey die auf dieser Axe genommene Abscisse gleich x und die von M auf diese Axe gezogene Senkrechte gleich y. Dann wird man, wenn man die vorhergehende Differentialgleichung der Cycloïs

$$dy = \frac{(2a - x)\,dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$$

beybehalten will, für die gesuchte Rotations-Fläche den allgemeinen Ausdruck haben

$$\Phi = 2\pi \int x\,ds,$$

oder da $ds = dx \sqrt{\frac{2a}{x}}$ ist,

$$\Phi = 2\pi \int dx \sqrt{2ax}, \text{ also auch}$$

$$\Phi = \frac{4\pi}{3} x \, . \sqrt{2ax},$$

wenn wieder Φ mit x zugleich verschwindet. Für die halbe Cyclois CA ist $x = 2a$, $y = a\pi$ und daher

$$\Phi = \frac{16}{3} a^2 \pi$$

für die convexe Fläche, welche durch die Umdrehung des Bogens CMA um eine Axe entsteht, die durch C mit AB parallel gezogen wird.

Eben so findet man für die Logistik, deren Gleichung $y = e^{\frac{x}{a}}$ ist,

$$\Phi = a^2\pi \left[\frac{\sin.\omega}{\cos.^2\omega} + \log.\operatorname{tang.}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right)\right] + \text{Const.},$$

wenn man $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang.}\omega$ oder $x = a \log.\operatorname{tang.}\omega + a \log. a$ setzt, wie in §. 182.

Die Kettenlinie, deren Gleichung $y = \frac{1}{2} a \left[e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right]$ ist, gibt

$$\Phi = 2\pi \int y\,ds = 2\pi \left[x + \tfrac{1}{4} a \left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}}\right)\right].$$

§. 186. (**Complanation der Flächen überhaupt.**) Um zu dem allgemeinen Ausdrucke des Flächeninhaltes einer krummen Oberfläche zu gelangen, kann man sich (wie in Fig. 42, §. 114) diese Oberfläche durch unendlich nahe Ebenen getheilt vorstellen, von welchen die eine, z. B. $MM'Q'Q''$, mit der Ebene der xz, und die anderen, wie $MNRP$, mit der Ebene der yz parallel sind. Diese Ebenen theilen die coordinirte Ebene der xy in unendlich kleine Rechtecke $QQ'RR'$, deren Flächeninhalt gleich $dx\,dy$ ist. Jedes dieser Rechtecke ist aber die Projektion des ihm entsprechenden Rechteckes $MNM'N'$, in welche, durch die erwähnten zwey Systeme von Ebenen, die gegebene Oberfläche selbst getheilt wird. Nennt man daher $d\Phi$ das Element $MNM'N'$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

dieser Fläche, und bezeichnet man durch n den Winkel, unter welchem die Fläche dieses Elementes gegen eine mit der Ebene der xy parallelen Ebene geneigt ist, so hat man

$$dx\,dy = d\Phi \,.\, \cos. n.$$

Allein diese Neigung n des Elementes $d\Phi$ gegen die Ebene der xy ist identisch mit dem Winkel, welchen die in dem Punkte M die Fläche tangirende Ebene mit der coordinirten Ebene der xy bildet. Allein nach dem Vorhergehenden (§. 116, I.) hat man

$$\cos. n = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

wenn $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$ die partiellen Differentialcoefficienten der Gleichung der Fläche sind, also ist auch

$$d\Phi = dx\,dy \,.\, \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

welcher Ausdruck zwey Mal, in Beziehung auf x und dann in Beziehung auf y, oder umgekehrt, integrirt werden muß.

Ex. I. Für die Kugel des Halbmessers a hat man

$$x^2 + y^2 + z^2 + a^2, \quad \text{also auch}$$

$$p = -\frac{x}{z}, \quad q = -\frac{y}{z} \quad \text{und} \quad \sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{a}{z}.$$

Wir erhalten demnach

$$\int dx \sqrt{1 + p^2 + q^2} = \int \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

welcher Ausdruck in Beziehung auf x zu integriren ist, so daß y als eine constante Größe betrachtet wird. Setzt man der Kürze wegen $a^2 - y^2 = a'^2$, so ist dieses Integral

$$a \int \frac{dx}{\sqrt{a'^2 - x^2}} = a \text{ arc. sin.} \frac{x}{a'}.$$

Ist nun in A (Fig. 42) der Mittelpunkt der Kugel, und sind AX, AY, AZ die drey als positiv vorausgesetzten Hälften der drey Coordinatenaxen, so wird man bemerken, daß man, so fern man von der Wurzelgröße $\pm \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ nur das positive Zeichen genommen hat, auch nur den über der Ebene XAY der xy enthaltenen Theil der Kugelfläche erhalten kann, und daß, von diesem Theile, das gefundene Integral $a \text{ arc. sin.} \frac{x}{a'}$ gleichsam die Summe aller der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Elemente $MNM'N'$ oder die Zone darstellt, die zwischen den zwey der xz parallelen Ebenen $M'Q'Q''$ und $N'R'R''$ liegen und zu der Abscisse $AP = Q''Q = x$ gehören, für welche die Ordinate $PQ = AQ'' = y$ überall dieselbe oder constant ist. Nimmt man nun diese Zone, oder, was dasselbe ist, nimmt man dieses Integral von $x = o$ bis $x = a'$, d. h. nimmt man es von der Ebene YAZ, zu der $x = o$ gehört, bis zu der ihr parallelen Ebene, die zu $x = a' = \sqrt{a^2 - y^2}$, oder endlich, nimmt man diese Zone von dem höchsten Punkte derselben, über der Ebene xy, bis dort, wo sie diese Ebene xy schneidet, so erhält man für die Oberfläche dieser Zone den Ausdruck

$$\int dx \sqrt{1 + p^2 + q^2} = \tfrac{1}{2} a \pi.$$

Will man dann die Summe aller dieser Zonen haben, die zwischen der Ebene $NN'R'R''$ und der Ebene XAZ der xz enthalten sind, d. h. will man den Theil der Oberfläche der Kugel haben, dessen Projektion in xy das Rechteck $AP'R'R''$ ist, so hat man

$$\begin{aligned} \Phi = \iint dy \,.\, dx \sqrt{1 + p^2 + q^2} &= \int dy \,.\, \int dx \sqrt{1 + p^2 + q^2} \\ &= \int \tfrac{1}{2} a \pi \,.\, dy = \tfrac{1}{2} a \pi y, \end{aligned}$$

und nimmt man dieses Integral von $y = o$ bis $y = a$, so erhält man für den vierten Theil der über der Ebene liegenden Hälfte der Kugelfläche

$$\tfrac{1}{2} a^2 \pi,$$

und daher, wenn man diesen Werth achtmal nimmt, für die Oberfläche der ganzen Kugel den Ausdruck

$$4 a^2 \pi, \text{ wie zuvor.}$$

Ex. II. Ein Kegel, dessen Axe in der Axe der z und dessen Mittelpunkt der kreisförmigen Basis im Anfange der Coordinaten liegt, hat zur Gleichung

$$a^2 (b - z)^2 = b^2 (x^2 + y^2),$$

wo a der Halbmesser der Basis und b die Höhe des Kegels ist. Dieß gibt

$$p = - \frac{bx}{a\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad q = - \frac{by}{a\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ und}$$

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + b^2},$$

so daß man daher hat

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\Phi = \frac{1}{a}\sqrt{a^2+b^2}\int dx \,.\, \int dy = \frac{1}{a}\sqrt{a^2+b^2}\int y\,dx,$$

oder, wenn man, wie zuvor, dieses Integral von $y=0$ bis $y=\sqrt{a^2-x^2}$ nimmt

$$\Phi = \frac{1}{a}\sqrt{a^2+b^2}\int dx\sqrt{a^2-x^2},$$

oder, wenn man integrirt,

$$\Phi = \frac{1}{2a}\sqrt{a^2+b^2}\,.\left[x\sqrt{a^2-x^2}+a^2 \text{ arc. sin. }\frac{x}{a}\right],$$

wenn Φ mit x verschwindet.

Dieser Ausdruck gibt also denjenigen Theil der Oberfläche des Kegels, der von zwey parallelen, auf der Axe der x senkrechten Ebenen begränzt wird, von welchen die eine die Ebene xz selbst ist, und die andere von ihr um die Größe x absteht.

Wird daher dieses Integral von $x=0$ bis $x=a$ genommen, so erhält man den vierten Theil der Oberfläche des Kegels, also ist auch diese ganze Kegelfläche, ohne die Basis, gleich

$$4a\pi\sqrt{a^2+b^2}.$$

§. 187. (**Allgemeine Complanation durch Veränderung der Variablen.**) Da die Integration des allgemeinen Ausdruckes

$$\Phi = \iint dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2},$$

mit dem aus der gegebenen Gleichung der Fläche erhaltenen Werthe von x, y, z und p, q oft großen Schwierigkeiten unterworfen ist, so wird es nützlich seyn, eine Methode zu kennen, wodurch man diesen Ausdruck auf einen anderen zurückführen kann, der von willkürlichen Variablen φ und ψ abhängt, die man daher so wählen kann, daß die Integration dadurch erleichtert wird.

Es sey zu diesem Zwecke

$$dx = P\,d\varphi + Q\,d\psi \text{ und } dy = P'\,d\varphi + Q'\,d\psi.$$

Da nun der vorhergehende Ausdruck von Φ seiner Natur nach so beschaffen ist, daß die erste Integration desselben, z. B. nach x, die Größe y constant voraussetzt, so wird man, um das Produkt $dx\,dy$ zu erhalten, nicht die beyden letzten Werthe von dx und dy ohne weiteres durch einander multipliciren, sondern man wird annehmen müssen, daß die beyden Gleichungen

$$dx = Pd\varphi + Qd\psi \quad \text{und} \quad o = P'd\varphi + Q'd\psi$$

zusammen bestehen. Substituirt man dann den Werth von $d\psi$ aus der zweyten dieser Gleichungen in der ersten, so hat man

$$dx = \frac{PQ' - P'Q}{Q'} d\varphi.$$

Stellen wir dann den vorhergehenden Ausdruck von Φ der Kürze wegen so dar

$$\Phi = \int\int U\,dx\,dy,$$

so wird man haben

$$U\,dx\,dy = \frac{(PQ' - P'Q)}{Q'} U\,d\varphi\,dy,$$

und dieser Ausdruck wird sich auf die Variablen y und φ beziehen, wenn man, mittelst der gegebenen Relationen, die Größe ψ eliminirt.

Um aber dann auch noch die Größe dy zu entfernen, wird man, in dem Werthe dieser Größe, $d\varphi = o$ machen, wodurch man erhält

$$dy = Q'd\psi,$$

und somit den gesuchten Ausdruck

$$\Phi = \int\int U\,(PQ' - P'Q)\,d\varphi\,d\psi$$

erhalten.

Ex. Für das Ellipsoid mit drey Axen hat man die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Nimmt man, wie oben (§. 174), die Größen φ und ψ so an, daß man hat

$$x = a\sin.\varphi\cos.\psi,\quad y = b\sin.\varphi\sin.\psi,\quad z = c\cos.\varphi,$$

so ist

$$\begin{aligned}
P &= a\cos.\varphi\cos.\psi,\\
Q &= -a\sin.\varphi\sin.\psi,\\
P' &= b\cos.\varphi\sin.\psi,\\
Q' &= b\sin.\varphi\cos.\psi,\\
PQ' - P'Q &= ab\sin.\varphi\cos.\varphi.
\end{aligned}$$

Es ist aber

$$\Phi = \int\int dx\,dy\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \int\int dx\,dy\sqrt{1 + \frac{c^4x^2}{a^4z^2} + \frac{c^4y^2}{b^4z^2}},$$

also auch

$$\Phi = ab\int\int d\varphi\,d\psi\sin.\varphi\cos.\varphi\sqrt{1 + \frac{c^2\sin.^2\varphi\cos.^2\psi}{a^2\cos.^2\varphi} + \frac{c^2\sin.^2\varphi\sin.^2\psi}{b^2\cos.^2\varphi}},$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

oder, was dasselbe ist,

$$\Phi = ab \int\int d\varphi\, d\psi \sin.\varphi \sqrt{1 - \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\cos.^2\psi - \frac{c^2}{b^2}\sin.^2\psi\right)\sin.^2\varphi}.$$

Setzt man in der Wurzelgröße dieses Ausdruckes statt 1 dessen Werth $\sin.^2\psi + \cos.^2\psi$, so erhält man, nach einigen einfachen Reduktionen

$$\Phi = ab \int\int d\varphi\, d\psi \sin.\varphi \,.\, \sqrt{1 - (A^2 \cos.^2\psi + B^2 \sin.^2\psi)\sin.^2\varphi},$$

wo $A^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2}$ und $B^2 = \frac{b^2 - c^2}{b^2}$ ist.

Setzt man, um noch mehr abzukürzen,

$$C^2 = A^2 \cos^2\psi + B^2 \sin.^2\psi,$$

so erhält man

$$\Phi = ab \int\int d\varphi\, d\psi \sin.\varphi \sqrt{1 - C^2 \sin.^2\varphi}.$$

Löst man endlich diese Wurzelgröße nach dem Binom auf, so erhält man eine Reihe, deren einzelne Glieder man nach dem Vorhergehenden ohne Anstand integriren wird.

§. 188. (**Complanation der Flächen nach Guldin's Regel.**) Wir haben oben (§. 185) für die Oberfläche Φ derjenigen Körper, die durch die Rotation einer Curve um eine in ihren Ebenen liegende Gerade, als Axe, die zugleich die Abscissenaxe ist, entstehen, den Ausdruck gefunden

$$\Phi = 2\pi \int y\, ds.$$

Allein in der Lehre des Gleichgewichtes der Körper oder in der Statik wird gezeigt, daß die Coordinaten X, Y des Schwerpunktes einer ebenen Curve, auf dieselbe Coordinatenaxe bezogen, die Werthe haben

$$X = \frac{\int x\, ds}{s} \text{ und } Y = \frac{\int y\, ds}{s},$$

wo s oder $\int ds$ die Länge der erwähnten Curve oder die Peripherie des von ihr eingeschlossenen Raumes bezeichnet. Substituirt man den Werth von $\int y\, ds$ aus der zweyten dieser Gleichungen in den vorhergehenden Werth von Φ, so erhält man

$$\Phi = 2\pi \,.\, Ys.$$

Dieser Ausdruck wird uns also ein sehr bequemes Mittel geben, die Oberfläche Φ solcher Körper zu bestimmen, die durch Rotation einer geschlossenen Curve oder Figur entstanden ist, deren Umfang s

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und deren senkrechte Entfernung Y des Schwerpunktes von der Rotationsaxe man bereits kennt, wie dieß z. B. bey dem Kreise, der Ellipse, bey den regelmäßigen Vielecken u. s. der Fall ist, wo der Schwerpunkt bekanntlich in die Mitte derselben fällt. — Dieses Theorem hat der Jesuit Guldin i. J. 1640 bekannt gemacht, obschon bereits Pappus, der im vierten Jahrhundert n. Ch. in Alexandrien lebte, dasselbe in seinen Schriften erwähnt hatte.

Ex. I. Sey AD (Fig. 48) ein Rechteck, dessen Seiten

$$AB = CD = a \quad \text{und} \quad AC = BD = b.$$

Sey ferner $EP = c$ die senkrechte Entfernung der Seite CD von der Rotationsaxe PX und G der Schwerpunkt des Rechteckes. Da dieser Schwerpunkt in dem Durchschnitte der beyden Diagonalen des Rechteckes liegt, so ist seine Entfernung von der Rotationsaxe $Y = PG = \frac{1}{2}b + c$. Der Umfang des Rechteckes aber ist $s = 2(a+b)$, also ist auch die Oberfläche Φ des durch die Rotation dieses Rechteckes um die Axe PX entstandenen Körpers

$$\Phi = 2\pi \,.\, Ys = 2\pi\,(a+b)\,(b+2c).$$

Für $c = 0$ ist $\Phi = 2b\pi\,(a+b)$ die Oberfläche eines Cylinders, dessen Höhe a und dessen Halbmesser der Basis b ist, die beyden Grundflächen mitgezählt.

Man bemerkt von selbst, daß diese Fläche Φ dieselbe bleibt, wenn auch das Rechteck vor seiner Drehung eine andere Lage gegen die Axe PX hat, wenn nur der Ort des Schwerpunktes G derselbe bleibt.

Auch setzt dieser Ausdruck von Φ voraus, daß die erzeugende Curve die Rotationsaxe PX nicht schneide, weil sonst die zwey Theile der Curve, von welchen der eine über und der andere unter der Rotationsaxe liegt, jeder für sich eine eigene Oberfläche erzeugt, deren Differenz dann durch die Gleichung

$$\Phi = 2\pi \,.\, Ys$$

ausgedrückt wird. Geht z. B. die mit PX parallele Rotationsaxe durch den Punkt P′, und setzt man wieder $EP' = c$ und wie zuvor $GE = \frac{1}{2}b$, so ist $s = 2(a+b)$ und $s = GP' = \frac{1}{2}b - c$, also auch

$$\Phi = 2\pi \,.\, Ys = 2\pi\,(a+b)\,(b-2c),$$

und dieß ist der Ausdruck der Differenz der beyden Cylinder, die durch die Rotation der Rechtecke AD′ und CD′ um die Axe C′D′ entstehen.

Ex. II. Ein regelmäßiges Fünfeck ABD (Fig. 49) drehe sich um die Axe PX. Sey AG = a der Halbmesser des umschriebenen Kreises, so ist die Seite des Fünfeckes

$$AB = a\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}},$$

also auch das Loth $GE = \sqrt{AG^2 - \frac{1}{4}AB^2}$ oder

$$GE = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}.$$

Ist endlich PE = c die Entfernung der Seite des Fünfeckes von der Drehungsaxe, so ist $s = 5 \,.\, AB$ und $Y = c + GE$, also auch die Oberfläche des durch Rotation des Polygons entstandenen Körpers

$$\Phi = 10\, a\, c\, \pi \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} + 5\, a^2 \pi \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}.$$

Für $c = 0$ ist $\Phi = 5\, a^2 \pi \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$.

Ex. III. Ist endlich CP = c die Entfernung des Mittelpunktes eines Kreises des Halbmessers a von der Rotationsaxe PX (Fig. 50), so ist Y = c und $s = 2\, a\, \pi$, also auch die Oberfläche des durch die Rotation des Kreises erzeugten Körpers

$$\Phi = 4\, a\, c\, \pi^2.$$

Berührt der Kreis die Rotationsaxe, so ist c = a, also auch

$$\Phi = 4\, a^2 \pi^2.$$

I. Der vorhergehende Ausdruck $\Phi = 2\pi \int y\, ds$ bezieht sich auf die Fläche, die durch Rotation einer Curve, deren Gleichung $y = fx$ ist, um die Axe der x entsteht. Ist aber die Gleichung dieser Curve $y = b + fx$, wo b eine positive Constante bezeichnet, so wird der vorhergehende Ausdruck in den folgenden übergehen

$$\Phi' = 2\pi \int (b + y)\, ds \quad \text{oder} \quad \Phi' = \Phi + 2\, b\, \pi \,.\, s.$$

Dreht sich also eine Curve zuerst um irgend eine Axe, und dann um eine andere, die mit der ersten parallel und von ihr um die Distanz b entfernt ist, so wird die Differenz der zwey so erzeugten Flächen gleich seyn dem Produkte der erzeugenden Curve in die Peripherie eines Kreises, dessen Halbmesser die Distanz der beyden Rotationsaxen ist, vorausgesetzt, daß die beyden Axen den erzeugenden Bogen der Curve nicht schneiden, und daß sie beyde auf derselben Seite dieses Bogens

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

liegen. — Liegen aber diese Axen auf verschiedenen Seiten des erzeugenden Bogens der Curve, so findet man

$$\Phi' + \Phi = 2 b \pi . s,$$

oder dann ist die Summe der beyden so erzeugten Flächen das Produkt des erzeugenden Bogens in die Peripherie des Kreises, dessen Halbmesser die Distanz der beyden Axen ist.

XXXII.

Cubatur der Körper.

§. 189. (**Rotationsflächen.**) Nehmen wir wieder zuerst an, daß die Curve OMN (Fig. 33) sich um die Axe OC der x drehe, so wird jede Ordinate $BM = y$ eines Punktes M der Curve die Fläche eines Kreises beschreiben, dessen Mittelpunkt B in der Rotationsaxe, und dessen Halbmesser y ist. Die Fläche dieses Kreises wird daher gleich $y^2 . \pi$ seyn. Eben so wird auch die Ordinate $CN = y + dy$ des nächstfolgenden Punktes N der Curve einen Kreis beschreiben, dessen Fläche $(y + dy)^2 . \pi$ ist. Die zwischen diesen beyden Ordinaten enthaltene Fläche BCMN der Curve aber wird einen Cylinder beschreiben, dessen Basis im Mittel ein Kreis der Fläche gleich $(y + \frac{1}{2} dy)^2 . \pi$, oder was dasselbe ist, gleich $y^2 \pi$, und dessen Höhe gleich $BC = dx$, dessen körperlicher Inhalt oder dessen Volum also gleich $y^2 . \pi dx$ seyn wird. Da nun der ganze, durch die Rotation der Curve um die Axe der x entstandene Körper bloß aus solchen Cylindern zusammengesetzt gedacht werden kann, oder da jeder dieser Cylinder gleichsam das Element des gesuchten Körpers ist, so wird man für den körperlichen Rauminhalt, oder für das Volum V des Körpers den allgemeinen Ausdruck haben:

$$V = \pi \int y^2 dx.$$

Ex. I. Der senkrechte Kegel mit kreisförmiger Basis entsteht durch die Umdrehung eines rechtwinkligen Dreyecks CPM (Fig. 1) um eine seiner Catheten CP. Ist $CA = x$, $AB = y$, $CP = a$ und $PM = b$, wo b der Halbmesser der Basis, und a die Höhe des Kegels ist, so hat man

$$y = \frac{bx}{a},$$

also auch

$$V = \pi \int y^2 dx = \frac{b^2 \pi . x^3}{3a^2},$$

wenn V mit x verschwindet. Für $x = a$ ist das Volum des ganzen Kegels

$$V = \tfrac{1}{3} a b^2 \pi.$$

Ex. II. Für die Parabel ist $y^2 = ax$, also ist auch das Volum des Körpers, der durch Rotation der Parabel um die Axe der x entsteht:

$$V = a\pi \int x dx = \tfrac{1}{2} x . y^2 . \pi,$$

wenn wieder V mit x verschwindet.

Ex. III. Für die Hyperbel ist

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

wo (Fig. 44) $AQ = x$, $QN = y$ ist. Dieß gibt sofort

$$V = \frac{\pi b^2}{a^2} \int (2ax + x^2) dx = \tfrac{1}{3}\pi x y^2 + \frac{1}{3a} b^2 x^2 . \pi.$$

Der erste Theil dieses Ausdrucks ist der von dem geradlinigen Dreyecke ANQ beschriebene Kegel, der entsteht, wenn sich dieses Dreyeck um die Axe AQ dreht. Der zweyte Theil ist daher das Volum, welches das hyperbolische Segment während der Drehung beschreibt, das von der Sehne AN und von dem Bogen AN begränzt ist.

Sey CR senkrecht auf CQ, und NR mit CQ parallel. Ist $CQ = RN = x$ und $CR = QN = y$, so ist die Gleichung der Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Dreht sich nun die Hyperbel um die Axe CR, so ist das Volum des so entstehenden Körpers

$$V = \pi \int x^2 dy = \tfrac{2}{3}\pi a^2 y + \tfrac{1}{3}\pi x^2 y,$$

wenn V mit x verschwindet.

Eben so findet man für die Logistik $y = e^{\frac{x}{a}}$ das durch ihre Rotation entstandene Volum

$$V = \tfrac{1}{2} a \pi (y^2 - 1),$$

wenn V mit x zugleich verschwindet, und die Kettenlinie

$$y = \tfrac{1}{2} a \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \text{ gibt}$$

$$V = \frac{a^2 \pi}{2} \left[x + \tfrac{1}{4} a \left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}\right)\right].$$

§. 190. (**Anwendung des Vorhergehenden auf die Kugel.**) Ist MAN (Fig. 51) ein Kreisbogen des Halbmessers $CA = a$, und ist $AP = x$, $PM = PN = y$, so hat man $y^2 = 2ax - x^2$. Heißt nun V' das Volum, welches durch die Umdrehung der Kreisfläche APM um die Axe AP entsteht, so ist

$$V' = \pi \int y^2 dx = \pi (ax^2 - \tfrac{1}{3} x^3).$$

Für die Halbkugel ist $x = a$, also das Volum der ganzen Kugel gleich $\frac{4}{3} a^3 \pi$.

Um eben so das Volum V des Körpers zu erhalten, der durch die Rotation des Kreissectors ACM um AC entsteht, so hat man für das Volum V'' des Kegels, der durch die Rotation des rechtwinkligen Dreyecks CPM um CP entsteht, nach dem Vorhergehenden,

$$V'' = \tfrac{1}{3} \pi (a - x)(2ax - x^2),$$

und da $V = V' + V''$ ist, so hat man auch für das gesuchte Volum des Kugelsectors MCN

$$V = \tfrac{2}{3} a^2 \pi x.$$

Für die Halbkugel ist $x = a$, also auch das Volum derselben gleich $\frac{2}{3} a^3 \pi$, wie zuvor.

II. Ist man ein dem ersten concentrischer Kreisbogen des Halbmessers $ca = a'$, und ist $ap = x'$, so ist das Volum v des von dem Sector aCm beschriebenen Körpers

$$v = \tfrac{2}{3} a'^2 \pi x';$$

also ist auch das Volum des von der Fläche AMma um AC beschriebenen Körpers, oder das Volum des gegebenen Theils einer Kugelschale, deren Dicke $a - a'$ ist, gleich

$$V - v = \tfrac{2}{3} \pi (a^2 x - a'^2 x'^2),$$

oder da $\frac{x'}{x} = \frac{a'}{a}$ ist:

$$V - v = \frac{2\pi}{3a} (a^3 - a'^3) x,$$

und daher auch, wenn man $x = 2a$ setzt, das Volum der ganzen Kugelschale gleich

$$\frac{4\pi}{3} (a^3 - a'^3).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Setzt man in dem letzten Ausdrucke $a' = 0$, so erhält man für die ganze Kugel $\frac{4}{3} a^3 \pi$, wie zuvor.

III. Um eben so das Volum V des Körpers zu finden, der durch die Rotation des Kreissegments MAN (Fig. 51) um seine Chorde MN entsteht, sey $CP = b$, $PM = PN = c$ und $PQ = x$, $QR = y$, so ist die Gleichung des Kreises

$$(b + y)^2 + x^2 = a^2 \quad \text{oder}$$
$$y^2 = a^2 - b^2 - x^2 - 2by,$$

also ist auch

$$\int y^2 dx = (a^2 - b^2)x - \tfrac{1}{3}x^3 - 2b \int y dx.$$

Allein für $x = c$ ist

$$\int y dx = \tfrac{1}{2} a^2 \text{ arc. cos.} \frac{b}{a} - \tfrac{1}{2} bc,$$

also ist auch, wenn $x = c$ genommen wird, das gesuchte Volum

$$V = \tfrac{2}{3}\pi c (2a^2 + b^2) - 2\pi a^2 b \text{ arc. cos.} \frac{b}{a}.$$

Für $b = 0$ ist $c = a$, wenn a den Halbmesser des Kreises bezeichnet; also auch das Volum der ganzen Kugel gleich $\frac{4}{3} a^3 \pi$, wie zuvor.

§. 191. (**Anwendung des Vorhergehenden auf das Sphäroid.**) Wenn sich eine Ellipse, deren halbe große und kleine Axe a und b ist, um die große Axe, die zugleich jene der x ist, dreht, so hat man

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

also ist auch

$$V = \pi \int y^2 dx = \frac{b^2 \pi x}{a^2} (a^2 - \tfrac{1}{3} x^2),$$

wenn V mit x verschwindet. Für $x = a$ erhält man das halbe Sphäroid, also ist auch das Volum des ganzen Sphäroids gleich $\frac{4}{3} a b^2 \pi$.

Nimmt man aber die Abscisse x vom Scheitel der Ellipse, so ist

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{2ax - x^2},$$

und daher

$$V = \frac{\pi b^2 x^2}{a} \left(1 - \frac{x}{3a}\right).$$

Für das ganze Sphäroid ist $x = 2a$, also auch das Volum desselben gleich $\frac{4}{3} a b^2 \pi$, wie zuvor.

I. Ist aber das Sphäroid durch Rotation der Ellipse um ihre kleine Axe b entstanden, so ist, wenn diese kleine Axe zugleich die der x ist:

$$y = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2},$$

und daher

$$V = \frac{\pi a^2}{b^2}\int (b^2 - x^2)\,dx = \frac{a^2 \pi x}{b^2}\left(b^2 - \tfrac{1}{3}x^2\right).$$

Für die halbe Ellipse ist $x = b$; also ist auch das Volum des ganzen Sphäroids gleich $\frac{4}{3}a^2 b\pi$.

Nimmt man die Abscisse x vom Scheitel der Ellipse, so ist

$$y = \frac{a}{b}\sqrt{2bx - x^2},$$

und daher

$$V = \frac{a^2 \pi x^2}{b}\left(1 - \frac{x}{3b}\right).$$

Für das ganze Sphäroid hat man $x = 2b$, also auch $V = \frac{4}{3}a^2 b\pi$, wie zuvor. Man sieht daraus, daß sich das Volum des verlängerten Sphäroids zu dem des verkürzten verhält, wie b zu a.

§. 192. **(Anwendung des Vorhergehenden auf die Cycloïs.)** Wenn die Cycloïs ACB (Fig. 43) sich um die Axe CD dreht, so hat man (Einl. §. 22)

$$x = CQ = a(1 - \cos.\psi) \quad \text{und}$$
$$y = QM = a(\psi + \sin.\psi), \quad \text{also auch}$$
$$dx = a\,d\psi\,\sin.\psi,$$

und daher, wie man nach einigen einfachen Reduktionen findet:

$$\int y^2 dx = \tfrac{1}{2}a^3\psi^2(1 - 2\cos.\psi) + \tfrac{1}{2}a^3\psi(4\sin.\psi - \sin.2\psi)$$
$$+ a^3\left(\tfrac{4}{3}\cos.\psi - \tfrac{1}{4}\cos.2\psi - \tfrac{1}{3}\sin.^2\psi\cos.\psi - \tfrac{13}{12}\right),$$

wenn das Integral in dem Punkte C, das heißt, für $\psi = 0$ verschwindet. Also ist auch das Volum des so entstehenden Körpers

$$V = \pi\int y^2 dx.$$

Für die halbe Cycloïs CMA ist $\psi = \pi$, also auch das Volum des durch die Rotation von CDA um CD entstandenen Körpers

$$V = \frac{a^3\pi}{3}\left(\frac{9\pi^2}{2} - 8\right).$$

I. Dreht sich aber die Cycloïs um die Axe ADB, so ist (Einl. §. 22)

$$x = AP = a(\varphi - \sin.\varphi) \quad \text{und}$$
$$y = PM = a(1 - \cos.\varphi).$$

Mit diesen Werthen von x und y erhält man

$$V = \pi \int y^2\, dx = a^3 \pi \left[\tfrac{5}{2}\varphi - \tfrac{11}{3}\sin.\varphi + \tfrac{3}{2}\sin.\varphi\cos.\varphi\left(1 - \tfrac{2}{9}\cos.\varphi\right)\right],$$

wenn das Integral mit φ zugleich verschwindet. Für die halbe Cyclois CAD ist $\varphi = \pi$, also auch

$$V = \tfrac{5}{2} a^3 \pi^2.$$

II. Dreht sich endlich die Cyclois um die mit AD parallele durch C gehende Axe CE, und setzt man CG $= x$ und GM $= y$, so hat man

$$x = a(\psi + \sin.\varphi) \quad \text{und} \quad y = a(1 - \cos.\psi),$$

also auch

$$\int y^2\, dx = a^3 \int (1 - \cos.\psi)^2 \,.\, (1 + \cos.\psi)\, d\psi,$$

und daher

$$V = \pi \int y^2\, dx = a^3 \pi \left(\tfrac{1}{2}\psi - \tfrac{1}{4}\sin.\psi - \tfrac{1}{4}\sin.2\psi + \tfrac{1}{12}\sin.3\psi\right).$$

Für die halbe Cyclois CMA hat man $\psi = \pi$, also auch

$$V = \tfrac{1}{2} a^3 \pi^2.$$

§. 193. (**Cubatur nach dem Ausdrucke $\int X\, dx$.**) Wenn der Körper, dessen Volum man bestimmen will, zu beyden Seiten einer durch ihn gehenden Geraden symmetrisch liegt, so wird man diese Gerade für eine der drey Coordinatenaxen, z. B. für die der x annehmen. Sey dann X die Fläche des Schnitts des Körpers, der durch eine auf diese Axe senkrechte Ebene entsteht, so wird man $X\, dx$ als das Volum eines der Elemente ansehen können, aus welchen der Körper besteht, so daß man hat $dV = X\, dx$, also auch

$$V = \int X\, dx.$$

Man sieht, daß dieser Fall alle durch Rotation einer Curve entstandenen Körper in sich begreift, da diese um die Rotationsaxe immer symmetrisch liegen.

Ex. I. Für das Sphäroid mit drey Axen hat man

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

wo a, b, c die drey Halbaxen bezeichnen. Wenn dieses Ellipsoid durch eine auf die Axe der x senkrechte Ebene geschnitten wird, so wird dieser Schnitt, dessen Fläche X seyn soll, die Gestalt einer Ellipse haben. Da man aber

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

hat, so werden die Halbaren dieses elliptischen Schnitts seyn:

$$b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad \text{und} \quad c \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

so daß man daher (nach §. 170, I.) haben wird:

$$X = bc\pi\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

also auch

$$V = \int X dx = bc\pi\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right),$$

wenn V mit x verschwindet. Sucht man aber nun denjenigen Theil des Ellipsoids, der zwischen den zwey auf der Axe der x senkrechten Ebenen enthalten ist, zu welchen die Werthe $x = \alpha$ und $x = \beta$ gehören, so hat man für das Volum dieses Theils

$$V = bc\pi\left(\beta - \alpha - \frac{\beta^3 - \alpha^3}{3a^2}\right) \quad \text{oder}$$

$$V = bc\pi(\beta - \alpha)\left(1 - \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{3a^2}\right).$$

Für das ganze Sphäroid ist $\beta = a$ und $\alpha = -a$, so daß daher das Volum des ganzen Sphäroids ist

$$V = \tfrac{4}{3} abc \cdot \pi.$$

Für $a = b = c$ hat man $V = \frac{4}{3} a^3 \pi$ das Volum der Kugel, wie zuvor.

Ex. II. Der oben (§. 186, II.) betrachtete Kegel hat zur Gleichung

$$a^2(b - z)^2 = b^2(x^2 + y^2).$$

Der Kreis aber, der durch einen mit xy parallelen Schnitt des Kegels in der Höhe z entsteht, hat zum Halbmesser $\frac{a}{b}(b - z)$, also auch zur Fläche

$$X = \frac{a^2}{b^2}(b - z)^2 \cdot \pi,$$

so daß man daher für das Volum des Kegels hat:

$$V = \frac{a^2\pi}{b^2}\int(b - z)^2 dz = \frac{a^2\pi}{3b^2}(b - z)^3.$$

Dieses Integral von $z = 0$ bis $z = b$ genommen, gibt für das Volum des ganzen Kegels

$$\tfrac{1}{3} a^2 b\pi,$$

oder dieses Volum ist gleich dem Produkte der Fläche $a^2\pi$ der kreisförmigen Basis des Kegels in den dritten Theil seiner Höhe b.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

§. 194. (Allgemeine Cubatur der Körper.) Es wurde bereits oben (§. 186) bemerkt, daß die Projektion jedes Elements $MNM'N'$ (Fig. 42) einer Fläche in der Ebene xy gleich dem Rechtecke

$$QRQ'R' = dxdy$$

ist. Das vierseitige Prisma $MNRQ'$, dessen Basis dieses Rechteck und dessen Höhe die Ordinate QM oder $R'N' = z$ ist, hat zu seinem Volum das Produkt $z.dxdy$, und dieses Produkt kann daher auch als das Element des Volums V des Körpers selbst angesehen werden, so daß man daher hat:

$$dV = zdxdy;$$

welcher Ausdruck so wie der von $d\Phi$, in §. 186, behandelt werden muß. Man substituirt nämlich in ihm zuerst den Werth von z in x und y aus der Gleichung der gegebenen Fläche, wodurch man für dV einen Ausdruck der Form

$$dV = f(x.y).dxdy$$

erhält. Nimmt man in diesem Ausdrucke zuerst die Größe y constant und z. B. gleich $PQ = P'Q'$ an, und integrirt bloß in Beziehung auf x, so erhält man die Reihe oder die Summe aller der Prismen, deren Grundfläche zwischen der mit AX parallelen Geraden $Q'Q''$ und $R'R''$ liegen, und welche von zwey auf AX senkrechten Ebene begränzt werden, die zu den Werthen $x = \alpha$ und $x = \alpha'$ gehören. Diesen Theil des gesuchten körperlichen Volums erhält man demnach durch das Integral

$$\int zdx,$$

indem man dasselbe von $x = \alpha$ bis $x = \alpha'$ nimmt, so daß also der analytische Ausdruck dieses Integrals nur noch als eine Funktion der Größe y erscheint. Um dann auch die andern Reihen der ähnlichen Prismen zu erhalten, deren Grundflächen in dem noch unberücksichtigten Raume $APQQ''$ der Ebene xy liegen, wird man den für $\int zdx$ durch die erste Integration erhaltenen endlichen Ausdruck mit dy multipliciren, und von dem so erhaltenen Produkte $dy\int zdx$ das Integral in Beziehung auf y suchen.

Nimmt man dieses letzte Integral von $y = \beta$ bis $y = \beta'$, so erhält man dadurch das Volum des Körpers

$$V = \int dy \int zdx,$$

oder vielmehr denjenigen endlichen Theil dieses Volums, der zwischen zwey auf AX senkrechten Ebenen, zu denen $x = \alpha$ und $x = \alpha'$ gehört,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und zwischen zwey anderen auf AY senkrechten Ebenen, zu denen $y = \beta$ und $y = \beta'$ gehört, enthalten ist.

Man sieht, daß man die Ordnung dieser Integration auch umkehren und zuerst in Beziehung auf y, und dann in Beziehung auf x integriren kann, wodurch man erhält:

$$V = \int dx \int z\,dy.$$

Auch kann man sich die Elemente des Körpers als Prismen vorstellen, die auf einer anderen der drey coordinirten Ebenen, z. B. auf der Ebene der xz senkrecht stehen, und deren Grundflächen in dieser Ebene Rechtecke des Ausdrucks $dx\,dz$, deren Höhe aber y ist, so daß dann das gesuchte Volum des Körpers

$$V = \int dz \int y\,dx$$

auf analoge Weise bestimmt werden wird. Mit Rücksicht auf die angezeigte theilweise Integration endlich kann man das Volum des Körpers allgemein durch das dreyfache Integral

$$V = \int\int\int dx\,dy\,dz$$

darstellen, vorausgesetzt, daß die Dichtigkeit der körperlichen Masse, aus welcher der Körper besteht, in allen seinen Punkten dieselbe ist, wo dann die in dem Körper enthaltene Quantität der Masse M dem Volum V desselben proportionirt seyn wird. Ist aber diese Dichtigkeit des Körpers veränderlich, so sey ρ die Dichtigkeit irgend eines Elements dV des Körpers, wo also ρ irgend eine Funktion von x, y und z seyn wird. Da nun überhaupt bey jedem Körper die Masse desselben sich verhält, wie das Produkt der Dichtigkeit in das Volum, so wird, wenn dM das entsprechende Element der Masse des Körpers ist,

$$dM = \rho \,.\, dV$$

seyn, und da $dV = dx\,dy\,dz$ ist, so wird man für die gesuchte Masse des Körpers den Ausdruck haben:

$$M = \int\int\int \rho\,dx\,dy\,dz,$$

wo man für in allen ihren Theilen homogene Körper ρ gleich einer Constanten, oder auch gleich der Einheit annehmen kann, so daß dann $M = V = \int\int\int dx\,dy\,dz$ ist.

§. 195. (**Anwendung des Vorhergehenden auf die Kugel und den Kegel.**) Die Gleichung der Kugel des Halbmessers a ist

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

so daß man daher hat

$$V = \int dy \int dx \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

Um das Integral $\int dx \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ zu erhalten, muß y als constant angenommen werden. Sey also $a^2 - y^2 = a'^2$, so hat man für dieses Integral

$$\int dx \sqrt{a'^2 - x^2} = \tfrac{1}{2} x \sqrt{a'^2 - x^2} + \tfrac{1}{2} a'^2 \text{ arc. sin. } \frac{x}{a},$$

für die oben erwähnte Reihe der zwischen den Geraden Q′Q″ und R′R″ enthaltenen Prismen. Nimmt man diese Reihe von dem höchsten Punkte der Kugel bis zu demjenigen, wo sie von der Ebene der xy geschnitten wird, d. h. nimmt man das letzte Integral von $x = 0$ bis $x = a$, so erhält man

$$\int dx \sqrt{a'^2 - x^2} = \tfrac{1}{4} a'^2 \pi = \tfrac{1}{4} (a^2 - y^2) \pi,$$

so daß daher das gesuchte Volum der Kugel seyn wird:

$$V = \int dy \int dx \sqrt{a'^2 - x^2} = \tfrac{1}{4} \pi \int dy \, (a^2 - y^2) \quad \text{oder}$$
$$V = \tfrac{1}{4} \pi \, (a^2 y - \tfrac{1}{3} y^3),$$

und dieß ist der Ausdruck für denjenigen Theil des körperlichen Inhalts der Kugel, der über der Ebene xy auf der Seite der positiven x und y, und zwar zwischen der Ebene xz und der mit ihr parallelen Ebene enthalten ist, die von der Ebene der xz um die Größe y absteht. Setzt man daher in dem so erhaltenen Integral die Größe $y = a$, oder was dasselbe ist, nimmt man dieses Integral von $y = 0$ bis $y = a$, so erhält man für das Volum des achten Theils oder für das Volum eines Octanten der Kugel

$$V = \tfrac{1}{12} a^3 \pi;$$

also auch für das Volum der ganzen Kugel $\frac{4}{3} a^3 \pi$, wie zuvor.

I. Für den in § 186 betrachteten Kegel hat man

$$a^2 (b - z)^2 = b^2 (x^2 + y^2) \quad \text{oder}$$
$$z = \frac{b}{a} (a - \sqrt{x^2 + y}) ;$$

also auch für das Volum desselben

$$V = \frac{b}{a} \int dx \int (a - \sqrt{x^2 + y^2}) \, dy.$$

Man hat aber

$$\int (a - \sqrt{x^2 + y^2}) \, dy = ay - \tfrac{1}{2} y \sqrt{x^2 + y^2} - \tfrac{1}{2} x^2 \log. (y + \sqrt{x^2 + y^2}),$$

welches Integral, von $y=o$ bis $y=\sqrt{a^2-x^2}$ genommen, gibt:

$$\tfrac{1}{2}a\sqrt{a^2-x^2} - \tfrac{1}{2}x^2 \log.\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$$

Das gesuchte Volum des Kegels ist daher

$$V = \frac{b}{2a}\int dx\left[a\sqrt{a^2-x^2} - x^2\log.\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right].$$

Das erste dieser Integrale ist

$$\int a\,dx\sqrt{a^2-x^2} = \tfrac{1}{2}a\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \text{ arc. sin. }\frac{x}{a}\right);$$

für das zweyte aber erhält man nach der Form $\int u\,d\nu = u\nu - \int \nu\,du$ den Ausdruck

$$\int x^2 dx.\log.\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \tfrac{1}{3}x^3\log.\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} + \tfrac{1}{3}a\int\frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Endlich ist noch

$$\int\frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \tfrac{1}{2}a^2 \text{ arc. sin. }\frac{x}{a}.$$

Nimmt man daher alles Vorhergehende zusammen, so erhält man für das Volum des Kegels

$$V = \tfrac{1}{3}bx\sqrt{a^2-x^2} + \tfrac{1}{6}a^2 b \text{ arc. sin. }\frac{x}{a} - \frac{bx^3}{6a}\log.\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x},$$

wenn V mit x zugleich verschwindet. Für $x=a$ erhält man den vierten Theil des Kegels $\frac{a^2 b\pi}{12}$, also auch den ganzen Kegel gleich $\frac{a^2 b\pi}{3}$, wie bekannt.

II. Suchen wir noch, in einem dritten Beyspiele, das Volum des Körpers, der zwischen der coordinirten Ebene der xy, zwischen der Fläche (des hyperbolischen Paraboloids) $xy=cz$, und zwischen einem Cylinder enthalten ist, dessen Basis ein Kreis des Halbmessers r, und dessen Axe mit der Axe der z parallel ist. Für diesen Körper geht der allgemeine Ausdruck $V=\int\int z\,dy\,dx$ in folgenden über:

$$V = \frac{1}{c}\int\int xy\,dy\,dx.$$

Integrirt man diesen Ausdruck in Beziehung auf y von der bestimmten Ordinate y_o bis zu der unbestimmten y, so hat man

$$V = \frac{1}{2c}\int_{x_o}^{x}(y^2 - y_o^2)\,x\,dx.$$

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Ist nun $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ die Gleichung des gegebenen Cylinders, so hat man, wenn man der Kürze wegen

$$P = \sqrt{r^2 - (x-a)^2} \text{ setzt:}$$

$$y_0 = b - P, \quad y = b + P \quad \text{und} \quad y^2 - y_0^2 = 4b \,.\, P.$$

Ferner ist auch, für dieselben zwey Gränzen y_0 und y die Abscisse $x_0 = a - r$ und $x = a + r$, und daher

$$V = \frac{2b}{c} \int_{a-r}^{a+r} \sqrt{r^2 - (x-a)^2} \,.\, x\,dx.$$

Setzt man $x - a = rt$, so wird dieser Ausdruck

$$V = \frac{2b}{c} r^2 \int_{-1}^{+1} (a + rt) \sqrt{1 - t^2} \,.\, dt.$$

Allein es ist

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - t^2} \,.\, t\,dt = 0 \quad \text{und} \quad \int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - t^2} \,.\, dt = \tfrac{1}{2}\pi,$$

so daß man daher für das gesuchte Volum hat:

$$V = \frac{a b r^2 . \pi}{c}.$$

§. 196. (**Cubatur der Körper überhaupt.**) Wendet man auf die Cubatur der Flächen die oben (§. 187) für die Complanation derselben gegebene Methode an, so wird man, indem man $U = z$ setzt, für den allgemeinen Ausdruck des Volums erhalten:

$$V = \int\!\!\int z\,dx\,dy = \int\!\!\int z\,(PQ' - P'Q)\,d\varphi\,d\psi.$$

Für das Sphäroid mit drey Axen, dessen Gleichung ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

ist schon daselbst der Werth von

$$PQ' - P'Q = ab \sin.\varphi \cos.\varphi$$

gegeben worden, so daß man daher für dieses Sphäroid hat:

$$V = abc \int\!\!\int d\varphi\,d\psi \sin.\varphi \cos.^2\varphi.$$

Integrirt man diesen Ausdruck zuerst in Beziehung auf φ, so hat man

$$V = -\tfrac{1}{3} abc \int d\psi \cos.^3\varphi, \quad \text{oder}$$
$$V = \tfrac{1}{3} abc \,.\, \psi \,.\, \cos^3.\varphi.$$

Nimmt man dieses Integral von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$, so erhält man

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$V = \tfrac{2}{3} abc . \psi,$$

und nimmt man diesen Ausdruck von $\psi = 0$ bis $\psi = 2\pi$, so hat man für das gesuchte Volum des Sphäroids

$$V = \tfrac{4}{3} abc . \pi,$$

wie schon zuvor (§. 193) erhalten wurde.

§. 197. (Allgemeine Cubatur durch Polarcoordinaten.) Sey M (Fig. 52) ein Punkt des Körpers, und O der Anfang der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z. Ist dann $OM = r$ die Entfernung dieses Punktes M von O, und ist $MOX = \theta$ der Winkel des Radius Vectors r mit der Axe der positiven x, und ist ψ die Neigung der Ebene MOX gegen die coordinirte Ebene der xy, oder überhaupt gegen eine durch die Axe AX willkürlich gelegte fixe Ebene, so hat man (Einleit. §. 12, III.)

$$x = r \cos. \theta, \quad y = r \sin. \theta \cos. \psi \quad \text{und} \quad z = r \sin. \theta \sin. \psi.$$

Man verlängere die Gerade OM bis zu einem andern Punkte m des Körpers, und setze $Om = r'$. Dann beschreibe man aus dem Mittelpunkte O in der Ebene MOX oder mOX die zwey Kreisbogen MN und mn, und bezeichne durch θ' den Winkel NOX. Endlich drehe man die Ebene dieses Winkels NOX um die Axe OX, und nenne ψ' die Neigung dieser Ebene in ihrer neuen Lage mit jener fixen Ebene. Während dieser Bewegung wird der vierseitige Raum MmnN einen Körper, eine abgestumpfte Pyramide Mq beschreiben, dessen Volum wir U nennen wollen.

Allein dieses Viereck MmnN hat einen Flächeninhalt, der gleich dem der Differenz der beyden Kreissectoren mOn und MON, also gleich

$$f = \tfrac{1}{2} (r'^2 - r^2) (\theta' - \theta) = \tfrac{1}{2} (r' + r) (r' - r) (\theta' - \theta)$$

ist. Durch die erwähnte Drehung der Ebene NOX um die Axe OX beschreibt aber auch jeder Punkt M dieses Vierecks einen Kreisbogen MP, dessen Halbmesser das Loth MR von M auf die Axe OX ist, so daß also dieser Kreisbogen $MP = RM . (\psi' - \psi)$ seyn wird. Nimmt man dieses Viereck sehr klein an, so ist das Volum des so entstehenden Elements U des Körpers gleich

$$U = f . PM.$$

Es ist aber $RM = OM \sin. MOX$, oder $RM = r \sin. \theta$, und daher $MP = r(\psi' - \psi) \sin.\theta$. Substituirt man diese Werthe von MP und f in dem letzten Ausdrucke von U, so erhält man

$$U = \tfrac{1}{2} r (r' + r)(r' - r)(\theta' - \theta)(\psi' - \psi) \sin.\theta.$$

Werden nun die drey Dimensionen des Volums U unendlich klein, oder setzt man

$$Mm = r' - r = dr,$$

und eben so die Winkel

$$MON = \theta' - \theta = d\theta \quad \text{und} \quad MRP = \psi' - \psi = d\psi,$$

so wird auch der Factor $(r' + r)$ in $2r$ übergehen, und man wird für das Volum U, d. h. für das Element dV des Volums des gegebenen Körpers

$$dV = r^2 \sin.\theta \,.\, dr\, d\theta\, d\psi$$

erhalten.

Auf diese Weise wird daher das Volum des Körpers in Elemente zerlegt, deren jedes die Gestalt einer abgekürzten vierseitigen Pyramide oder eines rechtwinkligen Parallelepipeds hat, dessen drey Seiten sind: erstens die Gerade $Mm = dr$, zweytens der Kreisbogen $MN = r\,d\theta$, dessen Mittelpunkt O ist, und drittens der Kreisbogen

$$MP = RM \,.\, d\psi = r \sin.\theta \,.\, d\psi,$$

dessen Mittelpunkt der Fußpunkt R des Lothes ist, das von M auf die Axe OX herabgelassen wird.

I. Nennt man dS die Fläche der Basis MNPQ der Pyramide, so ist

$$dS = MN \,.\, MP = r\,d\theta \,.\, RM\,d\psi,$$

wo $RM = r \sin.\theta$, also auch

$$dS = r^2 \sin.\theta \,.\, d\theta\, d\psi \quad \text{ist.}$$

Die Höhe dieser abgekürzten Pyramide aber ist $Mm = dr$, also ist auch das Volum derselben, oder das Volum des Elements des gegebenen Körpers

$$dV = dr \,.\, dS \quad \text{oder}$$
$$dV = r^2 \sin.\theta \,.\, dr\, d\theta\, d\psi, \quad \text{wie zuvor.}$$

II. Wäre aber $MNPQ = d\omega$ das Element einer Kugelfläche, deren Halbmesser $MO = 1$ ist, so hätte man

$$d\omega = MP \,.\, MN, \quad \text{oder da}$$
$$MP = d\psi \sin.\theta \quad \text{und} \quad MN = d\theta \quad \text{ist,}$$
$$d\omega = \sin.\theta \,.\, d\theta\, d\psi.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ist dann $d\omega'$ das analoge Element einer Kugelfläche, deren Halbmesser r ist, so hat man

$$d\omega : d\omega' = 1 : r^2 \quad \text{oder} \quad d\omega' = r^2 d\omega;$$

also ist auch das Element Mq des körperlichen Volums

$$dV = dr \,.\, d\omega' = r^2 dr d\omega,$$

oder wenn man den vorhergehenden Werth von $d\omega$ substituirt:

$$dV = r^2 \sin.\theta \,.\, dr d\theta d\psi, \quad \text{wie zuvor.}$$

§. 198. (**Allgemeine Cubatur der Körper durch Veränderung der Variablen.**) Es gibt aber noch eine andere, allgemeine Darstellung des Elements eines körperlichen Volums, die mit der des §. 187 analog ist, und von welcher das so eben (§. 197) angezeigte Verfahren nur ein besonderer Fall ist.

Sey der Ausdruck

$$U dx dy dz$$

gegeben, wo U eine Funktion von x, y und z bezeichnet. Man verwandle diesen Ausdruck in einen ihm gleichbedeutenden, der aber von drey anderen veränderlichen Größen abhängt, die wir durch r, φ und ψ bezeichnen wollen.

Zu diesem Zwecke nehme man an:

$$\left.\begin{aligned} dx &= P d\varphi + Q d\psi + R dr \\ dy &= P' d\varphi + Q' d\psi + R' dr \\ dz &= P'' d\varphi + Q'' d\psi + R'' dr \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (I),$$

wo P, Q... Funktionen von r, φ und ψ seyn sollen.

Da der gegebene Ausdruck $\int\int\int U dx dy dz$ dreymal integrirt werden soll, das erste Mal z. B. in Beziehung auf x, wo also die Größen y und z als constant angesehen werden, oder wo $dy = dz = 0$ gesetzt wird, so findet man den entsprechenden Werth von dx durch die drey folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} dx &= P d\varphi + Q d\psi + R dr, \\ 0 &= P' d\varphi + Q' d\psi + R' dr, \\ 0 &= P'' d\varphi + Q'' d\psi + R'' dr. \end{aligned}$$

Eliminirt man aber aus diesen drey Gleichungen die Größen dr und $d\psi$, und setzt man der Kürze wegen

$$T = P(Q'R'' - Q''R') + Q(P''R' - P'R'') + R(P'Q'' - P''Q'),$$

so erhält man

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$dx = \frac{T d\varphi}{Q'R'' - Q''R'},$$

und dieser Werth von dx bringt das Produkt $dx dy dz$ auf die drey variablen Größen φ, y und z zurück.

Um weiter eben so dy zu finden, wird man $d\varphi = dz = o$ setzen, wodurch die zwey letzten der Gleichungen (I) werden:

$$dy = P'd\psi + R'dr \quad \text{und} \quad o = Q''d\psi + R''dr,$$

woraus man, durch Elimination von dr, erhält:

$$dy = (Q'R'' - Q''R')\frac{d\psi}{R''},$$

so daß man also hat:

$$dx dy = \frac{T d\varphi d\psi}{R''},$$

und somit ist das Produkt $dx dy dz$ auf die drey veränderlichen Größen φ, ψ und z gebracht worden.

Um endlich noch dz zu eliminiren, wird man $d\varphi = d\psi = o$ setzen, wodurch die letzte der Gleichungen (I) in folgende übergeht:

$$dz = R''dr,$$

so daß man also hat:

$$dx dy dz = T dr d\varphi d\psi, \quad \text{oder}$$

$$\int\int\int U dx dy dz = \int\int\int U T dr d\varphi d\psi,$$

in welchem letzten Ausdrucke die Größe U ebenfalls als eine Funktion von r, φ und ψ zu betrachten ist.

Wählt man, um die Anwendung dieses allgemeinen Verfahrens auf die Cubatur der Körper zu zeigen, die Größen r, φ, ψ so, daß man hat (Einl. §. 12, II.)

$$x = r \sin.\varphi \cos.\psi,$$
$$y = r \sin.\varphi \sin.\psi,$$
$$z = r \cos.\varphi,$$

so erhält man, wenn man diese drey Gleichungen nach r, φ und ψ differentiirt:

$$P = r \cos.\varphi \cos.\psi,$$
$$P' = r \cos.\varphi \sin.\psi,$$
$$P'' = - r \sin.\varphi.$$

Entwickelt man eben so die Größen Q, Q', Q'' und R, R', R'', so findet man

$$T = r^2 \sin.\varphi.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Setzt man daher, für die Cubatur der Körper, $U = 1$, so ist der allgemeine Ausdruck des Elements eines körperlichen Volums

$$dV = dx\,dy\,dz, \quad \text{oder}$$
$$dV = T.\,dr\,d\varphi\,d\psi, \quad \text{oder endlich}$$
$$dV = r^2 \sin.\varphi.\,dr\,d\varphi\,d\psi, \quad \text{wie zuvor.}$$

Hätte man aber die Winkel φ und ψ so gewählt, daß man hat (Einl. §. 12, III.)

$$x = r\cos.\varphi,$$
$$y = r\sin.\varphi\cos.\psi,$$
$$z = r\sin.\varphi\sin.\psi,$$

so würde man ebenfalls $T = r^2 \sin.\varphi$, und daher auch

$$dV = r^2 \sin.\varphi\,.\,dr\,d\varphi\,d\psi$$

gefunden haben.

§. 199. (**Gränzen des vorhergehenden dreyfachen Integrals.**) Um die Gränzen zu bestimmen, zwischen welchen man die drey auf einander folgenden Integrationen des Ausdrucks

$$dV = r^2 \sin.\theta\,.\,dr\,d\theta\,d\psi$$

zu nehmen hat, wo die Winkel θ und ψ die in §. 197 angeführte Bezeichnung haben, muß man zwey Fälle unterscheiden.

In dem ersten Falle soll der Anfang O der Coordinaten innerhalb dem Körper liegen, oder selbst einen Punkt des zu suchenden Volums bilden. In diesem Falle wird man zuerst in Beziehung auf r, und zwar von $r = 0$ bis $r = u$ integriren, wo u eine Funktion von θ und ψ bezeichnet, die durch die bekannte Gleichung der Oberfläche, deren Volum man sucht, gegeben ist. Wenn dieß geschehen ist, so wird man von $\theta = 0$ bis $\theta = \pi$, und von $\psi = 0$ bis $\psi = 2\pi$ integriren, wobey die Ordnung, in welcher man diese beyden Integrationen vornimmt, willkürlich ist.

I. Wenn aber der Anfangspunkt der Coordinaten oder der Pol derselben außer dem Körper liegt, so wollen wir durch u und u′ zwey gegebene Funktionen von θ und ψ, und durch ω und ω' zwey andere Funktionen von ψ, und endlich durch α und α' zwey gegebene Winkel bezeichnen und annehmen, daß man denjenigen Theil des körperlichen Volums sucht, der von zwey seiner Seiten zwischen zwey Oberflächen enthalten ist, deren Gleichungen $r = u$ und $r = u'$ sind; der auf der anderen Seite von zwey conischen Oberflächen begränzt wird, die beyde

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ihren Scheitel im Anfange der Coordinaten, und ihre gemeinschaftliche Axe in der Axe der x haben, und deren Gleichungen sind $\theta = \omega$ und $\theta = \omega'$, und der endlich zwischen zwey Ebenen enthalten ist, welche durch diese gemeinschaftliche Axe der beyden Kegel gehen, und welche die Winkel α und α' mit derjenigen fixen Ebene bilden, von welcher man die Winkel ψ zählt. Dieß vorausgesetzt, wird man zuerst in Beziehung auf r, und zwar von $r = u$ bis $r = u'$ integriren, dann in Beziehung auf θ von $\theta = \omega$ bis $\theta = \omega'$, und endlich in Beziehung auf ψ von $\psi = \alpha$ bis $\psi = \alpha'$.

§. 200. (**Anwendung des Vorhergehenden auf die Kugel.**) Nimmt man den Pol der Coordinaten im Mittelpunkte der Kugel, so ist der Ausdruck $\int r^2\, d\, r$ von den Winkeln θ und ψ unabhängig, so daß man, wenn man in Beziehung auf r von $r = o$ bis $r = r$ integrirt, sofort erhält:

$$V = \tfrac{1}{3} r^3 \int\int \sin.\theta\,.\,d\theta\, d\psi.$$

Es ist aber $\int d\theta \sin.\theta = -\cos.\theta$, oder wenn man dieses Integral von $\theta = o$ bis $\theta = \pi$ nimmt, $\int d\theta \sin.\theta = 2$, also auch

$$V = \tfrac{2}{3} r^3 \int d\psi = \tfrac{2}{3} r^3\,.\,\psi,$$

und daher, wenn man das letzte Integral von $\psi = o$ bis $\psi = 2\pi$ nimmt, das Volum der ganzen Kugel

$$V = \tfrac{4}{3} r^3 \pi, \quad \text{wie zuvor.}$$

I. Als Beyspiel zu §. 199, I. seyen für die zwey ersten daselbst erwähnten Flächen zwey concentrische Kugeln gegeben, die ihren gemeinschaftlichen Mittelpunkt im Anfange der Coordinaten haben, und deren Halbmesser a und a' sind. Seyen ferner die beyden a. a. O. erwähnten Kegel von kreisförmiger Basis, d. h. seyen die Winkel ω und ω' constant, so hat man, wenn man den Ausdruck

$$dV = r^2 \sin.\theta\,.\,dr\,d\theta\,d\psi$$

zuerst in Beziehung auf r integrirt, und das Integral von $r = a$ bis $r = a'$ nimmt:

$$A = \int r^2 dr = \tfrac{1}{3}(a'^3 - a^3),$$

also auch

$$V = A \int d\theta \sin.\theta\,.\,d\psi.$$

Das Integral $\int d\theta \sin.\theta = -\cos.\theta$ von $\theta = \omega$ bis $\theta = \omega'$ genommen, ist gleich $\cos.\omega - \cos.\omega'$, und das von $d\psi$, zwischen den Gränzen α und α' genommen, ist gleich $\alpha' - \alpha$, so daß man also hat:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$V = A\,(\alpha' - \alpha)\,(\cos.\,\omega - \cos.\,\omega'),$$

wo (Fig. 53) CBD und cbd die beyden Kegel, und wo die Winkel $ACb = ACd = \omega$, $ACB = ACD = \omega'$ sind. Legt man durch die gemeinschaftliche Axe CA der beyden Kegel zwey Ebenen ACM und ACN, die mit der Ebene BCD die Winkel $BAM = \alpha$ und $BAN = \alpha'$ bilden, so schneiden jene Kegel von der Kugelschaale, deren Dicke $a' - a$ ist, ein ringförmiges Stück aus, von welchem der auf der einen Seite durch die Figur MmNn begränzte Körper den für V gefundenen Ausdruck zum Volum hat, so daß also

$$V = \tfrac{1}{3}\,(a'^3 - a^3)\,(\alpha' - \alpha)\,(\cos.\,\omega - \cos.\,\omega')$$

ist. Wenn die Höhlung des erwähnten Ringes ganz verschwindet, d. h. wenn der Ring in seiner Mitte ganz ausgefüllt wird, so ist $\omega = 0$. Wird überdieß auch $a = 0$, so verwandelt sich dieser Ring in einen sphärischen Sector, von welchem der zu MNmn gehörende Theil das Volum

$$V = \tfrac{1}{3}\,a'^3\,(\alpha - \alpha')\,(1 - \cos.\,\omega')$$

hat. Nimmt man $\alpha = 2\pi$, $\alpha' = 0$ und $\omega' = \frac{1}{2}\pi$ oder $\cos.\,\omega' = 0$, so hat man für das Volum der Halbkugel

$$V = \tfrac{2}{3}\,a'^3\,\pi, \quad \text{wie zuvor.}$$

§. 201. **(Cubatur der Körper nach Guldin's Regel.)** So wie wir oben (§. 188) die Oberfläche Φ der Körper gefunden haben, die durch Rotation einer Figur entstehen, deren Umfang s und Abstand Y des Schwerpunkts von der Rotationsaxe bekannt ist, eben so wird auch in der Statik gezeigt, daß das Volum V eines so entstehenden Körpers, wenn F die Oberfläche der ebenen Figur, und Y der senkrechte Abstand des Schwerepunkts dieser Fläche von der Rotationsaxe ist, gleich

$$V = 2\pi\,.\,YF$$

ist, so daß man also durch diese einfache Gleichung das Volum aller Rotationsflächen bestimmen kann, wenn die Fläche F der erzeugenden Figur, und der Schwerpunkt derselben schon bekannt ist.

Ex. Wenn sich eine Ellipse AEB (Fig. 50), deren Halbaxen a und b sind, um eine Gerade PX dreht, die von dem Mittelpunkte der Ellipse um die Größe $CP = c$ entfernt ist, so ist $Y = c$ und $F = ab\pi$, also auch das Volum des so entstehenden Körpers

$$V = 2\pi\,.\,YF = 2abc\,\pi^2,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

welches auch die Neigung der einen oder der anderen Axe der Ellipse gegen die Rotationsaxe PX seyn mag.

Dreht sich daher ein Kreis des Halbmessers a um seine Tangente, so ist in dem vorigen Ausdrucke $a = b = c$, und daher das Volum des so entstehenden Körpers

$$V = 2a^3\pi^2.$$

Dreht sich aber ein Halbkreis um seinen Durchmesser $2a$, so ist die bekannte Fläche des Halbkreises $F = \frac{1}{2}a^2\pi$, und wie die Statik lehrt, $Y = \frac{4a}{3\pi}$; also ist auch das Volum des so entstehenden Körpers, das heißt, das Volum der Kugel

$$V = 2\pi \cdot \frac{4a}{3\pi} \cdot \frac{1}{2}a^2\pi \quad \text{oder}$$
$$V = \frac{4}{3}a^3\pi, \quad \text{wie zuvor.}$$

I. Ist $y = fx$ die Gleichung der um die Axe der x rotirenden Curve, und sucht man das Volum des Körpers, der durch die Rotation eines Bogens dieser Curve entsteht, dessen Anfangspunkt die bestimmten Ordinaten x_0 und y_0 hat, und der bis zu den unbestimmten Ordinaten xy fortgeht, so hat man, nach dem Vorhergehenden

$$V = \pi\int(y^2 - y_0^2)\,dx.$$

Wenn sich aber diese Curve nicht um die Axe der x, sondern um eine mit derselben parallele und von ihr um die Distanz b entfernte Axe dreht, so wird man für das Volum V' des so entstehenden Körpers (wie oben §. 188, I.) haben:

$$V' = \pi\int[(y+b)^2 - (y_0 - b)^2]\,dx \quad \text{oder}$$
$$V' = V + 2b\pi\int(y - y_0)\,dx.$$

Allein das Integral $\int(y - y_0)\,dx$ ist offenbar die ebene Fläche, die zwischen der Curve $y = fx$, zwischen ihrer Abscissenaxe und zwischen den beyden Gränzcoordinaten y_0 und y des um die Axe der x rotirenden Bogens dieser Curve eingeschlossen ist, und die wir oben (§. 167 u. f.) durch F bezeichnet haben, so daß man hat:

$$V' = V + 2b\pi \cdot F.$$

Wenn sich also eine Curve zuerst um irgend eine willkürliche Axe dreht, die in der Ebene dieser Curve liegt, und sie nicht schneidet, und wenn sich dieselbe Curve dann um eine andere, mit jener parallele und von ihr um die Distanz b entfernte Axe dreht, so ist die Differenz der beyden so entstehenden Rotations-Volume gleich dem Produkte der

Fläche F jener Curve in die Peripherie eines Kreises, dessen Halbmesser gleich b ist.

II. Läßt sich überdieß diese Fläche $F = \int y\,dx$, durch eine der Axe der x parallele und von ihr um b entfernte gerade Linie, in zwey symmetrische Hälften theilen, so werden diese Theile zu den Gleichungen $y = b + fx$ und $y = b - fx$ gehören, und der Ausdruck $V = \pi \int y^2 dx$ wird in den folgenden übergehen:

$$V = \pi \int [(b + fx)^2 - (b - fx)^2]\,dx \quad \text{oder} \quad V = 4 b \pi \int y\,dx.$$

Eben so ist aber auch

$$F = \int [(b + fx) - (b - fx)]\,dx = 2 \int y\,dx,$$

so daß man hat

$$V = 2 b \pi \,.\, F.$$

Ist also eine Fläche F durch irgend eine Axe in zwey symmetrische Hälften theilbar, so ist das Volum, das durch die Rotation dieser Fläche um eine andere der vorigen parallele, aber nicht durch diese Fläche gehende Axe entsteht, gleich dem Produkte dieser Fläche F in die Peripherie des Kreises, dessen Halbmesser die Distanz jener beyden Axen ist. Wenn sich z. B. die Ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ um eine an dem Endpunkte der kleinen Axe 2b errichtete Tangente dreht, so ist die Fläche der Ellipse $F = a b \pi$, und daher das Volum des so entstehenden Körpers

$$V = 2 a b^2 \pi^2.$$

XXXIII.

Integration der Differentialgleichungen der ersten Ordnung und des ersten Grades zwischen zwey veränderlichen Größen.

§. 202. (**Sonderung der veränderlichen Grössen.**) Wenn in einer Differentialgleichung zwischen zwey oder mehr veränderlichen Größen x, y, z, . . . bloß die ersten Differentialien dx, dy, dz, . . . dieser Größen vorkommen, so ist diese Gleichung der *ersten* Ordnung, und zwar des ersten, zweyten, dritten, ... Grades, wenn diese Differentialien bloß in der ersten, zweyten, dritten Potenz vorkommen. Enthält die gegebene Gleichung auch noch die zweyten Differentialien d^2x, d^2y, ... dieser Größen, so ist sie eine Differentialgleichung der zweyten Ordnung und wieder des ersten, zweyten, dritten Grades, wenn diese zweyten Differentialien bloß in der ersten, zweyten oder dritten Potenz in der Gleichung enthalten sind, u. s. f. Wir wollen in diesem Abschnitte die Differentialgleichungen der ersten Ordnung und des ersten Grades zwischen zwey veränderlichen Größen näher untersuchen.

Eigentlich gehören alle bisher betrachteten Differentialausdrücke, in welchen bloß zwey veränderliche Größen und die Differentialien derselben in der ersten Potenz vorkommen, zu den Gleichungen der ersten Ordnung und des ersten Grades, da sie, wie wir gesehen haben, sich sämmtlich auf die allgemeine Form $dy = Xdx$ zurückbringen lassen, in welcher X irgend eine Funktion von x bezeichnet. Allein in den Gleichungen dieser Art sind, wie ihr allgemeiner Ausdruck zeigt, die zwey veränderlichen Größen x und y bereits gesondert, so daß auf der einen Seite des Gleichheitszeichens nur die von x und auf der andern nur die von y abhängigen Größen stehen. Das bisher Vorgetragene enthält die Vorschriften, solche abgesonderte Gleichungen zu integriren. Wir wollen daher auch in dem Folgenden annehmen, daß man von jeder gegebenen Gleichung das Integral derselben finden kann, sobald man durch irgend ein Verfahren dahin gekommen ist, die zwey veränderlichen Größen in ihr zu trennen, oder sie auf eine gesonderte Gleichung zurück zu führen.

Allein diese Sonderung bietet oft große Schwierigkeiten dar, und man kennt noch keine allgemeine Regel, sie zu Stande zu bringen.

Jede Differentialgleichung der ersten Ordnung und des ersten Grades zwischen zwey veränderlichen Größen x und y hat (§. 59) die allgemeine Form

$$Mdx + Ndy = o,$$

wo M sowohl als auch N eine Funktion von den beyden Größen x und y ist. Die Sonderung derselben hat zum Zwecke, sie auf die Gestalt

$$Xdx + Ydy = o$$

zu bringen, wo X bloß eine Funktion von x, und Y bloß eine Funktion von y ist. Kann man sie auf diese Gestalt bringen, so hat man auch sofort für das gesuchte Integral der Gleichung

$$\int X dx + \int Y dy = C,$$

wo sich dann das Integral $\int X dx$ sowohl als auch $\int Y dy$ nach den bisher vorgetragenen Vorschriften angeben lassen wird.

Öfter hat diese Sonderung keine Schwierigkeit. Wäre z. B. die Gleichung $y dx - x dy = 0$ gegeben, so hat man sofort, wenn man sie durch xy dividirt:

$$\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0,$$

eine gesonderte Gleichung, deren Integral, nach dem Vorhergehenden, ist

$$\log. x - \log. y = \log. C \quad \text{oder auch} \quad \log. \frac{x}{y} = \log. C,$$

so daß man daher für das gesuchte Integral derselben die Gleichung $\frac{x}{y} = C$ erhält.

Ist eben so $Y dx - X dy = 0$ gegeben, so hat man

$$\frac{dx}{X} - \frac{dy}{Y} = 0.$$

Ist $XY' dx - YX' dy = 0$, so ist auch

$$\frac{X dx}{X'} - \frac{Y dy}{Y'} = 0.$$

Ist endlich $\frac{dy}{dx} = XY$, so hat man auch

$$X dx = \frac{dy}{Y}, \text{ u. s. w.}$$

§. 203. (**Sonderung der Variablen bey homogenen Gleichungen.**) Eine Differentialgleichung heißt homogen, wenn in ihr die Summe der Potenzen der veränderlichen Größen in jedem Gliede der Gleichung dieselbe ist. So sind

$$x dx + y dy = 0, \quad x dx + \frac{y^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

homogene Gleichungen.

Bey Gleichungen dieser Art läßt sich die Sonderung der Variablen x und z immer ausführen, wenn man $y = xz$ setzt. Denn dann nehmen in der Gleichung $M dx + N dy = 0$ die Größen M und N die Gestalt $Z x^m$ und $Z' x^m$ an, wo Z und Z' bloß Funktionen von z sind, und man erhält sonach, wenn man in der gegebenen Gleichung dy gleich $z dx + x dz$ setzt, und alle Glieder derselben durch x^m di-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

vidirt:

$$Zdx + Z'(zdx + xdz) = o \quad \text{oder}$$
$$(Z + Z'z)dx + Z'xdz = o,$$

also auch

$$\frac{dx}{x} + \frac{Z'dz}{Z + Z'z} = o,$$

wo die veränderlichen Größen x und z gesondert sind.

Ex. I. Sey die Gleichung

$$xdx + ydy = aydx$$

gegeben. Setzt man in ihr $y = xz$ und $dy = zdx + xdz$, so erhält man sofort

$$\frac{dx}{x} + \frac{zdz}{1 - az + z^2} = o;$$

oder da

$$\frac{zdz}{1 - az + z^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{2zdz - adz}{1 - az + z^2} + \frac{adz}{1 - az + z^2}\right]$$

ist, so ist das gesuchte Integral der gegebenen Gleichung

$$\log. x + \tfrac{1}{2}\log.(1 - az + z^2) + \tfrac{1}{2}a\int\frac{dz}{1 - az + z^2} = C.$$

Das Integral $\int\frac{dz}{1 - az + z^2}$ aber ist schon oben (§. 138) gegeben worden. Für $a > 2$ hängt dieses Integral von den Logarithmen, und für $a < 2$ von den Kreisbogen ab. Für $a = 2$ endlich hat man, nach §. 138:

$$\int\frac{dz}{1 - 2z + z^2} = \int\frac{dz}{(1 - z)^2} = \frac{1}{1 - z},$$

und daher für diesen letzten Fall das gesuchte Integral

$$\log. x + \log.(1 - z) + \frac{1}{1 - z} = C;$$

oder, wenn man den Werth von $z = \frac{y}{x}$ wieder herstellt:

$$\log.(x - y) + \frac{x}{x - y} = C.$$

Da aber jede Größe u auch durch $\log. e^u$ ausgedrückt werden kann, wenn $\log. e = 1$ ist, so kann das letzte Integral auch so geschrieben werden:

$$\log.(x - y) + \log. e^{\frac{x}{x - y}} = \log. C,$$

oder endlich

$$(x - y) . e^{\frac{x}{x - y}} = C.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ex. II. Sey die Gleichung

$$x\,dy - y\,dx = dx\sqrt{x^2 + y^2}$$

gegeben. Setzt man $y = xz$, so findet man

$$\frac{dx}{x} - \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = 0,$$

also auch, wenn man (nach §. 137, I) integrirt:

$$\log. x - \log. (z + \sqrt{1 + z^2}) = \log. C,$$

und wenn man den Werth von z wieder herstellt:

$$y + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = C \quad \text{oder} \quad -y + \sqrt{x^2 + y^2} = C,$$

oder endlich

$$x^2 - 2Cy = C^2.$$

§. 204. (Gleichung $(a+mx+ny)dx + (b+px+qy)dy = 0$).
Diese Gleichung kann homogen gemacht werden, wenn man

$$x = t + \alpha \quad \text{und} \quad y = u + \beta$$

setzt. Dann erhält man nämlich

$$(a + m\alpha + n\beta + mt + nu)\,dt$$
$$+ (b + p\alpha + q\beta + pt + qu)\,du = 0.$$

Da aber die Größen α und β willkürlich sind, so kann man sie so annehmen, daß man hat

$$a + m\alpha + n\beta = 0 \quad \text{und} \quad b + p\alpha + q\beta = 0.$$

Durch diese Annahme wird

$$\alpha = \frac{bn - aq}{mq - np} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{ap - bm}{mq - np},$$

und die gegebene Gleichung geht in folgende über:

$$(mt + nu)\,dt + (pt + qu)\,du = 0,$$

die in Beziehung auf t und u homogen ist, und daher, nach §. 170, integrirt werden kann.

I. Ist $mq = np$, so werden die Werthe von α und β unendlich groß. Allein dann ist $px + qy = \frac{p}{m}(mx + ny)$, und die gegebene Gleichung geht in die folgende über:

$$a\,dx + b\,dy + (mx + ny)\left(dx + \frac{p}{m}dy\right) = 0.$$

Setzt man in ihr $mx + ny = z$, so erhält man

$$dx + \frac{(bm + pz)\,dz}{amn - bm^2 + (mn - pm)\,z^2} = o,$$

und von dieser Gleichung kann das zweyte Glied nach §. 138, II integrirt werden. Für $mn - pm = o$ endlich hat man

$$dx + \frac{(bm + nz)\,dz}{amn - bm^2} = o, \text{ also auch}$$

$$x + \frac{bmz + \frac{1}{2}nz^2}{amn - bm^2} = C.$$

§. 205. (Gleichung $dy + Xy\,dx = X'dx$). In dieser Gleichung, in welcher X und X' bloße Funktionen von x bezeichnen, kann man die veränderlichen Größen sondern, wenn man

$$y = X''z, \text{ also auch } dy = z\,dX'' + X''dz$$

setzt, wo X'' wieder eine Funktion von x ausdrückt. Durch diese Substitution geht nämlich die gegebene Gleichung in folgende über:

$$z\,dX'' + X''dz + XX''z\,dx = X'dx.$$

Da aber X'' eine unbestimmte Funktion von x bezeichnet, so kann man sie so nehmen, daß der Ausdruck

$$X''dz + XX''z\,dx = o$$

wird, wodurch man also auch $z\,dX'' - X'dx = o$ erhält.

Die erste dieser Gleichungen, durch $X''z$ dividirt, gibt

$$\frac{dz}{z} + X\,dx = o \quad \text{oder} \quad \log. z + \int X\,dx = C,$$

oder endlich

$$z = C \,.\, e^{-\int X dx}.$$

Mit diesem Werthe von z gibt dann die zweyte jener Gleichungen

$$dX'' = \frac{1}{C}\, e^{\int X dx} \,.\, X'dx \quad \text{oder}$$

$$X'' = \frac{1}{C}\int e^{\int X dx} \,.\, X'dx + C'.$$

Da aber $y = X''z$ und $z = C \,.\, e^{-\int X dx}$ war, so ist auch das gesuchte Integral der gegebenen Gleichung

$$y = e^{-\int X dx} \,.\, \left[\int e^{\int X dx} \,.\, X'dx + C'\right].$$

Ex. I. Für die Gleichung $dy + y\,dx = x^2\,dx$ ist

$$X = 1 \quad \text{und} \quad X' = x^2,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

also $\int X\,dx = x$, und daher

$$y = e^{-x}[\int x^2 \,.\, e^x \,.\, dx + C].$$

Es ist aber

$$\int x^2 \,.\, e^x\,dx = e^x(x^2 - 2x + z),$$

also ist auch

$$y = C \,.\, e^{-x} + x^2 - 2x + z.$$

Ex. II. Für die Gleichung $(1 - x^2)\,dy + xy\,dx = a\,dx$ hat man

$$X = \frac{x}{1 - x^2},\quad X' = \frac{a}{1 - x^2},\quad \int X\,dx = -\log.\sqrt{1 - x^2},$$

also auch

$$e^{\int X\,dx} = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

woraus man das gesuchte Integral erhält

$$y = ax + C \,.\, \sqrt{1 - x^2}.$$

Ex. III. Für die Gleichung $dy + \frac{y(x+1)}{x^2}dx = \frac{dx}{x}$ hat man

$$X = \frac{x+1}{x^2} \quad \text{und} \quad X' = \frac{1}{x},$$

also auch

$$\int X dx = \log.x - \frac{1}{x} \text{ und } e^{\int X\,dx} = x \,.\, e^{-\frac{1}{x}}, \text{ so wie } e^{-\int X\,dx} = \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}},$$

demnach das gesuchte Integral

$$y = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}[\int e^{-\frac{1}{x}}dx + C]. \quad \text{(Vergl. §. 66, II.)}$$

§. 206. (**Reduction der dreygliedrigen Gleichungen der ersten Ordnung.**) Wenn eine gegebene Differentialgleichung der ersten Ordnung nur zwey Glieder hat, so ist die Sonderung derselben immer sehr leicht. Denn hat man

$$\beta \,.\, u^g z^h\,dz = \alpha \,.\, u^e z^f\,du,$$

welches die allgemeinste Form einer zweygliedrigen Gleichung der ersten Ordnung ist, so hat man auch sofort

$$\beta \,.\, z^{h-f}\,dz = \alpha \,.\, u^{e-g}\,du,$$

wo die Veränderlichen schon gesondert sind.

Nicht so verhält es sich mit den dreygliedrigen Gleichungen, deren allgemeine Form

$$\gamma \,.\, u^i z^k\,dz + \beta \,.\, u^g z^h\,du = \alpha \,.\, u^e z^f\,du$$

ist. Wir wollen suchen, sie auf ihre einfachste Gestalt zurück zu führen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dividirt man alle Glieder derselben durch $\gamma u^i z^f$, so erhält man

$$z^{k-f} dz + \frac{\beta}{\gamma} \cdot u^{g-i} z^{h-f} du = \frac{\alpha}{\gamma} \cdot u^{e-i} du \ldots \text{(a)}.$$

Es sey nun

$$z^{k-f} dz = \frac{dy}{k-f+1} \quad \text{und} \quad u^{g-i} du = \frac{dx}{g-i+1},$$

so hat man

$$x = u^{g-i+1} \quad \text{und} \quad y = z^{k-f+1}.$$

Differentiirt man diese Werthe von x und y, und substituirt die so erhaltenen Ausdrücke von du und dz in der Gleichung (a), so erhält man, wenn man der Kürze wegen

$$a = \frac{(k-f+1)\alpha}{(g-i+1)\gamma}, \quad b = \frac{(k-f+1)\beta}{(g-i+1)\gamma},$$

$$m = \frac{e-g}{g-i+1}, \quad n = \frac{b-f}{k-f+1}$$

gesetzt hat, für die gesuchte einfachste Form der gegebenen dreygliedrigen Gleichung:

$$dy + by^n dx = ax^m dx \quad . \quad . \quad . \quad \text{(A)}.$$

Könnte man die letzte Gleichung für alle Werthe von m und n integriren, so würde dadurch auch die Integration aller dreygliedrigen Gleichungen der ersten Ordnung gegeben seyn. Da aber dieß unmöglich ist, so bleibt nur noch übrig, einige der einfachsten Fälle dieser Gleichung besonders zu betrachten.

§. 207. (Gleichung $dy + by^2 dx = ax^m dx$). Setzt man in der Gleichung (A) die Größe $n = z$, so erhält man die vorstehende, welche die Riccatische Gleichung heißt, weil Riccati sie zuerst behandelt hat.

I. Der einfachste Fall ist der für $m = 0$. Dann ist

$$dy + by^2 dx = adx,$$

woraus sofort folgt

$$dx = \frac{dy}{a - by^2},$$

und davon ist das Integral (nach §. 136)

$$x = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \log. \frac{\sqrt{a} + y\sqrt{b}}{\sqrt{a} - y\sqrt{b}}.$$

II. Setzt man in der Riccatischen Gleichung $y = z^k$, so erhält man

$$n z^{k-1} dz + b z^{2k} dx = a x^m dx,$$

und dieser Ausdruck wird homogen seyn, wenn $k - 1 = 2k = m$, das heißt, wenn $k = -1$ und $m = -2$ ist.

Der zweyte einfache Fall der Riccatischen Gleichung ist also für $m = -2$:

$$dy + by^2 dx = \frac{a\,dx}{x^2};$$

und da diese Gleichung homogen wird, wenn man $y = \frac{1}{z}$ setzt, so läßt sie sich auch integriren.

III. Setzt man in der Riccatischen Gleichung $y = \frac{1}{bx} + \frac{z}{x^2}$, so findet man

$$dz + \frac{bz^2}{x^2} dx = a x^{m+2} dx \quad . \; . \; . \quad (a),$$

und dieser Ausdruck wird homogen, wenn $m = -2$ ist, wie zuvor, so wie er sich auch sondern läßt, wenn $m = -4$ ist, denn dann hat man

$$dz + (bz^2 - a)\frac{dx}{x^2} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{x^2} + \frac{dz}{bz^2 - a} = 0.$$

IV. Setzt man in der Gleichung (a) die Größe

$$z = \frac{1}{y'} \quad \text{und} \quad x^{m+3} = x',$$

so findet man

$$dy' + \frac{a}{m+3} y'^2 dx' = \frac{b}{m+3} (x')^{-\frac{m+4}{m+3}} dx';$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$\frac{a}{m+3} = b', \quad \frac{b}{m+3} = a' \quad \text{und} \quad -\frac{m+4}{m+3} = m' \text{ setzt:}$$

$$dy' + b y'^2 dx' = a' x'^{m'} dx';$$

ein der Riccatischen Gleichung ganz ähnlicher Ausdruck, den man also, nach III., wieder sondern kann, wenn man $y' = \frac{1}{b'x'} + \frac{z'}{x'^2}$ setzt, und wenn die Größe $m' = -4$ ist.

Fände diese letzte Bedingung nicht Statt, so wird man in der so nach z' transformirten Gleichung wieder

$$z' = \frac{1}{y''} \quad \text{und} \quad (x')^{m'+3} = x'',$$

und neuerdings zur Abkürzung

$$\frac{a'}{m'+3} = b'', \quad \frac{b'}{m'+3} = a'', \quad -\frac{m'+4}{m'+3} = m''$$

setzen, wodurch man zu der Gleichung gelangt:

$$dy'' + b''y''^2 dx'' = a''x^{m''} dx'';$$

und da auch diese wieder der Riccatischen ähnlich ist, so wird sie sich sondern lassen, wenn $m'' = -4$ ist.

Setzt man dieses Verfahren fort, so findet man, daß sich die Riccatische Gleichung sondern läßt, so oft

m, oder $-\frac{m+4}{m+3} = m'$, oder $-\frac{m'+4}{m'+3} = m''$, oder $-\frac{m''+4}{m''+3} = m'''$ u. f.

gleich der Zahl -4 ist, das heißt, sie läßt sich sondern, wenn m eine der folgenden Zahlen ist:

$$-\tfrac{4}{1}, \quad -\tfrac{8}{3}, \quad -\tfrac{12}{5}, \quad -\tfrac{16}{7} \text{ u. f.},$$

also überhaupt, wenn

$$m = -\frac{4N}{2N-1}$$

ist, wo N jede ganze positive Zahl bezeichnet, $N = 0$ und $N = \infty$ mit eingeschlossen, wovon die erste $m = 0$, und die zweyte $m = -2$ gibt.

V. Man kann aber auch in der gegebenen Gleichung $y = \frac{1}{y'}$ und $x' = x^{m+1}$ setzen, wodurch man, wenn der Kürze wegen

$$\frac{a}{m+1} = b', \quad \frac{b}{m+1} = a' \text{ und } -\frac{m}{m+1} = m'$$

genommen wird, erhält:

$$dy' + b'y'^2 dx' = a'x'^{m'} dx'.$$

Da dieß wieder die Form der Riccatischen Gleichung ist, so wird man mit ihr, wie zuvor, verfahren können. Wenn man nämlich in ihr

$$y' = \frac{1}{b'x'} + \frac{z'}{x'^2}$$

setzt, so wird man finden, daß die Riccatische Gleichung sich in allen den Fällen sondern läßt, wo die Zahl $m' = -\frac{4N}{2N-1}$ ist, wo also

$$-\frac{m}{m+1} = -\frac{4N}{2N-1}, \text{ oder wo } m = -\frac{4N}{2N+1}$$

ist, das heißt, wo

$$m = -\tfrac{4}{3}, \quad -\tfrac{8}{5}, \quad -\tfrac{12}{7}, \quad -\tfrac{16}{9}, \ldots \text{ ist.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 208. (**Aufsuchung des integrirenden Factors**). Wir haben bereits oben (§. 61) bemerkt, daß man in den Differentialgleichungen, durch Combination derselben mit ihrer ursprünglichen Gleichung, eine constante Größe eliminiren kann. Ist nun die ursprüngliche Gleichung von der Form $f(x, y) = C$, so daß die Constante C von den veränderlichen Größen x und y getrennt erscheint, so wird das Differential derselben ein vollständiges Differential seyn, und daher nach dem, was Cap. XXVII., §. 163 gesagt worden ist, integrirt werden können.

Hat man z. B. $x\,dy + y\,dx = 0$, so ist dieser Ausdruck ein vollständiges Differential, wie er denn auch in der That durch die Differentiation der Gleichung $xy = C$ entstanden ist, daher auch die letzte Gleichung das Integral der ersten ist.

Enthält aber die ursprüngliche Gleichung jene Constante als einen Factor der veränderlichen Größe x oder y, so wird diejenige Differentialgleichung, in welcher man den Werth jener Constante aus der ursprünglichen Gleichung substituirt hat, kein vollständiges Differential mehr seyn, und daher auch nicht unmittelbar integrirt werden können.
Hat man z. B. die Gleichung $y - ax = 0$, so ist das Differential derselben $dy - a\,dx = 0$, also auch, wenn man a eliminirt:

$$x\,dy - y\,dx = 0,$$

und dieses Differential ist nicht vollständig oder unmittelbar nicht integrabel. In der That wird auch die oben (§. 58) gegebene Bedingungsgleichung $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ der Integrabilität nicht erfüllt, da hier $P = -y$, $Q = x$, also

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = -1 \quad \text{und} \quad \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 1 \quad \text{ist.}$$

Allein wenn man in der erwähnten ursprünglichen Gleichung die Größe a isolirt, so daß man hat

$$\frac{y}{x} = a,$$

so erhält man durch Differentiation

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = 0,$$

und dieß ist allerdings ein vollständiges Differential, da hier $P = -\frac{y}{x^2}$, $Q = \frac{1}{x}$, also auch $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) = -\frac{1}{x^2}$ ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Man sieht daraus, daß die Integrabilität einer gegebenen Gleichung, wenn sie nicht schon an sich ein vollständiges Differential ist, an die Wiederherstellung eines verloren gegangenen Factors, der in unserm Beyspiele $\frac{1}{x^2}$ ist, gebunden ist.

Es sey nun die gegebene Differentialgleichung

$$Pdx + Qdy = o,$$

wo P und Q Funktionen von x und y bezeichnen. Nehmen wir an, daß diese Gleichung kein vollständiges Differential sey, daß sie aber durch den Factor z dazu gemacht werden kann. Da sonach

$$Pzdx + Qzdy = o$$

ein vollständiges Differential ist, so muß man, nach §. 58, die Bedingungsgleichung haben:

$$d\left(\frac{Pz}{dy}\right) = d\left(\frac{Qz}{dx}\right),$$

oder wenn man die Entwicklung derselben vornimmt:

$$P\frac{dz}{dy} + z\frac{dP}{dy} = Q\frac{dz}{dx} + z\frac{dQ}{dx},$$

oder endlich

$$P\frac{dz}{dy} - Q\frac{dz}{dx} + z\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = o \quad . \quad . \quad . \quad (A).$$

Könnte man nun aus dieser Gleichung den Werth von z in x und y ableiten, so würde man dadurch auch jede gegebene Differentialgleichung der ersten Ordnung zu einer vollständigen Differentialgleichung machen, und sie daher nach Cap. XXVII., §. 163 integriren können. Allein meistens ist diese Bestimmung des Werthes von z aus der Gleichung (A) sehr schwer, wo nicht unmöglich, da z im Allgemeinen von den beyden veränderlichen Größen x und y abhängt.

I. In denjenigen Fällen aber, wo z nur eine jener beyden Veränderlichen, z. B. x, enthält, ist es leicht, den Werth dieses Factors z durch die Gleichung (A) zu bestimmen.

Dann ist nämlich

$$-Q\frac{dz}{dx} + z\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = o$$

oder

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{Q}\cdot\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right),$$

so daß also auch die Größe

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right)$$

eine Funktion von x seyn wird, die wir durch X bezeichnen wollen. Man hat also in diesem Falle

$$\log. z = \int X dx \quad \text{oder} \quad z = e^{\int X dx}.$$

II. Sollte z nur eine Funktion der Größe y seyn, so würde man eben so erhalten

$$Y = \frac{1}{P}\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) \quad \text{und} \quad z = e^{\int Y dy}.$$

Ex. I. Für $x dy - y dx = 0$ hat man $P = -y$, $Q = x$, also wenn z nur eine Funktion von x ist, $X = -\frac{2}{x}$, und daher

$$\log. z = \int X dx = \log. x^2 + \log. C \quad \text{oder} \quad z = \frac{C}{x^2},$$

wie zuvor.

Ex. II. Für $dx + (a dx + 2 b y dy)\sqrt{1 + x^2} = 0$ hat man

$$P = 1 + a\sqrt{1 + x^2}, \quad Q = 2by\sqrt{1 + x^2},$$

also auch, wenn z bloß von x abhängen kann:

$$X = -\frac{x}{1 + x^2} \quad \text{und} \quad \int X dx = -\log. \sqrt{1 + x^2},$$

$$\text{also auch} \quad z = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Multiplicirt man also die gegebene Gleichung durch diesen Factor, so erhält man

$$\frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} + a dx + 2 b y dy = 0,$$

von welcher das gesuchte Integral ist

$$a x + b y^2 + \log. [x + \sqrt{1 + x^2}] = C.$$

Man kann noch bemerken, daß sich der Integrationsfactor bey homogenen Gleichungen immer leicht finden läßt, was aber ohne großen Nutzen für die Anwendung ist, da man die homogenen Gleichungen (nach §. 170) sondern, und daher, auch ohne jenen Factor zu kennen, integriren kann. Ist endlich dieser Factor gefunden, oder ist die gegebene Gleichung schon an sich der Bedingung der Integrabilität entsprechend, so wird man ihr Integral nach dem oben (§. 163) mitgetheilten Verfahren bestimmen können, da in diesem Falle der gegebene Ausdruck ein vollständiges Differential ist.

Merkwürdiger ist es, daß zweygliedrige, bereits gesonderte Glei-

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

chungen, deren jedes Glied ein transcendentes Integral hat, für ihr gemeinschaftliches Integral zuweilen einen algebraischen Ausdruck erhalten. So gibt die Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}} = 0,$$

wenn man sie Glied für Glied integrirt:

$$\text{arc. sin.}\,\frac{x}{a} - \text{arc. sin.}\,\frac{y}{a} = C.$$

Allein wenn man die erste Gleichung durch xy multiplicirt, so hat man

$$y \cdot \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - x \cdot \frac{y\,dy}{\sqrt{a^2-y^2}} = 0.$$

Setzt man nun in der Gleichung (§. 153) $\int u\,d\nu = u\nu - \int \nu\,du$ zuerst

$u = y$ und $d\nu = \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, und dann $u = x$ und $d\nu = \frac{y\,dy}{\sqrt{a^2-y^2}}$,

so erhält man

$$-y\sqrt{a^2-x^2} + \int dy\sqrt{a^2-x^2}$$
$$= -x\sqrt{a^2-y^2} + \int dx\sqrt{a^2-y^2} + C;$$

oder, da nach der gegebenen Gleichung $\int dy\sqrt{a^2-x^2} = \int dx\sqrt{a^2-y^2}$ ist:

$$y\sqrt{a^2-x^2} - x\sqrt{a^2-y^2} = C$$

für das gesuchte algebraische Integral der Gleichung

$$dx\sqrt{a^2-y^2} = dy\sqrt{a^2-x^2}.$$

Diese Bemerkung hat die erste Veranlassung zu der Theorie der elliptischen Funktionen gegeben, welche wir in dem zweyten Theile dieser Schrift näher betrachten werden. Hier wollen wir nur bemerken, daß die zwey einfachsten und anwendbarsten dieser elliptischen Funktionen folgende sind:

$$f.(\varphi, \theta) = \int d\varphi\sqrt{1-\alpha^2\sin.^2\varphi} \quad \text{und}$$

$$F.(\varphi, \theta) = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin.^2\varphi}},$$

wo $\alpha = \sin.\theta$ der Modul, und φ die Amplitude der elliptischen Funktion heißt. Hat man bereits Tafeln berechnet, die den Werth von $f.(\varphi, \theta)$ und $F.(\varphi, \theta)$ für jeden Werth von φ und θ geben, so wird man diese beyden Integrale als gegeben ansehen, wie man die Aus-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

drücke sin. x, arc. sin. x, log. x u. s. als gegeben ansieht, weil die Tafeln für diese Größen bereits berechnet sind Solche Tafeln für jene beyden Funktionen findet man in *Legendre's* Exercices de Calc. intégral. Vol. III.

Kann man aber diese Funktionen als bereits bekannt ansehen, so sind dadurch nicht bloß mehrere der bereits oben vorgekommenen Integralien gegeben, wie z. B. die für die Rectification der Ellipse und Hyperbel (§. 176 und 177), sondern man kann auch eine große Anzahl anderer, sehr allgemeiner Ausdrücke auf jene zwey Funktionen zurückführen, unter welchen ich hier nur das Integral erwähne

$$\int \frac{X\,dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}},$$

wo $X = \frac{a + bx + cx^2 + \ldots}{a' + b'x + c'x^2 + \ldots}$ eine rationale gebrochene Funktion von x ist. M. s. *Legendre* a. a. O. Vol. I. und *Crelle's* Journal. Vol. X. p. 280.

XXXIV.

Integration der Differentialgleichungen der ersten Ordnung und des zweyten Grades zwischen zwey veränderlichen Größen.

§. 209. (**Gleichungen der Form** $dy^2 + Pdydx + Qdx^2 = 0$.) Nach der oben (§. 169) aufgestellten Erklärung sind die Differentialgleichungen der ersten Ordnung und des zweyten Grades solche, welche nur die ersten Differentiationen der veränderlichen Größe und zwar in ihrer ersten und zweyten Potenz enthalten.

Ihre allgemeine Form ist

$$dy^2 + P\,dy\,dx + Q\,dx^2 = 0 \;\ldots\; (A),$$

oder, wenn man durch dx^2 dividirt

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + P \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right) + Q = 0.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Löst man diese quadratische Gleichung in Beziehung auf die Größe $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ auf, und bezeichnet man durch t und t′ ihre Wurzeln, so hat man

$$\frac{dy}{dx} - t = o \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} - t' = o,$$

und diese beyden Gleichungen lassen sich, als Differentialgleichungen der ersten Ordnung und des ersten Grades, nach dem vorhergehenden Kap. XXIX. integriren. Sind also $M = o$ und $N = o$ die Integrale der beyden letzten Gleichungen, so wird auch das gesuchte Integral der Gleichung (A) entweder $M = o$, oder $N = o$, oder auch das Produkt $MN = o$ seyn, da die Gleichung (A) der folgenden

$$\left(\frac{dy}{dx} - t\right)\left(\frac{dy}{dx} - t'\right) = o$$

gleichgeltend ist, welcher alle jene endlichen Gleichungen genug thun, die einen oder die beyde dieser Faktoren auf Null bringen.

Ex. I. Ist die Gleichung

$$dy^2 - a^2 dx^2 = o$$

gegeben, so zerlegt sie sich in die zwey Faktoren

$$dy + adx = o \quad \text{und} \quad dy - adx = o,$$

deren Integrale sind

$$y + ax = C \quad \text{und} \quad y - ax = C',$$

und jede dieser zwey Gleichungen ist also auch das Integral der gegebenen Gleichung, so wie auch ihr Produkt

$$(y + ax - C)(y - ax - C') = o,$$

denn wenn man die letzte Gleichung differentiirt, so erhält man

$$(y + ax - C)(dy - adx) + (y - ax - C')(dy + adx) = o,$$

und wenn man hierin die Werthe von

$$y = C - ax \quad \text{und} \quad y = C' + ax$$

substituirt, so hat man wieder

$$dy = -adx \quad \text{und} \quad dy = +adx,$$

wie zuvor.

Macht man $dy = mdx$, wovon das Integral $y = mx + C$ ist, so geht die oben gegebene Gleichung $dy^2 - a^2 dx^2 = o$ in folgende über

$$m^2 - a^2 = o.$$

Eliminirt man aber die Größe m zwischen den beyden Gleichungen $y = mx + C$ und $m^2 - a^2 = o$, so erhält man

$$(y - C)^2 - a^2 x^2 = o,$$

und auch diese Gleichung ist als ein Integral der gegebenen Gleichung $dy^2 - a^2 dx^2 = o$ anzusehen, so wie das vorhergehende Produkt $(y + ax - C)(y - ax - C) = o$, obschon jene nur eine, und diese zwey Constanten enthält. Beyde Gleichungen drücken nämlich das System von zwey geraden Linien aus, die gegen die Axe der x im entgegengesetzten Sinne geneigt sind.

§. 210. (Gleichungen der Form $dy^n + Pdy^{n-1}dx + Qdy^{n-2}dx^2 + \ldots + Tdydx^{n-1} + Udx^n = o$.)

Auch solche Gleichungen lassen sich, wie die in §. 176, behandeln, wenn man ihnen die Gestalt gibt

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + P\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + Q\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + \ldots + T\left(\frac{dy}{dx}\right) + U = o,$$

und wenn man sie in Beziehung auf die Größe $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ auflößt. Sind nämlich dann $t, t', t'' \ldots$ die Wurzeln dieser Gleichung, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} - t = o, \quad \frac{dy}{dx} - t' = o, \quad \frac{dy}{dx} - t'' = o \text{ u. f.}$$

Sind nun $M = o$, $N = o$, $P = o \ldots$ die Integrale der letzten einfachen Differentialgleichungen, so sind sie auch zugleich die Integrale der gegebenen Gleichung, sie sowohl, als auch das Produkt $MN = o$ oder $MNP = o$ u. f. Sind endlich die Faktoren P, Q, R ... constante Größen, so ist auch $\frac{dy}{dx} = p$ eine constante Größe, also $y = px + C$ und $p = \frac{y - C}{x}$. Substituirt man diesen Werth von p statt $\frac{dy}{dx}$ in der gegebenen Gleichung, so erhält man sofort das gesuchte Integral derselben.

Ex. Ist die Gleichung

$$dy^3 + dx^3 = o \quad \text{oder} \quad p^3 + 1 = o$$

gegeben, so hat man für die Wurzeln dieser Gleichung

$$p = -1, \; p = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3} \quad \text{und} \quad p = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3},$$

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

also sind auch die Integrale der gegebenen Gleichung

$$y = -x + C \quad \text{oder} \quad y = \frac{x}{2}(1 + \sqrt{-3}) + C' \quad \text{oder}$$

$$y = \frac{x}{2}(1 - \sqrt{-3}) + C'',$$

oder auch das Produkt aus je zweyen oder endlich das Produkt aus allen dreyen dieser Gleichungen.

§. 211. (**Besondere Fälle.**) Wenn die gegebene Differentialgleichung außer $\frac{dy}{dx}$ nur eine der zwey Variablen, z. B. x, enthält, und leichter in Beziehung auf x, als auf $\frac{dy}{dx}$ aufzulösen ist, so kann man so verfahren.

Man suche zuerst aus der gegebenen Gleichung den Werth von x, den wir durch X bezeichnen wollen. Setzt man dann $\frac{dy}{dx} = p$ oder $dy = p\,dx$, also auch

$$y = px - \int x\,dp + C,$$

so hat man sofort, wenn man $x = X$ setzt,

$$y = Xx - \int X\,dp + C.$$

Eliminirt man dann p zwischen dieser und der ersten gegebenen Gleichung, so erhält man eine endliche Gleichung zwischen x und y, die das gesuchte Integral der gegebenen Gleichung ist.

Ex. Ist $x\,dx + a\,dy = b\sqrt{dx^2 + dy^2}$ gegeben, so hat man

$$x + ap = b\sqrt{1 + p^2},$$

also auch

$$X = -ap + b\sqrt{1 + p^2},$$

und daher der vorhergehende Werth von y

$$y = -\tfrac{1}{2}ap^2 + bp\sqrt{1+p^2} - b\int dp\sqrt{1+p^2} + C.$$

I. Wenn die gegebene Gleichung zwar beyde Variable, allein eine von ihnen, z. B. y, nur in der ersten Potenz enthält, so nehme man von ihr den Werth von y in x und p, wodurch man erhält

$$dy = p\,dx = M\,dx + N\,dp \quad \text{oder}$$

$$(M - p)\,dx + N\,dp = 0.$$

Kann man nun die letzte Gleichung integriren, so erhält man dadurch eine Gleichung zwischen p und x. Eliminirt man dann aus dieser und aus der gegebenen Gleichung die Größe p, so hat man das gesuchte Integral der gegebenen Gleichung.

Ex. Ist $y\,dx - x\,dy = a\sqrt{dx^2 + dy^2}$ gegeben, so hat man

$$y = px + a\sqrt{1 + p^2}.$$

Das Differential dieser Gleichung ist, wenn man $dy = p\,dx$ setzt,

$$x\,dp + \frac{a\,p\,dp}{\sqrt{1+p^2}} = 0.$$

Diese Gleichung zerfällt in die beyden Faktoren

$$dp = 0 \quad \text{und} \quad x + \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} = 0.$$

Der erste Faktor gibt $p = c$. Substituirt man diesen Werth von p in der gegebenen Gleichung

$$y = px + a\sqrt{1+p^2},$$

so hat man für das gesuchte Integral derselben

$$y = Cx + a\sqrt{1 + C^2}.$$

Der zweyte Faktor gibt $p = \frac{\pm x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$,

$$\sqrt{1+p^2} = -\frac{ap}{x} = \frac{\mp a}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

und daher, wenn man in der gegebenen Gleichung substituirt,

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

welche Gleichung keine willkürliche Constante enthält, und auch auf keine Weise in dem vorhergehenden Integrale

$$y = Cx + a\sqrt{1 + C^2}$$

enthalten ist, und welche daher als eine besondere Auflösung der gegebenen Differentialgleichung angesehen werden muß.

II. Hier folgen noch einige hierher gehörende Beyspiele mit ihren Auflösungen, deren Ableitung man in Euler's Differentialrechnung, Part. I. Sect. III., nachsehen kann.

(A) ... $y\,dx - x\sqrt{dx^2 + dy^2} = 0$ gibt zum Integral

$$\log. x = C \pm \tfrac{1}{2} \log. [\sqrt{1+p^2} \pm p] - \tfrac{1}{2} p \sqrt{1+p^2} - \tfrac{1}{2} p^2,$$

wo zwischen beyden Gleichungen die Größe $p = \frac{dy}{dx}$ eliminirt wird.

(B) ... $y dx - x dy = ax \sqrt{dx^2 + dy^2}$ gibt eben so

$$x = \frac{C}{\sqrt{1+p^2}} \cdot [\sqrt{1+p^2} - p]^{\frac{1}{a}}.$$

(C) ... $\frac{y dx + x dy}{\sqrt{2xy}} = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ gibt zum Integral

$$(\sqrt{x} + \sqrt{4})^{\frac{1}{\sqrt{2}}+1} = \tfrac{1}{2} C . (\sqrt{x} - \sqrt{y})^{\frac{1}{\sqrt{2}}-1}.$$

Da das Element des Bogens einer Curve $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ist, und da man eben so hat

$$d . \sqrt{2xy} = \frac{y dx + x dy}{\sqrt{2xy}},$$

so ist das gefundene Integral die Gleichung einer Curve zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x, y, für welche der Bogen $s = \sqrt{2xy}$ ist.

(D) ... $a dx + b dy = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ gibt zum Integral

$$(b^2 - 1) y + abx + x \sqrt{a^2 - b^2 - 1} = C,$$

also die Gleichung einer geraden Linie, für welche der Bogen $s = ax + by$ ist.

XXXV.

Besondere Auflösungen der Differentialgleichungen.

§. 212. **(Erklärung der besonderen Auflösung.)** Wir haben so eben unter den Beyspielen des §. 178 den Fall angetroffen, wo eine gegebene Differentialgleichung, nebst ihrem gewöhnlichen unbestimmten Integrale mit der willkürlichen Constante desselben, noch ein anderes Integral enthält, welches keine willkürliche Constante mit sich führt und auch in jenem unbestimmten Integrale nicht enthalten ist,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

demungeachtet aber, wenn man sie differentiirt, die gegebene Differentialgleichung wieder erzeugt. Solche Integrale nennt man besondere Auflösungen der zu ihnen gehörenden Differentialgleichungen.

Die gegebene Gleichung war

$$y\,dx - x\,dy = a\sqrt{dx^2 + dy^2},$$

und für sie würde das unbestimmte Integral $y = Cx + a\sqrt{1 + C^2}$ mit ihrer willkürlichen Constante C, so wie auch die besondere Auflösung $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ gefunden, welche keine neue Constante enthält und durch keine Annahme von C mit jenem Integrale identisch gemacht werden kann, obschon beyde endliche Ausdrücke von y der gegebenen Differentialgleichung entsprechen. Denn wenn man in dieser Differentialgleichung $y = Cx + a\sqrt{1 + C^2}$ und $dy = C\,dx$, oder wenn man in ihr $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ und $dy = \frac{-x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ substituirt, so wird, in beyden Fällen, der gegebenen Differentialgleichung genug gethan.

Eben so verhält es sich mit der Differentialgleichung

$$dy^2 - x\,dx\,dy + y\,dx^2 = 0.$$

Denn sucht man aus ihr den Werth von

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4y}}{2} \quad \text{oder}$$

$$\frac{x\,dx - 2\,dy}{\sqrt{x^2 - 4y}} + dx = 0,$$

so findet man, da

$$\int \frac{x\,dx - 2\,dy}{\sqrt{x^2 - 4y}} = \sqrt{x^2 - 4y}$$

ist, das unbestimmte Integral der vorgelegten Gleichung

$$\sqrt{x^2 - 4y} + x + C = 0 \quad \text{oder} \quad 4y + 2Cx + C^2 = 0.$$

Allein derselben Gleichung entspricht auch die endliche Gleichung

$$4y - x^2 = 0,$$

und da diese in dem vorhergehenden Integrale nicht enthalten ist, so ist sie die besondere Auflösung der gegebenen Differentialgleichung.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 213. **(Auffindung dieser besonderen Auflösungen einer gegebenen Differentialgleichung.)** Sey $U = o$ eine gegebene Gleichung zwischen x, y und einer Constante a. Differentiirt man diese Gleichung in Beziehung auf x und y, und eliminirt man dann aus diesen beyden Gleichungen die Größe a, so erhält man eine Gleichung der Form

$$dU = P dx + Q dy = o,$$

wo P und Q Funktionen von x und y ohne a sind.

Man kann aber auch die Größe a als eine veränderliche Größe betrachten, wenn dadurch die in der gegebenen Differentialgleichung bestehende Verknüpfung zwischen dx und dy nicht aufgehoben wird, und unter dieser Voraussetzung wird das Differential der Gleichung $U = o$ die Form erhalten

$$dU' = P dx + Q dy + R da = o,$$

wo auch R eine Funktion von x, y und a ist.

Diese Gleichung $dU' = o$ geht daher in die frühere Gleichung $dU = o$ über, erstens, wenn a constant oder $da = o$ ist, und zweytens, wenn die Größe R' selbst gleich Null gesetzt wird.

Da nun das Resultat der Elimination einer Größe aus zwey Gleichungen, nicht sowohl durch die Beschaffenheit dieser Größe selbst, sondern nur durch die Art ihrer Verbindung mit den übrigen Größen bedingt wird, so erhält man durch Elimination von a aus den beyden Gleichungen $U = o$ und $dU' = o$ offenbar dieselbe Differentialgleichung wieder, wenn man auch a als eine variable, durch die Gleichung $R = o$ bestimmte Größe behandelt. Führt man also nun das veränderlich gewordene a in die Gleichung $U = o$ ein, d. h. schafft man a aus $U = o$ mittelst der Gleichung $R = o$ weg, so erhält man ebenfalls eine endliche Gleichung, die aber, in sofern die Gleichung $R = o$ in der That ein variables a darbiethet, und da das Resultat der Elimination von a aus den Gleichungen $U = o$ und $R = o$ nicht auch durch Substitution irgend eines constanten Werthes für a in der Gleichung $U = o$ erhalten werden kann, die erwähnte besondere Auflösung unserer Differentialgleichung seyn wird.

Demnach wird man also diese besondere Auflösung einer Differentialgleichung aus ihrem allgemeinen Integral U auf folgende Art finden. Man differentiire dieses Integral bloß in Beziehung auf die darin enthaltene unbestimmte Constante, und eliminire dann aus dem so erhaltenen Differential und dem gegebenen allgemeinen Integral U die erwähnte Constante. Das Resultat dieser Elimination ist die besondere Auflösung der gegebenen Differentialgleichung in allen den Fällen, wo sie durch keinen speziellen Werth der im allgemeinen Integral enthaltenen Constante dargestellt werden kann.

So hatten wir in §. 178 das allgemeine Integral

$$y = Cx + a\sqrt{1 + C^2}.$$

Dieß in Beziehung auf C differentiirt, gibt

$$C = \frac{\pm x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

und die Elimination von C aus diesen beyden Gleichungen gibt

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

als die besondere Auflösung der Differentialgleichung

$$y\,dx - x\,dy = a\sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Eben so gibt das allgemeine Integral des §. 179

$$4y + 2Cx + C^2 = 0,$$

und dessen Differential in Beziehung auf C gibt $x = -C$, also ist auch das Resultat der Elimination von C aus diesen beyden Gleichungen oder

$$4y - x^2 = 0$$

die besondere Auflösung der Gleichung

$$dy^2 - x\,dx\,dy + y\,dx^2 = 0.$$

I. Man sieht, daß sich dasselbe auch auf Differentialgleichungen von drey und mehr veränderlichen Größen anwenden läßt, und daß die Gleichung, welche diese besondere Auflösung vorstellt, für die einhüllende Curve oder für die einhüllende Fläche (§. 133) gehört, welche eine nach einem bestimmten Gesetze bewegliche Curve oder Fläche, die durch die Gleichung $U = 0$ gegeben wird, umschließt und an allen ihren Orten berührt.

Dasselbe läßt sich endlich auch auf Differentialgleichungen der höheren Ordnungen fortsetzen. Ist z. B. die Gleichung gegeben

$$x\,d^2y^2 - 2\,dx\,dy\,d^2y + x\,dx^4 = 0,$$

so ist das nächste Integral derselben

$$U = (x^2 + C^2)\,dx - 2C\,dy = 0,$$

wo C die willkürliche Constante ist. Allein das Differential von U, bloß in Beziehung auf C genommen, gibt

$$C - \frac{dy}{dx} = o,$$

und die Elimination von C aus diesen beyden Gleichungen gibt

$$x^2 - \frac{dy^2}{dx^2} = o,$$

und diese Gleichung oder $\frac{dy}{dx} \mp x = o$ ist daher die besondere Auflösung der gegebenen zweyten Differentialgleichung. Wir werden im zweyten Bande auf diese interessanten Betrachtungen wieder zurück kommen.

§. 214. **(Curven, deren Subtangente u. s. gegeben ist.)** Wir wollen diesen Gegenstand mit einigen Aufgaben beschließen, die sich auf die Integration der Differentialgleichungen beziehen.

I. Man suche die Curve, deren Subtangente gleich einer gegebenen Funktion X von x ist.

Die allgemeine Gleichung dieser Curven ist

$$\frac{y\,dx}{dy} = X \quad \text{oder} \quad \log. y = \int \frac{dx}{X}.$$

Soll z. B. die Subtangente constant seyn, so sey $X = a$, so ist $\log. y = \frac{x}{a}$, für die Logistik. — Soll die Subtangente gleich der doppelten Abscisse, also $X = 2x$ seyn, so hat man $y^2 = Cx$ für die Parabel. — Soll, für Polarcoordinaten, die Subtangente gleich dem Radius Vector r seyn, so hat man

$$\frac{r^2\,d\nu}{dr} = r \quad \text{oder} \quad \nu = \log. r$$

die Gleichung der logarithmischen Spirale.

II. Um die Curve zu finden, deren Normale ihrem Krümmungshalbmesser gleich ist, hat man für die Normale $\frac{y\,ds}{dx}$ und für den Krümmungshalbmesser $-\frac{dx^3}{dx\,d^2y}$, wenn dx constant angenommen wird. Setzt man diese beyden Ausdrücke einander gleich, so erhält man

$$\frac{y\,d^2y}{dx} + \frac{dy^2}{dx} = -dx,$$

oder, wenn man $\frac{dy}{dx} = p$ und $\frac{d^2y}{dx} = dp$ setzt,

$$y\,dp + p\,dy = -\,dx,$$

wovon das Integral ist

$$py = C - x,$$

oder wenn man den Werth von p wieder herstellt

$$y\,dy = C\,dx - x\,dx.$$

Das Integral dieser Gleichung ist aber, wenn x mit y zugleich verschwinden soll,

$$y^2 = 2\,Cx - x^2,$$

welches die Gleichung des Kreises ist.

III. Um die Curve zu finden, deren Krümmungshalbmesser eine constante Größe a ist, hat man

$$a = -\frac{ds^3}{dx\,d^2y} \quad \text{oder} \quad \frac{a\,d^2y}{dx^2} = -\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Ist wieder $\frac{dy}{dx} = p$, also $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, so ist die letzte Gleichung

$$\frac{a\,dp}{dx} = -(1+p^2)^{\frac{3}{2}} \quad \text{oder} \quad dx = -\frac{a\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

wovon das Integral ist

$$x = C - \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}},$$

oder, wenn man den Werth von $p = \frac{dy}{dx}$ wieder herstellt,

$$dy = \frac{(x-C)\,dx}{\sqrt{a^2-(x-C)^2}}.$$

Das Integral dieses Ausdruckes ist

$$y - C' = \sqrt{a^2-(x-C)^2} \quad \text{oder}$$
$$(x-C)^2 + (y-C')^2 = a^2$$

die Gleichung des Kreises.

§. 215. (Trajectorien). Wenn in der Gleichung einer gegebenen Curve die in ihr enthaltene constante Größe sich nach und nach durch alle Abstufungen ändert, wenn z. B. der Parameter einer Parabel sich ändert, während der Scheitel derselben unveränderlich ist,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

so erhält man eine Reihe von einander unendlich nahe liegenden Parabeln, die alle denselben Scheitel und dieselbe Abscissenaxe haben. Man suche diejenige Curve, welche alle diese auf einander folgenden Curven unter einem und demselben Winkel schneidet, dessen trigonometrische Tangente gleich k seyn soll. Man nennt die gesuchte Curve die Trajectorie der gegebenen Curven.

Ist die Gleichung der gegebenen Curve zwischen den Coordinaten x, y und der Constante a ausgedrückt, so wird die trigonometrische Tangente des Winkels dieser Curve mit der Axe der x gleich $\frac{dy}{dx}$ seyn.

Drückt man aber die Gleichung der gesuchten Trajectorie durch die auf dieselben Axen bezogenen Coordinaten x′, y′ aus, so wird die trigonometrische Tangente des Winkels dieser Trajectorie mit der Axe der x gleich $\frac{dy'}{dx'}$ seyn. Nimmt man diese beyden Tangenten für einen der Durchschnittspunkte beyder Curven, für welchen also $x' = x$ und $y' = y$ ist, so wird der Winkel der beyden Tangenten zugleich der Winkel der beyden Curven in diesem ihren gemeinschaftlichen Punkte seyn, und da dieser Winkel gleich der Differenz der beyden Winkel ist, welchen die Tangenten der zwey Curven mit der Axe der x bilden, so wird man haben

$$k = \frac{\frac{dy'}{dx'} - \frac{dy}{dx}}{1 + \frac{dy'}{dx'} \cdot \frac{dy}{dx}} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(I.)}$$

In dieser Gleichung wird man den Werth von $\frac{dy}{dx}$, nachdem man in ihm $x = x'$ und $y = y'$ gesetzt hat, und dann in dem so erhaltenen Ausdrucke den Werth von a aus der Gleichung der gegebenen Curve substituiren: das Resultat dieser Substitutionen wird die Gleichung der gesuchten Trajectorie seyn.

Ex. Sey die Gleichung der gegebenen Curve $y = ax$, also eine durch den Anfang der Coordinaten gehende Gerade. Dieß gibt $\frac{dy}{dx} = a$, und daher die Gleichung (I.), wenn man in ihr $a = \frac{y'}{x'}$, das heißt, $a = \frac{y}{x}$ setzt

$$k \,.\, (x'dx' + y'dy') = x'dy' - y'dx',$$

oder wenn man durch $x^2 + y^2$ dividirt und dann nach dem bekannten Ausdrucke integrirt

$$k \cdot \log. \sqrt{x'^2 + y'^2} = \text{arc. tang.} \frac{x'}{y'}.$$

Setzt man $x' = r \cos. \nu$, $y' = r \sin. \nu$ also $x'^2 + y'^2 = \nu^2$, so ist die letzte Gleichung

$$k \cdot \log. r = \nu.$$

Die gesuchte Trajectorie ist also die logarithmische Spirale. (Vergl. §. 93, IV.)

Wäre statt der Geraden eine höhere Parabel gegeben, deren Gleichung $y^n = a x^m$ ist, so würde die Gleichung (I.) in folgende übergehen

$$k(m y' d y' + n x' d x') + m y' d x' - n x' d y' = 0,$$

da $\frac{dy}{dx} = \frac{m a x^{m-1}}{n y^{n-1}} = \frac{m y}{n x}$ also auch $\frac{dy}{dx} = \frac{m y'}{n x'}$ ist.

Da aber diese Differentialgleichung homogen ist, so läßt sie sich integriren. Für $m = n = 1$ erhält man den vorhin betrachteten Fall.

§. 216. (**Orthogonale Trajectorien.**) Ist der Winkel, den die Trajectorie mit den gegebenen Curven bilden soll, ein rechter Winkel, so ist in der Gleichung (I.) die Größe m unendlich, und diese Gleichung geht daher in folgende einfachere über

$$1 + \frac{dy'}{dx'} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (\text{II.}),$$

und dieß ist die Gleichung der orthogonalen oder rechtwinkligen Trajectorien.

Ex. Ist die gegebene Curve die Parabel $y^n = a x^m$, so findet man

$$m y' d y' + n x' d x' = 0,$$

deren Integral ist

$$m y'^2 + n x'^2 = C,$$

oder die orthogonale Trajectorie ist eine Ellipse oder Hyperbel, wenn n positiv oder negativ ist. Ist $m = n = 1$, so ist die gegebene Curve eine durch den Anfangspunkt gehende Gerade, deren Gleichung $y = a x$ und die Trajectorie derselben hat zur Gleichung

$$x^2 + y^2 = C^2,$$

die für einen Kreis gehört.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Wenn endlich die orthogonale Trajectorie ein System von ähnlichen Ellipsen, die alle denselben Mittelpunkt und ihre großen Axen in der Axe der x haben, so hat man für die Gleichung einer dieser Ellipsen

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Diese Ellipsen werden aber einander ähnlich seyn, wenn in allen das Verhältniß $\frac{b}{a}$ dasselbe bleibt. Sey also $\frac{b}{a} = m$, so ist

$$y = m \sqrt{a^2 - x^2},$$

und daher $\frac{dy}{dx} = -\frac{xy}{a^2 - x^2}$, also auch $\frac{dy}{dx} = -\frac{x'y'}{a^2 - x'^2}$.

Dadurch geht die Gleichung (II.) in folgende über

$$1 - \frac{x'y'dy'}{(a^2 - x'^2)dx'} = 0 \quad \text{oder} \quad y'dy' = (a^2 - x'^2)\frac{dx'}{x'},$$

wovon das Integral ist

$$x'^2 + y'^2 = 2a^2 \log. x'.$$

Gehen die Ellipsen in Kreise über, so hat man $y^2 = a^2 - x^2$, also auch $\frac{dy}{dx} = -\frac{x'}{y'}$, und daher die Gleichung (II.)

$$\frac{dx'}{x'} = \frac{dy'}{y'},$$

deren Integral $\log. x' = \log. y' + \log. C$ oder $x = Cy$ für eine gerade Linie gehört, wie schon oben gefunden wurde.

§. 217. (**Kettenlinie.**) Man suche die Curve, deren Bogen s der Tangente des Winkels φ proportional ist, den die berührende Gerade an dem Endpunkte dieses Bogens mit der Axe der y bildet.

Ist a eine constante Größe, so hat man demnach $s = a \tang. \varphi$. Allein es ist auch allgemein

$$\frac{dx}{ds} = \sin. \varphi \quad \text{und} \quad \frac{dy}{ds} = \cos. \varphi,$$

und da die erste Gleichung gibt $ds = \frac{a\,d\varphi}{\cos.^2 \varphi}$, so hat man

$$dx = a\,d\varphi \frac{\sin. \varphi}{\cos.^2 \varphi} \quad \text{und} \quad dy = \frac{a\,d\varphi}{\cos. \varphi}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Integrale der beyden letzten Gleichungen sind

$$x = \frac{a}{\cos.\varphi} + C \text{ und } y = a \log.\text{tang.}\frac{90+\varphi}{2} + C'.$$

Läßt man x und y mit φ zugleich verschwinden, so ist $C = -a$ und $C' = 0$, also hat man für die zwey Gleichungen der gesuchten Curve

$$x = \frac{a}{\cos.\varphi} - a \text{ und } y = a \log.\text{tang.}\frac{90+\varphi}{2}.$$

Eliminirt man aus ihnen die Hülfsgröße φ, so hat man, da $\text{tang.}\frac{90+\varphi}{2} = \frac{1+\sin.\varphi}{\cos.\varphi}$ ist,

$$y = a \log.\frac{a+x+\sqrt{2ax+x^2}}{a},$$

für die Gleichung der gesuchten Curve, deren Differential

$$dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax+x^2}} \text{ ist.}$$

I. Es war $\cos.\varphi = \frac{a}{a+x}$, also ist auch $\text{tang.}\varphi = \frac{\sqrt{2ax+x^2}}{a}$. Substituirt man diesen Werth von tang. φ in der ersten Gleichung $s = a\,\text{tang.}\varphi$, so erhält man

$$s^2 = 2ax + x^2,$$

oder, wenn $x = x' - a$ gesetzt wird,

$$s^2 = x'^2 - a^2,$$

so daß also diese rectificable die Kettenlinie (§. 21) ist, wo (Fig. 25) $NP = x$, $AP = x'$ und $PM = y$ ist.

II. Um die Gleichung dieser Curve noch anders auszudrücken, so gibt der letzte Ausdruck derselben

$$e^{\frac{y}{a}} = \frac{a+x+\sqrt{2ax+x^2}}{a}, \text{ also auch } e^{-\frac{y}{a}} = \frac{a}{a+x+\sqrt{2ax+x^2}},$$

und daher

$$\frac{2x}{a} = e^{\frac{y}{a}} + e^{-\frac{y}{a}} - 2,$$

oder, wenn man wieder $x = x' - a$ setzt,

$$\frac{2x'}{a} = \varepsilon^{\frac{y}{a}} + \varepsilon^{-\frac{y}{a}}.$$

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

XXXVI.

Integration der Differentialgleichungen der zweyten Ordnung zwischen zwey Variablen.

§. 218. (Erste und zweyte Integrale solcher Gleichungen.) Ist $U=o$ eine endliche Gleichung zwischen x, y und zwey Constanten a und b, so kann man sie zwey Mal nach einander differentiiren, und dann aus den drey Gleichungen $U=o$, $dU=o$ und $d^2U=o$ jene beyden Constanten eliminiren, wodurch man zu einer Differentialgleichung der zweyten Ordnung kömmt, die von jener Constanten unabhängig ist. — Eliminirt man aber aus den zwey ersten Gleichungen $U=o$, $dU=o$ bloß die eine a, oder bloß die andere b dieser zwey Constanten, so erhält man zwey Differentialgleichungen der ersten Ordnung, die wir $V=o$ und $V'=o$ nennen wollen, und es ist klar, daß man die Differentialgleichung der zweyten Ordnung von $U=o$ erhält, wenn man aus $V=o$ und $dV=o$ die Größe a, oder auch, wenn man aus $V=o$ und $dV=o$ die Größe b eliminirt. Daraus folgt daher, daß jede der zwey Differentialgleichungen $V=o$ oder $V'=o$ der ersten Ordnung als das erste Integral der Gleichung $d^2U=o$ angesehen werden kann, während $U=o$ das zweyte oder das endliche Integral dieser Gleichung $d^2U=o$ ist. Man sieht zugleich, daß man diese endliche Gleichung, oder daß man das zweyte Integral $U=o$ einer gegebenen Gleichung $d^2U=o$ erhält, wenn man die beyden ersten Integrale $V=o$ und $V'=o$ derselben kennt, und wenn man aus den beyden letzten die Größe $\frac{dy}{dx}$ eliminirt, so wie, daß das zweyte Integral einer jeden Differentialgleichung der zweyten Ordnung zwey Constanten der Integration enthalten muß.

Ist z. B. die Gleichung

$$U=o=ax+xy+by$$

gegeben, so findet man

$$dU=o=(a+y)\,dx+(b+x)\,dy \quad \text{und}$$
$$d^2U=o=2\,dx\,dy+(b+x)\,d^2y.$$

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Eliminirt man aus diesen drey Gleichungen die Größen a und b, so erhält man

$$d^2 U = o = x y d^2 y + 2 y d y d x - 2 x d y^2.$$

Eben so gibt die Elimination von a aus U und dU

$$V = o = (b + x) x d y - b y d x,$$

und die Elimination von b aus U und dU

$$V' = o = (a + y) y d x - a x d y,$$

und endlich die Elimination von $\frac{dy}{dx}$ aus V und V'

$$o = a x + x y + b y,$$

welches wieder die ursprünglich gegebene, endliche Gleichung ist.

§ 219. (**Einfachste Formen dieser Gleichungen.**) In den nun folgenden Ausdrücken bezeichnen die Größen X, X'... Funktionen von x, und Y Funktionen von y. Die Größe x wird als unabhängig oder ihr erstes Differential dx constant, also $d^2 x = o$ vorausgesetzt.

Betrachten wir zuerst einige einfache Gleichungen der zweyten Ordnung, deren Integral ganz ohne Schwierigkeit erhalten wird.

I. . . . . . . $\frac{d^2 y}{d x^2} + X = o.$

Diese Gleichung gibt sofort

$$\frac{dy}{dx} + \int X dx = C,$$

und wenn man noch einmal integrirt:

$$y + \int dx \int X dx = Cx + C',$$

wo C und C' die Constanten der Integrationen sind.

II. . . . . . . $\frac{d^2 y}{d x^2} + Y = o.$

Multiplicirt man diesen Ausdruck durch dy, so hat man

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2 y}{d x^2} + Y dy = o, \text{ also auch}$$

$$\tfrac{1}{2} d \,.\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + Y dy = o, \text{ oder}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\int Y dy = C, \text{ oder}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{C - 2\int Y dy},$$

woraus sofort folgt:

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{C - 2\int Y dy}} + C.$$

Ist z. B. $\frac{d^2y}{dx^2} - a^2 y = 0$ gegeben, so hat man

$$x = \frac{1}{a} \log. (ay + \sqrt{C + a^2 y^2}) + C',$$

wofür man auch, da C und C' willkürliche Constanten sind, setzen kann, wenn log. nat. e = 1 ist:

$$y = C \,.\, e^{ax} + C' \,.\, e^{-ax}.$$

Ist aber $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2 y = 0$ gegeben, so ist

$$x = \frac{1}{a} \text{ arc. sin. } \frac{ay}{\sqrt{C}} + C', \quad \text{woraus folgt:}$$

$$y = \frac{\sqrt{C}}{a} \,.\, \sin.\, a\,(x - c'), \quad \text{oder auch}$$

$$y = \frac{C}{a} \,.\, \sin.\, ax + \frac{C'}{a} \,.\, \cos.\, ax.$$

III. . . . . . $\frac{d^2y}{dy^2} + X = 0.$

Multiplicirt man diese Gleichung durch dx, so ist

$$\frac{dx\, d^2y}{dy^2} = -\, X dx,$$

also auch, da $-\frac{dx}{dy}$ das Integral von $\frac{dx\, d^2y}{dy^2}$ für $dx = \text{const.}$ ist,

$$\frac{dx}{dy} = \int X dx + C \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{C + \int X dx},$$

und daher

$$y = C' + \int \frac{dx}{C + \int X dx}.$$

Eben so findet man

IV. $\frac{d^2y}{dy^2} + Y = 0 \;.\;.\;.\; x = C' + \int dy \,.\, e^{\int Y dy - C}.$

V. $\frac{d^2y}{dx^2} + X \frac{dy}{dx} = 0 \;.\;.\; y = C' + \int dx \,.\, e^{C - \int X dx}.$

VI. $\frac{d^2y}{dx^2} + Y \frac{dy}{dx} = 0 \;.\;.\; x = C' + \int \frac{dy}{C - \int Y dy}.$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 220. (Gleichungen, die bloß $\frac{d^2y}{dx^2}$ und $\frac{dy}{dx}$, ohne x y enthalten.) Setzt man in solchen Gleichungen $dy = p\,dx$, so ist $\frac{dy}{dx} = p$ und $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, und dadurch wird die gegebene Gleichung auf die Form $\frac{dp}{dx} = P$ gebracht, wo P eine Funktion von p ist. Daraus erhält man

$$x = C + \int \frac{dp}{P} \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{I}),$$

und da $dy = p\,dx = p \cdot \frac{dp}{P}$ ist, so wird auch

$$y = C' + \int \frac{p\,dp}{P} \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{II}).$$

Eliminirt man dann aus den beyden Gleichungen (I) und (II), nachdem man sie integrirt hat, die Größe p, so hat man die gesuchte Gleichung zwischen x und y.

Ex. I. Die Gleichung $a\,d^2y = dy\,dx$, gibt auf diese Weise

$$x = C' + a \log. \frac{y - C}{a}.$$

Ex. II. Eben so erhält man aus

$$(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}} + a\,d^2y\,dx = 0$$

für die Gleichung (I) und (II)

$$x + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}} = C \quad \text{und} \quad y + \frac{a}{\sqrt{1 + p^2}} = C',$$

und daher, wenn man p eliminirt:

$$(x - C)^2 + (y - C')^2 = a^2.$$

Ex. III. Die Gleichung $a\,d^2y = dx\sqrt{dx^2 + dy^2}$ gibt eben so für (I) und (II):

$$dx = \frac{a\,dp}{\sqrt{1 + p^2}} \quad \text{und} \quad dy = \frac{a\,p\,dp}{\sqrt{1 + p^2}},$$

also auch

$$x + C = a \log. (p + \sqrt{1 + p^2}) \quad \text{und}$$
$$y + C' = a\sqrt{1 + p^2};$$

also auch, wenn man daraus p eliminirt:

$$x + C = a \log. \frac{y + C + \sqrt{(y + C')^2 - a^2}}{a}.$$

Ex. IV. . . $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a\,dy}{dx} + b = 0$ gibt für (I) und II)

$$x = C - \frac{1}{a}\log.(b + ap) \text{ und}$$

$$y = C' - \frac{p}{a} - \frac{b}{a^2}\log.(b + ap).$$

Die erste dieser Gleichungen gibt

$$\log.(b + ap) = a(C - x) \text{ und}$$

$$p = \frac{1}{a}(e^{a(C-x)} - b),$$

und wenn man diese Werthe in der zweyten Gleichung substituirt, so erhält man

$$y = C' - \frac{1}{a^2}[abx - e^{C-ax}].$$

Ex. V. . $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a\,dy}{dx} + \frac{b\,dy^2}{dx^2} + c = 0.$

Diese Gleichung gibt sofort

$$x = C - \int\frac{dp}{c + ap + bp^2},$$

wenn $dy = p\,dx$ ist.

§. 221. (Gleichungen, die bloß $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{dy}{dx}$ und x, aber nicht y enthalten). Setzt man wieder

$$\frac{dy}{dx} = p, \text{ also auch } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx},$$

so verwandelt sich die gegebene Gleichung in eine der ersten Ordnung zwischen p und x. Kann man diese integriren und p durch x ausdrücken, so ist

$$y = C + \int p\,dx,$$

oder wenn man bequemer x durch p ausdrücken kann:

$$y = px - \int x\,dp.$$

1. Auf dieselbe Art wird man verfahren, wenn die gegebene Gleichung bloß $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{dy}{dx}$ und y, aber nicht x enthält. Denn dann ist $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{p\,dp}{dy}$, und dadurch verwandelt sich die gegebene Gleichung in eine der ersten Ordnung zwischen p und y. Kann man diese integriren, und p durch y ausdrücken, so ist

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$x = C + \int \frac{dy}{p},$$

oder wenn man bequemer y durch p ausdrücken kann:

$$x = \frac{y}{p} + \int \frac{y\,dp}{p^2}.$$

I. . . $(x^2 dx^2 + a^2 dy^2)\, d^2y = b x dx^3 dy.$

Dieß gibt sofort

$$(x^2 + a^2 p^2)\, dp = b p x dx,$$

oder, wenn man $x = pz$ setzt:

$$\frac{dp}{p} = \frac{b z dz}{a^2 + (1-b) z^2}.$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$p = C \,.\, [a^2 + (1-b) z^2]^{\frac{n}{2(1-n)}}, \text{ also auch}$$

$$x = pz = Cz\,[a^2 + (1-b) z^2]^{\frac{n}{2(1-n)}},$$

und daher

$$y = px - \int x dp, \text{ oder}$$

$$y = C^2 z\,[a^2 + (1-b) z^2]^{\frac{n}{1-n}} - bC^2 \int z^2 dz\,[a^2 + (1-b) z^2]^{\frac{2n-1}{1-n}} + C'.$$

Für den besonderen Fall $b = 1$ ist

$$\log.\frac{p}{C} = \int \frac{z\,dz}{a^2} = \frac{z^2}{2a^2} \text{ und}$$

$$x = pz = ap\sqrt{2\log.\frac{p}{C}}, \text{ also auch}$$

$$y = ap^2\sqrt{2\log.\frac{p}{C}} - a\int p\,dp\sqrt{2\log.\frac{p}{C}} + C'.$$

II. . . . $(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}} = X dx d^2y.$

Dieß gibt

$$\frac{dx}{X} = \frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ also auch}$$

$$C + \int \frac{dx}{X} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$U = C + \int \frac{dx}{X}, \text{ so wird } p = \frac{U}{\sqrt{1-U^2}},$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und daher

$$y = C' + \int p\,dx = C' + \int \frac{U\,dx}{\sqrt{1 - U^2}}.$$

III. . . . $\frac{d^2 y}{d x^2} + a \sin. y = b \frac{d y^2}{d x^2}$.

Multiplicirt man durch $2\,dy$ und integrirt, so hat man, wenn

$$z = \int \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dy \quad \text{oder}$$

$$\frac{dz}{dy} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \quad \text{gesetzt wird,}$$

$$\frac{dz}{dy} - 2a \cos. y - 2bz = 0,$$

und von dieser Gleichung ist das Integral

$$z = C \,.\, e^{2by} + \frac{2a}{1 + 4b^2} (\sin. y - 2b \cos. y).$$

Differentiirt man diese Gleichung in Beziehung auf y, und stellt den Werth von $\left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ wieder her, so hat man

$$\frac{dy^2}{dx^2} = 2b \,.\, C \,.\, e^{2by} + \frac{2a}{1 + 4b^2} (\cos. y + 2b \sin. \theta)$$

als das erste Integral der gegebenen Gleichung.

Ex. IV. . $\frac{b d^2 y}{d x^2} = (a - x) \left(1 + \frac{d y^2}{d x^2}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Setzt man $dy = p\,dx$, so hat man

$$\frac{b\,dp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} = (a - x)\,dx,$$

wovon das Integral ist:

$$\frac{bp}{\sqrt{1 + p^2}} = ax - \tfrac{1}{2}x^2 + C;$$

oder, wenn $C = 0$ ist:

$$dy = \frac{(2ax - x^2)\,dx}{\sqrt{4b - (2ax - x^2)^2}}$$

das gesuchte erste Integral der gegebenen Gleichung. Man hält aber eine Differentialgleichung der zweyten Ordnung für integrirt, wenn man ihr erstes Integral oder ihre Differentialgleichung der ersten Ordnung angeben kann.

§. 222. (Gleichungen, welche nur die Grölzen $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{dy}{dx}$ und y in der ersten Potenz enthalten.) Sey die Gleichung gegeben:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + By = 0,$$

wo A und B constante Größen sind. Setzt man $y = e^{\int u\,dx}$, so ist

$$\frac{dy}{dx} = u^{\int u\,dx} \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(u^2 + \frac{du}{dx}\right) e^{\int u\,dx},$$

also geht die gegebene Gleichung in folgende über:

$$u^2 + \frac{du}{dx} + Au + B = 0.$$

Da in dieser Gleichung die veränderlichen Größen u und x abgesondert werden können, so läßt sie sich integriren. Man hat nämlich

$$x = -\int \frac{du}{u^2 + Au + B} \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

also auch wenn $k = 4B - A^2$ positiv ist:

$$x = -\frac{2}{\sqrt{k}} \cdot \text{arc. tang.} \frac{A + 2x}{\sqrt{k}},$$

und wenn $k' = A^2 - 4B$ positiv ist:

$$x = -\frac{1}{\sqrt{k'}} \cdot \log. \frac{A + 2x - \sqrt{k'}}{A + 2x + \sqrt{k'}}.$$

I. Man kann aber auch die gegebene Gleichung auf folgende merkwürdige Weise integriren.

Wenn man die Größe u constant annimmt, so hat man $\frac{du}{dx} = 0$, und man muß daher haben $u^2 + Au + B = 0$.

Sind m und n die Wurzeln dieser Gleichung, so ist

$$\int u\,dx = mx + C \quad \text{oder} \quad \int u\,dx = nx + C',$$

und daher

$$y = e^{mx+C} = e^C \cdot e^{mx}, \quad \text{oder auch} \quad y = C \cdot e^{mx},$$

und eben so

$$y = C'e^{nx}.$$

Der erste Werth von y gibt

$$\frac{dy}{dx} = Cme^{mx} \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = Cm^2e^{mx}, \quad \text{also auch}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + By = C \,.\, e^{mx}\,(m^2 + Am + B) = 0,$$

und eben so erhält man mit dem zweyten Werthe von y die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + By = C' \,.\, e^{nx} \,.\, (n^2 + An + B) = 0.$$

Es wird daher die Gleichung $y = Ce^{mx} + C'e^{nx}$ ebenfalls der gegebenen Differentialgleichung Genüge leisten, was auch die Werthe von C und C′ sind, und jene ist daher das vollständige Integral von dieser.

Sind die beyden Wurzeln einander gleich, so geht die Gleichung (1) in folgende über:

$$x = -\int\frac{du}{(u-m)^2} = C + \frac{1}{u-m} \quad \text{oder}$$

$$u = m + \frac{1}{C+x}.$$

Man hat daher

$$\int u\,dx = C' + mx + \log.(C+x) \quad \text{und}$$

$$y = e^{mx + C' \log.(C+x)} = e^{C'} \,.\, e^{mx} \,.\, (C+x),$$

wofür man schreiben kann

$$y = e^{mx}\,(C + C'x).$$

Sind endlich jene beyden Wurzeln imaginär und von der Form $a \pm b\sqrt{-1}$, so hat man

$$\int u\,dx = ax \pm bx\sqrt{-1} + \text{const.},$$

oder wenn c eine willkürliche Constante ist:

$$\int u\,dx = a(x+c) \pm b(x+c)\sqrt{-1}$$
$$= ax \pm bx\sqrt{-1} + ac \pm bc\sqrt{-1}.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$e^{ac + bc\sqrt{-1}} = C \quad \text{und} \quad e^{ac - bc\sqrt{-1}} = C',$$

so erhält man

$$y = C \,.\, e^{ax + bx\sqrt{-1}} + C' \,.\, e^{ax - bx\sqrt{-1}}$$
$$= e^{ax}\,[C \,.\, e^{bx\sqrt{-1}} + C' \,.\, e^{-bx\sqrt{-1}}], \quad \text{oder}$$

$$y = e^{ax}\,[(C + C')\cos.\,bx + (C - C')\sqrt{-1} \,.\, \sin.\,bx],$$

wofür man wieder setzen kann:

$$y = e^{ax}\,(C\cos.\,bx + C'\sin.\,bx).$$

Ex. Ist die Gleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{1}{b} \cdot \frac{d y}{d x} + \frac{1}{a} \cdot y = 0$$

gegeben, und $a < 4 b^2$, so sind die beyden Wurzeln der Gleichung

$$u^2 + \frac{u}{b} + \frac{1}{a} = 0$$

imaginär. Setzt man nämlich der Kürze wegen

$$\frac{\gamma}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4 b^2}},$$

so sind diese Wurzeln

$$m = -\frac{1}{2 b} + \frac{\gamma}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{-1} \quad \text{und}$$

$$n = -\frac{1}{2 b} - \frac{\gamma}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{-1},$$

und daher das gesuchte Integral

$$y = e^{-\frac{x}{2 b}} \cdot \left[C \cos. \frac{\gamma x}{\sqrt{a}} + C' \sin. \frac{\gamma x}{\sqrt{a}} \right].$$

§. 223. (Gleichung der Form $\frac{d^2 y}{d x^2} + X \frac{d y}{d x} + X' . y = 0$.) Diese Gleichung läßt sich auf dieselbe Weise, wie die vorhergehende, behandeln, wenn man, wie dort, zwey particuläre Werthe von y angeben kann, die derselben Genüge leisten. Sind nämlich M und N diese Werthe, so wird das gesuchte Integral der gegebenen Gleichung seyn:

$$y = C . M + C' . N,$$

wo C und C' die zwey willkürlichen Constanten sind.

Denn es ist

$$\frac{d y}{d x} = C \frac{d M}{d x} + C' \frac{d N}{d x}, \quad \frac{d^2 y}{d x^2} = C \frac{d^2 M}{d x^2} + C' \frac{d^2 N}{d x^2},$$

also auch

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + X \frac{d y}{d x} + X y = C \left[\frac{d^2 M}{d x^2} + X \frac{d M}{d x} + X' M \right]$$
$$+ C' \left[\frac{d^2 N}{d x^2} + X \frac{d N}{d x} + X' N \right] = 0,$$

weil von den zwey eingeschlossenen Factoren des zweyten Theils dieser Gleichung, der Voraussetzung gemäß, jeder für sich gleich Null ist.

I. Kennt man nur einen particulären Werth von y, so setze man, wenn dieser Werth M ist, $y = Mz$, wo z irgend eine unbestimmte Funktion von x bezeichnet. Dann hat man

$$\frac{dy}{dz} = z\frac{dM}{dx} + M\frac{dz}{dx} \text{ und}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = z\frac{d^2M}{dx^2} + 2\frac{dM}{dx}\cdot\frac{dz}{dx} + M\frac{d^2z}{dx^2},$$

und wenn man diese Werthe in die gegebene Gleichung setzt, so muß ihr Genüge geschehen, oder man muß haben:

$$z\frac{d^2M}{dx^2} + 2\frac{dM}{dx}\cdot\frac{dz}{dx} + M\frac{d^2z}{dx^2} + zX\frac{dM}{dx} + XM\frac{dz}{dx} + X'Mz = 0.$$

Allein vermöge der Voraussetzung ist

$$\frac{d^2M}{dx^2} + X\frac{dM}{dx} + X'M = 0,$$

also muß auch

$$2\frac{dM}{dx}\cdot\frac{dz}{dx} + M\frac{d^2z}{dx^2} + XM\frac{dz}{dx} = 0$$

seyn. Man setze also $\frac{dz}{dx} = z'$, so wird man haben

$$2z'\cdot\frac{dM}{dx} + M\cdot\frac{dz'}{dx} + XMz' = 0, \text{ oder}$$

$$Xdx = -2\frac{dM}{M} - \frac{dz'}{z'}, \text{ woraus folgt}$$

$$\int Xdx = \log.\frac{C}{M^2z} \text{ oder } z' = \frac{dz}{dx} = \frac{C}{M^2}\cdot e^{-\int Xdx},$$

also auch

$$z = C' + \int\frac{C}{M^2}\cdot e^{-\int Xdx},$$

und daher Mz oder

$$y = M\cdot C' + M\int\frac{C}{M^2}\cdot e^{-\int Xdx},$$

welches das gesuchte Integral ist.

Ex. Ist $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{A}{a+bx}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{B}{(a+bx)^2} = 0$ gegeben, und setzt man, wie im vorhergehenden §. 222, die Größe $y = e^{\int udx}$, so erhält man die Gleichung

$$u^2 + \frac{du}{dx} + \frac{Au}{a+bx} + \frac{B}{(a+bx)^2} = 0,$$

die sich, für $(a+bx)\,u = t$ in folgende verwandelt:

$$t^2 + (a+bx)\frac{dt}{dx} + (A-b)\,t + B = o.$$

Sind aber m und n die Wurzeln der Gleichung

$$t^2 + (A-b)\,t + B = o,$$

so wird für t gleich m oder n auch $\frac{dt}{dx} = o$, und es sind die zwey particulären Werthe von u:

$$u = \frac{m}{a+bx} \quad \text{und} \quad u = \frac{n}{a+bx};$$

also sind auch die zwey Werthe von

$$\int u\,dx = \frac{m}{b}\log.(a+bx) \quad \text{und} \quad \int u\,dx = \frac{n}{b}\log.(a+bx),$$

und daher auch die zwey Werthe von

$$y = e^{\int u\,dx} = (a+bx)^{\frac{m}{b}} \quad \text{und} \quad y = (a+bx)^{\frac{n}{b}};$$

so daß also das gesuchte Integral ist:

$$y = C\,.\,(a+bx)^{\frac{m}{b}} + C'\,.\,(a+bx)^{\frac{n}{b}}.$$

II. Die gegebene Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + X\frac{dy}{dx} + X'y = o$$

läßt sich auch auf folgende Weise integriren. Setzt man $y = e^{\int u\,dx}$, wo u irgend eine Funktion von x bezeichnet, also auch $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ wie oben (§. 222), so geht die gegebene Gleichung in folgende über:

$$u^2 + \frac{du}{dx} + Xu + X' = o,$$

welche das gesuchte erste Integral der gegebenen Gleichung ist, die aber nur selten noch einmal integrirt, oder auf das zweyte Integral zurückgeführt werden kann.

§. 224. (Gleichung der Form $\frac{d^2y}{dx^2} + X\frac{dy}{dx} + X'y = X''$.) Setzt man $y = Uz$, wo auch U irgend eine Funktion von x seyn soll, so geht diese Gleichung in folgende über:

$$U\left(\frac{d^2z}{dx^2} + X\frac{dz}{dx} + X'z\right) + z\frac{dU}{dx}\,.\,\frac{dz}{dx} + Xz\,.\frac{dU}{dx} + z\,.\frac{d^2U}{dx^2} = X''.$$

Bestimmt man nun die Größe z so, daß

$$\frac{d^2 z}{d x^2} + X \frac{d z}{d x} + X' z = o$$

wird, so hat man zur Bestimmung der Funktion U die Gleichung

$$2 \frac{d U}{d x} \cdot \frac{d z}{d x} + X z \cdot \frac{d U}{d x} + z \frac{d^2 U}{d x^2} = X'',$$

oder, wenn man $\frac{d U}{d x} = U'$ setzt:

$$2 U' \cdot \frac{d z}{d x} + X U' z + z \frac{d U'}{d x} = X'' \text{ oder}$$

$$d U' + \left(X + \frac{2 d z}{z d x}\right) U' d x = X'' \frac{d x}{z}.$$

Ist nun z eine gegebene Funktion von x, und setzt man der Kürze wegen

$$V = X + \frac{2 d z}{z d x},$$

wo also auch V eine Funktion von x ist, so gibt die letzte Gleichung, wenn man sie durch $e^{\int V d x}$ multiplicirt:

$$e^{\int V d x} \cdot d U' + e^{\int V d x} \cdot U' V d x = e^{\int V d x} \cdot X'' \frac{d x}{z},$$

und davon ist offenbar das Integral

$$U' \cdot e^{\int V d x} = \int e^{\int V d x} \cdot X'' \frac{d x}{z} \text{ oder}$$

$$U' = e^{-\int V d x} \cdot \left[\int e^{\int V d x} \cdot X'' \frac{d x}{z} + C\right].$$

Es ist aber

$$\int V d x = \int \left(X + \frac{2 d z}{z d x}\right) d x = \int X d x + \log. z^2,$$

und daher

$$e^{\int V d x} = z^2 \cdot e^{\int X d x} \text{ und } e^{-\int V d x} = \frac{1}{z^2} \cdot e^{-\int X d x};$$

also ist auch

$$U' = \frac{1}{z^2} \cdot e^{-\int X d x} \left[\int e^{\int X d x} \cdot X'' z d x + C\right] \text{ und}$$

$$X = \int U' d x + C',$$

und endlich

$$y = z \int U' d x + C' z.$$

Man sieht demnach, daß die Integration der Gleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + X \frac{d y}{d x} + X' y = X''$$

von der Integration der in dem §. 223 betrachteten Gleichung

$$\frac{d^2 z}{d x^2} + X \frac{d y}{d x} + X' y = 0$$

abhängt.

§. 225. (**Gleichung der Form** $\frac{d^2 y}{d x^2} + A \frac{d y}{d x} + B y = X$, **wo** A **und** B **constant sind.**) Die Integration dieser Gleichung hängt nach dem in §. 224 Gesagten von der Integration der Gleichung

$$\frac{d^2 z}{d x^2} + A \frac{d z}{d x} + B z = 0$$

ab, und man leistet, nach §. 223, dieser Gleichung Genüge, wenn man $z = e^{mx}$ setzt, wo m so bestimmt wird, daß

$$m^2 + A m + B = 0$$

ist. Da nun für diesen Fall $X = A$, und das vorhergehende $X'' = X$ wird, so hat man

$$U' = e^{-(A+2m)x}\left[\int e^{(A+m)x} X dx + C\right] \text{ und}$$

$$U = \int e^{-(A+2m)x} dx \int e^{(A+m)x} X dx - \frac{C e^{-(A+2m)x}}{A+2m} + C'$$

$$= - \frac{e^{-(A+2m)x}}{A+2m} \int e^{(A+m)x} X dx + \frac{\int e^{-mx} X dx}{A+2m}$$

$$- \frac{C e^{-(A+2m)x}}{A+2m} + C'.$$

Da aber $z = e^{mx}$ und $y = U z$ ist, so wird, wenn man n statt $-(A+m)$ setzt:

$$y = C' e^{mx} - \frac{C e^{nx}}{m-n}$$

$$+ \frac{e^{mx}}{m-n} \int e^{-mx} . X dx - \frac{e^{nx}}{m-n} \int e^{-nx} . X dx.$$

Da vermöge der Voraussetzung $m + n = -A$, so ist n die andere Wurzel der Gleichung $m^2 + A m + B = 0$.

Für den Fall, wo $m = n$, ist

$$A + 2m = 0 \text{ und } A + m = -m, \text{ also auch}$$

$$U' = \int e^{-mx} X dx + C \text{ und}$$

$$U = \int dx \int e^{-mx} X dx + C x + C' \text{ oder}$$

$$U = x \int e^{-mx} X dx - \int e^{-mx} X x dx + C x + C',$$

und daher

$$y = e^{mx}\left[x \int e^{-mx} X dx - \int e^{-mx} X x dx\right] + e^{mx}(C x + C').$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Für den Fall endlich, wo die Wurzeln der Gleichung

$$m^2 + Am + B = 0$$

imaginär, und von der Form $a \pm b\sqrt{-1}$ sind, hat man

$$e^{mx} = e^{(a+b\sqrt{-1})x} = e^{ax} \cdot e^{bx\sqrt{-1}}$$

$$= e^{ax} \cdot (\cos. bx + \sqrt{-1} \cdot \sin. bx),$$

und eben so

$$e^{nx} = e^{ax} \cdot (\cos. bx - \sqrt{-1} \cdot \sin. bx).$$

Substituirt man diese Werthe in dem vorhergehenden ersten Ausdruck von y, so erhält man

$$y = e^{ax} (C \cos. bx + C' \sin. bx)$$
$$+ \frac{e^{ax}}{b} [\sin. bx . \int e^{-ax} . Xdx \cos. bx - \cos. bx . \int e^{-ax} . Xdx \sin. bx].$$

§. 226. (Gleichung der Form $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2 y + X = 0$.) Um diese Gleichung zu integriren, wird man nur in den Ausdrücken des vorhergehenden Paragraphs die Größe $A = 0$, $B = a^2$ und $X = -X$ setzen. Dadurch geht die Gleichung $m^2 + Am + B = 0$ in $m^2 + a^2 = 0$ über, so daß daher $m = n = a\sqrt{-1}$ ist. Setzt man daher in der letzten Gleichung des vorhergehenden Paragraphs die Größe $a = 0$, $b = a$ und $X = -X$, so erhält man für das Integral der hier gegebenen Gleichung

$$y = \frac{C}{a} \sin. ax + \frac{C'}{a} \cos. ax + \frac{1}{a} \cos. ax \int X dx \sin. ax$$
$$- \frac{1}{a} \sin. ax \int X dx \cos. ax.$$

Ist hier die Größe X aus Gliedern der Form $K . \frac{\sin.}{\cos.} (mx + \varepsilon)$ zusammengesetzt, so bringt jedes solche Glied in y ein Glied der Form

$$\frac{K}{m^2 - a^2} \cdot \frac{\sin.}{\cos.} (mx + \varepsilon)$$

hervor. Ist aber, für einen besonderen Fall, $m = a$, so bringt das Glied $K . \frac{\sin.}{\cos.} (ax + \varepsilon)$ in dem Integrale y erstens ein Glied

$$- \frac{K}{4a^2} \cdot \frac{\sin.}{\cos.} (ax + \varepsilon)$$

hervor, welches aber schon in dem Ausdrucke

$$\frac{C}{a} \sin. ax + \frac{C'}{a} \cos. ax,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wegen der constanten Größen C und C′, enthalten gedacht, und daher weggelassen werden kann; dasselbe Glied bringt aber auch in y noch das Glied

$$\pm \frac{Kx}{2a} \cdot \frac{\cos.}{\sin.} (ax + \varepsilon)$$

hervor, wo das obere oder untere Zeichen genommen wird, wenn in X das entsprechende Glied ein Sinus oder ein Cosinus ist.

XXXVII.

Integration der Differentialgleichungen der ersten Ordnung zwischen drey Variablen.

§. 227. (**Kennzeichen der Integrabilität dieser Ausdrücke.**) Sey die Differentialgleichung gegeben:

$$P dx + Q dy + R dz = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (I),$$

wo P, Q, R Funktionen von x, y und z sind. Soll dieser Ausdruck in der That durch die Differentiation irgend einer endlichen Gleichung zwischen x, y und z entstanden seyn, so muß es einen Factor μ geben, der den Ausdruck

$$\mu (P dx + Q dy + R dz)$$

zu einem vollständigen Differential macht. Betrachtet man dann eine dieser drey Größen, z. B. x, als constant, so muß auch

$$\mu (Q dy + R dz)$$

ein vollständiges Differential seyn, oder es muß die Bedingungsgleichung Statt haben:

$$\left(\frac{d \, . \, \mu Q}{dz}\right) - \left(\frac{d \, . \, \mu R}{dy}\right) = 0 \quad \text{oder}$$

$$\mu \left(\frac{dQ}{dz}\right) + Q \left(\frac{d\mu}{dz}\right) - \mu \left(\frac{dR}{dy}\right) - R \left(\frac{d\mu}{dy}\right) = 0.$$

Ganz auf dieselbe Weise erhält man auch, wenn y oder z constant ist:

$$\mu\left(\frac{dR}{dx}\right) + R\left(\frac{d\mu}{dx}\right) - \mu\left(\frac{dP}{dz}\right) - P\left(\frac{d\mu}{dz}\right) = 0 \quad \text{und}$$

$$\mu\left(\frac{dP}{dy}\right) + P\left(\frac{d\mu}{dy}\right) - \mu\left(\frac{dQ}{dx}\right) - Q\left(\frac{d\mu}{dx}\right) = 0.$$

Multiplicirt man die erste dieser drey Bedingungsgleichungen durch P, die zweyte durch Q und die dritte durch R, so gibt die Summe dieser Produkte

$$P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = 0 \ldots \text{(II)},$$

und dieß ist die Bedingungsgleichung, welche Statt haben muß, wenn die Gleichung (I) durch Differentiation irgend eines endlichen Ausdrucks zwischen x, y und z entstanden seyn soll.

§. 228. (Integration der Gleichung $Pdx + Qdy + Rdz = 0$.) Wenn man sich, nach dem vorhergehenden Paragraph, bereits versichert hat, daß diese Gleichung integrabel ist, d. h. daß sie der Bedingungsgleichung (II) entspricht, so nehme man eine ihrer drey Variablen, z. B. z als constant an, wodurch man die Differentialgleichung

$$Pdx + Qdy = 0$$

zwischen zwey veränderlichen Größen x und y erhält, die man also, nach dem Vorhergehenden, integriren wird. Nennt man dann C die Constante dieser Integration, so differentiire man das gefundene Integral von neuem, doch so, daß man nun alle drey Größen x, y, z als variabel, und C als eine Funktion von z betrachtet. Vergleicht man dann dieses Differential mit dem ursprünglich gegebenen

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

so gibt diese Vergleichung sofort den gesuchten Werth von C durch die dritte Variable z.

Ex. I. Nimmt man in der integrablen Gleichung

$$dx\,(y + z) + dy\,(x + z) + dz\,(x + y) = 0$$

die Größe z constant, so hat man

$$dx\,(y + z) + dy\,(x + z) = 0,$$

wovon das Integral ist:

$$\log.\,(x + z) + \log.\,(y + z) = \log.\,C \quad \text{oder}$$

$$(x + z)\,(y + z) = C.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Differentiirt man aber die letzte Gleichung in Beziehung auf x, y und z, so erhält man

$$dx(y+z) + dy(x+z) + dz(x+y+2z) = dC,$$

und wenn man von dieser Gleichung die gegebene subtrahirt, so ist

$$dC = 2zdz \quad \text{oder} \quad C = z^2 + C';$$

also ist auch das gesuchte Integral

$$(x+z)(y+z) = z^2 + C' \quad \text{oder} \quad xy + xz + yz = C'.$$

Ex. II. Nimmt man in der integrablen Gleichung

$$dx(ay - bz) + dy(cz - ax) + dz(bx - cy) = 0$$

wieder z constant, so findet man

$$\frac{1}{a}\log.\frac{ay - bz}{cz - ax} = \frac{1}{a}\log.C \quad \text{oder} \quad \frac{ay - bz}{cz - ax} = C.$$

Vergleicht man aber das Differential der letzten Gleichung mit der gegebenen, so findet man, daß C in der That eine Constante, und daß daher das gesuchte Integral ist:

$$\frac{ay - bz}{cz - ax} = C.$$

§. 229. (**Wenn die Gleichung $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ der Bedingungsgleichung (II) nicht entspricht.**) In diesem Falle hat man lange geglaubt, daß dann jene Gleichung kein Integral habe oder absurd sey. Allein Monge hat gezeigt, daß solche Differentialgleichungen immer durch zwey endliche Integrale, die eine willkürliche Funktion enthalten, dargestellt werden können, und daß solche Gleichungen daher gewissen Gattungen von krummen Linien von doppelter Krümmung zugehören.

Wird z als beständig betrachtet, und nennt man μ den Factor, der die Gleichung $Pdx + Qdy$ integrabel macht, und setzt man

$$\int(\mu P dx + \mu Q dy) = U,$$

so ist das gesuchte Integral der letzten Gleichung

$$U = C,$$

wo C nach dem Vorhergehenden irgend eine Funktion von z bezeichnet. Differentiirt man jetzt diese Gleichung in Beziehung auf alle drey Variablen, und bemerkt man, daß

$$\left(\frac{dU}{dx}\right) = \mu P \quad \text{und} \quad \left(\frac{dU}{dy}\right) = \mu Q$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ist, so hat man

$$\mu P dx + \mu Q dy + \left[\left(\frac{dU}{dz}\right) - \left(\frac{dC}{dz}\right)\right] dz,$$

und dieß mit der gegebenen Gleichung

$$\mu P dx + \mu Q dy + \mu R dz = o$$

verglichen, gibt:

$$\mu R = \left(\frac{dU}{dz}\right) - \left(\frac{dC}{dz}\right) \quad \text{oder} \quad \left(\frac{dC}{dz}\right) = \left(\frac{dU}{dz}\right) - \mu R.$$

Setzt man daher $C = \varphi z$ oder gleich irgend einer Funktion von z, so hat man die beyden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} U &= \varphi z \\ \left(\frac{dU}{dz}\right) - \mu R &= \varphi' z \end{aligned}\right\},$$

wo $\varphi' z = \frac{d \cdot \varphi z}{dz}$ ist; und diese beyden Gleichungen stellen daher das Integral der gegebenen Differentialgleichung

$$P dx + Q dy + R dr = o \quad \text{vor.}$$

Ex. Ist die Gleichung gegeben:

$$\frac{dz}{z - c} = \frac{x dx + y dy}{x(x - a) + y(y - b)},$$

die jener Bedingungsgleichung (II) nicht Genüge thut (außer wenn $a = b = o$ wäre), so hat man, wenn man z constant setzt:

$$\frac{x dx + y dy}{x(x - a) + y(y - b)} = o.$$

Setzt man also den Factor

$$\mu = x(x - a) + y(y - b),$$

so wird dieser Ausdruck $x dx + y dy$, also integrabel, und er gibt

$$x^2 + y^2 = C.$$

Setzt man daher $U = x^2 + y^2$ und $C = \varphi z$, also auch

$$\left(\frac{dU}{dz}\right) = o,$$

so erhält man, da

$$R = -\frac{1}{z - c}$$

ist, für das Integral des gegebenen Ausdrucks die beyden Gleichungen

$$\varphi z = x^2 + y^2,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\varphi' z = \frac{x(x-a) + y(y-b)}{z-c},$$

in welchen φz irgend eine willkürliche Funktion von z bezeichnet.

In der That, obschon der hier gegebene Ausdruck der Gleichung (II) nicht entspricht, so wird er doch, wenn man zwischen den Größen x und y eine Abhängigkeit festsetzt, die man durch die Gleichung $y = \varphi x$ ausdrücken kann, eine bestimmte Bedeutung annehmen, die dann durch die Gleichung

$$\frac{dz}{z-c} = \frac{(x + \varphi x \cdot \varphi' x)\, dx}{x(x-a) + \varphi x \cdot (\varphi x - b)}$$

zwischen bloß zwey Größen x und z gegeben wird. Nimmt man z. B. für den einfachsten Fall $\varphi x = x$ an, so erhält man

$$\frac{dz}{z-c} = \frac{2x\, dx}{x(x-a) + x(x-b)} = \frac{2\, dx}{2x - a - b},$$

woraus folgt:

$$z - c = C \cdot (2x - a - b),$$

und dadurch wird das Integral des gegebenen Differentialausdrucks durch das System der beyden Gleichungen ausgedrückt:

$$y = x,$$
$$z - c = C \cdot (2x - a - b).$$

XXXVIII.

Integration der partiellen Differentialgleichungen.

§. 230. (Gleichungen der Form $\left(\frac{dz}{dx}\right) = R$, wo R eine Funktion von x, y und z ist). Eine endliche Gleichung zwischen drey veränderlichen Größen x, y, z, von welchen zwey, z. B. x und y, unabhängig sind, hat bekanntlich zwey erste Differentialgleichungen, von welchen die eine $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ oder das partielle Differential von z bloß in Beziehung auf x, und die andere eben so $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ gibt.

Die Integration dieser partiellen Differentialgleichungen bildet einen eigenen und sehr wichtigen Zweig der Analyse. Wir wollen hier nur die vorzüglichsten derselben kurz anzeigen.

Wenn die gegebene Differentialgleichung bloß den einen der beyden partiellen Differential-Coefficienten, z. B. $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ enthält, also von der Form $\left(\frac{dz}{dx}\right) = R$ ist, wo R eine Funktion von x, y und z bezeichnet, so hat man auch

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) dx = R dx \quad \text{oder} \quad dz - R dx = o.$$

Da aber in der gegebenen Gleichung $\left(\frac{dz}{dx}\right) = R$ die Größe y als eine constante Größe betrachtet wird, so ist $dz - R dx = o$ eine gewöhnliche Differentialgleichung zwischen den beyden Variablen z und x, deren Integral daher nach dem Vorhergehenden gefunden werden kann. — Sey $U - C = o$ dieses Integral, wo C die Constante der Integralien bezeichnet. Allein dieses C ist hier nicht die gewöhnliche Constante, wie wir sie bisher betrachtet haben, da sie offenbar auch von der Größe y, und zwar auf eine ganz willkürliche Weise abhängen kann, ohne daß dadurch die Gleichung $U + C = o$ aufhört, das Integral von $\left(\frac{dz}{dx}\right) = R$ zu seyn. Diesem gemäß werden wir also für das Integral der gegebenen partiellen Differentialgleichung den Ausdruck haben:

$$U = fy,$$

wo fy jede willkürliche, selbst discontinuirliche, ja ganz gesetzlose Funktion von y bezeichnet.

Ex. I. $\left(\frac{dz}{dx}\right) = a$ gibt

$$dz - a dx = o,$$

und davon ist das Integral

$$U = o = z - ax.$$

Also ist auch das Integral der gegebenen partiellen Differentialgleichung

$$z = ax + fy.$$

Wenn eine gerade Linie in der coordinirten Ebene der xz mit der Axe der x einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente gleich a ist, so wird ihre Gleichung $z = ax + C$ seyn. Wenn sich dann irgend eine willkürliche und willkürlich gelegte Curve von einfacher oder doppelter Krümmung mit sich selbst parallel und so bewegt, daß ein bestimmter Punkt derselben immer durch jene Gerade geht, so wird diese Curve eine Fläche beschreiben, deren Gleichung $\left(\frac{dz}{dx}\right) = a$ oder auch $z = ax + fy$ ist.

Ex. II. $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ gibt

$$dz - \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \quad \text{oder} \quad z = \sqrt{x^2+y^2},$$

also ist auch das gesuchte Integral

$$z = \sqrt{x^2+y^2} + fy.$$

Ex. III. $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{y}{\sqrt{y^2-x^2}}$ gibt eben so

$$z = y \text{ arc. sin. } \frac{x}{y} + fy,$$

und auf dieselbe Weise erhält man

von $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{y}{z}$ das Integral $x - \frac{z^2}{zy} = fy$, oder, was dasselbe ist:

$$z^2 = zxy + fy;$$

» $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{\sqrt{y^2-z^2}}{z}$ » $x = -\sqrt{y^2-z^2} + fy,$

» $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{az}{x}$ » $z = x^a . fy$, u. s. w.

§. 231. (Gleichungen, die beyde Coefficienten $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, aber ohne xyz, enthalten). I. Sey $a\left(\frac{dz}{dx}\right) + b\left(\frac{dz}{dy}\right) = c$ und a, b, c beständige Größen.

Setzt man der Kürze wegen

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right) \quad \text{und} \quad q = \left(\frac{dz}{dy}\right),$$

so hat man allgemein für jede vollständige Differentialgleichung zwischen drey veränderlichen Größen:

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

In dem gegebenen speciellen Falle ist aber

$$c = ap + bq \quad \text{oder} \quad q = \frac{c - ap}{b},$$

also auch, wenn man diesen Werth von q substituirt:

$$dz = \frac{c}{b}dy + \frac{p}{b}(b\,dx - a\,dy).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da aber der letzte Ausdruck integrabel seyn soll, und da $\frac{c}{b}dy$ schon für sich integrabel ist, so muß es auch $\frac{p}{b}(b\,dx - a\,dy)$ seyn, d. h. die Größe p muß irgend eine Funktion von $(bx - ay)$ seyn. Setzen wir also $\int p(b\,dx - a\,dy) = f(bx - ay)$, so hat man

$$z = \frac{c}{b}y + \frac{1}{b}f(bx - ay),$$

und dieß ist das Integral der gegebenen Gleichung.

Ist für einen speciellen Fall $b = -a$ und $c = 0$, also die gegebene Gleichung $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dz}{dy}\right)$, so hat man für ihr Integral

$$z = f(x + y).$$

II. Sey $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 = 1$ gegeben, oder $p^2 + q^2 = 1$, also auch

$$q = \sqrt{1 - p^2} \quad \text{und} \quad dq = -\frac{p\,dp}{\sqrt{1 - p^2}}.$$

Es ist allgemein $z = \int(p\,dx + q\,dy)$, und überdieß

$$\int p\,dx = px - \int x\,dp \quad \text{und} \quad \int q\,dy = qy - \int y\,dq,$$

also ist auch

$$z = px + qy - \int(x\,dp + y\,dq).$$

Substituirt man in diesen allgemeinen Ausdruck die vorhergehenden Werthe von q und dq, so erhält man

$$z = px + q\sqrt{1 - p^2} - \int dp\left(x - \frac{py}{\sqrt{1 - p^2}}\right),$$

und das gesuchte Integral ist das Resultat der Elimination von p aus den beyden Gleichungen

$$z = px + y\sqrt{1 - p^2} - fp \quad \text{und} \quad x - \frac{py}{\sqrt{1 - p^2}} = f'p.$$

Für den einfachsten speciellen Fall ist $f'p = 0$, also auch

$$x = \frac{py}{\sqrt{1 - p^2}} \quad \text{oder} \quad p = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{und} \quad \sqrt{1 - p^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

und daher das gesuchte Integral

$$z = \sqrt{x^2 + y^2},$$

welches aber nur eine particuläre Auflösung ist.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

§. 232. (Gleichungen, die beyde Coefficienten und zwey der Grözen xyz enthalten.) Sey $AX\left(\frac{dz}{dx}\right) + BY\left(\frac{dz}{dy}\right) = C$ gegeben, wo X eine Funktion von x, und Y von y, und A, B, C beständige Größen bezeichnen.

Da hier $q = \frac{C - AXp}{BY}$ ist, so geht die allgemeine Gleichung $dz = pdx + qdy$ in folgende über:

$$dz = \frac{C}{B} \cdot \frac{dy}{Y} + AXp \cdot \left(\frac{dx}{AX} - \frac{dy}{BY}\right),$$

und daraus folgt, wie zuvor, daß AXp eine Funktion von

$$\frac{1}{A}\int\frac{dx}{X} - \frac{1}{B}\int\frac{dy}{Y}$$

seyn muß, und daß man daher für das gesuchte Integral hat

$$z = \frac{C}{B}\int\frac{dy}{Y} + f\left(\frac{1}{A}\int\frac{dx}{X} - \frac{1}{B}\int\frac{dy}{Y}\right).$$

Ex. Für $Ax\left(\frac{dz}{dx}\right) + By\left(\frac{dz}{dy}\right) = C$ ist $X = x$ und $Y = y$, also auch das Integral

$$z = \frac{C}{B}\log. y + f \cdot \frac{x^A}{y^B}.$$

Ist überdieß $A = B = 1$ und $C = 0$, so hat man

$$x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0,$$

wovon das Integral $z = f\frac{x}{y}$ ist.

§. 233. (Gleichung der Form $AX\left(\frac{dz}{dx}\right) + BY\left(\frac{dz}{dy}\right) = CZ$.) Sey die Gleichung gegeben

$$AX\left(\frac{dz}{dx}\right) + BY\left(\frac{dz}{dy}\right) = CZ,$$

wo X, Y, Z nach der Ordnung Funktionen von x, y, z sind. Diese Gleichung gibt

$$q = \frac{CZ - AXp}{BY},$$

und wenn man dieß in $dz = pdx + qdy$ substituirt:

$$dz - \frac{CZ}{BY}dy = p\left(dx - \frac{AX}{BY}dy\right) \quad \text{oder}$$

$$\frac{dz}{CZ} - \frac{dy}{BY} = \frac{AXp}{CZ}\left(\frac{dx}{AX} - \frac{dy}{BY}\right),$$

woraus sofort, wie zuvor, für das gesuchte Integral folgt

$$\frac{1}{C}\int\frac{dz}{Z} - \frac{1}{B}\int\frac{dy}{Y} = f\left(\frac{1}{A}\int\frac{dx}{X} - \frac{1}{B}\int\frac{dy}{Y}\right).$$

I. Für den besondern Fall $X = x$, $Y = y$, $Z = z$ hat man

$$Ax\left(\frac{dz}{dx}\right) + By\left(\frac{dz}{dy}\right) = Cz,$$

wovon das Integral $\frac{z^C}{y^B} = f\frac{x^A}{y^B}$ ist. Eben so ist von

$$x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right) = z \quad \text{das Integral} \quad \frac{z}{y} = f\frac{x}{y}.$$

Für den speciellen Fall $X = x^2$, $Y = y^2$, $Z = z^2$ und $A = B = C = 1$ hat man

$$\int\frac{dx}{X} = -\frac{1}{x}, \quad \int\frac{dy}{Y} = -\frac{1}{y}, \quad \int\frac{dz}{Z} = -\frac{1}{z},$$

so daß daher von der Gleichung $x^2\left(\frac{dz}{dx}\right) + y^2\left(\frac{dz}{dy}\right) = z^2$ das Integral ist

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{y} + f\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right).$$

Eben so ist von $\frac{1}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{1}{y}\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{1}{z}$ das Integral

$$z^2 = y^2 + f(x^2 - y^2).$$

§. 234. (Gleichung der Form $z = P\left(\frac{dz}{dx}\right) + Q\left(\frac{dz}{dy}\right)$).

Ist die Gleichung $z = P\left(\frac{dz}{dx}\right) + Q\left(\frac{dz}{dy}\right)$ gegeben, wo P sowohl als Q Funktionen der beyden Größen x und y seyn sollen, so wollen wir, um das vollständige Integral dieser Gleichung zu finden, annehmen, daß man bereits eine particuläre Auflösung derselben kenne, die auch in den meisten Fällen leicht zu erhalten ist. Sey $z = U$ diese particuläre Auflösung, wo U eine Funktion von x und y, also auch $U = P\left(\frac{dU}{dx}\right) + Q\left(\frac{dU}{dy}\right)$ ist.

Man setze nun allgemein $z = U \cdot fT$, und es sey

$$dT = Rdx + Sdy.$$

Um die so eingeführte Größe T zu finden, hat man, wenn

$f'T = \frac{d \,.\, fT}{dT}$ ist:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dU}{dx}\right) fT + UR \,.\, f'T \quad \text{und}$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \left(\frac{dU}{dy}\right) fT + US \,.\, f'T.$$

Substituirt man diese Werthe von $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ in der gegebenen Gleichung, so hat man, da $z = U \,.\, fT$ ist:

$$UfT = \left[P\left(\frac{dU}{dx}\right) + Q\left(\frac{dU}{dy}\right)\right] . fT + U[PR + QS] . f'T.$$

Da aber $U = P\left(\frac{dU}{dx}\right) + Q\left(\frac{dU}{dy}\right)$ ist, so sind die beyden ersten Theile der letzten Gleichung einander gleich, und man hat daher

$$PR + QS = o \quad \text{oder} \quad S = -\frac{PR}{Q};$$

und endlich, wenn man diesen Werth von S in der vorhergehenden Gleichung $dT = Rdx + Sdy$ substituirt:

$$dT = R\left(dx - \frac{P}{Q}dy\right).$$

Die Auflösung unserer Aufgabe reducirt sich daher auf die Integration der gewöhnlichen Differentialgleichung $Qdx - Pdy = o$ zwischen den beyden Größen x und y, die man nach dem Vorhergehenden finden wird. Nennt man dann T das so gefundene Integral, so ist sofort

$$y = U \,.\, fT.$$

Ex. I. $z = y\left(\frac{dz}{dx}\right) + x\left(\frac{dz}{dy}\right)$.

Von dieser Gleichung ist $z = x + y$ eine particuläre Auflösung. Weiter ist $P = y$ und $Q = x$, also geht die Gleichung $Qdx - Pdy = o$ in folgende über $xdx - ydy = o$, von welcher das Integral ist $T = x^2 - y^2$. Das gesuchte Integral der gegebenen Gleichung ist daher

$$z = (x + y) \,.\, f(x^2 - y^2).$$

Ex. II. $z = (x + y)\left(\frac{dz}{dx}\right) + (y - x)\left(\frac{dz}{dy}\right)$.

Von dieser Gleichung ist $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ eine particuläre Auflösung, und man hat $P = x + y$, $Q = y - x$, und die Gleichung $Qdx - Pdy$ geht in folgende über:

$$dT = (ydx - xdy) - (xdx + ydy) = o.$$

Um diesen Ausdruck zu integriren, multiplicire man ihn mit dem Factor $\frac{1}{x^2+y^2}$, so erhält man

$$T = \text{arc. tang.} \frac{x}{y} - \tfrac{1}{2} \log.(x^2+y^2),$$

also ist auch das gesuchte Integral der gegebenen Gleichung

$$z = \sqrt{x^2+y^2} \,.\, f\left[\text{arc. tang.} \frac{x}{y} - \tfrac{1}{2}\log.(x^2+y^2)\right].$$

§. 235. (Gleichung der Form $P\left(\frac{dz}{dx}\right) + Q\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$).

Ist diese Gleichung $Pp + Qq = 0$ gegeben, wo p, q die vorhergehende Bedeutung haben, und P, Q Funktionen von x und y zugleich sind, so hat man $p = -\frac{Qq}{P}$, und wenn man diesen Werth von p in der allgemeinen Gleichung $dz = pdx + qdy$ substituirt, so erhält man

$$dz = \frac{q}{P}(Pdy - Qdx).$$

Da aber z eine Funktion von zwey veränderlichen Größen x und y seyn soll, so muß $\frac{q}{P}(Pdy - Qdx)$, also auch $(Pdy - Qdx)$ ein vollständiges Differential seyn, oder doch durch irgend einen Factor μ dazu gemacht werden können. Heißt dann U das Integral von $Pdy - Qdx = 0$, so ist

$$z = fU$$

das gesuchte Integral der gegebenen Gleichung.

Ex. I. Sey $x\left(\frac{dz}{dy}\right) - y\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$, so ist $P = -y$, $Q = x$, und die erwähnte Differentialgleichung $dU = 0$ ist $xdx + ydy = 0$, also ist auch $U = x^2 + y^2$ und

$$z = \varphi(x^2+y^2)$$

die bekannte Gleichung der durch Rotation entstandenen Flächen.

Ex. II. Sey $x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$, so ist $P = x$, $Q = y$ und $dU = xdy - ydx = 0$. Diese Gleichung wird durch den Factor $\frac{1}{x^2}$ integrabel, so daß man hat $U = \frac{y}{x}$, also auch

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

I. Ist $P = X$ eine bloße Funktion von x, und $Q = Y$ eine bloße Funktion von y, also die gegebene Gleichung $X\left(\frac{dz}{dx}\right) + Y\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$, so geht die Gleichung $dU = Pdy - Qdx$ in folgende über:

$$Xdy - Ydx = 0,$$

also ist $U = \int \frac{dy}{Y} - \int \frac{dx}{X}$. Ganz eben so erhält man auch für die Gleichung $Y\left(\frac{dz}{dx}\right) + X\left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$ den Ausdruck

$$U = \int Ydy - \int Xdx.$$

§. 236. (Gleichung der Form $P\left(\frac{dz}{dx}\right) + Q\left(\frac{dz}{dy}\right) = R$). Diese Gleichung, in welcher jede der Größen P, Q, R als Funktion von allen drey Variablen x, y, z vorausgesetzt wird, ist die allgemeinste, die man für partielle Differentialgleichungen der ersten Ordnung zwischen drey Größen x, y, z geben kann.

Sucht man daraus den Werth von $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, und substituirt ihn in der Gleichung $dz = \left(\frac{dz}{dx}\right)dx + \left(\frac{dz}{dy}\right)dy$, so erhält man

$$Pdz - Rdx = q(Pdy - Qdx).$$

Sind nun die Größen P, Q, R so beschaffen, daß der Ausdruck $Pdz - Rdx$ nur die Größen x und z, und daß $Pdy - Qdx$ nur die Größen x und y enthält, so muß es einen Factor μ geben, der $Pdz - Rdx$, und einen Factor μ', der $Pdy - Qdx$ zu einem vollständigen Differential macht. Nennt man U und U' diese vollständigen Differentiale, so hat man

$$Pdz - Rdx = \frac{1}{\mu} . dU \quad \text{und} \quad Pdy - Qdx = \frac{1}{\mu'} . dU',$$

und die vorhergehende Gleichung geht dann in folgende über:

$$dU' = \frac{\mu'}{\mu q} . dU.$$

Da aber dieser letzte Ausdruck nur dann integrabel seyn kann, wenn $\frac{\mu'}{\mu q}$ irgend eine Funktion von U ist, so sey $\frac{\mu'}{\mu q} = \varphi' U$, also auch $dU' = \varphi' U . dU$, und das Integral dieser Gleichung oder

$$U' = \varphi U$$

ist zugleich das gesuchte Integral der gegebenen partiellen Differentialgleichung. Weniger einfach wird die Auflösung, wenn die beyden Gleichungen $dU = 0$, $dU' = 0$ die erwähnte Eigenschaft nicht haben. (M. s. Lacroix, Vol. II., S. 531.)

Ex. Sey $x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right) = az$, so ist $P = x$, $Q = y$, $R = az$, also sind auch jene zwey Differentialgleichungen

$$dU = xdz - azdx = 0 \quad \text{und} \quad dU' = xdy - ydx = 0.$$

Nimmt man für die erste derselben den Factor $\mu = \frac{1}{x^{a+1}}$, und für die zweyte $\mu' = \frac{1}{x^2}$, so hat man

$$\frac{xdz - azdx}{x^{a+1}} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{xdy - ydx}{x^2} = 0,$$

und davon sind die Integrale

$$U = \frac{z}{x^a} \quad \text{und} \quad U' = \frac{y}{x},$$

also ist auch das gesuchte Integral

$$\frac{y}{x} = \varphi\frac{z}{x^a}, \text{ oder was dasselbe ist, } z = x^a \,.\, f\frac{y}{x}.$$

Für $a = 1$ hat man

$$x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right) = z \quad \text{und} \quad z = af\frac{y}{x},$$

die bekannte Gleichung der conischen Flächen.

I. Eliminirt man aus den beyden Gleichungen $dU = 0$ und $dU' = 0$ die Größe dx, so erhält man $Qdz - Rdy = 0$. Demnach reducirt sich die Auflösung unserer Aufgabe darauf, das Integral von zwey der drey folgenden Gleichungen zu finden:

$$Pdz - Rdx = 0, \quad Pdy - Qdx = 0, \quad Qdz - Rdy = 0.$$

Ex. I. Sey die Gleichung $x\left(\frac{dz}{dx}\right) + z\left(\frac{dz}{dy}\right) + y = 0$ gegeben. Hier ist $P = x$, $Q = z$, $R = -y$, also sind auch jene drey Differentialgleichungen:

$$xdy - zdx = 0, \quad xdz + ydx = 0, \quad zdz + ydy = 0.$$

Das Integral der letzten ist $y^2 + z^2 = a^2$. Substituirt man daraus den Werth von y in der zweyten Gleichung, so erhält man

$$\frac{dx}{x} + \frac{dz}{\sqrt{a^2 - z^2}} = 0 \quad \text{oder} \quad \log. x + \text{arc. sin.}\,\frac{z}{a} = \log. b.$$

Man hat daher

$$U = \sqrt{y^2 + z^2} \quad \text{und} \quad U' = x \,.\, e^{\text{arc. sin.} \frac{z}{a}},$$

und daher für das gesuchte Integral

$$x \,.\, e^{\text{arc. sin.} \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}} = \varphi(y^2 + z^2).$$

II. Ist endlich die gegebene Gleichung $P\left(\frac{dz}{dx}\right) + Q\left(\frac{dz}{dy}\right) = R$ in Beziehung auf die Größen x, y, z homogen oder von gleichen Dimensionen, so setze man $x = tz$ und $y = uz$, wodurch die Größen P, Q, R die Form annehmen $P'z^n$, $Q'z^n$, $R'z^n$, und wo daher die vorhin angeführten Differentialgleichungen in folgende übergehen:

$$(P' - R't)\frac{dz}{z} - R'dt = o \quad \text{und} \quad (Q' - R'u)\frac{dz}{z} - R'du = o,$$

die nach der Elimination von $\frac{dz}{z}$ geben

$$(Q' - R'u)\,dt - (P' - R't)\,du = o \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Da diese Gleichung nur die Größen u und t enthält, so wird man ihr Integral suchen und dadurch den Werth von t in u bestimmen, um ihn in der einen oder der andern der beyden Gleichungen

$$\frac{dz}{z} = \frac{R'dt}{P' - R't}, \quad \frac{dz}{z} = \frac{R'du}{Q' - R'u} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

zu substituiren.

Ex Für die Gleichung $xz\left(\frac{dz}{dx}\right) + yz\left(\frac{dz}{dy}\right) = xy$ hat man

$$P = xz = tz^2, \quad Q = yz = uz^2, \quad R = xy = tuz^2,$$

also auch $P' = t$, $Q' = u$, $R' = tu$. Damit gibt die Gleichung (1)

$$(1 - ut)(u\,dt - t\,du) = o.$$

Das Integral von $u\,dt - t\,du = o$ ist $\frac{t}{u} = a$ oder $t = au$. Substituirt man diesen Werth von t in der zweyten der Gleichungen (2), so hat man

$$\frac{dz}{z} = \frac{au\,du}{1 - au^2},$$

wovon das Integral ist

$$\log. z = -\tfrac{1}{2}\log.(1 - au^2) + \log. b \quad \text{oder} \quad z \,.\, \sqrt{1 - au^2} = b,$$

woraus folgt

$$z\sqrt{1-ut}=\varphi\frac{u}{t} \quad \text{oder} \quad \sqrt{z^2-xy}=\varphi\frac{y}{x},$$

wofür man auch schreiben kann $z^2-xy=\varphi\frac{y}{x}$.

§. 237. (Gleichungen der Form $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)=P$ und $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)=P$).
Um nun noch einige der vorzüglichsten partiellen Differentialgleichungen des zweyten Grades zu betrachten, sey zuerst $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)=P$, wo P bloß eine Funktion von x und y ist. Da diese Gleichung auch so ausgedrückt werden kann:

$$\frac{d^2z}{dx}=Pdx,$$

so ist ihr erstes Integral $\frac{dz}{dx}=\int Pdx+C$, oder da C eigentlich eine Funktion von y ist:

$$\frac{dz}{dx}=\int Pdx+\varphi y \quad \text{oder} \quad dz=dx\int Pdx+dx.\varphi y,$$

und wenn man diesen Ausdruck wieder in Beziehung auf z und x integrirt:

$$z=\int dx(Pdx+x\varphi y+\psi y,$$

wo φy und ψy willkürliche Funktionen von y bezeichnen.

Ganz eben so gibt die Gleichung $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)=P$, wenn P wieder eine Funktion von x und y ist:

$$z=\int dy\int Pdy+y\varphi x+\psi x.$$

Ex. Die Gleichung $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)=\frac{xy}{a}$ gibt

$$\int Pdx=\frac{x^2y}{2a} \quad \text{und} \quad \int dx\int Pdx=\frac{x^3y}{6a},$$

also ist auch $z=\frac{x^3y}{6a}+x\varphi y+\psi y$.

§. 238. (Gleichungen der Form $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)=P\left(\frac{dz}{dx}\right)+Q$).
Ist in dieser Gleichung P sowohl als auch Q eine Funktion von x und y, so sey $\left(\frac{dz}{dx}\right)=u$, also auch $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)=\left(\frac{du}{dx}\right)$, wodurch unsere Gleichung auf die einfachere des ersten Grades

$$\left(\frac{du}{dx}\right)=Pu+Q$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

zurückgeführt wird. Diese Gleichung gibt $du = Pudx + Qdx$, die mit dem Factor $e^{-\int P dx}$ multiplicirt, zum Integral gibt

$$u \cdot e^{-\omega} = \int e^{-\omega} \cdot Q dx + \varphi y \quad \text{oder}$$

$$u = \frac{dz}{dx} = e^{\omega} \int e^{-\omega} \cdot Q dx + e^{\omega} \cdot \varphi y,$$

wo der Kürze wegen $\omega = \int P dx$ gesetzt worden ist. Multiplicirt man die letzte Gleichung durch dx, und integrirt in Beziehung auf z und x, so hat man

$$z = \int e^{\omega} dx \int e^{-\omega} Q dx + \varphi y \int e^{\omega} dx + \psi y.$$

I. Eben so gibt $\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) = P\left(\frac{dz}{dy}\right) + Q$ das Integral

$$z = \int e^{\omega'} dy \int e^{-\omega'} Q dy + \varphi x \cdot \int e^{\omega'} dy + \psi y,$$

wo $\omega' = \int P dy$ ist.

Ex. $\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = \frac{a}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right)$ gibt

$$Q = 0, \quad P = \frac{a}{x}, \quad \omega = a \log . x, \quad e^{\omega} = x^a,$$

und daher

$$z = \frac{x^{a+1}}{a+1} \cdot \varphi y + \psi y.$$

Ganz auf dieselbe Weise gibt $\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = \frac{a}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{b}{xy}$ das Integral

$$z = -\frac{bx}{ay} + \frac{x^{a+1}}{a+1} \cdot \varphi y + \psi y.$$

§. 239. (**Gleichungen der Form** $\left(\frac{d^2 z}{dx dy}\right) + P\left(\frac{dz}{dx}\right) = Q$, **wo** P **sowohl als** Q **Funktionen von** x **und** y **sind.**) Setzt man auch hier $\left(\frac{dz}{dx}\right) = u$, so erhält man $\left(\frac{du}{dy}\right) + Pu = Q$. Um diese Gleichung zu integriren, wird man die Größe

$$u = Xt \quad \text{oder} \quad du = tdX + Xdt$$

setzen, wodurch man erhält

$$tdX + Xdt + PXtdy = Qdy.$$

Da man hier die willkürliche Größe X so annehmen kann, daß $Xdt + PXtdy = 0$ ist, so wird dann auch $tdX = Qdy$ seyn müssen. Die erste dieser zwey Gleichungen gibt

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$dt + Pt\,dy = o \quad \text{oder} \quad \frac{dt}{t} = -P\,dy,$$

wovon das Integral $t = e^{-\int P\,dy}$ ist. Substituirt man dann diesen Werth von t in der zweyten Gleichung $t\,dX = Q\,dy$, so hat man

$$dX = e^{\int P\,dy} \, . \, Q\,dy \quad \text{oder} \quad X = \int e^{\int P\,dy} \, . \, Q\,dy + C;$$

und da endlich $u = tX$ war, so ist

$$u = \left(\frac{dz}{dx}\right) = e^{-\int P\,dy} \, . \, \left[\int e^{\int P\,dy} \, . \, Q\,dy + C\right] + C'.$$

Setzt man also wieder $\omega' = \int P\,dy$, und läßt die zwey Constanten C und C′ Funktionen von x und von y seyn, so hat man für das Integral der gegebenen Gleichung

$$z = \int dx \, . \, e^{-\omega'}\left[e^{\omega} \, . \, Q\,dy + \varphi x\right] + \psi y.$$

I. Eben so hat die Gleichung $\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) + P\left(\frac{dz}{dy}\right) = Q$ zum Integral den Ausdruck

$$z = \int dy\, e^{-\omega}\left[\int e^{\omega} \, . \, Q\,dx + \varphi y\right] + \psi x,$$

wo $\omega = \int P\,dx$ ist.

II. Ist $P = o$, so hat die Gleichung $\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = Q$ zum Integral

$$z = \int dx \int Q\,dy + \int dx \, . \, \varphi x + \psi y \quad \text{oder}$$
$$z = \int dy \int Q\,dx + \int dy \, . \, \varphi y + \psi x,$$

und beyde Ausdrücke können als identisch betrachtet werden. Denn da die Funktion φ ganz willkürlich ist, so kann man $\int dx \, . \, \varphi x = \varphi x$ und $\int dy \, . \, \varphi y = \varphi y$ setzen.

III. Ist $P = Q = o$, so ist die gegebene Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right) = o,$$

und ihr Integral

$$z = \varphi x + \psi y.$$

Setzt man

$$x = y' + \frac{x'}{a} \quad \text{und} \quad y = y' - \frac{x'}{a},$$

was also bloß eine Änderung der Coordinaten x, y einer Curve voraussetzt, so ist

$$dx = dy' + \frac{dx'}{a} \quad \text{und} \quad dy = dy' - \frac{dx'}{a}, \quad \text{also auch}$$

$$dx\,dy = dy'^2 - \frac{dx'^2}{a^2},$$

so daß also dann die Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{d x\, d y}\right) = 0$$

in folgende übergeht:

$$\left(\frac{d^2 z}{d y'^2 - \frac{d x'^2}{a}}\right) = 0,$$

die auch so geschrieben werden kann:

$$\left(\frac{d^2 z}{d y'^2}\right) = a^2 \left(\frac{d^2 z}{d x'^2}\right),$$

so daß daher, wenn von den beyden Gleichungen

$$\left(\frac{d^2 z}{d x\, d y}\right) = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = a^2 \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right)$$

das Integral der einen bekannt ist, dadurch auch das der andern gegeben wird. Es ist nämlich von $\left(\frac{d^2 z}{d x\, d y}\right)$ das Integral

$$z = \varphi x + \psi y,$$

und von $\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) = a^2 \left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right)$ ist das Integral

$$z = \varphi\left(y + \frac{x}{a}\right) + \psi\left(y - \frac{x}{a}\right),$$

oder was dasselbe ist:

$$z = \varphi(x + a y) + \psi(x - a y).$$

XXXIX.

Principien der Rechnung mit begränzten Integralen.

---

§. 240. (**Verschiedene Ausdrücke desselben begränzten Integrals.**) Wir haben bereits oben §. 159 u. m. der begränzten Integrale (intégrales définies) erwähnt, die entstehen, wenn man ein allgemeines Integral $\int f x \,.\, d x$ zwischen zwey Gränzen der Stammgröße, z. B. zwischen $x = a$ bis $x = b$ nimmt. Nennt man $F x$ das allgemeine oder unbestimmte Integral $\int f x \,.\, d x$, so daß man hat $F x = \int f x \,.\, d x$, so wird man das begränzte Integral im Allgemeinen so ausdrücken konnen:

$$\int_a^b fx \,.\, dx = Fb - Fa.$$

In diesem Ausdrucke wird der Theil $Fb - Fa$, nebst den beyden Größen a und b, auch noch andere, z. B. selbst die veränderliche ξ, enthalten, wenn nämlich diese schon in der gegebenen Funktion fx begriffen ist. Da aber eine solche Größe ξ bey der Integration von $\int fx \,.\, dx$ als eine Constante betrachtet wird, so wird dann die Größe $Fb - Fa$ auch als eine Funktion von ξ angesehen oder gleich $\psi\xi$ betrachtet werden können, so daß man die Gleichung hat

$$\int_a^b f(x, \xi)\, dx = \psi\xi.$$

So hat man z. B. das allgemeine Integral

$$\int \frac{(\xi - 1)\, dx}{1 + (\xi - 1)\, x} = \log.\left[1 + (\xi - 1)\, x\right],$$

also ist auch

$$\int_0^1 \frac{(\xi - 1)\, dx}{1 + (\xi - 1)\, x} = \log.\, \xi,$$

so daß also der Logarithmus irgend einer Größe ξ durch das begränzte Integral eines Ausdrucks gegeben wird, dessen veränderliche Größe x ist. Dasselbe läßt sich auch auf andere algebraische oder transcendente Funktionen anwenden. Auf dieselbe Weise wird man auch, wenn fx die beyden Größen ξ und v enthält, das begränzte Integral $\int_a^b f(x, \xi, v)$ als eine Funktion von ξ und v betrachten, und so die Gleichung aufstellen können:

$$\int_a^b f(x, \xi, v)\, dx = \psi(\xi, v),$$

und dasselbe Verfahren wird sich auch auf zwey- und mehrfache Integrationen anwenden lassen, so daß man hat

$$\int_a^b dx \int_{a'}^{b'} f(x, y, \xi)\, dy = \psi\xi,$$

$$\int_a^b dx \int_{a'}^{b'} dy \int_{a''}^{b''} f(x, y, z, \xi)\, dz = \psi\xi, \text{ u. s. f.}$$

Man bemerkt von selbst, daß solche Ausdrücke einer Funktion von ξ oder von $\xi, v, \ldots$ durch begränzte Integralien, deren veränderliche Stammgrößen x oder $x, y, \ldots$ sind, eben so allgemein als in ihrer Anwendung fruchtbar seyn werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus dem Vorhergehenden entspringen gleichsam von selbst folgende Ausdrücke, die man als eben so viele Theoreme der Rechnung mit begränzten Integralen ansehen kann.

I. Jedes Integral dieser Art läßt sich in zwey andere auflösen, da man offenbar hat

$$\int_a^b fx\,dx = \int_a^m fx\,dx + \int_m^b fx\,dx.$$

II. Die beyden Gränzen des Integrals lassen sich umkehren, denn es ist

$$\int_a^b fx\,dx = -\int_b^a fx\,dx.$$

III. Ist fx gleich einem Aggregate mehrerer anderer Funktionen von x, oder ist $fx = px + qx + rx + \ldots$, so ist auch

$$\int_a^b fx.dx = \int_a^b px.dx + \int_a^b qx.dx + \int_a^b rx.dx + \ldots$$

IV. Sey ψx irgend eine andere, von fx unabhängige Funktion, und der Kürze wegen $\frac{d.\psi x}{dx} = \psi' x$.

Setzt man dann $x = \psi y$, so ist $dx = \psi' y.dy$, und daher geht das unbestimmte Integral $\int fx.dx$ über in $\int f(\psi y)\psi' y.dy$.

Sucht man nun aus der Gleichung $x = \psi y$ durch Umkehrung den Werth von y in x, den wir durch die Gleichung $y = \phi x$ ausdrücken wollen, so wird man für $x = a$ haben $y = \phi a$, und für $x = b$ eben so $y = \phi b$, so daß daher das begränzte Integral $\int_a^b fx.dx$ gleich wird dem Integral $\int_{\phi a}^{\phi b} f(\psi y)\psi' y.dy$.

Oder endlich, wenn man das Zeichen y, das hier nur als Mittel gebraucht wurde, mit x verwechselt, so hat man

$$\int_a^b fx.dx = \int_{\phi a}^{\phi b} f(\psi x)\psi' x.dx;$$

ein wichtiger Satz, von welchem alle nächstfolgenden nur als besondere Fälle zu betrachten sind.

V. Es ist für jeden Werth von h

$$\int_a^b fx.dx = \int_{a-h}^{b-h} f(x+h)\,dx.$$

Denn ist $x = y + h$, so ist $y = \phi x = x - h$. Demnach gibt $x = a$ die Gleichung $\phi a = a - h$, so wie man für $x = b$ hat $\phi b = b - h$. Endlich ist noch $\psi x = y + h$, also auch $\psi' x = 1$. Substituirt man diese Werthe in IV., so erhält man die hier in V. aufgestellte Gleichung, wodurch in die beyden Gränzen a, b eine willkürliche Größe h eingeführt wird.

Setzt man, um diesen besondern Fall noch mehr zu beschränken, h = a, so hat man

$$\int_a^b fx.dx = \int_o^{b-a} f(a+x).dx,$$

wodurch eine der beyden Gränzen a, b auf Null gebracht wird.

Ex. Ist $fx = e^x$, also auch $f(x+h) = e^{x+h}$, so hat man die unbestimmten Integrale

$$\int fx.dx = e^x \text{ und } \int f(x+h)\,dx = e^{x+h},$$

und daher ist das begränzte Integral $\int_a^b fx.dx$ sowohl als auch $\int_{a-h}^{b-h} f(x+h).dx$ gleich $e^b - e^a$.

Ist eben so $fx = (1+x)^2$, also auch $f(x+h) = (1+x+h)^2$, so findet man für beyde begränzte Integrale den Ausdruck

$$\tfrac{1}{3}(1+b)^3 - \tfrac{1}{3}(1+a)^3.$$

VI. Eben so hat man

$$\int_a^b fx.dx = \int_a^b f(a+b-x).dx.$$

Denn setzt man in IV. die Größe $x = a+b-y$, so ist

$$y = \phi x = a + b - x.$$

Der Werth $x = a$ gibt daher $\phi x = b$, und $x = b$ gibt $\phi x = a$, also ist auch, da $\psi' x = -1$ ist:

$$\int_a^b fx.dx = -\int_b^a f(a+b-x).dx,$$

oder nach Nro. II.:

$$\int_a^b fx.dx = \int_a^b f(a+b-x).dx,$$

wodurch die veränderliche Größe mit einer andern verwechselt wird, während die beyden Gränzen dieselben bleiben.

VII. Setzt man eben so $x = y + \frac{1}{2}(a+b)$, so erhält man

$$\int_a^b fx.dx = \int_{-\frac{1}{2}(b-a)}^{\frac{1}{2}(b-a)} f[x + \tfrac{1}{2}(a+b)].dx,$$

wodurch die beyden Gränzen gleich groß gesetzt werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

VIII. Ist ferner

$$x = \frac{b(y-\alpha) - a(y-\beta)}{\beta - \alpha},$$

so hat man auch

$$y = \phi x = \frac{x(\beta-\alpha) + \alpha b - a\beta}{b - a}.$$

Demnach ist $y = \phi a = \alpha$ für $x = a$, und $y = \phi b = \beta$ für $x = b$. Überdieß hat man

$$dx = \frac{b-a}{\beta-\alpha} dy \quad \text{oder} \quad \phi' y = \frac{b-a}{\beta-\alpha},$$

also ist auch nach Nro. IV.:

$$\int_a^b fx.dx = \frac{b-a}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f\left(\frac{b(x-\alpha) - a(x-\beta)}{\beta-\alpha}\right)dx,$$

wodurch die beyden Gränzen a, b in zwey andere α, β verändert werden.

Will man z. B. die Gränzen a, b in die zwey einfachen 0 und 1 oder umgekehrt verwandeln, so hat man

$$\int_a^b fx.dx = (b-a)\int_0^1 f[a + (b-a)x].dx,$$

$$\int_0^1 fx.dx = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}.dv,$$

und aus diesen Ausdrücken erhält man noch die beyden einfachen

$$\int_0^b fx.dx = b\int_0^1 fbx.dx \quad \text{und} \quad \int_0^1 fx.dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f\frac{x}{\pi}.dx.$$

Man sieht daraus, welchen Nutzen eine tabellarische Sammlung von Integralen zwischen den Gränzen 0 und 1 gewährt, um daraus eine große Anzahl anderer Integrale zwischen andern Gränzen abzuleiten. Auch bemerkt man von selbst, daß man in einem der beyden Theile der vorhergehenden Gleichungen die veränderliche Größe x mit irgend einer andern u verwechseln kann, so daß man z. B. statt der vorletzten Gleichung hat

$$\int_0^b fx.dx = b\int_0^1 fbu.du,$$

und daß man selbst in diesem Ausdrucke noch die Größe b in x verwandeln kann, wodurch man erhält

$$\int_0^b fx.dx = x\int_0^1 fxu.du.$$

Will man endlich die beyden oft vorkommenden Gränzen 0 und 1 in die neuen Gränzen 0 und ∞ verwandeln, so kann man annehmen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$x = 1 - \frac{1}{1+y} \quad \text{oder auch} \quad x = e^{-ny},$$

wo in dem ersten Falle

$$y = \phi x = \frac{1}{1-x} - 1, \text{ und im zweyten } y = -\frac{1}{n} \log . x \text{ wird.}$$

§. 241. (**Auflösung der Funktion f(x) dieser Integrale in zwey andere f(x) und f(—x)).** Nach §. 240, I. hat man

$$\int_{-a}^{a} fx.dx = \int_{-a}^{o} fx.dx + \int_{o}^{a} fx.dx.$$

Setzt man aber $x = -y$, so ist

$$\int_{-a}^{o} fx.dx = -\int_{a}^{o} f(-y).dy = \int_{o}^{a} f(-y).dy$$
$$= \int_{o}^{a} f(-x).dx.$$

Substituirt man diesen Werth von $\int_{-a}^{o} fx.dx$ in der ersten Gleichung, so erhält man

$$\int_{-a}^{a} fx.dx = \int_{o}^{a} [f(x) + f(-x)].dx.$$

I. Ist $f(-x) = f(x)$, wie z. B. wenn fx gleich einer geraden Potenz von x oder gleich cos. x ist u. s., so hat man

$$\int_{-a}^{a} fx.dx = 2 \int_{o}^{a} fx.dx.$$

Ist aber $f(-x) = -fx$, wie z. B. wenn fx gleich einer ungeraden Potenz von x oder gleich sin. x ist u. s., so hat man

$$\int_{-a}^{a} fx.dx = o.$$

§. 242. (**Ergänzung der Taylor'schen Reihe.**) Wir haben diese Ergänzung bereits oben (§. 82) gegeben und gefunden, daß man hat

$$f(x+\omega) = fx + \omega f'x + \frac{\omega^2}{1.2} f''x + \ldots$$
$$+ \frac{\omega^n}{1.2.3\ldots n} f^n(x + \theta\omega),$$

und eben so für die Reihe Maclaurin's:

$$fx = fo + xf'o + \frac{x^2}{1.2} f''o + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} f^n(\theta x),$$

wo θ eine zwischen o und 1 enthaltene Zahl bezeichnet. Da aber der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wahre Werth dieser Größe θ noch nicht bestimmt ist, so wird es vortheilhaft seyn, diese Ergänzungen beyder Reihen

$$R = \frac{\omega^n}{1.2.3\ldots n} f^n(x+\theta\omega) \quad \text{und} \quad r = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} f^n(\theta x)$$

auf einem andern Wege, unabhängig von der Kenntniß der Größe θ, zu suchen.

Man sieht leicht, daß man hat

$$f(x+\omega) = fx + \int_0^\omega f'(x+\omega-z).dz,$$

wenn das unbestimmte Integral

$$\int f'(x+\omega-z) = -f(x+\omega-z)$$

gesetzt wird.

Setzt man aber in der Gleichung (§. 138, III.)

$$\int u d\nu = u\nu - \int \nu du$$

die Größe $\nu = z$ und $u = f'(x+\omega-z)$, so erhält man durch die sogenannte theilweise Integration, wenn der Kürze wegen $x+\omega-z=t$ gesetzt wird:

$$\int f't.dz = zf't + \int zf''t.dz,$$

und eben so

$$\int zf''t.dz = \tfrac{1}{2}z^2f''t + \tfrac{1}{2}\int z^2f'''t.dz,$$

$$\int z^2f'''t.dz = \tfrac{1}{3}z^3f'''t + \tfrac{1}{3}\int z^3f^{\mathrm{IV}}t.dz,$$

u. s. w.

Geht man dann von diesen unbestimmten Integralen, nach §. 240, III., zu den begränzten über, so hat man

$$\int_0^\omega f't.dz = \omega f'x + \int_0^\omega zf''t.dz,$$

$$\int_0^\omega zf''t.dz = \tfrac{1}{2}\omega^2f''x + \tfrac{1}{2}\int_0^\omega z^2f'''t.dz,$$

$$\int_0^\omega z^2f'''t.dz = \tfrac{1}{3}\omega^3f'''x + \tfrac{1}{3}\int_0^\omega z^3f^{\mathrm{IV}}t.dz,$$

u. s. w.

Substituirt man diese Ausdrücke in einander, und nimmt dabey auf die zuerst gegebene Gleichung

$$f(x+\omega) = fx + \int_0^\omega f't.dz$$

Rücksicht, so erhält man

$$f(x+\omega) = fx + \omega f'x + \int_0^\omega z f''t\,.\,dz$$
$$= fx + \omega f'x + \tfrac{1}{2}\omega^2 f''x + \tfrac{1}{2}\int_0^\omega z^2 f'''t\,.\,dz$$
$$= fx + \omega f'x + \tfrac{1}{2}\omega^2 f''x + \frac{\omega^3}{2\,.\,3} f'''x$$
$$+ \frac{1}{2\,.\,3}\int_0^\omega z^3 f^{IV}t\,.\,dz,$$

u. s. w.

Setzt man dieses bis zum n^{ten} Gliede fort, so ist

$$f(x+\omega) = fx + \omega f'x + \tfrac{1}{2}\omega^2 f''x + \ldots$$
$$+ \frac{\omega^{n-1}}{1\,.\,2\ldots(n-1)} f^{n-1}x + \frac{1}{1\,.\,2\ldots(n-1)}\int_0^\omega z^{n-1} f^n t\,.\,dz,$$

und eben so erhält man für Maclaurin's Reihe

$$fx = f0 + x f'0 + \tfrac{1}{2}x^2 f''0 + \ldots$$
$$+ \frac{x^{n-1}}{1\,.\,2\ldots(n-1)} f^{n-1}0 + \frac{1}{1\,.\,2\ldots(n-1)}\int_0^x z^{n-1} f^n t\,.\,dz,$$

so daß man daher für jene beyden Ergänzungen hat

$$R = \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-1)}\int_0^\omega z^{n-1} f^n t\,.\,dz \quad \text{und}$$
$$r = \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-1)}\int_0^x z^{n-1} f^n t\,.\,dz.$$

I. Die gefundenen Ausdrücke von R und r lassen sich, nach §. 240, mannigfaltig abändern.

Setzt man z. B. $\omega - z = u$, so gehen die vorigen Gränzen $z = 0$ und $z = \omega$ in folgende über, $u = \omega$ und $u = 0$, so daß man daher hat

$$R = \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-1)}\int_0^\omega (\omega - u)^{n-1} f^n(x+u)\,.\,du,$$

und eben so findet man für $x - z = u$

$$r = \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-1)}\int_0^x (x-u)^{n-1} f^n u\,.\,du.$$

Setzt man aber in der ersten Ergänzung $z = u\omega$ und in der zweyten $z = ux$, so hat man

$$R = \frac{\omega^n}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-1)}\int_0^1 u^{n-1} f^n(x + \omega - u\omega)\,.\,du \quad \text{und}$$
$$r = \frac{\omega^n}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-1)}\int_0^1 u^{n-1} f^n[x(1-u)]\,.\,du.$$

§. 243. **(Ableitung der begränzten Integrale aus den unbestimmten.)** In vielen Fällen lassen sich von einem aufgestellten Differentialausdruck begränzte Integrale angeben, während man die unbestimmten nicht kennt, und hier ist es auch, wo diese Rechnung ihren vorzüglichsten Nutzen äußert. Aber auch der verkehrte Fall findet öfter seine vortheilhafte Anwendung, wo nämlich das unbestimmte Integral schon bekannt ist, und das begränzte daraus abgeleitet werden soll, eine Aufgabe, die meistens keine besondere Schwierigkeiten darbiethet.

I. So hat man z. B., wie man leicht durch Differentiation findet, die beyden unbestimmten Integrale

$$\int e^{-bx}\sin.ax\,.\,dx = -\,e^{-bx}\,\frac{a\cos.ax + b\sin.ax}{a^2+b^2}$$

und

$$\int e^{-bx}\cos.ax\,.\,dx = e^{-bx}\,\frac{a\sin.ax - b\cos.ax}{a^2+b^2}.$$

Setzt man nun voraus, daß die Größe b positiv ist, und sucht man diese Integrale zwischen den Gränzen o und ∞, so hat man, da $e^{-b\infty}$ gleich Null ist,

$$\int_0^\infty e^{-bx}\sin.ax\,.\,dx = \frac{a}{a^2+b^2} \quad \text{und}$$

$$\int_0^\infty e^{-bx}\cos.ax\,.\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

II. Um eben so, für ein anderes Beyspiel, das Integral von $\frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ zwischen den Gränzen $x=0$ und $x=1$ zu finden, so hat man, wie wir schon oben (§. 146) gefunden haben, das unbestimmte Integral

$$\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-1}}{m}\sqrt{1-x^2} + \frac{m-1}{m}\int\frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Da nun, für die beyden angegebenen Größen das Glied

$$\frac{x^{m-1}}{m}\sqrt{1-x^2}$$

verschwindet, so ist

$$\int_0^1\frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{m-1}{m}\int_0^1\frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

woraus man durch wiederholte Substitution erhält

$$\int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{m-1\,.\,m-3\,.\,m-5\ldots(m-2r+1)}{m\,.\,m-2\,.\,m-4\ldots(m-2r+2)}\int_0^1 \frac{x^{m-2r}\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

wo r eine ganze Zahl bezeichnet. Es ist aber

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} \quad \text{und} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc. sin. } x,$$

also auch

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1 \quad \text{und} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Setzt man daher in dem vorhergehenden Ausdrucke zuerst $m = 2r$ und dann $m = 2r + 1$, so erhält man

$$\int_0^1 \frac{x^{2r}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3.5\ldots(2r-1)}{2.4.6\ldots2r}\cdot\frac{\pi}{2} \quad \text{und}$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2r+1}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2.4.6\ldots2r}{3.5.7\ldots(2r+1)}$$

übereinstimmend mit §. 146.

III. Auf eine ähnliche Weise erhält man folgende Ausdrücke, deren Entwickelung wir der Kürze wegen dem Lehrer überlassen.

$$\int_{-a}^{a} \sin.\frac{b\pi x}{a}\sin.\frac{c\pi x}{a}\,dx = 0,$$

$$\int_{-a}^{a} \cos.\frac{b\pi x}{a}\cos.\frac{c\pi x}{a} = 0,$$

$$\int_{-a}^{a} \sin.\frac{b\pi x}{a}\cos.\frac{c\pi x}{a}\,dx = 0,$$

$$\int_{-a}^{a}\left(\sin.\frac{c\pi x}{a}\right)^2 dx = \int_{-a}^{a}\left(\cos.\frac{c\pi x}{a}\right)^2 dx = a,$$

wo b und c eine ganze und a eine willkürliche Zahl bezeichnet.

§. 244. (Ueber das Euler'sche Integral.) Euler hat sich zuerst mit dem Integral

$$\Gamma(p) = \int_0^1 \left(\log.\frac{1}{x}\right)^{p-1} dx$$

beschäftigt, daher es auch seinen Namen trägt. Man sieht, daß es, zwischen den beyden angezeigten Gränzen genommen, nur eine Funktion von der Größe p seyn kann. Da alle Bemühungen vergebens waren, diese Funktion von p in einem geschlossenen Ausdrucke durch algebraische oder auch durch bisher bekannte transcendente Größen auszudrücken, und da sie doch in dem ganzen Gebiethe der Analysis eine so wichtige Rolle spielt, so hat man ihr das besondere Zeichen $\Gamma(p)$ gegeben, und diese Funktion Gamma p genannt.

Um nur die vorzüglichsten Eigenschaften dieser Funktion kennen zu lernen, bemerken wir zuerst, daß man, wenn man $x = e^{-y}$ setzt, sie auch auf die Form bringen kann

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Der letzte Ausdruck gibt durch theilweise Integration (§. 138, III.)

$$\int e^{-x} x^p dx = - e^{-x} x^p + p \int e^{-x} x^{p-1} dx,$$

und dieß mit (1) verglichen, zeigt sofort, daß für diese Funktion die Gleichung besteht

$$\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p) \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Dieselbe Gleichung (1) zeigt auch, daß man hat $\Gamma(1) = 1$, und eben so gibt die Gleichung (2) den Ausdruck $\Gamma(2) = 1$, und überdieß, wenn man in ihr $p = 0$ setzt, $\Gamma(0) = \infty$.

I. Aus derselben Gleichung (2) fließen sofort auch die folgenden

$$\begin{aligned}
\Gamma(p+1) &= p\,\Gamma(p),\\
\Gamma(p+2) &= (p+1)\,\Gamma(p+1),\\
\Gamma(p+3) &= (p+2)\,\Gamma(p+2),\\
&\ldots\ldots\ldots\\
\Gamma(p+n+1) &= (p+n)\,\Gamma(p+n) \quad \text{und}\\
\Gamma(p+1) &= p\,\Gamma(p),\\
\Gamma(p) &= (p-1)\,\Gamma(p-1),\\
\Gamma(p-1) &= (p-2)\,\Gamma(p-2),\\
&\ldots\ldots\ldots\\
\Gamma(p-n+1) &= (p-n)\,\Gamma(p-n).
\end{aligned}$$

Die Multiplication der Glieder der ersten Reihe gibt

$$p(p+1)(p+2)\ldots(p+n) = \frac{\Gamma(p+n+1)}{\Gamma(p)} \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

und eben so gibt auch die zweyte Reihe

$$p(p-1)(p-2)\ldots(p-n) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n)}.$$

Setzt man in der vorletzten Gleichung $p = 1$ und schreibt $n - 2$ statt n, so erhält man

$$\Gamma(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n-2)(n-1),$$

also auch

$$[\Gamma(n+1)]^2 = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \ldots (n-1)^2\, n^2,$$

woraus folgt, daß, wenn p eine ganze positive Zahl, $\Gamma(p)$ keine transcendente Größe mehr ist.

II. Setzt man in derselben Gleichung (3) statt p die Größe $1 - p$, so hat man

$$(1-p)(2-p)(3-p)\ldots(n-p) = \frac{\Gamma(n+1-p)}{\Gamma(1-p)},$$

und dieser Ausdruck, mit (3) multiplicirt, gibt

$$(1-p^2)(2^2-p^2)(3^2-p^2)\ldots(n^2-p^2)$$
$$= \frac{\Gamma(n+1-p)\cdot\Gamma(n+1+p)}{p\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)},$$

oder auch

$$\left(1-\frac{p^2}{1}\right)\left(1-\frac{p^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{p^2}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{p^2}{n^2}\right)$$
$$= \frac{\Gamma(n+1-p)\cdot\Gamma(n+1+p)}{[\Gamma(n+1)]^2}\cdot\frac{1}{p\Gamma(p)\Gamma(1-p)}.$$

Da der erste Faktor des zweyten Theiles dieser Gleichung sich der Einheit immer mehr nähert, je größer n ist, so hat man die unendliche Reihe

$$\left(1-\frac{p^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{p^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{p^2}{3^2}\right)\ldots = \frac{1}{p\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)}.$$

Vergleicht man diese unendliche Anzahl Produkte mit der oben (§. 65) gegebenen Reihe,

$$\sin. x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots$$

so hat man

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin. p\pi}\ \ldots (4).$$

III. Setzt man in der Gleichung (4) statt p nach der Ordnung $\frac{1}{2}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n} \ldots \frac{n-1}{n}$, so erhält man

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) . \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{\pi}{\sin. \frac{\pi}{n}},$$

$$\Gamma\left(\frac{2}{n}\right) . \Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right) = \frac{\pi}{\sin. \frac{2\pi}{n}} \ldots \text{ und}$$

$$\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) . \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{\sin. \frac{n-1}{n}\pi},$$

und wenn man alle diese Ausdrücke unter einander multiplicirt,

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) . \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) . \Gamma\left(\frac{3}{n}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{\left[\sin. \frac{\pi}{n} \sin. \frac{2\pi}{n} \sin. \frac{3\pi}{n} \ldots \sin. \frac{n-1}{n}\pi\right]}},$$

oder da die Größe unter dem Wurzelzeichen gleich $\frac{n}{2^{n-1}}$ ist,

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) . \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) . \Gamma\left(\frac{3}{n}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \sqrt{\frac{2\pi^{n-1}}{n}}.$$

IV. Wenn man endlich in der Gleichung (1) die Größe $x = a y^n$ setzt, wo a und n positive Größen bezeichnen, so erhält man

$$\Gamma(p) = n a^p \int_0^\infty e^{-a y^n} y^{np-1} d y.$$

Nimmt man daher $n p = q$ und stellt die Größe x wieder her, so ist

$$\Gamma\left(\frac{q}{n}\right) = n a^{\frac{q}{n}} \int_0^\infty e^{-a x^n} x^{q-1} d x \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Macht man in dieser Gleichung $a = q = 1$ und $n = 2$, so hat man, da $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ ist,

$$\int_0^\infty e^{-x^2} d x = \tfrac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

§. 245. (Integrale der Form $\int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}}{1 + x^2} d x = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$, $\int_{-\pi}^{\pi} e^{h x \sqrt{-1}} d x = 0$, $\int_0^\pi \frac{d x}{a + b \cos. x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ und

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$\int_0^{\infty} \frac{\sin. x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$. I. Setzt man in dem Ausdrucke $y = \int \frac{x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}}{1 + x^2} dx$ die Größe $x = z^2$ oder $z = \sqrt{x}$, so erhält man

$$y = 2 \int \frac{1 + z^2}{1 + z^4} dz.$$

Allein es ist

$$2 \frac{1 + z^2}{1 + z^4} = \frac{1}{1 + z\sqrt{2} + z^2} + \frac{1}{1 - z\sqrt{2} + z^2},$$

also auch (§. 138)

$$2 \int \frac{1 + z^2}{1 + z^4} dz = \sqrt{2} \,.\, \text{arc. tang.} \frac{z}{\sqrt{2} + z} + \sqrt{2} \,.\, \text{arc. tang} \frac{z}{\sqrt{2} - z}.$$

Da aber $\text{arc. tang.}\, \alpha + \text{arc. tang.}\, \beta = \text{arc. tang.} \frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha\beta}$ ist, so hat man

$$y = 2 \int \frac{1 + z^2}{1 + z^4} dz = \sqrt{2} \,.\, \text{arc. tang.} \frac{2\sqrt{2}}{1 - z^2},$$

und daher, wenn man zu den beyden Gränzen o und 1 übergeht, da $\text{arc. tang.} \infty = \frac{\pi}{2}$ ist,

$$y = 2 \int_0^1 \frac{1 + z^2}{1 + z^4} dz = \int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

II. Sey $y = \int e^{hx\sqrt{-1}} dx$, wo h jede positive oder negative Zahl außer o bezeichnet, so ist auch

$$y = \int (\cos. hx + \sqrt{-1} \,.\, \sin. hx) dx = \frac{1}{h} \sin. hx - \frac{\sqrt{-1}}{h} \,.\, \cos. hx,$$

und daher sofort für die Gränzen π und $-\pi$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{hx\sqrt{-1}} dx = 0.$$

Für den besondern Fall $h = 0$ ist $\int dx = x$, also auch $\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$.

III. Um $y = \int_0^{\pi} \frac{dx}{a + b \cos. x}$ zu finden, wo $a > b$ ist, sey $x = 2 \,\text{arc. tang.}\, z$, woraus folgt $z = \text{tang.} \frac{1}{2} x$, so daß also den beyden Gränzen $x = 0$ und π die anderen $z = 0$ und ∞ entsprechen. Sucht man daraus $\sin.\frac{x}{2}$ und $\cos.\frac{x}{2}$, und bemerkt, daß man hat

$$\cos.x = \cos.^2\frac{x}{2} - \sin.^2\frac{x}{2}, \text{ so ist auch } \cos.x = \frac{1-z^2}{1+z^2},$$

und daher

$$\frac{1}{a+b\cos.x} = \frac{1+z^2}{a+b+(a-b)z^2}.$$

Dieß vorausgesetzt, hat man für das gesuchte allgemeine Integral

$$y = \int\frac{dz}{a+b+(a-b)z^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\text{ arc. tang. } z\sqrt{\frac{a-b}{a+b}},$$

und wenn man dieses Integral zwischen den Gränzen o und ∞ nimmt, so erhält man

$$\int_0^\pi \frac{dx}{a+b\cos.x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

IV. Um das begränzte Integral $y = \int_0^\infty \frac{dx}{x}.\sin.x$ zu finden, hat man (nach §. 240, III.)

$$\int_0^\infty \frac{\sin.x}{x}.dx = \int_0^\pi \frac{\sin.x}{x}dx + \int_\pi^{2\pi}\frac{\sin.x}{x}dx + \int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin.x}{x}dx + \ldots$$

also auch (nach §. 240, V.)

$$\int_0^\infty \frac{\sin.x}{x}.dx$$

$$= \int_0^\pi dx\left[\frac{\sin.x}{x} + \frac{\sin.(\pi+x)}{x} + \frac{\sin.(2\pi+x)}{x} + \ldots\right],$$

oder, was dasselbe ist

$$\int_0^\infty \frac{\sin.x}{x}.dx$$

$$= \int_0^\pi dx.\sin.x\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{2\pi+x} + \frac{1}{4\pi+x} + \frac{1}{6\pi+x} + \right]$$

$$- \int_0^\pi dx\sin.x\left[\frac{1}{\pi+x} + \frac{1}{3\pi+x} + \frac{1}{5\pi+x} + \ldots\right].$$

Statt dem zweyten Gliede dieses Ausdruckes kann man aber auch (nach §. 240, VI.) schreiben

$$-\int_0^\pi dx\ \sin.x\left[\frac{1}{2\pi-x}+\frac{1}{4\pi-x}+\frac{1}{6\pi-x}+\right],$$

so daß man daher hat

$$\int_0^\infty \frac{\sin.x}{x}\,.\,dx$$

$$=\int_0^\pi dx\sin.x\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{2\pi-x}+\frac{1}{2\pi+x}-\frac{1}{4\pi-x}+\frac{1}{4\pi+x}-\frac{1}{6\pi-x}+\ldots\right].$$

Man hat aber die bekannte Reihe (*Euler* introd. in anal. infinit. Vol. I. §. 171)

$$\frac{\pi}{2n}\tan g.\frac{m\pi}{2n}$$

$$=\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m}+\frac{1}{3n-m}-\frac{1}{3n+m}+\frac{1}{5n-m}-\frac{1}{5n+m}+\ldots\text{*)}.$$

Setzt man hier $n=\pi$ und $m=\pi-x$, so erhält man

$$\tfrac{1}{2}\,\text{cotang.}\,\frac{x}{2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\pi-x}+\frac{1}{2\pi+x}-\frac{1}{4\pi-x}+\ldots$$

so daß man daher hat

$$\int_0^\infty \frac{\sin.x}{x}\,.\,dx=\tfrac{1}{2}\int_0^\pi \sin.x\ \text{cotang.}\,\frac{x}{2}\,.\,dx$$

$$=\int_0^\pi \cos.^2\frac{x}{2}\,.\,dx=\tfrac{1}{2}\int_0^\pi(1+\cos.x)\,.\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

Setzt man endlich nx statt x, wo n irgend eine positive Zahl bezeichnet, so ist auch

$$\int_0^\infty \frac{\sin.nx}{x}\,.\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

---

*) Man erhält diese Reihe durch die Integration des Ausdruckes

$$y=\int\frac{(x^{n-m-1}-x^{m+n-1})\,dx}{1-x^{2n}},$$

wenn man $\frac{1}{1-x^{2n}}=1+x^{2n}+x^{4n}+x^{6n}+$ setzt und dann die Integrale der einzelnen Glieder zwischen den Gränzen $x=0$ und $x=1$ nimmt.

§. 246. (Integral $\int_0^\infty \frac{\cos. rx}{m^2+x^2}.\, dx = \frac{\pi}{2m}.\, e^{-mr}$). Sey $u = \int \frac{\cos. rx}{1+x^2} dx$, so ist auch, wenn man den Bruch $\frac{1}{1+x^2}$ nach den negativen Potenzen von x^2 entwickelt,

$$u = \int \frac{\cos. rx}{x^2} dx - \int \frac{\cos. rx}{x^4} dx + \int \frac{\cos. rx}{x^6} dx - \ldots$$

Allein durch theilweise Integration erhält man leicht

$$\int \frac{\cos. rx}{x^h} dx = -\frac{\cos. rx}{(h-1)x^{h-1}} - \frac{r}{h-1}\int \frac{\sin. rx}{x^{h-1}} dx \quad \text{und}$$

$$\int \frac{\sin. rx}{x^k} dx = -\frac{\sin. rx}{(k-1)x^{k-1}} + \frac{r}{k-1}\int \frac{\cos. rx}{x^{k-1}} dx,$$

und daher auch, durch wiederholte Substitution,

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos. rx}{x^{2n}}.\, dx = \sin. rx &\left[\frac{r}{2n-1.2n-2.x^{2n-2}} - \frac{r^3}{2n-1 \ldots 2n-4\; x^{2n-4}} + \ldots \right.\\ &\qquad \left. \pm \frac{r^{2n-3}}{2n-1 \ldots 3.2.1.x^2}\right]\\ -\cos. rx &\left[\frac{1}{(2n-1)x^{2n-1}} - \frac{r^2}{2n-1.2n-2.2n-3.x^{2n-3}} + \ldots \right.\\ &\qquad \left. \mp \frac{r^{2n-2}}{2n-1 \ldots 3.2.1.x}\right]\\ &\pm \frac{r^{2n-1}}{2n-1.2n-2 \ldots 3.2.1.}\int \frac{\sin. rx}{x} dx,\end{aligned}$$

wo das obere oder untere Zeichen genommen wird, wenn n gerade oder ungerade ist.

Dieß vorausgesetzt, suchen wir zuerst den Werth von u für den Fall $x = \infty$.

Für diesen Fall verschwinden aber in dem erhaltenen Ausdrucke von $\int \frac{\cos. rx}{x^{2n}} dx$ alle Glieder bis auf das letzte, so daß man für $n = 1.2.3\ldots$ erhält

$$\int \frac{\cos. rx}{x^2} dx = -r\int \frac{\sin. rx}{x} dx,$$

$$\int \frac{\cos. rx}{x^4} dx = \frac{r^3}{1.2.3}\int \frac{\sin. rx}{x} dx,$$

$$\int \frac{\cos rx}{x^6} dx = -\frac{r^5}{1.2\ldots 5}\int \frac{\sin. rx}{x} dx \quad \text{u. s. w.}$$

Demnach ist der Werth von

$$u = \int \frac{\cos. r x}{1 + x^2} dx$$

für den Fall $x = \infty$

$$u' = -\left[r + \frac{r^3}{1.2.3} + \frac{r^5}{1.2\ldots5} + \frac{r^7}{1.2\ldots7} + \ldots\right] \int \frac{\sin. r x}{x} dx.$$

Allein da

$$r + \frac{r^3}{1.2.3} + \frac{r^5}{1.2\ldots5} + = \tfrac{1}{2}(e^r - e^{-r})$$

und (nach §. 245, IV.)

$$\int \frac{\sin. r x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

ist, so ist auch

$$u' = -\frac{\pi}{4}(e^r - e^{-r}).$$

I. Suchen wir nun eben so den Werth u'' von u für $x = 0$, oder, was dasselbe ist, für $z = \infty$, wenn man $x = \frac{1}{z}$ setzt.

Unter dieser Voraussetzung wird

$$u = \int \frac{\cos. \frac{r}{z}}{1 + z^2} dz$$

$$= \int \frac{dz}{1 + z^2} - \frac{r^2}{2} \int \frac{dz}{z^2(1 + z^2)} + \frac{r^4}{2.3.4} \int \frac{dz}{z^4(1 + z^2)} - \ldots$$

und da man durch die Zerfällung der Brüche (§. 139) erhält

$$\frac{1}{z^{2n}(1 + z^2)} = \frac{1}{z^{2n}} - \frac{1}{z^{2n-2}} + \frac{1}{z^{2n-4}} - \ldots \mp \frac{1}{z^2} \pm \frac{1}{1 + z^2},$$

das obere oder untere Zeichen, wenn n gerade oder ungerade ist, so hat man auch

$$\int \frac{dz}{z^{2n}(1 + z^2)}$$

$$= -\frac{1}{(2n-1)z^{2n-1}} + \frac{1}{(2n-3)z^{2n-3}} - \frac{1}{(2n-5)z^{2n-5}} + \ldots$$

$$\pm \frac{1}{z} \pm \text{arc. tang. } z.$$

Da nun auch in diesem Ausdrucke für $z = \infty$ alle Glieder verschwinden, bis auf das letzte, welches gleich arc. tang. $\infty = \frac{\pi}{2}$ wird, so hat man

$$\int\frac{dz}{1+z^2}=\frac{\pi}{2},\quad -\frac{r^2}{2}\int\frac{dz}{z^2(1+z^2)}=\frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$\frac{r^4}{2.3.4}\int\frac{dz}{z^4(1+z^2)}=\frac{r^4}{2.3.4}\cdot\frac{\pi}{2}\text{ u. s. w.,}$$

also ist auch der Werth von

$$u=\int\frac{\cos.\frac{r}{z}}{1+z^2}dz=\int\frac{\cos.rx}{1+x^2}dx$$

für $z=\infty$ oder $x=0$

$$u''=\left(1+\frac{r^2}{2}+\frac{r^4}{2.3.4}+\ldots\right)\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}(e^r+e^{-r}).$$

Berücksichtiget man also beyde Gränzen $x=\infty$ und $x=0$, so hat man

$$\int_0^\infty\frac{\cos.rx}{1+x^2}dx=u'+u''=\frac{\pi}{2}\cdot e^{-r},$$

also auch, wenn man in diesem Ausdruck $\frac{x}{m}$ statt x setzt,

$$\int_0^\infty\frac{\cos.\frac{rx}{m}}{m^2+x^2}dx=\frac{\pi}{2m}e^{-r},$$

und daher auch, wenn man r in mr verwandelt,

$$\int_0^\infty\frac{\cos.rx}{m^2+x^2}dx=\frac{\pi}{2m}e^{-mr}.$$

§. 247. (**Differentiation und Integration dieser Ausdrücke.**) Da ein begränztes Integral, gleich seinem Werthe gesetzt, eigentlich eine identische Gleichung bildet, so kann man auch mit diesen Integralen eben so, wie mit allen identischen Gleichungen verfahren. Wenn eine solche Gleichung zwischen mehreren Größen gegeben ist, so sind mit ihr zugleich auch alle Differential- und Integral-Gleichungen gegeben, die man aus jener ersten, in Beziehung auf irgend eine in ihr enthaltene Größe ableiten kann, selbst wenn diese Größe früher als eine Constante betrachtet worden ist. Durch dieses Verfahren lassen sich aus jedem gegebenen begränzten Integral unzählige andere ableiten, wie wir sogleich an einigen Beyspielen sehen werden.

I. In der letzten Gleichung des §. 246 wurden die Größen m und r als constant angenommen. Dieß hindert aber nicht, diese Gleichung in Beziehung auf die eine oder die andere dieser beyden Größen zu differentiiren. Thut man dieß, z. B. in Beziehung auf r, so hat man

$$\int_0^\infty \frac{x \sin. r x}{m^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-mr},$$

und diese Gleichung ist eben so richtig, als die, aus welcher sie abgeleitet worden ist. Für den besonderen Fall $m = 1$ geben beyde Gleichungen

$$\int_0^\infty \frac{\cos. r x}{1 + x^2} dx = \int_0^\infty \frac{x \sin. r x}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-r}.$$

II. Wie im Vorhergehenden die Differentiation, so läßt sich auch die Integration auf diese Ausdrücke anwenden. So ist, wie man sogleich sieht,

$$\int_0^1 x^{m-1} dx = \frac{1}{m}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung durch dm, so hat man

$$\int_0^1 dx \,.\, x^{m-1} dm = \frac{m}{dm}.$$

Integrirt man dann diesen Ausdruck in Beziehung auf die Variable m, so erhält man, da bekanntlich $\int a^{m-1} dm = \frac{a^{m-1}}{\log. a}$ ist,

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}}{\log. x} \,.\, dx = \log. m + \text{Const.}$$

Um diese Constante der Integration zu bestimmen, hat man für $m = 1$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\log. x} = \text{Const.},$$

also ist auch

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1} - 1}{\log. x} \,.\, dx = \log. m.$$

III. Nach §. 243, I. hatten wir

$$\int_0^\infty e^{-bx} \cos. a x \,.\, dx = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung durch da, so ist

$$\int_0^\infty dx \,.\, e^{-bx} \cos. a x \,.\, da = \frac{b\, da}{a^2 + b^2},$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wovon das Integral in Beziehung auf a ist,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-bx} \sin. a x}{x} dx = b \text{ arc. tang. } \frac{a}{b},$$

wo die Constante der Integration gleich Null ist, da der Ausdruck für $a = 0$ verschwindet.

Ganz eben so gibt auch die zweyte der in §. 243, I. angeführte Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{e^{-bx} \cos. a x}{x} dx = -\tfrac{1}{2} \log. (a^2 + b^2) + C.$$

Da die Constante C der Integration die Größe a nicht enthalten kann, weil cos. a x an den beyden Gränzen von a unabhängig ist, so kann man c statt a setzen, wodurch man erhält

$$\int_0^\infty \frac{e^{-bx} \cos. c x}{x} = -\tfrac{1}{2} \log. (c^2 + b^2) + C.,$$

und da in den beyden letzten Ausdrücken die Größe C denselben Werth haben muß, so ist auch

$$\int_0^\infty e^{-bx} \frac{\cos. a x - \cos. c x}{x} = \tfrac{1}{2} \log. \frac{b^2 + c^2}{b^2 + a^2}.$$

Da wir diesen Gegenstand, des Mangels an Raum wegen, nicht weiter verfolgen können, so wird es genügen, einige der vorzüglichsten auf diesem Wege erhaltenen Resultate anzuführen.

$$\int_0^\infty \frac{x \sin. r x . dx}{(m^2 + x^2)(1 \pm 2 p \cos. r x + p^2)} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{e^{mr} \pm p},$$

$$\int_0^\infty \frac{\log. (1 \pm 2 p \cos. r x + p^2)}{m^2 + x^2} . dx = \frac{\pi}{m} \log (1 \pm p e^{-mr}),$$

$$\int_0^\infty \frac{\log. \sin. r x}{m^2 + x^2} . dx = \frac{\pi}{2m} \log. \left(\frac{1 - e^{-2mr}}{2}\right),$$

$$\int_0^\infty \frac{\log. \cos. r x}{m^2 + x^2} . dx = \frac{\pi}{2m} \log. \frac{1 + e^{-2mr}}{2},$$

$$\int_0^\infty \frac{\log. \text{tang. } r x}{m^2 + x^2} . dx = \frac{\pi}{2m} \log. \frac{e^{2mr} - 1}{e^{2mr} + 1},$$

$$\int_0^\infty \frac{x \text{ cotang. } r x}{m^2 + x^2} . dx = \frac{\pi}{e^{2mr} - 1},$$

$$\int_0^\infty \frac{x \tan g. r x}{m^2 + x^2} . dx = \frac{\pi}{e^{2mr} + 1},$$

$$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{cosec.} r x}{m^2 + x^2} . dx = \frac{\pi}{e^{mr} - e^{-mr}},$$

$$\int_0^\infty \frac{z^2 . dz}{1 + z^4} = \int_0^\infty \frac{dz}{1 + z^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

$$\int_0^\infty \cos.^2 x . dx = \int_0^\infty \sin.^2 x . dx = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\int_{-\infty}^\infty \cos.^2 ax \cos. bx . dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} . \sin. \tfrac{1}{4}\left(\pi + \frac{b^2}{a}\right),$$

$$\int_{-\infty}^\infty \sin.^2 ax \cos. bx . dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} . \sin. \tfrac{1}{4}\left(\pi - \frac{b^2}{a}\right) \text{ u. s. w.}$$

IV. Das vorhergehende Verfahren läßt sich, wie es scheint, nur auf solche begränzte Integrale anwenden, die wenigstens eine unbestimmte Constante enthalten. Allein bey einer näheren Betrachtung des Gegenstandes fällt diese Beschränkung weg, da man, wenn das Integral keine unbestimmte Constante enthält, eine solche willkürlich einführen kann. Wenn z. B. der Ausdruck gegeben wäre

$$\int_0^\infty fx . dx,$$

dessen Werth gleich A seyn soll, so hat man, wenn man die unbestimmte Gränze m einführt, nach §. 240, I.,

$$\int_0^m fx . dx + \int_m^\infty fx . dx = A.$$

Setzt man dann in dem ersten dieser Integrale $x = mz$ und in dem zweyten $x = \frac{m}{z}$, so erhält man

$$\int_0^1 \left[f(mx) + \frac{1}{x^2} f\left(\frac{m}{x}\right) \right] dx = \frac{A}{m},$$

und da dieser Ausdruck die unbestimmte Größe m enthält, so können aus ihm, wie zuvor, viele andere abgeleitet werden, wie z. B.:

$$\int_0^1 \left[x\varphi(mx) + \frac{1}{x^3} \varphi\left(\frac{m}{x}\right) \right] dx = -\frac{A}{m^2} \text{ u. s. f.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 248. **(Bestimmung dieser Integrale durch Differentialgleichungen.)** Im Vorhergehenden haben wir, durch Differentiation oder Integration in Beziehung auf eine Constante irgend eines bereits bekannten Integrals, mehrere andere Integrale abzuleiten gelehrt. Allein selbst wenn das gegebene Integral noch unbekannt ist, läßt sich dasselbe, durch Differentiation der Constanten, auf eine Differentialgleichung zurückführen, die dann, wenn man sie integrirt, den gesuchten Werth des gegebenen Integrals gibt. Sey z. B. das unbekannte begränzte Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin. ax}{x(m^2+x^2)} dx$$

gegeben, welches wir der Kürze wegen y nennen wollen. Differentiirt man diese Gleichung

$$y = \int_0^\infty \frac{\sin. ax}{x(m^2+x^2)} dx$$

in Beziehung auf a, so erhält man

$$\left(\frac{dy}{da}\right) = \int_0^\infty \frac{\cos. ax}{m^2+x^2} dx.$$

Allein nach §. 246 hat man

$$\int_0^\infty \frac{\cos. ax}{m^2+x^2} dx = \frac{\pi}{2m} e^{-ma},$$

also ist auch

$$\left(\frac{dy}{da}\right) = \frac{\pi}{2m} e^{-ma}.$$

Integrirt man diese Gleichung in Beziehung auf a, so erhält man

$$y = -\frac{\pi}{2m^2} e^{-ma} + C.$$

Die Constante der Integration aber wird dadurch bestimmt, daß, nach der gegebenen Gleichung, die Größe y zugleich mit a verschwinden soll, wodurch man erhält $C = \frac{\pi}{2m^2}$, so daß daher das gesuchte Integral seyn wird

$$\int_0^\infty \frac{\sin. ax}{x(m^2+x^2)} dx = \frac{\pi}{2m^2}(1-e^{-ma}).$$

I. Auch die Integration der partiellen Differentialgleichungen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

läßt sich auf dieselbe Weise anwenden. Ist z. B. das Integral zu suchen

$$y = \int_\alpha^\beta dx \,.\, e^{-b\varphi x} \cos . a\varphi x \,.\, \psi x,$$

wo φx und ψx zwey willkürliche Funktionen von x und wo a und b unbestimmte Constanten bezeichnen, so hat man, wenn man die gegebene Gleichung zweymal in Beziehung auf a und auf b differentiirt,

$$\left(\frac{d^2 y}{d a^2}\right) = - \int_\alpha^\beta dx \,.\, e^{-b\varphi x} \cos . a\varphi x \,.\, (\varphi x)^2 \psi x,$$

$$\left(\frac{d^2 y}{d b^2}\right) = \int_\alpha^\beta dx \,.\, e^{-b\varphi x} \cos . a\varphi x \,.\, (\varphi x)^2 \psi x.$$

Addirt man diese beyden Ausdrücke, so ist

$$\left(\frac{d^2 y}{d a^2}\right) + \left(\frac{d^2 y}{d b^2}\right) = 0,$$

und von der letzten Gleichung ist das Integral

$$y = f(b + a\sqrt{-1}) + F(b - a\sqrt{-1}),$$

wo wieder f und F zwey willkürliche Funktionen bezeichnen.

Das Vorhergehende wird hinreichen, die Wichtigkeit dieses Gegenstandes zu erkennen. Weitere Belehrungen darüber findet man in: *Lacroix*, Traité du calcul. Vol. III. *Legendre*, Exercices de Calc. Integr. *Cauchy*, Exercices de Mathématiques; *Poisson*, Journal Polytechnique. Vol. XIX. und *Piola* in Opuscoli mat. e fisici. Milano 1832. Vol. I.

XL.

Prinzipien der Differenzen-Rechnung.

§. 249. **(Allgemeine und summatorische Glieder der Reihen durch die Differenzen der einzelnen Glieder.)** In der Differentialrechnung haben wir die Veränderung der Funktionen bloß in Beziehung auf die Form gesucht, welche diese Veränderungen, in den verschiedenen Gliedern ihrer Entwickelung, annehmen, ohne auf die Größe, auf den eigentlichen Werth dieser Veränderungen, zu sehen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es sey nun u irgend eine Funktion von x, die für $x = x + h$ in u_1, für $x = x + 2h$ in u_2, für $x = x + 3h$ in u_3 u. s. f. übergeht, so daß man die Reihe hat

$$u,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4 \ldots u_n \ldots$$

Nehmen wir die Differenzen der nächstfolgenden Glieder dieser Reihe, und von diesen Differenzen wieder die Differenzen u. s. w., und setzen wir der Kürze wegen (analog mit §. 87)

$$\begin{aligned}
u_1 - u &= \Delta u\,,\\
u_2 - u_1 &= \Delta u_1\,,\\
u_3 - u_2 &= \Delta u_2\,,\\
&\ldots\ldots\\
u_n - u_{n-1} &= \Delta u_n\,,\\
\Delta u_1 - \Delta u &= \Delta^2 u\,,\\
\Delta u_2 - \Delta u_1 &= \Delta^2 u_1\,,\\
\Delta u_3 - \Delta u_2 &= \Delta^2 u_2\,,\\
&\ldots\ldots\\
\Delta u_n - \Delta u_{n-1} &= \Delta^2 u_{n-1}\,,\\
\Delta^2 u_1 - \Delta^2 u &= \Delta^3 u\,,\\
\Delta^2 u_2 - \Delta^2 u_1 &= \Delta^3 u_1\,,\\
\Delta^2 u_3 - \Delta^2 u_2 &= \Delta^3 u_2\,,\\
&\ldots\ldots\\
\Delta^2 u_{n-1} - \Delta^2 u_{n-1} &= \Delta^3 u_n\,.
\end{aligned}$$

I. Dieß vorausgesetzt, erhält man durch eine einfache Substitution der letzten Ausdrücke in einander

$$\begin{aligned}
u_2 &= u + 2\Delta u + \Delta^2 u,\\
u_3 &= u + 3\Delta u + 3\Delta^2 u + \Delta^3 u \quad \text{u. f.}
\end{aligned}$$

Man bemerkt hier sogleich die Form des Binoms, daher man durch Analogie erhält,

$$u_n = u + n\Delta u + \frac{n.n-1}{1.2}\Delta^2 u + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\Delta^3 u + \ldots \text{(I.)}$$

so daß man also für jedes Glied der obigen Reihe einen Ausdruck erhält, der bloß von dem ersten Gliede u und von den Differenzen Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$ ... der übrigen Glieder abhängt.

Eben so erhält man durch eine ähnliche Substitution

$$\begin{aligned}
\Delta u &= u_1 - u,\\
\Delta^2 u &= u_2 - 2u_1 + u,\\
\Delta^3 u &= u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u \quad \text{u. f.,}
\end{aligned}$$

und daher wieder durch Analogie, wie wir auch schon oben (§. 87) gefunden haben,

$$\Delta^n u = u_n - n u_{n-1} + \frac{n.n-1}{1.2} u_{n-2} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} u_{n-3} + \ldots \text{(II.)}$$

so daß man also die Differenz $\Delta_n u$ irgend einer Ordnung n bloß durch diejenigen Glieder der anfangs gegebenen Reihe ausdrücken kann, die zur Bildung dieser Differenz $\Delta_n u$ gebraucht worden sind.

Eben so ist endlich die Summe der beyden ersten Glieder der gegebenen Reihe

$$S = u + u_1 = 2u + \Delta u,$$

die der drey ersten Glieder

$$S_2 = u + u_1 + u_2 = 3u + 3\Delta u + \Delta^2 u$$

u. s. w., also wieder analog die Summe S_n der n ersten Glieder

$$u + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

$$S_n = (n+1)n + \frac{n+1.n}{1.2} \Delta u + \frac{n+1.n.n-1}{1.2.3} \Delta^2 u + \ldots \text{(III.)}$$

Man kann diese Reihen einfacher ausdrücken, und zwar die Reihe (I.) durch

$$u_n = (1 + \Delta u)^n,$$

und die Reihe (II.) durch

$$\Delta^n u = (u - 1)^n,$$

vorausgesetzt, daß man in der Entwickelung dieser Binome statt der Exponentialgröße Δu^n und u^n den Index $\Delta^n u$ und u_n setzt.

II. Ist z. B. $u = x^m$, also auch

$$u_1 = (x+h)^m, \quad u_2 = (x+2h)^m \ldots u_n = (x+nh)^m,$$

und daher die Reihe (II.)

$$\Delta^n u = [x+nh]^m - n[x+(n-1)h]^m + \frac{n.n-1}{1.2}[x+(n-2)h]^m$$
$$- \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}[x+(n-3)h]^m + \ldots$$

Für ein anderes spezielles Beyspiel sey

$$u = 1, \quad u_1 = 2^3, \quad u_2 = 3^3, \quad u_3 = 4^3 \ldots$$

also die Reihe gegeben

1 8 27 64 125 . . .

mit ihren Differenzen

$$\begin{array}{ccccccc} 7 & & 19 & & 37 & & 61 \\ & 12 & & 18 & & 24 & \\ & & 6 & & 6 & & \end{array}$$

so ist $u = 1$, $\Delta u = 7$, $\Delta^2 u = 12$, $\Delta^3 u = 6$, und daher, wenn man $n = 3$ setzt,

die Reihe (I.) $u_3 = 1 + 21 + 36 + 6 = 64$,
» » (II.) $\Delta^3 u = 64 - 81 + 24 - 1 = 6$,
» » (III.) $S_3 = 4 + 42 + 48 + 6 = 100$.

§. 250. (**Interpolation der Reihen.**) Nimmt man an, daß von einer gegebenen Reihe die auf einander folgenden Differenzen Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$ ... immer kleiner werden, was sehr oft der Fall ist, so kann man den Ausdruck (I.) des §. 249 auch anwenden, um die Zwischenglieder der gegebenen Reihe, für welche nämlich n irgend ein Bruch ist, zu finden. Um z. B. in der letzten Reihe das Glied zu finden, welches in der Mitte zwischen 27 und 64 liegt, ist $n = \frac{5}{2}$, und mit diesem Werthe von n gibt die Reihe (I.) den gesuchten Werth dieses Gliedes $u_{\frac{5}{2}} = 42.875$. Man nennt dieß: die gegebene Reihe interpoliren, und man sieht, welchen Nutzen dieses Verfahren bey der Construction von Tabellen u. s. gewähren kann.

Sind die Glieder der gegebenen Reihe nicht äquidistant, wie zuvor, sondern weiß man z. B. nur, daß für die Größen $x = 0, 1, 3$ und 7 die Werthe $u = 1$, 2.11, 5.25 und 18.73 gehören, so kann man annehmen

$$u = a + bx + cx^2 + dx^3,$$

wo offenbar $a = 1$ ist. Substituirt man in diesem Ausdrucke für x die Werthe 1, 3 und 7, so erhält man die Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} 1.11 &= b + c + d, \\ 4.25 &= 3b + 9c + 27d, \\ 17.73 &= 7b + 49c + 343d, \end{aligned}$$

woraus folgt $b = 1.01952$, $c = 0.06953$ und $d = 0.02095$, so daß man für das gesuchte allgemeine Glied hat

$$u = 1 + 1.01952\,x + 0.06953\,x^2 + 0.02095\,x^3.$$

Der letzte Ausdruck gibt

für $x = 2$ den Werth von $u = 3.48$,
» $x = 4$ » » » $u = 7.53$,
» $x = 5$ » » » $u = 10.45$ u. f.

welche Werthe von u aber nur annähernd richtig sind, da der wahre Ausdruck, aus welchem die obigen Zahlen 2.11, 5.25 und 18.73 abgeleitet wurden, ist

$$u = 1 + x + \frac{x^2}{10} + \frac{x^3}{100} + \frac{x^4}{1000}.$$

I. Man sieht daraus, daß das Problem der Interpolation ein unbestimmtes ist, so lange die eigentliche Form der Reihe nicht bekannt ist, und die gegebenen Bedingungen nicht hinreichen, alle Glieder derselben zu bestimmen. Dasselbe geht auch aus demjenigen Interpolations-Ausdruck hervor, den wir oben (im Eingange des §. 161) gegeben haben, wo für $x = o, a, b \ldots$ der entsprechende Werth von $u = A, B, C \ldots$ angenommen worden ist. Denn man sieht, daß man statt der a. a. O. angenommenen Reihe auch die folgende hätte setzen können

$$u = \frac{(x-a)^m (x-b)^n (x-c)^n \ldots}{a^m b^n c^n \ldots} A + \frac{x(x-b)(x-c)\ldots}{a(a-b)(a-c)\ldots} B + \ldots$$

oder auch

$$u = \frac{\sin. m(x-a) \sin. n(x-b) \sin. p(x-c) \ldots}{\sin. ma \sin. nb \sin. pc \ldots} A$$
$$+ \frac{\sin. mx \sin. n(x-b) \sin. p(x-c) \ldots}{\sin. ma . \sin. n(a-b) \sin. p(a-c) \ldots} B + \ldots$$

da auch diese Formen den aufgestellten Bedingungen genug thun. Die Wahl dieser Form ist in vielen Fällen von großer Wichtigkeit. Wenn sich in den gegebenen Bedingungen wiederkehrende Perioden zeigen, so wird man Ausdrücke der Art

$$u = a + b \cos. x + c \sin. x + b' \cos. 2x + c' \sin 2x + \ldots$$

oder

$$u = \alpha + \beta \cos.(mx + n) + \beta' \cos.(m'x + n') + \ldots$$

oft sehr angemessen finden u. s. w.

§. 251. (Analogie der Differenzen mit den Potenzen. Wenn in der Funktion $u = fx$ die Stammgröße x in $x + h$ übergeht, so hat man, nach Taylor's Theorem,

$$u' = u + h\frac{du}{dx} + \frac{h^2}{1.2}\frac{d^2u}{dx^2} + \ldots$$

oder da $u' - u = \Delta u$ ist, die Größe Δu in der Bedeutung des §. 249 genommen,

$$\Delta u = h\frac{du}{dx} + \frac{h^2}{1.2}\frac{d^2u}{dx^2} + \ldots$$

Nach dem Vorhergehenden aber hat man auch, wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet,

$$e^x - 1 = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

oder, wenn man $x = h\frac{du}{dx}$ setzt,

$$e^{h\frac{du}{dx}} - 1 = h\frac{du}{dx} + \frac{h^2}{1.2}\frac{du^2}{dx^2} + \frac{h^3}{1.2.3}\frac{du^3}{dx^3} + \ldots$$

Setzt man daher wieder, der Kürze wegen, d^nu statt du^n, so hat man

$$\Delta u = e^{h\frac{du}{dx}} - 1,$$

und daher auch, wenn man dieselbe Versetzung der Zeichen d^nu und du^n beybehält,

$$\Delta^n u = \left(e^{h\frac{du}{dx}} - 1\right)^n.$$

Nimmt man von diesen beyden Ausdrücken die Logarithmen, so ist

$$h\,.\frac{du}{dx} = \log.(1 + \Delta u) \quad \text{und} \quad h^n\,.\frac{d^nu}{dx^n} = [\log.(1 + \Delta u)]^n,$$

wenn man auch hier Δu^n in $\Delta^n u$ verwandelt.

§. 252. (Summationen.) Ist $u = ax + b$, wo a und b constante Größen vorstellen, so ist nach der vorhergehenden Bezeichnung

$$\Delta u = a(x + h) + b - ax - b \text{ oder}$$
$$\Delta u = ah.$$

Da demnach Δh die Differenz von $ax + b$ ist, so kann auch umgekehrt $ax + b$ die Summe von ah genannt werden. Wählt man daher für diese Summe das Zeichen Σ, so hat man

$$ax + b = \Sigma ah \quad \text{oder} \quad a\Sigma h = ax + b,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

oder endlich

$$\Sigma h = x + \frac{b}{a},$$

wo man für $\frac{b}{a}$ irgend eine Constante C setzen kann, so daß man also hat

$$\Sigma h = x + \text{Const.}$$

Ist aber $u = x^m$, so ist auch

$$\Delta x^m = (x + h)^m - x^m,$$

woraus man für $m = 1, 2, 3, \ldots$ erhält

$$\Delta x = h,$$
$$\Delta x^2 = 2hx + h^2,$$
$$\Delta x^3 = 3hx^2 + 3h^2x + h^3, \text{ u. s. w.}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt durch Reversion $\Sigma h = x$, oder eigentlich, nach dem Vorhergehenden, $\Sigma h = x + \text{Const.}$, welche Constante wir künftig bey jeder durch Σ ausgedrückten Summation als schon hinzugefügt voraussetzen wollen. Da übrigens

$$\Sigma h = \Sigma h \,.\, 1 = h \Sigma 1$$

ist, so hat man auch

$$\Sigma 1 = \frac{x}{h}.$$

Eben so gibt die zweyte jener Gleichungen

$$\Sigma(2hx + h^2) = x^2, \quad \text{oder}$$
$$2h\Sigma x + h^2\Sigma 1 = x^2, \quad \text{oder}$$
$$\Sigma x = \frac{x^2}{2h} - \frac{x}{2},$$

und auf dieselbe Weise

$$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3h} - \frac{x^2}{2} + \frac{hx}{6},$$
$$\Sigma x^3 = \frac{x^4}{4h} - \frac{x^3}{2} + \frac{hx^2}{4},$$
$$\Sigma x^4 = \frac{x^5}{5h} - \frac{x^4}{2} + \frac{hx^3}{3} - \frac{h^3x}{30} \quad \text{u. s. w.}$$

Statt diese Ausdrücke weiter fortzusetzen, nehme man allgemein an

$$\Sigma x^m = A x^{m+1} + B x^m + C x^{m-1} + D x^{m-2} + \ldots$$

Nimmt man von jedem Gliede dieser Reihe die erste Differenz, so erhält man

$$x^m = A(m+1)x^m + \frac{A}{1.2}(m+1)m \,.\, x^{m-1}h^2$$
$$+ \frac{A}{1.2.3}(m+1)m(m-1)\,.\,x^{m-2}h^3 + \ldots$$
$$+ Bm \,.\, x^{m-1}h$$
$$+ \frac{B}{1.2}m(m-1)\,.\,x^{m-2}h^2 + \ldots$$
$$+ C(m-1)\,.\,x^{m-2}h + \ldots$$

Setzt man die Faktoren einer jeden Potenz von x gleich Null, so erhält man nach einigen Reduktionen

$$A = \frac{1}{(m+1)h},$$
$$B = -\frac{A}{1.2}(m+1)h,$$
$$C = -\frac{A}{1.2.3}(m+1)mh^2 - \frac{B}{1.2}\,.\,mh \quad \text{u. s.,}$$

und wenn man dieß weiter fortsetzt, so findet man endlich

$$\Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)h} - \tfrac{1}{2}x^m + \frac{mhx^{m-1}}{2^2.3} - \frac{m.m-1.m-2\,h^3x^{m-3}}{2^4.3^2.5}$$
$$+ \frac{m.m-1\ldots m-4.h^5.x^{m-5}}{2^5.3^2.5.7} - \frac{m.m-1\ldots m-6.h^7.x^{m-7}}{2^8.3^2.5^2.7}$$
$$+ \frac{m.m-1\ldots m-8.h^9.x^{m-9}}{2^9.3^5.5.7.11}$$
$$- \frac{691\,m.m-1\ldots m-10.h^{11}.x^{m-11}}{2^{11}.3^6.5^3.7^2.11.13}$$
$$+ \frac{m.m-1\ldots m-12.h^{13}.x^{m-13}}{2^{12}.3^4.5^2.7^2.11.13}$$
$$- \frac{3617\,m.m-1\ldots m-14.h^{15}.x^{m-15}}{2^{16}.3^7.5^4.7^2.11.13.17} + \ldots$$

Dieser Ausdruck gibt das Mittel, die Summation aller algebraischen, ganzen und rationellen Ausdrücke zu finden. So hat man z. B., wenn der Kürze wegen $h = 1$ gesetzt wird,

$$\Sigma(x^3 - 5x^2 + 6x - 1)$$
$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4}\right) - 5\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}\right) + 6\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right) - x,$$

oder

$$\Sigma(x^3 - 5x^2 + 6x - 1)$$
$$= \frac{1}{12}(3x^4 - 26x^3 + 69x^2 - 58x) + \text{Const.}$$

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

I. Eben so hat man für Exponentialgrößen

$$\Delta \,.\, a^x = a^x (a^h - 1),$$

also auch

$$a^x = \Sigma a^x (a^h - 1),$$

woraus folgt:

$$\Sigma a^x = \frac{a^x}{a^h - 1}.$$

II. Für trigonometrische Funktionen ist z. B.:

$$\Delta \cos. x = \cos. (x + h) - \cos. x = -2 \sin. \frac{h}{2} \sin. \left(x + \frac{h}{2}\right),$$

also auch, wenn man $x - \frac{h}{2}$ statt x schreibt:

$$\sin. x = -\frac{\Delta \cos. \left(x - \frac{h}{2}\right)}{2 \sin. \frac{h}{2}},$$

und daher durch Reversion:

$$\Sigma \sin. x = -\frac{\cos. \left(x - \frac{h}{2}\right)}{2 \sin. \frac{h}{2}},$$

und eben so erhält man auch

$$\Sigma \cos. x = \frac{\sin. \left(x - \frac{h}{2}\right)}{2 \sin. \frac{h}{2}}.$$

Man bemerkt von selbst die Analogien dieses Calculs mit der Differential- und Integralrechnung.

§. 253. (**Summation auf einander folgender Produkte.**) Sey $u = x (x + h) (x + 2h) \ldots [x + (m - 1) h]$ gegeben. Nimmt man davon die Differenz, so ist

$$\Delta u = (x + h)(x + 2h) \ldots (x + mh) - x (x + h) \ldots [x + (m - 1) h]$$

oder

$$\Delta u = (x + h) (x + 2h) \ldots [x + (m - 1) h] \, mh.$$

Da aber

$$\Sigma \frac{\Delta u}{mh} = \frac{\Sigma \Delta u}{mh} = \frac{u}{mh}$$

ist, so hat man auch

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\Sigma(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]$$
$$=\frac{x}{mh}(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]+\text{const.},$$

oder wenn man $x=x-h$ und $m=m+1$ setzt:

$$\Sigma x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]$$
$$=\frac{(x+h)}{(m+1)h}x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]\ldots(A).$$

Auf dieselbe Weise kann man auch mit dem Ausdrucke

$$u=\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]}$$

verfahren, da dessen Differenz gleich

$$\Delta u=\frac{1}{(x+h)(x+2h)\ldots(x+mh)}-\frac{1}{x(x+h)\ldots[x+(m-1)h]},$$

das heißt, gleich ist

$$\Delta u=\frac{-mh}{x(x+h)(x+2h)\ldots(x+mh)}.$$

Die Reversion dieses Ausdrucks gibt, wenn man wieder für u seinen Werth setzt:

$$\Sigma\frac{-1}{x(x+h)\ldots(x+mh)}=\frac{u}{mh}=\frac{1}{mhx(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]};$$

also auch, wenn man $m=m-1$ setzt:

$$\Sigma\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]}$$
$$=\frac{-1}{(m-1)hx(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-2)h]}\ldots(B).$$

I. Nun kann aber in jeder gegebenen Reihe

$$u,\ u_1,\ u_2\ \ldots\ u_{n-1},\ u_n$$

das allgemeine Glied u_n als die Differenz der Summe aller vorhergehenden Glieder angesehen werden, so zwar, daß wenn man die Summe

$$u+u_1+u_2\ldots+u_{n-1}=S_{n-1}$$

setzt, man sofort hat:

$$\Delta S_{n-1}=u_n,\quad \text{also auch}\quad S_{n-1}=\Sigma u_n.$$

Daraus folgt also, daß die ganze Summe der Reihe, das allgemeine Glied mitgenommen, gleich ist

$$S_n=\Sigma u_n+u_n.$$

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Wenden wir diesen Ausdruck auf die Gleichung (A) an, wo das allgemeine Glied ist

$$u_n = x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h],$$

so erhält man

$$Sx(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]$$
$$= \frac{(x-h)}{(m+1)h}x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]$$
$$+ x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h],$$

oder wenn man die beyden letzten Glieder zusammenzieht:

$$Sx(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]$$
$$= \frac{x(x+h)(x+2h)\ldots(x+mh)}{(m+1)h} + \text{const.}$$

Und eben so erhält man auch aus der Gleichung (B) den folgenden Ausdruck:

$$S\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]}$$
$$= \frac{-1}{(m-1)h(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]} + \text{const.}$$

Mittelst dieser beyden Ausdrücke erhält man die Summen derjenigen Reihen, deren Glieder die sogenannten direkten oder reciproken **figurirten** Zahlen sind. Für die ersten oder für die Reihen, deren allgemeines Glied $\frac{x}{1}$, $\frac{x(x+1)}{1.2}$, $\frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}$ 2c. ist, hat man, wenn man $h = 1$ und nach der Ordnung $m = 1, 2, 3\ldots$ setzt:

$$S\frac{x}{1} = \frac{x}{1.2}(x+1) + C$$

für die Summe der Reihe 1, 2, 3, 4 ...,

$$S\frac{x(x+1)}{1.2} = \frac{x}{1.2.3}(x+1)(x+2) + C$$

für die Summe der Reihe 1, 3, 6, 10 ...,

$$S\frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3} = \frac{x}{1.2.3.4}(x+1)(x+2)(x+3) + C$$

für die Summe der Reihe 1, 4, 10, 20 ...,

wo die Constante gleich Null ist, da alle diese Ausdrücke mit x zugleich verschwinden.

Eben so erhält man für diejenigen Reihen, deren allgemeines Glied $\frac{1}{x}$, $\frac{1.2}{x(x+1)}$, $\frac{1.2.3}{x(x+1)(x+2)}$ 2c. ist:

$$1.2\,S\frac{1}{x(x+1)} = -\frac{2}{x+1} + C,$$

$$1.2.3\,S\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = -\frac{3}{(x+1)(x+2)} + C',$$

$$1.2.3.4\,S\frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)} = -\frac{2.4}{(x+1)(x+2)(x+3)} + C'',$$

wo die Constante $C = \frac{2}{1}$, $C' = \frac{3}{2}$, $C'' = \frac{4}{3}$, $C''' = \frac{5}{4}$ rc. ist. So gibt z. B. die letzte Gleichung für die Reihe

$$\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{3.4.5.6} + \ldots$$

das summatorische Glied $= \frac{1}{18} - \frac{1}{3(x+1)(x+2)(x+3)}$. Setzt man in diesem Ausdrucke $x = 1, 2, 3 \ldots$, so erhält man für das erste Glied $\frac{1}{24}$, für die Summe der zwey ersten $\frac{1}{20}$, für die der drey ersten $\frac{19}{360}$ u. s. f.

§. 254. (**Gleichungen mit Differenzen.**) Wenn y eine Funktion von x ist, und wenn h die beständige Zunahme der Stammgröße x bezeichnet, so wird eine Gleichung zwischen Differenzen im Allgemeinen die Form haben:

$$F(x\,.\,y\,.\,\Delta y\,.\,\Delta^2 y \ldots) = 0.$$

In einer solchen Gleichung kann man die Differenzen Δy, $\Delta^2 y \ldots$ durch die auf einander folgenden Werthe der Größe y ersetzen, da man hat:

$$\Delta y = y_1 - y,\quad \Delta^2 y = y_2 - 2y_1 + y_1 \quad \text{u. f.},$$

so daß also jene Gleichung die Gestalt annimmt:

$$F(x, y, y_1, y_2, \ldots) = 0,$$

und aus dieser Form sieht man, daß jede solche Differenzengleichung den Werth der gesuchten Funktion durch eine bestimmte Anzahl der dieser Funktion vorhergehenden homologen Funktionen gibt. Ist z. B. die gegebene Gleichung der ersten Ordnung, so wird man aus ihr die Größe y_1 durch y ausgedrückt erhalten; ist sie der zweyten Ordnung, so wird sie den Werth von y_2 durch y_1 und y geben u. s. f. Jede solche Gleichung ist daher einer Reihe gleich, in welcher man jedes Glied durch eine bestimmte Anzahl der vorhergehenden Glieder erhält. Denn ist z. B. die Gleichung $y_2 = f(x, y, y_1)$ gegeben, so kann man daraus die folgenden ableiten:

$$y_3 = f(x+h, y_1, y_2);\quad y_4 = f(x+2h, y_2, y_3) \quad \text{u. f.}$$

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

und daraus wird man die Reihe bilden können:

$$y, y_1, y_2, y_3 \ldots,$$

deren jedes Glied aus den zwey ihm zunächst vorhergehenden gebildet wird, und in welcher daher die beyden ersten Glieder y und y_1 ganz willkürlich sind.

I. Um nun auch ein Beyspiel von der Integration einer solchen Gleichung zu geben, wollen wir die Gleichung annehmen:

$$\Delta y + Xy = X',$$

wo X und X' bloß Funktionen von x sind (vergl. §. 205). Setzen wir der Kürze wegen die constante Zunahme Δx der Größe x gleich der Einheit voraus. Nimmt man dann $y = uz$, so hat man

$$\Delta y = u\Delta z + z\Delta u + \Delta u \Delta z,$$

und unsere gegebene Gleichung geht in folgende über:

$$u\Delta z + z\Delta u + \Delta u\Delta z + Xuz = X'.$$

In ihr kann man den Theil $z\Delta u + Xuz$ gleich Null annehmen, so daß man hat

$$\Delta u + Xu = 0 \quad \text{und} \quad u\Delta z + \Delta u\Delta z = X'.$$

Daraus folgt sofort

$$\Delta z = \frac{X'}{u + \Delta u} \quad \text{oder} \quad z = \Sigma \frac{X'}{u + \Delta u}.$$

Unsere Aufgabe reducirt sich daher auf die Integration des Ausdrucks $\Delta u + Xu = 0$, in welcher sich die Variablen trennen lassen (§. 203), da man hat

$$\frac{\Delta u}{u} = -X.$$

Sey $u = e^t$, also auch (§. 253, I.)

$$\Delta u = e^t(e^{\Delta t} - 1) \quad \text{und} \quad \frac{\Delta u}{u} = e^{\Delta t} - 1 = -X,$$

woraus daher folgt

$$e^{\Delta t} = 1 - X, \quad \Delta t = \log.(1 - X) \quad \text{und} \quad t = \Sigma \log.(1 - X).$$

Da aber die Summe der Logarithmen der Funktion $(1 - X)$ gleich dem Produkte der auf einander folgenden Werthe von $(1 - X)$ ist, die zwischen den Gränzen des Integrals enthalten sind, so sey dieses Produkt

$$(1-X_0)(1-X_1)(1-X_2)\ldots(1-X_{n-2})(1-X_{n-1}) = [1 - X_{x-1}]_x,$$

wodurch man erhält:

$$t = \log. [1 - X_{x-1}]_x ; \quad u = e^t = [1 - X_{x-1}]_x .$$

Da nun $u_1 = u + \Delta u$ ist, so hat man auch

$$u + \Delta u = [1 - X_x]_{x+1} \quad \text{und} \quad z = \Sigma \frac{X'}{[1 - X_x]_{x+1}},$$

und daher endlich für das gesuchte Integral

$$y = [1 - X_{x-1}]_x . \Sigma \frac{X'}{[1 - X_x]_{x+1}}.$$

Ist für einen besonderen Fall $X = A$ eine Constante, so hat man

$$y = (1 - A)^x . \Sigma \frac{X'}{(1 - A)^{x+1}}.$$

Ist überdieß auch noch $X' = B$ constant, so ist

$$\Sigma \frac{X'}{(1 - X)^{x+1}} = X' . \Sigma (1 - X)^{-x-1} = B . \Sigma (1 - A)^{-x-1},$$

oder (nach §. 252, I.)

$$\Sigma \frac{X'}{(1 - X)^{x+1}} = \frac{B (1 - A)^{-x-1}}{(1 - A)^{-1} - 1} = \frac{B}{(1 - A)^x . A},$$

und daher das gesuchte Integral

$$y = (1 - A)^x . \left[\frac{B}{(1 - A)^x . A} + \text{const.} \right].$$

Weitere Ausführungen dieses Gegenstandes findet man in Lacroix, Traité du calc. diff. Vol. III.

XLI.

Principien der Variationsrechnung.

§. 255. (Erklärung dieser Rechnung.) Alle vorhergehenden Betrachtungen setzen voraus, daß die Abhängigkeit der Differentialien dx, dy, dz... von einander, während dem Verlaufe der Rechnung, immer dieselbe bleibe. Allein es gibt auch andere Untersuchungen, in welchen sich diese Abhängigkeit, der Natur der Aufgabe gemäß, ändert. Wenn z. B U eine Funktion der Größen x, y und ihrer Differentialien

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

dx, dy bezeichnet, so ist das Integral $\int U dx$, zwischen je zwey bestimmten oder gegebenen Werthen von x, einer unendlichen Anzahl von Werthen fähig, wenn man die Relationen zwischen x und y sich ändern läßt. Nimmt man, für einen speciellen Fall, $U = y$ an, so bezeichnet das Integral $\int y dx$ die Fläche einer Curve, welche zwischen zwey gegebenen Ordinaten, zwischen der Differenz ihrer Abscissen und zwischen dem Bogen der Curve, der von jenen beyden Ordinaten begränzt wird, enthalten ist. Allein diese Fläche wird verschieden seyn, wenn man, in der dem Integral $\int dx$ zu Grunde gelegten Gleichung der Curve, verschiedene Curven annimmt, und man wird daher die Frage aufstellen können: welche Gleichung einer Curve, oder welche Relation zwischen x und y muß man, unter allen möglichen, wählen, damit die durch dieses Integral $\int y dx$ ausgedrückte Fläche ein Größtes oder ein Kleinstes werde. Solche Fragen nun gehören in die Variationsrechnung.

Wenn z. B. MM' (Fig. 54) diese Curve ausdrücken soll, für welche das Integral $\int U dx$ ein Größtes ist, so muß dieses Integral für jede andere Curve mm' einen kleineren Werth haben. Um dieser Bedingung zu genügen, muß vor allem untersucht werden, welchen Einfluß eine Änderung in der Relation von x und y, d. h. in der Natur der Curve, auf das Integral $\int U dx$ hat. Bey dieser Änderung wird aber die Größe y, unabhängig von x, sich ändern müssen, da, wenn man zwey Curven betrachtet, zu demselben $x = AP$ zwey Ordinaten PM und Pm gehören, und die Differenz Mm dieser Ordinaten muß von den Differenzen RM' und rm' wohl unterschieden werden, da diese letzten zwischen zwey nächstfolgenden Ordinaten derselben Curve Statt haben. Aus diesem Grunde unterscheidet man auch diese beyden Differenzen der Ordinaten, selbst wenn sie unendlich klein genommen werden, durch besondere Zeichen. Heißt nämlich $M'R = dy$, das Differential von $PM = y$ in derselben Curve MM', so ist $Mm = \delta y$ die Variation von derselben Ordinate $PM = y$, wenn man von einer Curve MM' zu ihrer nächstfolgenden mm' übergeht.

I. Zieht man mr mit MR, und ms mit MM' parallel, so hat man

$$P'M' = y + dy \quad \text{und} \quad Pm = y + \delta y.$$

Geht man dann von dem Punkt M zu m' über, so erhält man

$$\begin{aligned} P'm' = Pm + rs + sm' &= y + \delta y + dy + \delta dy \\ &= y + dy + \delta . (y + dy). \end{aligned}$$

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Da aber, wie wir voraussetzen, der Punkt m′ dem m der nächstfolgende, auf der Curve m m′ ist, so hat man auch

$P'm' = y + \delta y + d.(y + \delta y) = y + \delta y + dy + d\delta y,$

woraus daher folgt:

$$\delta dy = d\delta y,$$

oder die Variation des Differentials ist gleich dem Differential der Variation, und die beyden Zeichen d und δ lassen sich willkürlich eines vor das andere setzen.

Ganz eben so ist also auch

$$\delta d^2 y = d\delta dy = d^2 \delta y,$$

so wie

$$\delta dU = d\delta U \text{ u. s. w.}$$

II. Auch für die Integralzeichen hat eine analoge Verwechslung Statt. Denn ist

$$\int U dx = V,$$

so ist auch

$$dV = U dx \text{ und } \delta . dV = \delta . U dx.$$

Wenn man aber in δ.dV, nach I., die Zeichen d und δ versetzt, so ist auch

$$d . \delta V = \delta . U dx,$$

oder wenn man integrirt:

$$\delta V = \int \delta . U dx.$$

Stellt man aber in dem letzten Ausdruck den Werth von $V = \int U dx$ wieder her, so hat man

$$\delta . \int U dx = \int \delta . U dx.$$

§. 256. (**Variation des Integrals $\int U dx$.**) Sey U eine Funktion von x, y, z und den Differential-Coefficienten $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2 y}{d x^2} \ldots$ dieser Größen. Man suche die Variation von $\int U dx$, oder die Größe $\delta \int U dx$.

Der Gleichförmigkeit und Symmetrie der Formeln wegen wollen wir auch die Größe dx veränderlich annehmen, obschon sie, nach dem Vorhergehenden, als eine constante Größe betrachtet werden soll, da es von uns abhängt, am Ende der Rechnung die Größen $d^2 x, d^3 x \ldots$ wieder gleich Null zu setzen.

Nehmen wir, der Kürze wegen, folgende Bezeichnungen an:

$$dy = p dx, \quad dp = q dx, \quad dq = r dx \ldots \text{ und}$$
$$dz = p' dx, \quad dp' = q' dr, \quad dq' = r' dx \ldots$$

Da endlich, der Voraussetzung gemäß, U eine Funktion von x, y, z, p, $p' \ldots$ ist, so kann man annehmen:

$$\begin{aligned} dU = & N dy + P dp + Q dq + R dr + \ldots \\ & + N' dz + P' dp' + Q' dq' + R' dr' + \ldots \end{aligned}$$

Um nun den Werth von δU zu erhalten, so wird man in dem Ausdrucke von U die Größen x, y, z in $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ verwandeln, und dann von dem so veränderten Werthe von U den ersten Werth dieser Größe U subtrahiren. Da dieß aber ganz dasselbe Verfahren ist, welches man bey der Differentialrechnung anwendet, so wird man in dem bereits aufgestellten Differential dU von U, nur das Zeichen d in δ verwandeln, um sofort auch die gesuchte Variation δU von U zu erhalten. Diesemnach ist daher

$$\left.\begin{aligned} \delta U = & N \delta y + P \delta p + Q \delta q + \ldots \\ & + N' \delta z + P' \delta p' + Q' \delta q' + \ldots \end{aligned}\right\} \ldots (A).$$

Lassen wir zuerst, der größeren Einfachheit wegen, die Größe z ganz weg, so daß U bloß als eine Funktion von x, y und ihren Differentialien p, q, $r \ldots$ betrachtet, oder daß $z = p' = q' = r' \ldots$ gleich Null gesetzt wird, und daß man daher hat:

$$\delta U = N \delta y + P \delta p + Q \delta q + \ldots$$

Dieß vorausgesetzt, hat man

$$\begin{aligned} \delta . \int U dx = & \int \delta . U dx = \int (U \delta dx + dx \delta U) \\ & = U \delta x - \int \delta x dU + \int dx \delta U, \end{aligned}$$

und wenn man den vorhergehenden Werth von dU und δU substituirt:

$$\begin{aligned} \delta . \int U dx = U \delta x & + \int N dx (\delta y - p \delta x) \\ & + \int P d . (\delta y - p \delta x) \\ & + \int Q d . (\delta p - q \delta x) + \ldots \end{aligned}$$

Um diesen Ausdruck abzukürzen, sey

$$\delta y - p \delta x = \omega,$$

so ist auch

$$\delta p - q \delta x = \frac{d\omega}{dx}, \quad \delta q - r \delta x = \frac{1}{dx} . d \frac{d\omega}{dx} \text{ u. s. w.},$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und daher

$$\delta . \int U dx = U \delta x + \int N \omega dx + \int P d\omega$$
$$+ \int Q d . \frac{d\omega}{dx}$$
$$+ \int R d . \frac{1}{dx} . d \frac{d\omega}{dx} + \ldots$$

Integrirt man aber diese Ausdrücke theilweise, so ist

$$\int Q d . \frac{d\omega}{dx} = Q \frac{d\omega}{dx} - \frac{dQ}{dx} . \omega + \int \omega d . \frac{dQ}{dx},$$

$$\int R d . \frac{1}{dx} . d \frac{d\omega}{dx} = \frac{R}{dx} d . \frac{d\omega}{dx} - \frac{dR}{dx} . \frac{d\omega}{dx} + \frac{1}{dx} d . \frac{dR}{dx} . \omega$$
$$- \int \omega d \frac{1}{dx} . d \frac{dR}{dx} \text{ u. s. f.}$$

Substituirt man diese Ausdrücke in der vorhergehenden Gleichung, und bemerkt man, daß, wenn z nicht Null ist, man noch einen zweyten, dem vorigen ganz ähnlichen Ausdruck erhält, in welchem man bloß $NPQ\ldots$ in $N'P'Q'\ldots$, und $\omega = \delta y - p \delta x$ in $\omega' = \delta z - p' \delta x$ verwandeln darf, so erhält man für die gesuchte vollständige Variation des gegebenen Integrals $\int U dx$, wenn dx constant angenommen wird,

$$\delta . \int U dx = \int \omega dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \ldots\right)$$
$$+ \int \omega' dx \left(N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2} - \frac{d^3R'}{dx^3} + \ldots\right)$$
$$+ U \delta x + \omega \left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} - \frac{d^3S}{dx^3} + \ldots\right)$$
$$+ \omega' \left(P' - \frac{dQ'}{dx} + \frac{d^2R'}{dx^2} - \frac{d^3S'}{dx^3} + \ldots\right)$$
$$+ \frac{d\omega}{dx} \left(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{d^2S}{dx^2} - \ldots\right)$$
$$+ \frac{d\omega'}{dx} \left(Q' - \frac{dR'}{dx} + \frac{d^2S'}{dx^2} - \ldots\right)$$
$$+ \frac{d^2\omega}{dx^2} \left(R - \frac{dS}{dx} + \ldots\right) + \ldots,$$

von welchem Ausdrucke das Gesetz des Fortgangs deutlich ist.

§. 257. **(Bestimmung des größten oder kleinsten Werths des Integrals $\int U dx$.)** Um den größten oder kleinsten Werth des Integrals $\int U dx$ zu erhalten, wird man, nach den bekannten Vorschriften der Differentialrechnung, die Variation $\delta . \int U dx$ dieses Integrals gleich Null setzen, wo dann ein Größtes oder ein Kleinstes Statt haben wird, je nachdem der Werth von $\delta^2 . \int U\, dx$, zwischen denselben Gränzen, wie vorhin das Integral $\int U\, dx$ genommen, negativ oder positiv ist.

Allein, indem man diese Variation $\delta . \int U\, dx$, das heißt, indem man den so eben erhaltenen Ausdruck dieser Variation gleich Null setzt, bemerkt man, daß dieser Ausdruck aus zwey, wesentlich unter sich verschiedenen Theilen besteht. Der eine dieser Theile hat nämlich das Integralzeichen $\int$ vor sich, und der andere ist davon frey. Man wird daher jeden dieser zwey Theile für sich gleich Null setzen müssen. Thut man dieß mit dem ersten Theile, so erhält man

$$o = \omega\, dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} - \ldots\right)$$
$$+ \omega'\, dx \left(N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2 Q'}{dx^2} - \ldots\right),$$

und dieß sind zugleich die Gleichungen der gesuchten Curve von doppelter Krümmung, für welche das Integral $\int U\, dx$, zwischen den gegebenen Gränzen genommen, ein Größtes oder ein Kleinstes ist. Für eine ebene Krumme, deren Gleichung zwischen x und y gegeben ist, fällt der zweyte dieser Ausdrücke $o = N' - \frac{dP'}{dx} + \ldots$ weg.

Allein da diese Ausdrücke erste, zweyte und selbst höhere Differentialien enthalten, so werden sie integrirt werden müssen. Diese Integrationen werden daher auch eine, zwey oder mehrere Constanten einführen, und die Bestimmung dieser Constanten ist es, die von dem zweyten Theile jener Ausdrücke, welche das Zeichen $\int$ nicht enthalten, gegeben wird. Dieser zweyte Theil wird nämlich mit den Bedingungen in Verbindung stehen, welche für die Endpunkte jener Curven festgesetzt worden sind, so daß sie z. B. zwey fixe Punkte, oder daß sie noch unbestimmte Punkte von zwey anderen Curven, auf welchen jene erste Curve senkrecht steht, seyn sollen u. dgl.

I. Nimmt man also zuerst bloß auf den ersten Theil jener Variation Rücksicht, so hat man, wenn man, wie früher bereits gesagt worden ist, die Variation von x oder die Größe δx gleich Null setzt, für die gesuchte Curve die Gleichung

$$o = \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} - \ldots\right)\delta y$$
$$+ \left(N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2 Q'}{dx^2} - \ldots\right)\delta z \quad . \quad . \quad . \quad (I).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Sind nun, wie es bey Curven von doppelter Krümmung der Fall ist, die beyden Größen y und z von einander unabhängig, so werden es auch ihre Variationen seyn, und der letzte Ausdruck wird den zwey folgenden gleich gelten:

$$\left.\begin{aligned} o &= N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \ldots \\ o &= N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2} - \ldots \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\; \text{(II)},$$

und diese beyden Gleichungen werden die der gesuchten Curve seyn.

II. Sind aber die Größen y und z durch irgend eine gegebene Bedingungsgleichung verbunden oder von einander abhängig, soll z. B. die gesuchte Curve auf irgend einer Fläche liegen, deren Gleichung $\mathfrak{L} = o$ ist, so wird man für diese Bedingungsgleichung haben:

$$\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{d\mathfrak{L}}{dz}\right)\delta z = o.$$

Eliminirt man dann aus dieser Gleichung und aus der Gleichung (I) eine der zwey Größen δy oder δz, so wird dadurch auch die andere entfernt, und man erhält die einzige Gleichung:

$$o = \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \ldots\right)\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dz}\right)$$
$$- \left(N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2} - \ldots\right) \;.\;.\;.\; \text{(III)},$$

und diese Gleichung (III), verbunden mit der Gleichung $\mathfrak{L} = o$, wird für jeden besonderen Fall die gesuchten Werthe von y und z geben. Auch kann man, wie es in der Mechanik zu geschehen pflegt, diesen Fall auf den ersten in (I) zurückführen, wenn man statt den Gleichungen (II) die folgenden annimmt:

$$\left.\begin{aligned} o &= N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \ldots + \lambda\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dy}\right) \\ o &= N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2} - \ldots + \lambda\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dz}\right) \end{aligned}\right\}$$

wo λ einen unbestimmten Factor bezeichnet. Eliminirt man nämlich aus diesen beyden Ausdrücken die Größe λ, so erhält man wieder die Gleichung (III); sind aber die Größen y und z von einander unabhängig, so ist $\lambda = o$, und man erhält die Gleichungen (II).

Wir wollen nun die vorhergehenden allgemeinen Betrachtungen auf einige Beyspiele anwenden.

§. 258. (Kürzeste Linie zwischen zwey gegebenen Punkten.) Um die kürzeste Linie, die man zwischen zwey Punkten in einer Ebene ziehen kann, zu finden, so hat man für diese Linie den allgemeinen Ausdruck

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int dx \sqrt{1 + p^2},$$

also ist auch, für unsere Aufgabe:

$$U = \sqrt{1 + p^2} \quad \text{und daher} \quad \delta U = \frac{p\,\delta p}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Vergleicht man diesen Werth von δU mit dem der Gleichung (A), so hat man

$$P = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}},$$

und alle übrigen Größen N, N', P', Q... sind gleich Null. Es gehen demnach die Gleichungen (II) in folgende einzelne über:

$$dP = 0, \quad \text{oder} \quad dp = 0, \quad \text{oder endlich} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 0.$$

Das erste Integral dieser Gleichung ist $\frac{dy}{dx} = C$, und wenn man diesen Ausdruck noch einmal integrirt, so erhält man

$$y = Cx + C'$$

für die gesuchte kürzeste Curve, die also, wie bekannt, die gerade Linie ist.

Sind die zwey Punkte, durch welche diese Gerade gehen soll, gegebene feste Punkte, so sind die Variationen der Coordinaten derselben für sich gleich Null, und der zweyte, von dem Zeichen $\int$ unabhängige Theil von $\delta \int U dx$ kömmt weiter in keine Betrachtung.

Nehmen wir aber an, daß diese zwey Gränzpunkte nicht bestimmte feste Punkte seyn, sondern daß sie sich nur auf zwey Gränzcurven befinden sollen, deren Gleichungen

$$dy' = m'' dx' \quad \text{und}$$
$$dy'' = m'' dx''$$

sind. Um nun die zwey Punkte dieser Gränzcurven zu finden, durch welche unsere kürzeste Gerade gehen soll, so hat man für den zweyten Theil von $\delta \int U dx$ in unserm speciellen Falle den Ausdruck

$$U \delta x + P \omega = 0 \quad \text{oder}$$
$$U \delta x + P (\delta y - p \delta x) = 0.$$

Setzt man aber $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, so ist

$$U = \sqrt{1 + p^2} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \frac{ds}{dx} \quad \text{und}$$

$$P = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{dy}{ds}.$$

Substituirt man diese Werthe von U und P in den vorhergehenden Ausdruck, so hat man

$$\frac{ds}{dx}\delta x + \frac{dy}{ds}\left(\delta y - \frac{dy}{dx}\delta x\right) = 0 \quad \text{oder}$$

$$\frac{dy}{ds}\delta y + \left(ds - \frac{dy^2}{ds}\right)\frac{\delta x}{dx} = 0, \quad \text{oder endlich}$$

$$\frac{dy}{ds}\delta y + \frac{dx}{ds}\delta x.$$

Wendet man diesen Ausdruck für jede der beyden Gränzcurven an, und nimmt die Differenz beyder Ausdrücke, so erhält man für den erwähnten zweyten Theil

$$\frac{dx''}{ds''}\delta x'' + \frac{dy''}{ds''}\delta y'' - \frac{dx'}{ds'}\delta x' - \frac{dy'}{ds'}\delta y' = 0,$$

oder wenn man die vorhergehenden Werthe von $\delta y'$ und $\delta y''$ substituirt,

$$\left(\frac{dx'' + m''dy''}{ds''}\right)dx'' - \left(\frac{dx' + m'dy'}{ds'}\right)\delta x' = 0.$$

Da aber die beyden Größen $\delta x'$ und $\delta x''$ von einander ganz unabhängig sind, so ist die letzte Gleichung den beyden folgenden gleichgeltend:

$$dx'' + m''dy'' = 0 \quad \text{und} \quad dx' + m'dy' = 0, \quad \text{oder}$$

$$\frac{dy''}{dx''} = -\frac{1}{m''} \quad \text{und} \quad \frac{dy'}{dx'} = -\frac{1}{m'},$$

und diese Gleichungen zeigen, daß unsere Geraden auf den beyden Gränzcurven senkrecht stehen, oder denselben unter rechten Winkeln begegnen muß, um die kürzeste Gerade zu seyn, die man zwischen diesen beyden Gränzcurven ziehen kann.

I. Sucht man aber die kürzeste Linie im Raume, oder berücksichtiget man auch die dritte Coordinate z, so hat man für das Element des Bogens dieser Linie

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dx\sqrt{1 + p^2 + p'^2},$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

also ist auch

$$U = \sqrt{1 + p^2 + p'^2} \quad \text{und} \quad dU = \frac{p\,dp + p'dp'}{\sqrt{1 + p^2 + p'^2}},$$

und daher

$$P = \frac{p}{U}, \quad P' = \frac{p'}{U} \quad \text{und} \quad N = N' = Q = Q' \ldots = 0.$$

Es ist also auch der Theil des vorhergehenden Ausdrucks unter den Integralzeichen

$$\frac{dP}{dx} = 0, \quad \frac{dP'}{dx} = 0,$$

oder wenn man integrirt:

$$\frac{dy}{dx} = A, \quad \frac{dz}{dx} = B,$$

und wenn man noch einmal integrirt:

$$y = Ax + A', \quad z = Bx + B',$$

also die gesuchte Linie wieder eine Gerade.

Sind die beyden äußersten Punkte derselben fix, so verschwindet der andere Theil der Variation $\delta \int U dx$, der das Integralzeichen nicht enthält. Soll aber z. B. die gesuchte Curve an ihren Endpunkten durch zwey krumme Flächen begränzt seyn, deren Gleichungen sind:

$$dz' = m'dx' + n'dy' \text{ für den Anfangspunkt, und}$$
$$dz'' = m''dx'' + n''dy'' \text{ für den Endpunkt der Curve,}$$

so ist der zweyte Theil der Variation

$$U\delta x + \omega P + \omega' P' = 0 \quad \text{oder}$$
$$U\delta x + (\delta y - p\,\delta x)\,P + (\delta z - p'\delta x)\,P' = 0.$$

Substituirt man aber in der letzten Gleichung die vorhergehenden Werthe von dz' und $\delta z''$ statt δz, und nimmt wieder die Differenzen, so hat man, da die Größen $\delta x'$, $\delta x''$, $\delta y'$, $\delta y''$ unter sich unabhängig sind, folgende vier Gleichungen:

$$1 + m'\frac{dz'}{dx'} = 0 \quad \text{und} \quad 1 + m''\frac{dz''}{dx''} = 0,$$

$$1 + n'\frac{dz'}{dy'} = 0 \quad \text{»} \quad 1 + n''\frac{dz''}{dy''} = 0,$$

und da diese Gleichungen die der Normalen auf jene beyden Flächen sind, so muß die gesuchte kürzeste Curve, oder die gefundene Gerade, auf jenen beyden Flächen senkrecht stehen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

II. Sucht man endlich von allen, auf einer gegebenen Fläche zwischen zwey gegebenen Punkten dieser Fläche, liegenden Curven die kürzeste, so sey die Gleichung dieser Fläche

$$\mathfrak{L} = o = A\,dx + B\,dy + C\,dz,$$

wo A, B, C Funktionen von x, y, z sind. Dieß vorausgesetzt, hat man, wie zuvor:

$$U = \sqrt{1 + p^2 + p'^2}, \quad P = \frac{p}{U}, \quad P' = \frac{p'}{U} \quad \text{und} \quad N = N' = o;$$

also ist auch die Gleichung (III)

$$\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dz}\right) dP - \left(\frac{d\mathfrak{L}}{dy}\right) dP' = o \quad \text{oder}$$

$$\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dz}\right) d\frac{p}{U} - \left(\frac{d\mathfrak{L}}{dy}\right) d\frac{p'}{U} = o,$$

oder endlich, da $U\,dx = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = ds$ ist:

$$\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dz}\right) d\frac{dy}{ds} - \left(\frac{d\mathfrak{L}}{dy}\right) d\frac{dz}{ds} = o \quad . \quad . \quad . \quad \text{(III)},$$

und dieß ist die allgemeine Gleichung der kürzesten Linie auf einer gegebenen Fläche.

III. Drückt man die Gleichung der gegebenen Fläche in der Gestalt aus:

$$dz = m\,dx + n\,dy, \quad \text{so ist}$$

$$d\mathfrak{L} = o = dz - m\,dx - n\,dy,$$

also auch

$$\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dz}\right) = 1 \quad \text{und} \quad \left(\frac{d\mathfrak{L}}{dy}\right) = -n;$$

so daß daher die letzte Gleichung (III) in folgende übergeht:

$$d\,.\,\frac{dy}{ds} + n\,d\,.\,\frac{dz}{ds} = o \quad . \quad . \quad . \quad \text{(a)}.$$

Aus ihr läßt sich sofort noch eine andere Gleichung ableiten. Es ist nämlich

$$\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} + \frac{dz^2}{ds^2} = 1, \quad \text{also auch}$$

$$\frac{dx}{ds}\,d\,.\,\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\,d\,.\,\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}\,d\,.\,\frac{dz}{ds} = o.$$

Setzt man aber in dem zweyten Gliede dieses Ausdrucks

$$d\,.\,\frac{dy}{ds} = -n\,d\,.\,\frac{dz}{ds},$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und in dem dritten

$$dz = m dx + n dy,$$

so erhält man

$$d \cdot \frac{dx}{ds} + m d \cdot \frac{dz}{ds} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (b).$$

IV. Ist die gegebene Fläche durch Rotation einer Curve um die Axe der x entstanden, so ist $x = \varphi\,(y^2 + z^2)$. Differentiirt man diese Gleichung bloß in Beziehung auf y und z, so ist

$$y dy + z dz = 0 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{y}{z},$$

also ist auch

$$n = -\frac{y}{z},$$

und die Gleichung (a) wird

$$d \cdot \frac{dy}{ds} - \frac{y}{z} \cdot d \frac{dz}{ds} = 0,$$

oder da ds constant ist:

$$\frac{z d^2 y - y d^2 z}{ds} = 0,$$

wovon das Integral ist:

$$z dy - y dz = C ds \quad . \quad . \quad . \quad (a');$$

und diese Gleichung, verbunden mit jener der gegebenen Fläche $L = 0$, reicht hin, die gesuchte kürzeste Linie zu bestimmen.

Ist diese Fläche eine Kugel des Halbmessers a, so ist

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0, \quad \text{also auch}$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{x}{z},$$

und daher die Gleichung (b)

$$d \cdot \frac{dx}{ds} - \frac{x}{z}\, d \cdot \frac{dz}{ds} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{z d^2 x - x d^2 z}{ds} = 0,$$

dessen Integral ist:

$$z dx - x dz = C' ds \quad . \quad . \quad . \quad (b').$$

Die Gleichungen (a') und (b') zusammen genommen geben:

$$z dx - x dz = A\,(z dy - y dz).$$

Multiplicirt man beyde Theile dieser Gleichung durch den Factor $\frac{1}{z^2}$, so findet man für das Integral derselben

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{x}{z} = A\frac{y}{z} + B \quad \text{oder} \quad x = Ay + Bz,$$

die Gleichung einer durch den Anfangspunkt der Coordinaten, d. h. durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Ebene. Verbindet man sie mit der gegebenen Gleichung der Kugel selbst, so ist der Durchschnitt beyder Flächen die gesuchte kürzeste Linie, die also ein größter Kreis der Kugel ist. Weitere Ausführungen dieses Gegenstandes s. m. in Lacroix, Traité du calc. diff. et intégral. Vol. II. Cap. X.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf