Differentialrechnung.

I.

Differential der algebraischen Funktionen.

§. 24. (**Differential und Differential-Coefficient.**) Funktion einer veränderlichen Größe x nennt man jeden analytischen Ausdruck, der aus dieser Größe x und andern unveränderlichen a, b, . . . zusammengesetzt ist, wie z. B. ax oder $\frac{a+x}{b-x}$, oder $\sqrt{a^2+bx}$ u. s. w., wo dann x die Stammgröße dieser Funktion heißt. Wir wollen solche Funktionen von x überhaupt durch das Zeichen $f(x)$ ausdrücken.

Wenn in einer solchen Funktion $u = f(x)$ die Stammgröße x sich ändert, und z. B. $x+h$ wird, so wird auch die Funktion $f(x)$ sich ändern oder in $u' = f(x+h)$ übergehen, und man wird die auf diese Weise erfolgende Änderung der Funktion erhalten, wenn man diese beyden Werthe u' und u derselben von einander abzieht. Eben so wird also auch das Verhältniß der Änderung $u'-u$ der Funktion zu der Änderung h ihrer Stammgröße gleich seyn:

$$\frac{u'-u}{h} \text{ oder auch } \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Hat man z. B., um dieß sogleich durch einen besondern Fall zu erläutern, die Funktion

$$u = f(x) = ax^2$$

gegeben, und geht x über in $x+h$, so erhält man

$$u' = f(x+h) = a(x+h)^2,$$

oder wenn man entwickelt:

$$u' = a(x^2+2hx+h^2);$$

also auch, wenn man von diesem Ausdrucke den früheren Werth derselben oder $u = ax^2$ abzieht, und durch h dividirt:

$$\frac{u'-u}{h} = 2ax + ah.$$

Dieses Verhältniß $\frac{u' - u}{h}$ der beyden Änderungen, der Funktion und ihrer Stammgröße, besteht, wie man sieht, aus zwey Theilen $2ax$ und ah, von welchen allein der letzte von der Größe der Änderung h der Stammgröße x noch abhängig, der erste aber, oder $2ax$, davon ganz unabhängig ist.

Je kleiner nun h wird, desto mehr nähert sich das Verhältniß $\frac{u' - u}{h}$ dem Werthe $2ax$, als einer Gränze, die es erst dann erreicht, wenn h kleiner wird als jede andere noch angebliche Größe, in welchem Zustande dann h eine unendlich kleine Größe genannt wird. Man bezeichnet diese unendlich kleine Veränderung h der Stammgröße x durch dx, und die durch sie erzeugte, im Allgemeinen ebenfalls unendlich kleine Änderung $u' - u$ ihrer Funktion durch du, so daß man daher hat

$$\frac{du}{dx} = 2ax.$$

Man nennt aber dx und du das Differential der Stammgröße x und ihrer Funktion u, so wie man das Verhältniß $\frac{du}{dx}$ den Differential-Coefficienten der Funktion zu nennen pflegt, so daß daher der Differential-Coefficient einer Funktion die Gränze ist von dem Verhältnisse der Änderung der Funktion zu der Änderung ihrer Stammgröße, welcher Gränze sich nämlich dieses Verhältniß immer mehr nähert, je kleiner die Änderung dx der Stammgröße wird, bis es endlich, für ein unendlich kleines dx, diese Gränze selbst erreicht.

Ganz eben so hat man in einem zweyten Beyspiele

$$u = ax^3,$$

wenn x wieder in $x + h$ übergeht,

$$u' = a(x + h)^3, \text{ und daher}$$

$$\frac{u' - u}{h} = a(3x^2 + 3hx + h^2);$$

und auch hier ist bloß das erste Glied $3ax^2$ des Verhältnisses $\frac{u' - u}{h}$ von der Größe h unabhängig, und daher dieses Glied wieder die Gränze, welcher sich jenes Verhältniß immer mehr nähert, je kleiner h angenommen wird, so daß also dieses Gränzverhältniß, wenn h gleich dx oder unendlich klein wird, durch

$$\frac{du}{dx} = 3ax^2$$

ausgedrückt wird, u. s. f. in allen anderen Fällen.

Man sieht daraus, daß, wenn auch die beyden Änderungen du und dx der Funktion und ihrer Stammgröße, jede für sich, unendlich klein sind, daß doch das Verhältniß derselben oder daß der Differential-Coefficient $\frac{du}{dx}$ demungeachtet eine endliche Größe seyn kann.

Der Gegenstand der Differentialrechnung ist es nun, diesen Differential-Coefficienten oder dieses Gränzverhältniß der Änderung der Funktion und ihrer Stammgröße für alle gegebenen Funktionen zu bestimmen. Ehe wir aber diese Bestimmungen vornehmen, wird es angemessen seyn, einige Bemerkungen über dieses Geschäft vorausgehen zu lassen.

§. 25. (**Einfachere Darstellung und Erweiterung des Vorhergehenden.**) Das in unserem vorhergehenden ersten Beyspiele erhaltene Gränzverhältniß $\frac{du}{dx} = 2ax$ läßt sich auch in Gestalt einer gewöhnlichen Gleichung auf folgende Weise ausdrücken:

$$du = 2axdx,$$

in welcher a und x endliche, du und dx aber unendlich kleine Größen bezeichnen. Um aber zu dieser Gleichung zu gelangen, kann man annehmen, daß sie aus der analogen früher erhaltenen Gleichung

$$du = (2ax + adx)\,dx$$

dadurch entstanden ist, daß man in ihr die unendlich kleine Größe adx gegen die endliche $2ax$ weggelassen hat.

Ganz eben so hatten wir in unserem zweyten Beyspiele aus dem gegebenen Ausdrucke $u = ax^3$ für die Differenz $u' - u$ oder du erhalten:

$$du = a(3x^2 + 3xdx + dx^2)\,dx,$$

welchen Ausdruck man auch so darstellen kann:

$$du = [3ax^2 + a(3x + dx)\,dx]\,dx.$$

Läßt man hier wieder die unendlich kleine Größe dx gegen die endliche $3x$ weg, so ist

$$du = [3ax^2 + 3axdx]\,dx \quad \text{oder}$$

$$du = 3ax(x + dx)\,dx,$$

und wenn endlich auch hier $x + dx$ gleich x gesetzt wird, so erhält man

$$du = 3ax^2 dx \quad \text{oder} \quad \frac{du}{dx} = 3ax^2, \text{ wie zuvor.}$$

Man kömmt also zu demselben Zwecke, wenn man, wie in dem Vorhergehenden, das Gränzverhältniß der Änderung einer Funktion zur Änderung ihrer Stammgröße, oder wenn man, wie hier, die Veränderung du einer Funktion sucht, die aus einer Änderung dx ihrer Stammgröße entspringt, vorausgesetzt, daß man, bey dem zweyten Verfahren, diese Änderung dx so klein annimmt, daß sie gegen jede andere endliche und noch angebbare Größe als verschwindend zu betrachten ist.

Beyde Verfahren führen zu demselben Resultate, aber das letzte ist offenbar einfacher und zur Anwendung bequemer, obschon es übrigens nur als ein wegen dieser Einfachheit eingeführter, abgekürzter Ausdruck des ersten, oder als ein bequemes Mittel zu demselben Zwecke zu betrachten ist. Demnach besteht, dieser zweyten Darstellungsweise zu Folge, das Princip der Differentialrechnung darin: »daß man zwey endliche Größen, welche »unter sich nur durch eine unendlich kleine Größe verschieden sind, als »völlig gleiche Größen betrachtet,« weil man nämlich nach der vorhergehenden Erklärung des Wortes »unendlich klein« zwischen jenen zwey Größen keine weitere noch angebliche Ungleichheit auffinden kann.

I. Wenn man aber diesen Begriff der unendlich kleinen Größen einmal eingeführt hat, so folgt unmittelbar daraus, daß die Verhältnisse dieser so wie der endlichen Größen unter einander sehr verschieden, und selbst wieder unendlich klein seyn können. Ist z. B. dx eine unendlich kleine Größe, so ist das Verhältniß des Quadrates derselben zu ihr selbst gleich $\frac{dx^2}{dx}$, also gleich dx, oder dieses Verhältniß ist selbst unendlich klein, so daß man daher, nach demselben oben aufgestellten Principe, die Größe dx^2 gegen dx weglassen, oder daß man die beyden Ausdrücke $dx + dx^2$ und dx als nicht mehr unter sich verschieden, sondern als vollkommen identisch betrachten muß, wie dieß auch schon oben bey unserm zweyten Beyspiele geschehen ist, wo man die Größe $3x\,dx + dx^2$ gleich $3x\,dx$ angenommen hat. In der That ist auch $dx + dx^2 = dx(1 + dx)$, und da, nach dem erwähnten Principe, $1 + dx$ gleich 1 ist, so muß auch $dx + dx^2$ gleich dx seyn.

Man pflegt aber solche Größen, wie dx^2, unendlich kleine

Größen der zweyten Ordnung zu nennen, und diese überhaupt durch $d^2 x$ anzudeuten, so daß also Ausdrücke der Form $d^2 u$, dx^2, $dx . dy$ u. f. als unendlich kleine Größen der zweyten Ordnung anzusehen sind, weil ihr Verhältniß zu den unendlich kleinen Größen du, dx, dy, . . . der ersten Ordnung selbst wieder unendlich klein ist. Ganz eben so wird man also auch unendlich kleine Größen der dritten Ordnung erhalten, und diese allgemein durch $d^3 u$ andeuten, wo $d^3 u$ in Beziehung auf seine Ordnung gleichbedeutend ist mit dx^3 oder $dx^2 . dy$, oder $dx . dy . dz$ u. s. w.

II. Übrigens wird man auf diesen Begriff der unendlich kleinen Größen durch die uns von allen Seiten umgebenden Erscheinungen der Natur gleichsam von selbst geführt, und man kann sie daher nicht, wie Manche glaubten, als bloße Einbildungen betrachten, die sich die Geometer zu ihren Untersuchungen ausgedacht haben. So wächst die Zeit durch die Aufeinanderfolge von Momenten, deren Intervalle kleiner sind, als jede andere angebliche, wenn auch noch so kleine Zeit. So wächst die von einem bewegten Körper beschriebene gerade oder krumme Linie auf eine Weise, daß der zwischen je zwey nächsten Punkten dieser Linie enthaltene Zwischenraum kleiner ist, als jede andere noch angebbare Linie, u. s. f.

Aus diesem Grunde wird man auch jene krummen Linien in der Geometrie, unserm aufgestellten Principe gemäß, als Polygone von unendlich vielen unendlichkleinen Seiten betrachten können, und die auf diese Betrachtung gegründeten Resultate werden mit denjenigen als identisch zusammenfallen, die unmittelbar aus dem Begriffe der stetigen Aufeinanderfolge der Punkte hervorgehen, die ein in Bewegung begriffener, und dadurch diese krumme Linie beschreibender Körper nach und nach einnimmt. Ein in einem Kreise eingeschriebenes oder ihm umschriebenes Polygon wird diesem Kreise desto näher kommen, je kleiner die Seiten dieses Polygons sind, und beyde, Kreis und Polygon, werden als ganz identische Größen zusammenfallen, oder der Unterschied zwischen beyden wird nicht weiter angegeben werden können, wenn einmal diese Seiten des Polygons selbst kleiner als jede noch angebliche gerade Linie, d. h. wenn diese Seiten unendlich klein seyn werden, wo dann sofort auch jede dieser Seiten des Polygons mit dem zu ihr gehörenden Bogen der krummen Linie, oder wo die Sehne jedes Bogens von ihrem Bogen selbst nicht weiter zu unterscheiden, und daher beyde von gleicher Größe seyn werden.

III. Die Geometrie, die uns auf diese Weise gleichsam von selbst auf die Betrachtung der unendlich kleinen Größen führt, leitet uns auch noch auf deu Unterschied, der zwischen diesen unendlich kleinen Größen in Beziehung auf die oben erwähnten Ordnungen derselben Statt hat. — Nach einer bekannten Eigenschaft des Kreises verhält sich der Sinusversus eines Bogens des Kreises zu der Sehne dieses Bogens, wie sich diese Sehne zu dem Durchmesser des Kreises verhält. Nennt man also d den Durchmesser des Kreises, und s die Sehne, so wie x den Sinusversus eines Bogens desselben, so hat man

$$\frac{x}{s} = \frac{s}{d} \quad \text{oder} \quad x = \frac{s^2}{d}.$$

Ist daher der Bogen und also auch seine Sehne s eine unendlich kleine Größe der ersten Ordnung, so ist, wie die letzte Gleichung zeigt, der Sinusversus dieses Bogens eine unendlich kleine Größe der zweyten Ordnung. Eben so ist der Flächeninhalt einer in allen ihren Dimensionen unendlich kleinen Oberfläche immer wenigstens eine unendlich kleine Größe der zweyten Ordnung, weil er kleiner ist als das Quadrat der längsten geraden Linie, die man von einem Punkte des Umfanges dieser Oberfläche zu einem andern ziehen kann. Und eben so ist endlich das Volum eines in allen seinen Dimensionen unendlich kleinen Körpers wenigstens eine unendlich kleine Größe der dritten Ordnung, weil dieses Volum des Körpers kleiner ist als der Würfel der längsten geraden Linie, die man von einem Punkte des Umfanges des Körpers zu einem andern ziehen kann.

Dieß wird genügen, dem Leser von der Beschaffenheit unseres Gegenstandes und der nun folgenden Art seiner Behandlung Rechenschaft zu geben. — Gehen wir nun zu unserem oben angeführten Zwecke die verschiedenen Funktionen durch, und betrachten wir unter ihnen zuerst die algebraischen Funktionen, d. h. diejenigen Ausdrücke, welche keine sogenannten transcendenten Größen, wie a^x, log. x, arc. sin. x u. dgl. enthalten.

§. 26. (**Differential der einfachsten algebraischen Funktionen.**) Sey zuerst die Funktion

$$u = f(x) = A - Bx$$

gegeben, wo A und B constante Größen bezeichnen. Dieß vorausgesetzt, hat man nach dem Vorhergehenden

$$du = f(x + dx) - fx \quad \text{oder}$$

$$du = [A - B(x + dx)] - [A - Bx],$$

das heißt, man hat

$$du = - Bdx,$$

und dieß ist das gesuchte Differential der Funktion $A - Bx$, also ist auch der Differential-Coefficient dieser Funktion

$$\frac{du}{dx} = - B.$$

Ist eben so die Funktion

$$u = A - Bx + Cx^2 - Dx^3$$

gegeben, so findet man auf dieselbe Weise

$$u + du = A - B(x + dx) + C(x + dx)^2 - D(x + dx)^3,$$

und wenn man davon den vorigen Ausdruck abzieht:

$$du = - Bdx + Cdx(2x + dx)$$
$$- Ddx[3x^2 + 3xdx(1 + dx)].$$

Da aber nach dem Geiste der Differentialrechnung die Größen

$$2x + dx, \quad 3x^2 + 3xdx \quad \text{und} \quad 1 + dx$$

in derselben Ordnung gleich

$$2x, \quad 3x^2 \quad \text{und} \quad 1$$

sind, so hat man sofort für das gesuchte Differential

$$du = - Bdx + 2Cxdx - 3Dx^2dx,$$

oder für den gesuchten Differential-Coefficienten

$$\frac{du}{dx} = - B + 2Cx - 3Dx^2.$$

§. 27. (**Differential eines Produktes.**) Sey u das Produkt von zwey veränderlichen Größen x und y, oder sey die Funktion

$$u = xy$$

gegeben, so hat man

$$u + du = (x + dx)(y + dy) \quad \text{oder}$$
$$u + du = xy + xdy + ydx + dxdy,$$

oder wenn man von diesem Ausdrucke den ersten $u = xy$ abzieht, und den Rest durch dx dividirt:

$$\frac{du}{dx} = \frac{xdy}{dx} + y + dy,$$

Da aber der Differential-Coefficient $\frac{dy}{dx}$ nach dem in §. 25 Gesagten eine endliche Größe ist, so ist auch $\frac{x\,dy}{dx}$ und y eine endliche, dy aber eine unendlich kleine Größe, und daher $\frac{x\,dy}{dx} + y + dy$ gleich $\frac{x\,dy}{dx} + y$, daß man daher hat

$$\frac{du}{dx} = \frac{x\,dy}{dx} + y,$$

oder wenn man alle Glieder dieses Ausdruckes durch dx multiplicirt:

$$d.(xy) = x\,dy + y\,dx.$$

Das Differential eines Produktes von zwey veränderlichen Factoren ist daher gleich der Summe der Produkte eines jeden dieser Factoren in das Differential des anderen.

Wäre eben so das Produkt $u = xyz$ von drey Factoren gegeben, so setze man der Kürze wegen $xy = t$, wodurch man erhält $u = tz$, also auch, nach dem Vorhergehenden,

$$du = t\,dz + z\,dt.$$

Aber da der Ausdruck $t = xy$ nach dem Vorhergehenden gibt $dt = x\,dy + y\,dx$, so erhält man, wenn man diesen Werth von dt in dem vorhergehenden Ausdrucke von du substituirt:

$$d.xyz = xy\,dz + xz\,dy + yz\,dx.$$

Eben so würde man, wenn $x, x', x'', x''', \ldots$ verschiedene veränderliche Größen sind, und das Produkt

$$u = xx'x''x''' \ldots$$

gegeben ist, für das Differential derselben finden

$$du = xx'x''.dx''' + xx'x'''.dx'' + xx''x'''.dx' \\ + x'x''x'''.dx, \text{ u. s. w.},$$

so daß daher das Differential eines Produktes mehrerer Factoren gleich der Summe der Produkte des Differentials eines jeden dieser Factoren in alle übrigen Factoren ist.

Auch kann man den Differential-Coefficienten des letzten Ausdruckes auf folgende einfachere Weise darstellen:

$$\frac{d.xx'x''\ldots}{xx'x''\ldots} = \frac{dx}{x} + \frac{dx'}{x'} + \frac{dx''}{x''} + \ldots$$

§. 28. (**Differential eines Quotienten.**) Sey der Ausdruck

$$u = \frac{x}{y}$$

gegeben. Man suche das Differential von u.

Da dieser Ausdruck auch so dargestellt werden kann:

$$x = uy,$$

so hat man sofort (nach §. 27)

$$dx = udy + ydu \quad \text{oder}$$

$$du = \frac{dx - udy}{y};$$

oder endlich, wenn man in dem letzten Ausdrucke den Werth von $u = \frac{x}{y}$ substituirt:

$$du = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

Das Differential eines Bruches ist daher gleich dem Produkte des Nenners in das Differential des Zählers, weniger dem Produkte des Zählers in das Differential des Nenners, diese Differenz dividirt durch das Quadrat des Nenners.

§. 29. (**Differential einer Potenz.**) Wir haben oben, zu Ende des §. 27, den Ausdruck erhalten:

$$\frac{d \, . \, xx'x'' \ldots}{xx'x'' \ldots} = \frac{dx}{x} + \frac{dx'}{x'} + \frac{dx''}{x''} + \ldots$$

Setzt man aber alle diese Größen x, x', x'', ... unter sich gleich, und nennt n die Anzahl derselben, so geht der vorhergehende Ausdruck in den folgenden einfacheren über:

$$\frac{d \, . \, x^n}{x^n} = n \, . \, \frac{dx}{x},$$

woraus sofort folgt

$$d \, . \, x^n = n x^{n-1} dx,$$

und in diesem Ausdrucke bezeichnet offenbar die Größe n eine ganze und positive Zahl.

I. Sey $u = x^{\frac{a}{b}}$ und $\frac{a}{b}$ ein positiver Bruch.

Da der gegebene Ausdruck auch so dargestellt werden kann:

$$u^b = x^a,$$

so hat man nach dem Vorhergehenden, da a und b wieder ganze positive Zahlen bezeichnen:

$$b u^{b-1} du = a x^{a-1} dx \quad \text{oder}$$

$$du = \frac{a.x^{a-1} dx}{b.u^{b-1}}.$$

Substituirt man hier statt u^{b-1} seinen Werth $(x^{\frac{a}{b}})^{b-1} = x^{a - \frac{a}{b}}$, so erhält man:

$$du = \frac{a}{b} x^{\frac{a}{b} - 1} dx.$$

Ist daher $\frac{a}{b} = n$, so ist auch

$$du = n x^{n-1} dx,$$

wie zuvor, obschon n ein positiver Bruch ist.

Da ferner die irrationalen Zahlen als die Gränzen ihrer rationalen Näherungswerthe betrachtet werden, so kann in dem letzten Ausdrucke von du die Größe n selbst eine positive irrationale Zahl bezeichnen.

II. Hat endlich diese Größe n einen an sich positiven Werth (ist z. B. $n = a^2$), und ist der Ausdruck gegeben

$$u = x^{-n},$$

so ist auch $u . x^n = 1$. Setzt man $y = x^n$, so ist $uy = 1$, und dieses Produkt gibt (nach §. 27)

$$u dy + y du = 0.$$

Allein der Ausdruck $y = x^n$, wo n eine positive, ganze oder gebrochene Zahl ist, gibt nach dem unmittelbar Vorhergehenden

$$dy = n x^{n-1} dx.$$

Substituirt man diesen Werth von dy in der obigen Gleichung, so erhält man

$$du = - n x^{-n-1} dx,$$

wie zuvor, obschon n eine an sich negative Zahl ist.

Das Differential einer Potenz x^m, wo m eine ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl ist, wird daher immer gleich seyn dem Produkte des Exponenten in die um die Einheit nächst niedere Potenz, und in das Differential der Wurzel dieser Potenz.

§. 30. (**Differential der zusammengesetzten Funktionen.**) Alle übrigen algebraischen Funktionen sind aus den vorhergehenden

(§. 26 — 29) zusammengesetzt, und lassen sich daher auch nach den bereits gegebenen Vorschriften differentiiren.

Sey z. B. die Funktion

$$u = (a + b x^m)^n$$

gegeben, so hat man für das Differential derselben

$$du = n (a + b x)^{n-1} . d (a + b x^m), \text{ oder da}$$
$$d (a + b x^m) = m b x^{m-1} d x \text{ ist,}$$
$$du = m n b (a + b x^m)^{n-1} . x^{m-1} d x.$$

Denselben Ausdruck würde man einfacher erhalten, wenn man

$$y = a + b x^m, \text{ und daher } u = y^n \text{ setzt.}$$

Denn dann ist

$$\frac{du}{dy} = n y^{n-1} \text{ und } \frac{dy}{dx} = m b x^{m-1},$$

und daher, wenn man den Werth von dy aus der zweyten dieser Gleichungen in der ersten substituirt

$$\frac{du}{dx} = m n b (a + b x^m)^{n-1} . x^{m-1}, \text{ wie zuvor.}$$

I. In diesem Beyspiele wird also u als eine Funktion von y, und y als eine Funktion von x betrachtet, und der Differential-Coefficient von u in Beziehung auf x gesucht, wo x als die unabhängige Größe gedacht wird, von welcher y unmittelbar und u mittelbar, nämlich durch Vermittlung der Größe y, abhängt.

II. Hat man, um dieß allgemein darzustellen, drey Größen u, y und x, deren die erste eine Funktion der zweyten, und die zweyte eine Funktion der dritten ist, und bestehen zwischen diesen drey Größen die folgenden zwey Gleichungen

$$u = f(y) \text{ und } y = \varphi(x),$$

wo die Zeichen f und φ im Allgemeinen Funktionen andeuten, so kann man auch das Differential von u in Beziehung auf x finden, ohne erst die Mittelgröße y aus diesen zwey Gleichungen zu eliminiren. Denn wenn diese drey Größen durch irgend eine Änderung der unabhängigen Größe x in einen neuen Zustand übergehen, wo sie, in der angeführten Ordnung durch u', y' und x' bezeichnet werden sollen, oder wo sie die Änderungen $u' - u$, $y' - y$ und $x' - x$ erlitten haben, so hat man

$$\frac{u' - u}{x' - x} = \left(\frac{u' - u}{y' - y}\right) . \left(\frac{y' - y}{x' - x}\right),$$

also auch, wenn man von diesen Verhältnissen die Gränzen nimmt

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{du}{dy}\right) \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right),$$

und in diesem Ausdrucke ist das erste du die vollständige gesuchte Änderung von u, die aus einer gegebeneu Änderung der unabhängigen Größe x entspringt; während das zweyte du nur diejenige Änderung von u ist, die aus einer Änderung von y entspringt, welche letzte selbst wieder von der Änderung der unabhängigen Größe x abhängt, so daß also der Ausdruck $\left(\frac{du}{dy}\right)$ unbestimmt bleibt, so lange $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ nicht bestimmt ist. In unserm Beyspiele ist

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = n y^{n-1} \quad \text{und} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right) = m b x^{m-1},$$

und beyder Größen Produkt ist

$$m n b y^{n-1} . x^{m-1} \quad \text{oder} \quad m n b (a + b x^m)^{n-1} . x^{m-1};$$

das heißt, ist gleich $\frac{du}{dx}$, wie zuvor.

Hätte man, um diesen allgemeinen Ausdruck noch auf ein zweytes Beyspiel anzuwenden, die zwey Gleichungen

$$u = y^2 + y^5 \quad \text{und} \quad y^2 + y^3 = x,$$

und sucht man das Differential von u in Beziehung auf x, so hat man, ohne erst zur Elimination von y aus diesen zwey Gleichungen zu gehen,

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = 2y + 5y^4 \quad \text{und} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{2y + 3y^2};$$

also ist auch sofort

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{du}{dy}\right) \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{2 + 5y^3}{2 + 3y}.$$

II. Beyspiele. Durch Anwendung des angezeigten Verfahrens findet man:

$$d . \sqrt{2ax - x^2} = \frac{(a - x)\, dx}{\sqrt{2ax - x^2}},$$

$$d \sqrt{a + x} . \sqrt[4]{a + x} = \frac{3\, dx}{4 \sqrt[4]{a + x}},$$

$$d . (a + x) \sqrt{a - x} = \frac{(a - 3x)\, dx}{2 \sqrt{a - x}},$$

$$d . \frac{a + x}{a - x} = \frac{2a\, dx}{(a - x)^2},$$

$$d \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} = \frac{-a^2 dx}{x^2 \sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$d \cdot \frac{a + 2bx^2}{x\sqrt{a + bx^2}} = \frac{-a^2 dx}{x^2 (a + bx^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

II.
Differential der transcendenten Funktionen.

§. 31. (**Differential der Logarithmen**). Bezeichnen wir den Differential-Coefficienten des Logarithmus von x, da uns derselbe noch unbekannt ist, vorläufig durch die Funktion $\varphi(x)$, so daß man also hat

$$d \cdot \log. x = \varphi(x) \cdot dx.$$

Da in diesem Ausdrucke die Größe x ganz willkürlich ist, so kann man für sie auch jede andere Größe, z. B. x^n setzen, wo n wieder eine willkürliche constante Größe bezeichnet, so daß man daher auch haben wird

$$d \cdot \log. x^n = \varphi(x^n) \cdot d.x^n.$$

Allein nach dem Vorhergehenden ist $d.x^n = nx^{n-1}dx$, und nach einer bekannten Eigenschaft der Logarithmen hat man $\log. x^n = n \log. x$; also ist auch

$$nd \cdot \log. x = \varphi(x^n) \cdot nx^{n-1} dx.$$

Substituirt man in dieser Gleichung statt $d.\log.x$ den vorhergehenden Ausdruck $\varphi(x)dx$, und dividirt dann zu beyden Seiten des Gleichheitszeichens durch ndx, so erhält man

$$x \cdot \varphi(x) = x^n \cdot \varphi(x^n).$$

Da nun x^n, wegen dem ganz willkürlichen Exponenten n, jede Größe vorstellen kann, so zeigt die letzte Gleichung, daß der Ausdruck $x.\varphi(x)$ keine Änderung erleidet, wenn man auch in ihm statt der Größe x irgend eine andere Größe x^n substituirt, und daß daher dieses Produkt $x.\varphi(x)$ von x selbst völlig unabhängig, d. h. daß es irgend eine constante Größe seyn muß. Bezeichnen wir diese constante

Größe durch m, so ist $x \cdot \varphi(x) = m$, und da $d \,.\, \log. x = \varphi(x)\, dx$ war, so hat man für das gesuchte Differential des Logarithmus

$$d \,.\, \log. x = m \,.\, \frac{dx}{x}.$$

Wir werden bald Gelegenheit haben, diese constante Größe m näher zu bestimmen. Am einfachsten und natürlichsten wird es offenbar seyn, sie gleich der Einheit anzunehmen. In der That nennt man auch, wie wir später sehen werden, diejenigen Logarithmen, für welche diese Constante m gleich der Einheit ist, die natürlichen Logarithmen. Wir wollen sie diesem gemäß durch log. nat. bezeichnen, so daß man für diese Logarithmen hat

$$d \,.\, \log.\, nat.\, x = \frac{dx}{x},$$

während wir jede andere Gattung von Logarithmen, zum Unterschiede mit jenen, gemeine Logarithmen nennen, und durch log. com. anzeigen wollen, so daß man für dieselben, wie zuvor, haben wird

$$d \,.\, \log.\, com.\, x = m \,.\, \frac{dx}{x},$$

wo die Constante m von der Einheit verschieden, übrigens unserer Willkür überlassen ist.

§. 32. (**Differential der Exponentialgrößen**). Es sey der Ausdruck

$$y = a^x$$

gegeben, wo a eine constante, und x so wie y eine veränderliche Größe bezeichnet. Nimmt man von diesem Ausdrucke die natürlichen Logarithmen, so hat man

$$\log.\, nat.\, y = x \,.\, \log.\, nat.\, a;$$

und wenn man davon, nach §. 32, das Differential nimmt, so ist

$$\frac{dy}{y} = dx \,.\, \log.\, nat.\, a, \quad \text{oder}$$

$$\frac{d \,.\, a^x}{a^x} = dx \,.\, \log.\, nat.\, a, \quad \text{oder endlich}$$

$$d \,.\, a^x = a^x dx \,.\, \log.\, nat.\, a.$$

I. Wäre die hier willkürlich gewählte Constante a diejenige, hier übrigens noch unbekannte Zahl, deren log. nat. gleich der Einheit ist, welche in der Folge noch oft vorkommende Zahl wir immer durch e anzeigen wollen, so würde man haben

$$\log.\text{nat}.\ e = 1 \quad \text{und}$$
$$d\ .\ e^x = e^x dx.$$

II. Sey noch der Ausdruck

$$u = x^y$$

gegeben, wo x sowohl als auch der Exponent y veränderlich ist. Nimmt man von ihm die natürlichen Logarithmen, so ist

$$\log.\text{nat}.\ u = y\ .\ \log.\text{nat}.\ x,$$

und davon ist das Differential (nach §. 28 und 32)

$$\frac{du}{u} = dy\ .\ \log.\text{nat}.\ x + y\ .\ \frac{dx}{x},$$

oder es ist

$$d\ .\ x^y = y x^{y-1} dx + x^y dy\ .\ \log.\text{nat}.\ x;$$

so daß daher das Differential dieses Ausdrucks x^y gleichsam aus den beyden $d\,.\,a^y$ und $d\,.\,x^n$ des §. 30 und 32 zusammengesetzt erscheint, wenn $y = n$ gesetzt wird.

§. 33. (Differential der trigonometrischen Funktionen).

Um das Differential von sin. x zu finden, hat man (Einl. §. 19 IV.)

$$d\ .\ \sin.\ x = \sin.\ (x + dx) - \sin.\ x$$
$$= \sin.\ x\ \cos.\ dx + \cos.\ x\ \sin.\ dx - \sin.\ x.$$

Allein es ist (Einl. §. 19 II.) für jeden Werth von dx

$$\cos.\ dx = 1 - 2\ \sin.^2 \frac{dx}{2},$$

und daher, wenn dx unendlich klein ist, $\cos.\ dx = 1$. Ferner ist, im ersten Quadranten des Kreises, der Bogen desselben immer größer als sein Sinus, und kleiner als seine Tangente, oder es ist

$$\text{tang}.\ dx > dx > \sin.\ dx;$$

also auch, wenn man durch sin. dx dividirt:

$$\frac{\text{tang}.\ dx}{\sin.\ dx} > \frac{dx}{\sin.\ dx} > \frac{\sin.\ dx}{\sin.\ dx}.$$

Da aber $\frac{\text{tang}.\ dx}{\sin.\ dx} = \frac{1}{\cos.\ dx}$, so ist die Einheit die Gränze, welcher sich das Verhältniß $\frac{\text{tang}.\ dx}{\sin.\ dx}$ immer mehr nähert, je kleiner dx ist. Da aber auch $\frac{\sin.\ dx}{\sin.\ dx}$ gleich der Einheit ist, so nähert sich auch das Verhältniß $\frac{dx}{\sin.\, dx}$ der Einheit desto mehr, je kleiner dx ist, so daß man daher für einen unendlich kleinen Bogen dx hat:

$$\cos.\, dx = 1 \quad \text{und} \quad \sin.\, dx = dx.$$

Substituirt man diese Werthe in dem vorhergehenden Ausdruck von $d\,.\,\sin.\,x$, so erhält man:

$$d\,.\,\sin.\,x = dx\,\cos.\,x.$$

I. Setzt man in der letzten Gleichung $90 - x$ statt x, so erhält man:

$$d\,.\,\sin.\,(90 - x) = -\,dx\,\cos.\,(90 - x) \quad \text{oder}$$
$$d\,.\,\cos.\,x = -\,dx\,\sin.\,x.$$

II. Eben so erhält man

$$d\,.\,\text{tang.}\,x = d\,.\,\frac{\sin.\,x}{\cos.\,x} = \frac{\cos\,x\,.\,d\sin.\,x - \sin.\,x\,.\,d\cos.\,x}{\cos.^2 x};$$

also auch, wenn man hierin $d\,.\,\sin.\,x$ und $d\,.\,\cos.\,x$ aus dem Vorhergehenden substituirt:

$$d\,.\,\text{tang.}\,x = \frac{dx}{\cos.^2 x};$$

und eben so erhält man auch

$$d\,.\,\text{cotang.}\,x = -\,\frac{dx}{\sin.^2 x},$$
$$d\,.\,\sec.\,x = \frac{dx\,.\,\sin.\,x}{\cos.^2 x},$$
$$d\,.\,\text{cosec.}\,x = -\,\frac{dx\,.\,\cos.\,x}{\sin.^2 x},$$
$$d\,.\,\sin.\,\text{vers.}\,x = dx\,.\,\sin.\,x \quad \text{und}$$
$$d\,.\,\cos.\,\text{vers.}\,x = -\,dx\,.\,\cos.\,x.$$

§. 34. (**Differential der Kreisbogen**). Um das Differential des Kreisbogens, zu welchem die Größe x als Sinus gehört, oder um $d\,.\,\text{arc.}\,\sin.\,x$ zu finden, sey $y = \text{arc.}\,\sin.\,x$; also auch $x = \sin.\,y$. Differirt man den letzten Ausdruck nach §. 33, so erhält man

$$dx = dy\,.\,\cos.\,y = dy\,.\,\sqrt{1 - \sin.^2 y} = dy\,.\,\sqrt{1 - x^2},$$

also ist auch

$$d\,.\,\text{arc.}\,\sin.\,x = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

I. Ganz eben so erhält man auch

$$d\,.\,\text{arc.}\,\cos.\,x = -\,\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$d\ .\ \text{arc. tang. } x = \frac{dx}{1 + x^2},$$

$$d\ .\ \text{arc. cotang. } x = -\frac{dx}{1 + x^2},$$

$$d\ .\ \text{arc. sec. } x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}},$$

$$d\ .\ \text{arc. sin. vers. } x = \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} \quad \text{u. s. w.}$$

§. 35. (Zusammenstellung des Vorhergehenden). Wenn man die bisher von §. 27 an erhaltenen Ausdrücke zur bequemeren Übersicht zusammenstellt, so hat man

$$d\ .\ xy = x\,dy + y\,dx,$$

$$d\ .\ \frac{x}{y} = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2},$$

$$d\ .\ x^n = n\,x^{n-1}\,dx,$$

$$d\ .\ \text{log. nat. } x = \frac{dx}{x} \quad \text{und}$$

$$d\ .\ \text{log. com. } x = m\ .\ \frac{dx}{x}.$$

$$d\ .\ a^x = a^x dx\ .\ \text{log. nat. } a \quad \text{und}$$

$$d\ .\ e^x = e^x dx,$$

$$d\ .\ x^y = y\,x^{y-1}\,dx + x^y\,dy\ .\ \text{log. nat. } x.$$

$$d\ .\ \text{sin. } x = dx\ \text{cos. } x,$$

$$d\ .\ \text{cos. } x = dx\ \text{sin. } x,$$

$$d\ .\ \text{tang. } x = \frac{dx}{\text{cos.}^2\, x},$$

$$d\ .\ \text{cotang. } x = -\frac{dx}{\text{sin.}^2\, x},$$

$$d\ .\ \text{arc. sin. } x = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$d\ .\ \text{arc. cos. } x = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$d\ .\ \text{arc. tang. } x = \frac{dx}{1 + x^2},$$

$$d\ .\ \text{arc. cotang. } x = -\frac{dx}{1 + x^2},$$

$$d\,.\ \text{arc. sec. } x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}},$$

$$d\,.\ \text{arc. sin. vers. } x = \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}.$$

§. 36. (**Beyspiele zu dem Vorhergehenden.**) Wir wollen nun die Vorschriften der vorhergehenden Nummer auf folgende Beyspiele anwenden, in welchen das Zeichen log. der Kürze wegen statt log. nat. gesetzt wurde, und wo e die in §. 32 I. erwähnte Zahl bezeichnet, deren natürlicher Logarithmus gleich der Einheit ist.

Sey zuerst

$$u = \log.\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

gegeben.

Setzt man

$$y = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}},\quad \text{so ist}\quad du = \frac{dy}{y}.$$

Differentiirt man aber den Ausdruck von y nach §. 28, so hat man

$$dy = \frac{(a^2+x^2) - x^2(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{a^2+x^2}dx = \frac{a^2dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und daher

$$du = \frac{a^2dx}{x(a^2+x^2)}.$$

Sey eben so

$$u = \log.\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$

gegeben.

Setzt man

$$y = \sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\quad \text{und}$$
$$z = \sqrt{1+x}-\sqrt{1-x},$$

so erhält man

$$u = \log.\frac{y}{z} = \log.\,y - \log.\,z,\quad \text{also auch}$$

$$du = \frac{dy}{y} - \frac{dz}{z}.$$

Allein es ist

$$dy = \frac{dx}{2\sqrt{1+x}} - \frac{dx}{2\sqrt{1-x}}$$

$$= -\frac{dx}{2\sqrt{1-x^2}}[\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}] = -\frac{z\,dx}{2\sqrt{1-x^2}},$$

und eben so hat man auch

$$dz = \frac{y\,dx}{2\sqrt{1 - x^2}},$$

so daß daher ist

$$\frac{dy}{y} - \frac{dz}{z} = -\frac{(y^2 + z^2)\,dz}{2yz\sqrt{1 - x^2}}.$$

Da man aber hat

$$y^2 + z^2 = 4 \quad \text{und} \quad yz = 2x,$$

so findet man endlich

$$du = -\frac{dx}{x\sqrt{1 - x^2}}.$$

Auf diese oder ähnliche Weise wird man sich auch von der Richtigkeit der folgenden Ausdrücke überzeugen, die hier, der Kürze wegen, ohne weitere Erläuterung zusammen gestellt werden.

Ist $$u = \tfrac{3}{2}(a + \sqrt{x})^{\frac{4}{3}} - 6a(a + \sqrt{x})^{\frac{1}{3}},$$

so hat man

$$dy = \frac{dx}{(a + \sqrt{x})^{\frac{2}{3}}}.$$

Ist $$u = \tfrac{1}{7}(a + x^2)^{\frac{7}{2}} - \frac{2a}{5}(a + x^2)^{\frac{5}{2}} + \tfrac{1}{3}a^2(a + x^2)^{\frac{3}{2}},$$

so hat man

$$dy = x^5\,dx\sqrt{a + x^2}.$$

Ist $$u = \tfrac{1}{2}\log.\frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{\sqrt{1 + x^2} - x},$$

so hat man

$$du = \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Ist $$u = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,.\,\log.\,(x\sqrt{-1} + \sqrt{1 - x^2}),$$

so hat man

$$du = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}};$$

also das Differential von u reell, obgleich u selbst imaginär ist.

Eben so wird man erhalten:

$$d\,.\,\log.\,[x + \sqrt{1 + x^2}] = \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}},$$

$$d\,.\,(\log.\,x)^n = n\,(\log.\,x)^{n-1}\,\frac{dx}{x},$$

$$d \,.\, \text{arc. sin.}\, \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = -\frac{2\,dx}{1 + x^2},$$

$$d \,.\, \text{arc. tang.}\, \frac{2x}{1 - x^2} = \frac{2\,dx}{1 + x^2},$$

$$d \,.\, \text{log. sin.}\, x = dx \,.\, \text{cotang.}\, x,$$

$$d \,.\, \text{arc. sin.}\, 2x\sqrt{1 - x^2} = \frac{2\,dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$d \,.\, \text{arc. tang.}\, \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x} = \frac{dx}{2\,(1 + x^2)},$$

$$d \,.\, \cos.\left(\text{log.}\, \frac{1}{x}\right) = \frac{dx}{x} \,.\, \sin.\left(\text{log.}\, \frac{1}{x}\right);$$

$$d \,.\, \cos.x^{\sin.x} = dx \cos.x^{\sin.x}\left(\cos.x \,.\, \text{log.}\cos.x - \frac{\sin.^2 x}{\cos.\, x}\right),$$

$$d \,.\, \text{log.}\,(\text{log.}\, x) = \frac{dx}{x\ \text{log.}\, x},$$

$$d \,.\, e^x\,(x - 1) = e^x \,.\, x\,dx,$$

$$d \,.\, e^x\,(x^2 - 2x + 2) = e^x \,.\, x^2\,dx,$$

$$d \,.\, a^{b^x} = a^{b^x} \,.\, b^x\,dx \,.\, \text{log.}\, a \,.\, \text{log.}\, b,$$

$$d \,.\, e^{e^x} = e^{e^x} e^x\,dx.$$

III.

Wiederholte Differentiationen und Taylor's Lehrsatz.

§. 37. (**Höhere Differentialien**). Da der Differential-Coefficient irgend einer Funktion von x wieder, wie wir aus allem Vorhergehenden gesehen haben, eine Funktion von x ist, so kann auch er ebenfalls einer neuen Differentiation unterworfen werden. Ist z. B. $u = x^n$, so ist der Differential-Coefficient dieses Ausdrucks (nach §. 29)

$$\frac{du}{dx} = n\,x^{n-1},$$

und wenn man diese Größe $n\,x^{n-1}$ neuerdings nach §. 29 differentiirt, so erhält man $n\,(n - 1)\,x^{n-2}\,dx$ für das Differential derselben, oder, was dasselbe ist, für das zweyte Differential der ursprünglichen Größe u. Drückt man dieses zweyte Differential von u durch $d^2 u$ aus, so hat man

$$d^2 u = n(n-1) x^{n-2} dx^2,$$

wo daher das Zeichen d^2 nicht mehr, wie sonst, das Quadrat von d, sondern bloß die zweymal wiederholte Differentiation der Größe u andeutet, und wo, wie man sieht, dieser Ausdruck $d^2 u$ in Beziehung auf die Ordnung des Unendlichkleinen, mit $(dx)^2$ oder mit dem Quadrate des Differentials dx von gleicher Art ist, oder wo $d^2 u$ und dx^2 als homogene Größen zu betrachten sind (vgl. §. 25, I.). Ganz eben so wird man auch das dritte Differential von u erhalten, wenn man den Ausdruck

$$n(n-1) x^{n-2}$$

noch einmal differentiirt, wodurch man also haben wird

$$d^3 u = n(n-1)(n-2) x^{n-3} dx^3 \quad \text{u. s. w.}$$

§. 38. (**Beständigkeit eines ersten Differentials**). Man sieht, daß bey diesen ferneren Differentialien der Funktion $u = f(x)$ das erste Differential dx der Stammgröße x als constant, also

$$d^2 x = d^3 x \ldots = 0$$

vorausgesetzt worden ist, weil sonst z. B. das zweyte Differential des Ausdrucks $u = x^n$ (nach §. 27 differentiirt)

$$d^2 u = n(n-1) x^{n-2} dx + n x^{n-1} d^2 x$$

keinen bestimmten Sinn, keine fixe Bedeutung mehr haben würde. Betrachtet man nämlich x als die Abscisse, und u als die darauf senkrechte Ordinate einer krummen Linie, zu welcher die Gleichung $u = f(x)$ gehört, so zeigt uns das erste Differential du der Größe u, wie sich die Differenz $u' - u = du$ zweyer nächsten Ordinaten verhält, deren senkrechter Abstand von einander die gegebene Größe dx ist. Die höheren Differentialien $d^2 u$, $d^3 u$... dieses Ausdrucks aber sollen uns offenbar das Verhalten mehrerer auf einander folgender, einander nächsten Ordinaten dieser krummen Linie kennen lehren, und dazu ist es nothwendig, daß alle diese Ordinaten unter sich gleich weit abstehen, oder daß für alle die Größe dx eine und dieselbe sey, weil sich sonst, wenn auch diese dx willkürlich veränderlich wären, nichts Bestimmtes über die ihnen zukommenden Ordinaten feststellen lassen würde.

In der That haben auch alle Ausdrücke von zweyten und höheren Differentialien, in welchen kein erstes Differential als constant angenommen wird, keine bestimmte Bedeutung mehr. Hätte man z. B. den Ausdruck

$$u = \frac{x^2 d^2 x}{d x^2},$$

und ist darin kein Differential constant angenommen, so wird man, um demselben eine bestimmte Bedeutung zu geben, irgend ein willkürliches erstes Differential als constant voraussetzen müssen. Nimmt man also z. B. $dx = \text{const.}$, so ist $d^2 x = 0$, und daher auch $u = 0$. Wählt man aber ein anderes erstes Differential, z. B. das von x^2 als constant, so ist $d . x^2 = \text{const.}$ oder $2 x d x = \text{const.}$, und daher

$$2 d x^2 + 2 x d^2 x = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 x}{d x^2} = -\frac{1}{x}.$$

Substituirt man diesen Werth von $\frac{d^2 x}{d x^2}$ in dem vorigen Ausdruck von u, so erhält man $u = -x$; ein Werth, der von dem vorigen $u = 0$ verschieden ist. Wollte man aber $d . x^3 = \text{const.}$ annehmen, so würde man $u = -2x$ finden, und $d . x^4 = \text{const.}$ würde $u = -3x$ geben u. s. w., so daß man also über die wahre Bedeutung der Größe u ganz ungewiß bleiben würde.

§. 39. (Taylor's Theorem). Sey $u = f(x)$ als eine Funktion von x gegeben. Wenn in dieser Funktion die Stammgröße x in $x + y$ übergeht, welches wird der Ausdruck der so veränderten Funktion $u' = f(x + y)$ seyn?

Um diese Frage zu beantworten, bemerken wir zuerst, daß eine willkürliche Funktion des Binoms $(x + y)$ immer denselben Differential-Coefficienten geben wird, welche von den beyden Größen x und y man auch als die veränderliche gewählt haben mag. Ist z. B.:

$$u' = (x + y)^n, \quad \text{so ist} \quad \frac{d u'}{d x} = n (x + y)^{n-1},$$

und eben so ist auch

$$\frac{d u'}{d y} = n (n + y)^{n-1}.$$

Ist aber

$$u' = \log. (x + y), \quad \text{so ist} \quad \frac{d u'}{d x} \text{ so wie } \frac{d u'}{d y'} \text{ gleich } \frac{1}{x + y} \quad \text{u. s. w.}$$

Dieß vorausgesetzt, wollen wir nun annehmen, daß der gesuchte Ausdruck von $u' = f(x + y)$ sich in eine Reihe entwickeln lasse, die nach den Potenzen der Größe y fortgeht. Nehmen wir für diese Reihe folgende Gestalt an:

$$f(x+y) = L + My^\alpha + Ny^\beta + Py^\gamma + \ldots$$

wo L, M, N ... noch unbekannte Funktionen von x sind, die kein y enthalten, und wo α, β, γ ... unbestimmte Exponenten vorstellen, die wir nun näher bestimmen wollen

Man sieht zuerst von selbst, daß keiner dieser Exponenten negativ seyn kann. Denn wenn z. B. das zweyte Glied jener Entwicklung die Form $My^{-\alpha} = \frac{M}{y^\alpha}$ hätte, so würde für $y = 0$ die zweyte Seite der vorhergehenden Gleichung unendlich groß werden, während doch die erste Seite nur $f(x)$ geben würde, was unmöglich ist.

Wenn aber alle Exponenten α, β, γ ... positiv sind, so erhält man, wenn man $y = 0$ setzt, sofort

$$f(x) = L,$$

wodurch daher bereits der erste Coefficient L unserer Reihe bestimmt wird. Bildet man dann den Differential-Coefficienten jener Entwicklung der Größe $f(x+y)$, und zwar so, daß man zuerst x und dann y als die veränderliche Größe betrachtet, so erhält man:

$$\left(\frac{dL}{dx}\right) + \left(\frac{dM}{dx}\right) y^\alpha + \left(\frac{dN}{dx}\right) y^\beta + \left(\frac{dP}{dx}\right) y^\gamma + \ldots \quad \text{und}$$

$$\alpha M y^{\alpha-1} + \beta N y^{\beta-1} + \gamma P y^{\gamma-1} + \ldots,$$

und diese beyden Ausdrücke müssen, der oben vorausgeschickten Bemerkung zu Folge, identisch seyn, welches auch der Werth von y seyn mag. Dieß kann aber nur dann Statt finden, wenn in beyden Ausdrücken gleiche Exponenten und Coefficienten von y vorkommen. Allein, wenn die Exponenten in dem ersten Ausdrucke steigend geordnet sind, so sind sie dieß auch in dem zweyten, und man hat daher

$$\alpha - 1 = 0, \quad \beta - 1 = \alpha, \quad \gamma - 1 = \beta \quad \text{u. f.}$$

woraus sofort folgt:

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 3 \quad \text{u. f.}$$

Dieß von den Exponenten vorausgesetzt, gibt dann die Vergleichung der Coefficienten folgende Gleichungen:

$$M = \left(\frac{dL}{dx}\right), \quad N = \tfrac{1}{2}\left(\frac{dM}{dx}\right), \quad P = \tfrac{1}{3}\left(\frac{dN}{dx}\right) \quad \text{u. f.}$$

oder da bereits $L = f(x) = u$ war:

$$M = \left(\frac{du}{dx}\right), \quad N = \frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right), \quad P = \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right) \quad \text{u. f.}$$

so daß man daher für die gesuchte Entwicklung den folgenden Ausdruck hat:

$$u' = u + y\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{y^2}{1.2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) + \frac{y^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right) + \ldots$$

von welcher Reihe das Gesetz des Fortgangs für sich deutlich ist. Sie ist unter der Benennung des Taylor'schen Theorems bekannt, weil Taylor sie der erste öffentlich mitgetheilt hat. (Andere Beweise dieses wichtigen Satzes findet man in Lacroix's Traité du Calc. diff. et intégral. Vol. I. S. 160 u. 277, und Vol. III. S. 60 u. 396).

Hat man also die Funktion $u = fx$ gegeben, und geht in ihr die Stammgröße x über in $x + h$, so geht u über in

$$u' = u + h\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) + \frac{h^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right) + \ldots$$

§. 40. (**Maclaurin's Theorem**). Macht man in dem zuletzt gefundenen Ausdrucke die Größe $x = 0$, und bezeichnet man die dieser Annahme entsprechenden Werthe von

$$\begin{array}{lcl} u & \text{durch} & U, \\ \left(\frac{du}{dx}\right) & \text{»} & U', \\ \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) & \text{»} & U'' \text{ u. f.} \end{array}$$

so erhält man sofort

$$f(y) = U + y \,.\, U' + \frac{y^2}{1.2} \,.\, U'' + \frac{y^3}{1.2.3} \,.\, U''' + \ldots$$

Da aber dieser Ausdruck für jeden willkürlichen Werth von y Statt haben muß, so kann man in ihm auch x statt y setzen, wodurch die Größen U, U', U''... die kein y enthalten, nicht geändert werden. Sind daher, wie zuvor, U, U', U... die Werthe von

$$u, \left(\frac{du}{dx}\right), \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) \ldots$$

unter der Voraussetzung, daß man in den letzten Ausdrücken die Größe x gleich Null gesetzt hat, so erhält man für die Entwicklung der Funktion $u = f(x)$ in einer nach den Potenzen von x fortgehenden Reihe den Ausdruck

$$u = f(x) = U + x \,.\, U' + \frac{x^2}{1.2} \,.\, U'' + \frac{x^3}{1.2.3} \,.\, U''' + \ldots$$

und dieser Ausdruck ist unter der Benennung des Theorems von Maclaurin bekannt, obschon er bereits früher von Stirling gefunden worden seyn soll.

Beschließen wir diesen Gegenstand mit der Bemerkung, daß sich die oben gegebene Taylor'sche Reihe in manchen Fällen, wenn der Stammgröße x einer Funktion bestimmte Werthe beygelegt werden, auf die Entwicklung dieser Funktion nicht anwenden lassen. Dieß wird nämlich immer dann Statt haben, wenn die wahre Entwicklung der Funktion auf gebrochene oder negative Exponenten von h führt, die in der Taylor'schen Reihe nicht vorkommen. Ist z. B.

$$u = \sqrt{x^2 - a^2}$$

gegeben, und sucht man

$$u' = \sqrt{(x+h)^2 - a^2}$$

für den bestimmten Werth von $x = a$, so hat man

$$u' = \sqrt{(a+h)^2 - a^2} = \sqrt{2ah + h^2} = \sqrt{2ah} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{h^3}{2a}} + \ldots$$

und ein solcher Ausdruck kann durch die Taylor'sche Reihe nicht gegeben werden. In allen diesen, übrigens selten vorkommenden Fällen, wird man also die Entwicklung der Funktion ganz auf die gewöhnliche Art vornehmen, so wie es in diesem Beyspiele eben geschehen ist. Wir werden später wieder auf diese Bemerkung zurückkommen.

IV.

Entwicklung der Funktionen in Reihen.

§. 41. (**Newton's Binomium**). Die beyden vorhergehenden Theoreme biethen uns sehr vortheilhafte Mittel zur Entwicklung der verschiedenen Funktionen in Reihen dar.

Sey zuerst die Funktion $u = f(x) = x^n$ gegeben. Man suche

$$u' = f(x+y) = (x+y)^n,$$

wo n was immer für eine Zahl bezeichnet.

Nach §. 29 hat man

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = n x^{n-1},$$

$$\left(\frac{d^2 u}{d x^2}\right) = n (n - 1) x^{n-2},$$

$$\left(\frac{d^3 u}{d x^3}\right) = n (n - 1) (n - 2) x^{n-3} \quad \text{u. s. w.}$$

also ist auch sofort (nach §. 39)

$$(x+y)^n = x^n + n x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^{n-3} y^3 + \ldots$$

und diese Entwicklung der Funktion $(x+y)^n$ ist unter dem Namen von Newton's Binom bekannt. Das Gesetz des Fortgangs der Reihe ist für sich klar. Wenn die Glieder derselben in der angeführten Ordnung durch 0, 1, 2, 3... bezeichnet werden, so ist das r^{te} Glied derselben

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots[n-(r-1)]}{1.2.3\ldots(r-1)r} . x^{n-r} y^r.$$

I. Ist die Größe y negativ, so erhält man die analoge Entwicklung der Größe $(x-y)^n$, wenn man in der letzten Reihe die zu dem Index 1.3.5 gehörenden Glieder negativ setzt.

Nimmt man aber $x = 1$, so hat man

$$(1+y)^n = 1 + ny + \frac{n(n-1)}{1.2} y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} y^3 + \ldots$$

oder, wenn man in diesem Ausdrucke $1 + y = z$ setzt:

$$z^n = 1 + n(z-1) + \frac{n(n-1)}{1.2}(z-1)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(z-1)^3 + \ldots$$

II. Setzt man in der gefundenen Entwicklung $y = \frac{px}{1-p}$, also auch $x + y = \frac{x}{1-p}$, so hat man $(x+y)^n = x^n . (1-p)^{-n}$. Es ist aber, nach derselben Entwicklung:

$$(1-p)^{-n} = 1 + np + \frac{n(n+1)}{1.2} p^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} p^3 + \ldots$$

also ist auch, wenn man den Werth von $p = \frac{y}{x+y}$ wieder herstellt:

$$(x+y)^n = x^n . \left[1 + n\left(\frac{y}{x+y}\right) + \frac{n(n+1)}{1.2}\left(\frac{y}{x+y}\right)^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\left(\frac{y}{x+y}\right)^3 + \ldots\right],$$

welche Reihe oft viel schneller convergirt, als der oben für $(x+y)^n$ gefundene Ausdruck.

III. Diese Reihen sind sehr geschickt, um durch sie die Wurzeln irgend einer gegebenen Zahl zu finden. Es war nämlich

$$(x+y)^n = x^n \cdot \left[1 + n\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(\frac{y}{x}\right)^3 + \ldots\right].$$

Man wird daher jede Zahl, aus welcher die n^{te} Wurzel gezogen werden soll, in zwey Theile x und y so theilen, daß x eine vollständige n^{te} Potenz irgend einer andern Zahl, und daß $\frac{y}{x}$ ein eigentlicher Bruch ist, wo dann die Reihe desto schneller convergiren wird, je kleiner dieser Bruch ist.

Für die Quadratwurzel z. B. hat man $n = \frac{1}{2}$, also auch

$$(x+y)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} \cdot \left[1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right) - \tfrac{1}{8}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \tfrac{1}{16}\left(\frac{y}{x}\right)^3 - \tfrac{5}{128}\left(\frac{y}{x}\right)^4 + \ldots\right]$$

Sucht man z. B. die Quadratwurzel von der Zahl 6, so kann man $x = 4$ und $y = 2$ nehmen, so daß man hat

$$\sqrt{6} = 2\left[1 + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{128} - \tfrac{5}{2048} + \ldots\right].$$

Da aber diese Reihe nur langsam convergirt, so kann man vortheilhafter auf folgende Weise verfahren.

Nimmt man bloß die zwey ersten Glieder der Reihe, so ist

$$\sqrt{6} = 2 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{2}.$$

Von $\frac{5}{2}$ ist aber das Quadrat $\frac{25}{4}$, oder um $\frac{1}{4}$ größer als die gegebene Zahl 6. Ist daher $x = \frac{25}{4}$ und $y = -\frac{1}{4}$, so erhält man, wenn man diese Werthe von x und y in dem vorhergehenden Ausdrucke von $(x+y)^{\frac{1}{2}}$ substituirt:

$$\sqrt{6} = \frac{5}{2} \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{25} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{25^2} - \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{25^3} - \frac{5}{128} \cdot \frac{1}{25^4} - \ldots\right]$$

oder wenn man diese Glieder summirt:

$$\sqrt{6} = 2.4494897.$$

Will man aber eine noch schneller convergirende Reihe, so kann man von dem letzten Ausdrucke wieder die zwey ersten Glieder nehmen, wodurch man erhält

$$\sqrt{6} = \tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{20} = \tfrac{49}{20},$$

wovon das Quadrat $\frac{2401}{400}$ nur um $\frac{1}{400}$ zu groß ist. Setzt man also $x = \frac{2401}{400}$ und $y = -\frac{1}{400}$, so erhält man die sehr schnell convergirende Reihe

$$\sqrt{6} = \frac{49}{20} \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2401} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2401^2} - \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2401^3} - \ldots\right],$$

oder wenn man diese Brüche in Decimalbrüche verwandelt:

$$\sqrt{6} = \frac{49}{20} \cdot \left\{ \begin{array}{l} +\ 1 \\ -\ 0.00020\ 82465\ 639 \\ -\ 0.00000\ 00216\ 830 \\ -\ 0.00000\ 00000\ 045\ \ldots \end{array} \right\},$$

das heißt

$$\sqrt{6} = 2.44948\ 97427\ 841\ \ldots$$

Ganz eben so wird man auch mit der Ausziehung der dritten und jeder andern Wurzel verfahren. Man wird so z. B. erhalten:

$$\sqrt[3]{9} = 2.0800837, \quad \sqrt[10]{10} = 1.2589255,$$

$$\sqrt[100]{10} = 1.0232930, \text{ u. f.}$$

§. 42. (**Entwicklung der Logarithmen in Reihen.**) Sey nun die Funktion

$$u = \log.\ \mathrm{com.}\ (1 + x)$$

gegeben, so hat man (nach §. 31)

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{m}{1+x}, \quad \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) = \frac{-m}{(1+x)^2}, \quad \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right) = \frac{2m}{(1+x)^3}, \text{ u. f.};$$

also auch, nach Maclaurin's Theorem (§. 40), wenn man in diesen Ausdrücken $x = 0$ setzt:

$$U = 0, \quad U' = m, \quad U'' = -m, \quad U''' = 2m, \text{ u. f.};$$

und wenn man diese Werthe in

$$u = U + xU' + \frac{x^2}{1 \cdot 2} U'' + \ldots,$$

substituirt:

$$\log.\ \mathrm{com.}\ (1+x) = m\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\right).$$

I. Man kann diesem Ausdrucke verschiedene andere Gestalten geben. Ist z. B. die Größe x negativ, so hat man

$$\log.\ \mathrm{com.}\ (1-x) = -m\left(x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \ldots\right),$$

also auch, wenn man beyde Ausdrücke von einander subtrahirt:

$$\log.\ \mathrm{com.}\ \frac{1+x}{1-x} = 2m\left(x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{7}x^7 + \ldots\right).$$

Setzt man überdieß in dem letzten Ausdrucke statt x die Größe $\frac{y}{2x+y}$, so hat man

$$\log.\,\text{com.}\,(x+y)$$
$$= \log.\,\text{com.}\,x + 2m\left[\frac{y}{2x+y} + \frac{y^3}{3\,(2x+y)^3} + \frac{y^5}{5\,(2x+y)^5} + \ldots\right]$$
u. s. f.

II. Die vorhergehenden Ausdrücke reichen hin, die Logarithmen aller natürlichen Zahlen auf eine bequeme Weise zu berechnen. Setzt man z. B. in der letzten Gleichung $x = y = 1$, so erhält man, da $\log.\,1 = 0$ ist:

$$\log.\,\text{com.}\,2 = 2m\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\,.\,3^3} + \frac{1}{5\,.\,3^5} + \frac{1}{7\,.\,3^7} + \ldots\right),$$

oder wenn man diese Brüche entwickelt:

$$\log.\,\text{com.}\,2 = m\,(0\,.\,69314\;71806).$$

Eben so gibt $x = 2$ und $y = 1$

$$\log.\,\text{com.}\,3 = \log.\,\text{com.}\,2 + 2m\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3\,.\,5^3} + \frac{1}{5\,.\,5^5} + \ldots\right) \text{ oder}$$
$$\log.\,\text{com.}\,3 = m\,(1\,.\,09861\;22887),$$

und auf dieselbe Weise findet man

$$\log.\,\text{com.}\,5 = m\,(1.60943\;79124) \quad \text{und}$$
$$\log.\,\text{com.}\,7 = m\,(1.94591\;01490).$$

Die übrigen Logarithmen bis 10 aber findet man durch bloße Addition aus dem Vorhergehenden, da

$$\log.\,4 = 2\log.\,2,$$
$$\log.\,6 = \log.\,2 + \log.\,3,$$
$$\log.\,8 = 3\log.\,2,$$
$$\log.\,9 = 2\log.\,3 \quad \text{und}$$
$$\log.\,10 = \log.\,2 + \log.\,5 = m\,(2\,.\,30258\;50930) \text{ ist.}$$

§. 43. (**Entwicklung der Exponentialgrößen.**) Ist die Funktion $u = a^x$ gegeben, so hat man (§. 32)

$$\frac{du}{dx} = a^x\,.\,\log.\,\text{nat.}\,a,$$
$$\frac{d^2u}{dx^2} = a^x\,.\,(\log.\,\text{nat.}\,a)^2,$$
$$\frac{d^3u}{dx^3} = a^x\,.\,(\log.\,\text{nat.}\,a)^3, \text{ u. f.};$$

also auch, wenn man in diesen Ausdrücken $x = 0$ setzt:

$$U = 1,$$

$$U' = \log.\,\text{nat.}\,a\,,$$
$$U'' = (\log.\,\text{nat.}\,a)^2\,,$$
$$U''' = (\log.\,\text{nat.}\,a)^3\,,\ \ldots$$

und daher nach Maclaurin's Theorem (§. 40)

$$a^x = 1 + (x \log.\,\text{nat.}\,a) + \frac{1}{1\,.\,2}(x \log.\,\text{nat.}\,a)^2 + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}(x \log.\,\text{nat.}\,a)^3 + \ldots$$

§. 44. (**Vergleichung der natürlichen und gemeinen Logarithmen.**) Wir haben oben (§. 31 und 42) gesehen, daß man die gemeinen Logarithmen aller Zahlen erhält, wenn man die natürlichen Logarithmen derselben Zahlen durch die Größe m multiplicirt, so daß also für die natürlichen Logarithmen die Größe m gleich der Einheit ist. Wir wollen nun diese Zahl m näher bestimmen.

In jedem logarithmischen Systeme muß es eine Zahl geben, deren Logarithmus gleich der Einheit ist. Man nennt diese Zahl die Basis des logarithmischen Systems. Sey also a die Basis der gemeinen, und e die Basis der natürlichen Logarithmen, so daß man hat

$$\log.\,\text{com.}\,a = 1 \quad \text{und} \quad \log.\,\text{nat.}\,e = 1.$$

Da aber, nach dem Vorhergehenden, für jede Zahl N die Gleichung besteht:

$$\log.\,\text{com.}\,N = m \log.\,\text{nat.}\,N\,,$$

so hat man auch, wenn man sowohl $N = a$, als auch $N = e$ setzt:

$$\log.\,\text{com.}\,a = m \log.\,\text{nat.}\,a \quad \text{und} \quad \log.\,\text{com.}\,e = m \log.\,\text{nat.}\,e\,,$$

und daraus folgt sofort für die Bestimmung der Größe m der doppelte Ausdruck

$$m = \log.\,\text{com.}\,e \quad \text{oder} \quad m = \frac{1}{\log.\,\text{nat.}\,a}\,.$$

I. Substituirt man diesen Werth von $\log.\,\text{nat.}\,a = \frac{1}{m}$ in der letzten Gleichung des §. 43, so erhält man für die Exponentialgröße a^x den Ausdruck

$$a^x = 1 + \left(\frac{x}{m}\right) + \frac{1}{1\,.\,2}\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\left(\frac{x}{m}\right)^3 + \ldots$$

Setzt man aber in derselben Gleichung des §. 43, da in ihr die Größe a ganz willkürlich ist, statt a die Größe e, so hat man, da $\log.\,\text{nat.}\,e = 1$ ist:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{1\,.\,2}x^2 + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \ldots$$

Wird in dieser Reihe die Größe $x = 1$ gesetzt, so hat man

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots,$$

und wenn man diese Brüche auf Decimalen zurückführt:

$$e = 2.718281\ 828459\ 045235\ 360287\ \ldots,$$

wodurch daher die Basis des Systems der natürlichen Logarithmen bestimmt ist.

II. Um eben so auch die Größe m oder den sogenannten Modul des gemeinen Logarithmen-Systems zu bestimmen, mit welchem man nämlich die natürlichen Logarithmen, deren Basis e ist, multiplicirt, um die gemeinen Logarithmen zu erhalten, deren Basis a ist, wollen wir wieder zu dem Ausdrucke des §. 42 zurückgehen. Wir haben daselbst die Gleichung erhalten:

$$\log.\mathrm{com}.(1 + x) = m(x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \ldots).$$

Setzt man in demselben die willkürliche Größe $1 + x = a$, so erhält man, da $\log.\mathrm{com}.\,a = 1$ ist:

$$\frac{1}{m} = (a - 1) - \tfrac{1}{2}(a - 1)^2 + \tfrac{1}{3}(a - 1)^3 - \ldots,$$

und durch diese Gleichung wird die Abhängigkeit der beyden Größen a und m von einander ausgedrückt, so daß also m bekannt wird, wenn a gegeben ist. Bekanntlich hat man aber in demjenigen Systeme, nach welchem diejenigen Logarithmentafeln construiret sind, mit welchen wir zu rechnen pflegen, die Basis a gleich der Zahl zehn angenommen, so daß man daher für dieses System hat

$$\frac{1}{m} = 9 - \tfrac{1}{2}9^2 + \tfrac{1}{3}9^3 - \ldots$$

Allein diese Reihe convergirt erst in ihren höheren Gliedern, und auch da zu langsam, als daß man durch sie die Größe m bequem finden könnte. Man kann sie aber leicht zu diesem Zwecke geschickter machen, wenn man bemerkt, daß die n^{te} Wurzel irgend einer selbst sehr großen Zahl der Einheit immer desto näher kömmt, je größer n ist. Setzt man also in der ersten Gleichung dieses Abschnittes wieder $1 + x = a$, so hat man

$$\log.\mathrm{com}.\,a = m\left[(a - 1) - \tfrac{1}{2}(a - 1)^2 + \tfrac{1}{3}(a - 1)^3 - \ldots\right].$$

Allein es ist auch $\log.\mathrm{com}.\,a = \omega \log.\mathrm{com}.\sqrt[\omega]{a}$, wo ω irgend eine willkürliche Zahl bezeichnet; also ist auch, wenn man diesen Werth von a substituirt:

$$\log.\mathrm{com}.\,a = m\omega\left[(\sqrt[\omega]{a}-1) - \tfrac{1}{2}(\sqrt[\omega]{a}-1)^2 + \tfrac{1}{3}(\sqrt[\omega]{a}-1)^3 - \ldots\right];$$

und daher, da $\log.\mathrm{com}.\,a = 1$ ist:

$$\frac{1}{m} = \omega\left[(\sqrt[\omega]{a}-1) - \tfrac{1}{2}(\sqrt[\omega]{a}-1)^2 + \tfrac{1}{3}(\sqrt[\omega]{a}-1)^3 - \ldots\right];$$

und diese Reihe convergirt desto schneller, je größer die Zahl ω gegen die Einheit ist. Sey z. B. $\omega = 10$, so ist, wie wir schon oben (§. 41) gefunden haben, $\sqrt[\omega]{a} = \sqrt[10]{10} = 1.2589255$; also hat man, wenn man der Kürze wegen $k = \sqrt[\omega]{a} - 1$ setzt:

$$\begin{array}{rcl}
k & = & 0.2589255 \\
-\frac{1}{2}k^2 & = & -\ 0.0335212 \\
\frac{1}{3}k^3 & = & 0.0057863 \\
-\frac{1}{4}k^4 & = & -\ 0.0011237 \\
\frac{1}{5}k^5 & = & 0.0002327 \\
-\frac{1}{6}k^6 & = & -\ 0.0000502 \\
\frac{1}{7}k^7 & = & 0.0000111 \\
-\frac{1}{8}k^8 & = & -\ 0.0000025 \\
\frac{1}{9}k^9 & = & 0.0000006 \\
-\frac{1}{10}k^{10} & = & -\ 0.0000001 \\
\hline
\text{Summe} & \ldots & 0.2302585;
\end{array}$$

und wenn man diese Summe zehnfach nimmt und die Rechnung noch weiter fortsetzt, so findet man

$$\frac{1}{m} = 2.302585\ 092994\ 045684\ 017991\ \ldots,$$

und daher auch

$$m = 0.434294\ 481903\ 251827\ 651129\ \ldots$$

III. Auch hätte man den Werth des Moduls m ohne Hülfe dieser Reihe finden können, da wir bereits oben (§. 42) den Logarithmus der Zahl 10 erhalten haben. Es war nämlich

$$\log.\mathrm{com}.\,10 = m\,(2.3025850930),$$

und da $\log.\mathrm{com}.\,10 = 1$ ist, so hat man sofort

$$m = \frac{1}{2.30258\ldots} = 0.43429\ \ldots,$$

wie zuvor.

§. 45. (Entwicklung der trigonometrischen Funktionen.) Ist die Funktion $u = \sin. x$ gegeben, so hat man (nach §. 33)

$$\frac{du}{dx} = \cos. x, \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = -\sin. x, \quad \frac{d^3 u}{dx^3} = -\cos. x, \text{ u. f.}$$

also auch, nach Maclaurin's Theorie (§. 40):

$$\sin. x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

und eben so erhält man auch

$$\cos. x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots$$

Man muß aber bey diesen und ähnlichen Ausdrücken bemerken, daß die Größe x in Secunden oder in Theilen des Kreisbogens, die Größe $\sin. x$ und $\cos. x$ aber in Theilen des Halbmessers gegeben, daß also diese beyden Arten von Größen heterogen sind, und daher auf dieselbe Einheit zurückgebracht werden müssen. Nennt man π die halbe Peripherie eines Kreises, deren Halbmesser die Einheit ist, wo die Größe π in Theilen dieses Halbmessers ausgedrückt ist, so hat man, da die halbe Peripherie $(180) . 60^2$ Secunden enthält, für den Theil x des Halbmessers, welcher der Länge eines Kreisbogens von einer Secunde entspricht,

$$180 . 60^2 : \pi = 1'' : x.$$

Es ist aber, wie wir bald sehen werden, $\pi = 3.14159265359\ldots$, also ist auch

$$x = \frac{\pi}{180 . 60^2} = 0.00000\ 484814,$$

und für diese Zahl x wollen wir künftig der Kürze wegen das Zeichen $\sin. 1''$ setzen, so daß man hat

$$\sin. 1'' = 0.00000\ 484814 \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sin. 1''} = 206264''.806247.$$

Um daher eine Anzahl Secunden in Theile des Halbmessers zu verwandeln, wird man die ersten durch $\sin. 1''$ multipliciren, und umgekehrt, um Theile des Halbmessers in Secunden zu verwandeln, wird man jene Theile des Halbmessers durch $\frac{1}{\sin. 1''}$ multipliciren, wo man hat

$$\log. \text{com.} \sin. 1'' = 4.6855749 \quad \text{und} \quad \log. \text{com.} \frac{1}{\sin. 1''} = 5.3144251.$$

Diesem gemäß sollten daher die vorhergehenden Ausdrücke vollständig so geschrieben werden:

$$\sin. x = (x \sin. 1'') - \frac{(x \sin. 1)^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$\cos. x = 1 - \frac{(x \sin. 1)^2}{1.2} + \frac{(x \sin. 1)^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

und dasselbe ist auch bey allen folgenden ähnlichen Ausdrücken zu bemerken.

I. Ist $u = f(x) = \sin. x$ und $u' = f(x+y) = \sin. (x+y)$, so hat man

$$\frac{du}{dx} = \cos. x, \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = - \sin. x, \quad \frac{d^3 u}{dx^3} = - \cos. x, \text{ u. f.}$$

also auch nach dem Taylor'schen Theorem (§. 39):

$$\sin. (x+y) = \sin. x + y \cos. x - \frac{y^2}{1.2} \sin. x - \frac{y^3}{1.2.3} \cos. x + \frac{y^4}{1.2.3.4} \sin. x + \ldots,$$

und eben so erhält man auch

$$\cos. (x+y) = \cos. x - y \sin. x - \frac{y^2}{1.2} \cos. x + \frac{y^3}{1.2.3} \sin. x + \ldots$$

§. 46. **(Entwicklung der Kreisbogen durch trigonometrische Funktionen.)** Um auch umgekehrt den Bogen eines Kreises durch seinen Sinus auszudrücken, sey $u = \text{arc. sin. } x$, also auch (§. 34)

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = x (1-x^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$\frac{d^3 u}{dx^3} = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + 3 x^2 (1-x^2)^{-\frac{5}{2}}, \text{ u. f. w.}$$

Entwickelt man diese Differential-Coefficienten noch weiter, und setzt dann in ihnen die Größe $x = 0$, so erhält man nach Maclaurin's Theorie (§. 40)

$$U = 0, \quad U' = 1, \quad U'' = 0, \quad U''' = 1 \text{ u. f. w.},$$

und daher für arc. sin. x oder x den Ausdruck

$$x = \sin. x + \frac{\sin.^3 x}{2.3} + \frac{3 \sin.^5 x}{2.4.5} + \frac{3.5 \sin.^7 x}{2.4.6.7} + \frac{3.5.7 \sin.^9 x}{2.4.6.8.9} + \ldots$$

I. Ist aber $u = \text{arc. tang. } x$, so hat man

$$\frac{du}{dx} = (1+x^2)^{-1}, \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = - 2x (1+x)^{-2},$$

$$\frac{d^3 u}{dx^3} = - 2 (1+x^2)^{-2} + 8 x^2 (1+x^2)^{-3} \text{ u. f.},$$

und wenn man $x=0$ setzt:

$$U = U'' = U^{IV} \ldots \text{ gleich Null, und}$$

$$U' = 1,\ U''' = -2,\ U^{v} = 2.3.4,\ \text{u. s. w.;}$$

also auch

$$u = \text{tang.}\, u - \tfrac{1}{3}\text{tang.}^3 u + \tfrac{1}{5}\text{tang.}^5 u - \tfrac{1}{7}\text{tang.}^7 u + \ldots$$

§. 47. (**Bestimmung der Peripherie des Kreises.**) Mittelst der zwey vorhergehenden Reihen wird der Kreisbogen durch seinen Sinus und durch seine Tangente bestimmt. Dieß gibt ein bequemes Mittel, den Umfang 2π eines Kreises, dessen Halbmesser gleich der Einheit ist, zu finden. Setzt man nämlich in der ersten Reihe $\sin. x = 1$ oder $x = \frac{1}{2}\pi = 90$ Grade, so erhält man

$$\tfrac{1}{2}\pi = 1 + \frac{1}{2.3} + \frac{3}{2.4.5} + \frac{3.5}{2.4.6.7} + \ldots$$

Mehr convergent wird die Reihe für π, wenn man $\sin. x = \frac{1}{2}$ oder $x = \frac{1}{6}\pi = 30$ Grade setzt, wodurch man erhält

$$\tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2^4.3} + \frac{3}{2^6.4.5} + \frac{3.5}{2^8.4.6.7} + \frac{3.5.7}{2^{10}.4.6.8.9} + \ldots$$

Eben so gibt die zweyte Reihe, wenn man in ihr $\text{tang.}\, u = 1$ oder $u = \frac{\pi}{4} = 45$ Grade setzt:

$$\tfrac{1}{4}\pi = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \ldots$$

Allein alle diese Reihen sind immer noch zu wenig convergent. Doch läßt sich die letzte für u (in §. 46, I.) gegebene Reihe zu der Bestimmung des Werthes von π vortheilhaft anwenden, wenn man den Bogen u in zwey Theile theilt, deren Tangenten bekannt und sehr klein sind. Machin fand, daß der Bogen $\frac{1}{4}\pi$ gleich ist dem Vierfachen des Bogens a, der $\frac{1}{5}$ zur Tangente hat, weniger dem Bogen b, der $\frac{1}{239}$ zur Tangente hat. Um sich davon zu überzeugen, so hat man

$$\text{tang.}\, a = \tfrac{1}{5} \quad \text{und} \quad \text{tang.}\, 2a = \frac{2\,\text{tang.}\, a}{1 - \text{tang.}^2 a} = \tfrac{5}{12}, \text{ oder}$$

$$\text{tang.}\, 4a = \frac{2\,\text{tang.}\, 2a}{1 - \text{tang.}^2\, 2a} = \tfrac{120}{119}.$$

Da die letzte Zahl etwas größer ist als $1 = \text{tang.}\frac{\pi}{4}$, so ist auch $4a > \frac{1}{4}\pi$. Macht man also $4a = A$ und $\frac{1}{4}\pi = B$, so hat man für den Unterschied $4a - \frac{1}{4}\pi$ oder für $A - B$ die Gleichung

$$\text{tang.}\,(A - B) = \frac{\text{tang.}\, A - \text{tang.}\, B}{1 + \text{tang.}\, A\ \text{tang.}\, B} = \tfrac{1}{239}.$$

Setzt man nun $A - B = b$, so ist auch $4a - \frac{1}{4}\pi = b$ oder $\frac{1}{4}\pi = 4a - b$, wie oben gesagt wurde.

Nimmt man nun zuerst $\text{tang.}\, u = \frac{1}{5}$ und dann $\text{tang.}\, u = \frac{1}{239}$, und substituirt diese Werthe in der vorhergehenden Gleichung

$$u = \text{tang.}\, u - \tfrac{1}{3}\text{tang.}^3 u + \tfrac{1}{5}\text{tang.}^5 u - \ldots,$$

so erhält man

$$\tfrac{1}{4}\pi = \left\{ \begin{array}{l} 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \ldots\right) \\ - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\,(239)^3} + \frac{1}{5\,(239)^5} - \ldots\right) \end{array} \right\},$$

und durch diese sehr convergente Reihe findet man ohne Mühe für π den folgenden Werth

$$\pi = 3.141592\ 653589\ 793238\ 462643 \ldots$$

§. 48. (**Sinus und Cosinus der vielfachen Winkel durch die Potenzen der einfachen.**) Sey die Funktion $u = \sin. x$, das heißt $x = \text{arc.}\sin. u$ gegeben: man suche $\cos. nx$ durch $\sin. x$, oder was dasselbe ist, $\cos.(n\ \text{arc.}\sin. u)$ durch u auszudrücken.

Zu diesem Zwecke nehmen wir an

$$\cos.(n\ \text{arc.}\sin. u) = \alpha + \beta u + \gamma u^2 + \delta u^3 + \ldots,$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die zu bestimmenden Coefficienten bezeichnen. Allein man sieht schon ohne eigentliche Berechnung, daß erstens $\alpha = 1$ seyn muß, da für $u = 0$ der Ausdruck $\cos.(n\ \text{arc.}\sin. u) = 1$ wird, und daß zweytens diese Reihe keine ungeraden Potenzen von u enthalten kann, weil für $+u$ und $-u$ der Ausdruck $\cos.(n\ \text{arc.}\sin. u)$ auch in Hinsicht auf sein Zeichen derselbe bleibt. Diesem gemäß werden wir daher annehmen können:

$$\cos.(n\ \text{arc.}\sin. u) = 1 + Au^2 + Bu^4 + Cu^6 + \ldots$$

Differentiirt man diesen Ausdruck, so erhält man

$$-n\sin.(n\ \text{arc.}\sin. u) = (2Au + 4Bu^3 + 6Cu^5 + \ldots)\sqrt{1-u^2},$$

und differentiirt man diese Gleichung wieder, so ist

$$\begin{aligned} -n^2\cos.(n\ \text{arc.}\sin. u) &= (2Au + 12Bu^2 + 30Cu^4 + \ldots)(1-u^2) \\ &\quad - (2Au + 4Bu^3 + 6Cu^5 + \ldots).u. \end{aligned}$$

Substituirt man in diesem Ausdrucke für $\cos.(n\ \text{arc.}\sin. u)$ den oben angenommenen Werth $1 + Au^2 + Bu^4 + \ldots$, so erhält man

$$\begin{aligned} -n^2(1 + Au^2 + Bu^4 + \ldots) - (2A + 12Bu^2 + 30Cu^4 + \ldots)(1-u^2) \\ + (2Au + 4Bu^3 + 6Cu^5 + \ldots)u = 0. \end{aligned}$$

Setzt man in diesem Ausdrucke, da er für alle Werthe von u wahr seyn soll, die Coefficienten von u^0, u^2, u^4, ... einzeln gleich Null, so hat man für die Bestimmung der Größen A, B, C, ... die Bedingungsgleichungen

$$1.2A + n^2 = 0,$$
$$3.4B + (n^2 - 2^2)A = 0,$$
$$5.6C + (n^2 - 4^2)B = 0,$$
$$7.8D + (n^2 - 6^2)C = 0 \text{ u. f.},$$

woraus man daher erhält

$$A = -\frac{n^2}{1.2},$$
$$B = \frac{n^2(n^2-2^2)}{1.2.3.4},$$
$$C = -\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{1.2.3.4.5.6} \text{ u. f.},$$

so daß also unsere gesuchte Reihe die folgende ist:

$$\cos. nx = 1 - \frac{n^2}{1.2}\sin.^2 x + \frac{n^2(n^2-2^2)}{1.2.3.4}\sin.^4 x - \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{1.2.3.4.5.6}\sin.^6 x + \ldots$$

Auf dieselbe Weise erhält man auch

$$\sin. nx = n\sin. x - \frac{n(n^2-1^2)}{1.2.3}\sin.^3 x + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1.2.3.4.5}\sin.^5 x - \ldots$$

Diese beyden Ausdrücke für cos. nx und sin. nx gelten für jede ganze oder gebrochene Zahl n; aber die erste ist nur dann endlich oder bricht nur dann ab, wenn n eine ganze gerade Zahl, und die zweyte, wenn n eine ungerade Zahl ist. Differentiirt man sie aber, so erhält man folgende zwey Reihen:

$$\sin. nx = \cos. x . \left[n\sin. x - \frac{n(n^2-2^2)}{1.2.3}\sin.^3 x + \frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{1.2.3.4.5}\sin.^5 x - \ldots\right],$$

$$\cos. nx = \cos. x . \left[1 - \frac{(n^2-1^2)}{1.2}\sin.^2 x + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1.2.3.4}\sin.^4 x - \ldots\right],$$

und diese beyden Reihen brechen eben in jenen Fällen ab, in welchen ihre vorhergehenden correspondirenden ohne Ende fortgehen.

Auf diese Weise erhält man nach einigen leichten Reductionen die folgenden Ausdrücke:

$$\cos. 2x = 2\cos.^2 x - 1,$$
$$\cos. 3x = 4\cos.^3 x - 3\cos. x,$$
$$\cos. 4x = 8\cos.^4 x - 8\cos.^2 x + 1,$$
$$\cos. 5x = 16\cos.^5 x - 20\cos.^3 x + 5\cos. x \text{ ꝛc.}$$

$$\sin. 2x = \sin. x(2\cos. x),$$
$$\sin. 3x = \sin. x(4\cos.^2 x - 1),$$
$$\sin. 4x = \sin. x(8\cos.^3 x - 4\cos. x),$$
$$\sin. 5x = \sin. x(16\cos.^4 x - 12\,\mathrm{coa.}^2 x + 1) \text{ ꝛc.}$$

§. 49. (**Potenzen der Sinus und Cosinus der einfachen Winkel durch die der vielfachen.**) Sey die Funktion $u = \cos.^n x$ gegeben, so findet man durch Differentiation

$$du = -nu \,.\, dx \frac{\sin. x}{\cos. x} \text{ oder}$$

$$nu \sin. x + \frac{du}{dx} \cos. x = 0.$$

Da man aber bekanntlich hat

$$\cos.^2 x = \tfrac{1}{2}(\cos. 2x + 1),$$
$$\cos.^3 x = \tfrac{1}{4}(\cos. 3x + 3\cos. x),$$
$$\cos.^4 x = \tfrac{1}{8}(\cos. 4x + 4\cos. 2x + 3) \text{ u. f.},$$

so wird man daraus durch Analogie schließen, daß $\cos.^n x$ in eine Reihe entwickelt werden kann, deren Glieder die Faktorsn

$$\cos. nx, \quad \cos.(n-2)x, \quad \cos.(n-4)x, \ldots$$

haben werden. Nehmen wir daher für diese Reihe die Form an:

$$u = A\cos. nx + B\cos.(n-2)x + C\cos.(n-4)x + \ldots,$$

und suchen wir die Werthe der Coefficienten $A, B, C, \ldots$ zu bestimmen.

Substituirt man diesen Ausdruck von u so wie sein Differential du in der vorhergehenden Differentialgleichung, so erhält man

$$n\sin. x[A\cos. nx + B\cos.(n-2)x + C\cos.(n-4)x + \ldots]$$
$$- \cos. x[nA\sin. nx + (n-2)B\sin.(n-2)x$$
$$+ (n-4)C\sin.(n-4)x + \ldots] = 0.$$

Man hat aber, wie bekannt (Einl. §. 19, VI.),

$$2 \sin. x \cos. nx = \sin. (n+1) x - \sin. (n-1) x \quad \text{und}$$

$$2 \cos. x \sin. nx = \sin. (n+1) x + \sin. (n-1) x.$$

Bringt man diese Umformung in der vorhergehenden Gleichung an, und setzt dann die Factoren der Sinus der vielfachen Bogen, jeden für sich, gleich Null, so erhält man

$$B - An = 0,$$
$$2C - B(n-1) = 0,$$
$$3D - C(n-2) = 0,$$
$$4E - D(n-3) = 0 \text{ u. f.},$$

also auch

$$B = nA,$$
$$C = \frac{n(n-1)}{1.2} A,$$
$$D = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} A \text{ u. f.},$$

und daher für den gesuchten Ausdruck von u

$$\cos.^n x = A . \Big[\cos. nx + \frac{n}{1} \cos. (n-2) x + \frac{n(n-1)}{1.2} \cos. (n-4) x + \ldots \Big].$$

In dieser Gleichung ist der Factor A noch unbestimmt. Setzt man aber darin $x = 0$, so hat man

$$1 = A . \Big[1 + \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \ldots \Big],$$

und daraus erhält man (nach §. 41) den Ausdruck $1 = A . (1+1)^n$ oder $A = \frac{1}{2^n}$, so daß man daher hat

$$\cos.^n x = \frac{1}{2^n} . \Big[\cos. nx + \frac{n}{1} \cos. (n-2) x + \frac{n(n-1)}{1.2} \cos. (n-4x) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \cos. (n-6x) + \ldots \Big].$$

I. Der gefundene Ausdruck von $\cos.^n x$ gilt für alle, auch gebrochene Zahlen n. Wenn aber n eine ganze Zahl ist, so muß man bemerken, daß man im Verfolge der Glieder dieser Reihe auf negative Winkel kommt, deren Cosinus von den ihnen gleichen positiven Winkeln nicht verschieden ist. So hat man für $n = 3$

$$\cos.^3 x = \frac{1}{2^3} (\cos. 3x + 3 \cos. x + 3 \cos. x + \cos. 3x) \text{ oder}$$

$$\cos.^3 x = \frac{1}{2^{3-1}} (\cos. 3x + 3 \cos. x),$$

so daß man also, wenn n eine ganze, ungerade Zahl ist, jene Reihe doppelt nehmen muß, um den Werth von $\cos.^n x$ zu erhalten. Ist aber n eine ganze gerade Zahl, z. B. $n = 4$, so hat man

$$\cos.^4 x = \frac{1}{2^4} (\cos. 4x + 4 \cos. 2x + 6 + 4 \cos. 2x + \cos. 4x) \text{ oder}$$

$$\cos.^4 x = \frac{1}{2^{4-1}} (\cos. 4x + 4 \cos. 2x + \tfrac{1}{2}.6),$$

so daß man also für gerade n zwar auch die Reihe doppelt nimmt, aber mit Ausnahme des mittleren Gliedes, dessen Factor cos. o ist. Drückt man daher die Reihe auf folgende Art aus:

$$\cos.^n x = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \Big[\cos. nx + \frac{n}{1} \cos. (n-2) x + \frac{n(n-1)}{1.2} \cos. (n-4) x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \cos. (n-6) x + \ldots\Big],$$

so wird man diese Reihe nur bis zu jenem Gliede fortsetzen, dessen Cosinus den ersten negativen Winkel enthält, und wenn man, für gerade n, auf das Glied kömmt, dessen Factor cos. o ist, von diesem Gliede nur die Hälfte nehmen.

Auf diese Weise erhält man

$$2 \cos.^2 x = \cos. 2x + 1,$$
$$4 \cos.^3 x = \cos. 3x + 3 \cos. x,$$
$$8 \cos.^4 x = \cos. 4x + 4 \cos. 2x + 3,$$
$$16 \cos.^5 x = \cos. 5x + 5 \cos. 3x + 10 \cos. x \text{ ꝛc.}$$

II. Um daraus die analogen Reihen für $\sin.^n x$ abzuleiten, setze man in dem vorhergehenden Ausdrucke von $\cos.^n x$ statt x die Größe $\frac{1}{2}\pi - x$, so hat man

$$\sin.^n x = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \Big[\cos. n(\tfrac{1}{2}\pi - x) + n \cos. (n-2)(\tfrac{1}{2}\pi - x) + \frac{n(n-1)}{1.2} \cos. (n-4)(\tfrac{1}{2}\pi - x) + \ldots\Big].$$

Um diesen Ausdruck einfacher darzustellen, muß man die beyden Fälle unterscheiden, wo n gerade und ungerade ist. Sey also zuerst eine gerade, und zwar eine sogenannte doppelt gerade oder durch 4 theilbare Zahl, also $n = 4, 8, 12, \ldots$ Für solche Zahlen ist aber $\cos. n(\frac{1}{2}\pi - x) = \cos. nx$, $\cos. (n-2)(\frac{1}{2}\pi - x) = -\cos. (n-2) x$,

$$\cos. (n-4)(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \cos. (n-4) x \text{ u. s. w.},$$

und daher

$$\sin.^n x = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \Big[\cos. nx - n\cos.(n-2)x + \frac{n.n-1}{1.2}\cos.(n-4)x - \ldots\Big].$$

Ist aber n nur eine einfach gerade oder durch 2 theilbare Zahl, wie 2, 6, 10, . . ., so hat man

$$\cos. n(\tfrac{1}{2}\pi - x) = -\cos. nx,\ \cos.(n-2)(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \cos.(n-2)x,$$
$$\cos.(n-4)(\tfrac{1}{2}\pi - x) = -\cos.(n-4)x \text{ u. s.},$$

und daher

$$\sin.^n x = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \Big[-\cos. nx + n\cos.(n-2)x - \frac{n.n-1}{1.2}\cos.(n-4)x + \ldots\Big].$$

Um daher beyde Fälle zusammen zu fassen, so hat man für jede gerade Zahl n

$$\pm 2^{n-1}.\sin.^n x = \Big[\cos. nx - n\cos.(n-2)x + \frac{n.n-1}{1.2}\cos.(n-4)x - \ldots\Big],$$

wo das obere oder untere Zeichen genommen wird, wenn n doppelt oder einfach gerade ist, und wo man, wie zuvor, nur die positiven Winkel, und endlich von dem Factor des cos. o nur die Hälfte nimmt.

Ganz eben so findet man auch für jede ungerade Zahl n

$$\pm 2^{n-1}.\sin.^n x = \Big[\sin. nx - n\sin.(n-2)x + \frac{n.n-1}{1.2}\sin.(n-4)x - \ldots\Big],$$

wo das obere oder untere Zeichen genommen wird, wenn n gleich 1, 5, 9, . . . oder gleich 3, 7, 11, . . . ist.

Auf diese Weise erhält man

$$2\sin.^2 x = -\cos. 2x + 1,$$
$$4\sin.^3 x = -\sin. 3x + 3\sin. x,$$
$$8\sin.^4 x = \cos. 4x - 4\cos. 2x + 3,$$
$$16\sin.^5 x = \sin. 5x - 5\sin. 3x + 10\sin. x \text{ ꝛc.}$$

§. 50. (**Entwicklung der Potenz eines Polynoms.**) Sey das Polynom oder der vielgliedrige Ausdruck

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$$

gegeben, von welchem die Anzahl der Glieder desselben unbestimmt ist. Man entwickle die n^{te} Potenz desselben in eine Reihe, die nach den Potenzen der Stammgröße x dieses Polynoms fortgeht, d. h. man entwickle den Ausdruck

$$u = (a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots)^n$$

in eine Reihe der Form

$$u = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots,$$

wo also $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die zu bestimmenden Größen sind.

Nimmt man von dem ersten Ausdrucke die logarithmischen Differentialien (nach §. 31), so hat man

$$\frac{du}{u} = \frac{n(b + 2cx + 3dx^2 + \ldots)dx}{a + bx + cx^2 + \ldots},$$

wo hier und im Folgenden immer die natürlichen Logarithmen gemeint sind, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich bemerkt wird.

Eben so hat man, wenn man den zweyten Ausdruck von u differentiirt:

$$\frac{du}{dx} = \beta + 2\gamma x + 3\delta x^2 + \ldots$$

Setzt man diese beyden Ausdrücke von $\frac{du}{dx}$ einander gleich, so erhält man

$$n(b + 2cx + 3dx^2 + \ldots)(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots) \\ - (a + bx + cx^2 + \ldots)(\beta + 2\gamma x + 3\delta x^2 + \ldots) = 0.$$

Führt man die beyden Multiplicationen dieses Ausdruckes aus, und ordnet die Produkte nach den Potenzen von x, so erhält man

$$\begin{aligned} 0 = {} & (\alpha\beta - nb\alpha) \\ & + (2a\gamma + b\beta - nb\beta - 2nc\alpha)x \\ & + (3a\delta + 2b\gamma + c\beta - nb\gamma - 2nc\beta - 3nd\alpha)x^2 \\ & + (4a\varepsilon + 3b\delta + 2c\gamma + d\beta - nb\delta - 2nc\gamma - 3nd\beta - 4ne\alpha)x^3 + \ldots \end{aligned}$$

und da die Factoren von $x^0, x', x^2, \ldots$ jeder für sich gleich Null seyn müssen, so hat man zur Bestimmung der unbekannten Größen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} a\beta &= n \,.\, b\alpha, \\ 2a\gamma &= (n-1)b\beta + 2nc\alpha, \\ 3a\delta &= (n-2)b\gamma + (2n-1)c\beta + 3nd\alpha, \\ 4a\varepsilon &= (n-3)b\delta + (2n-2)c\gamma + (3n-1)d\beta + 4ne\alpha, \\ 5a\zeta &= (n-4)b\varepsilon + (2n-3)c\delta + (3n-2)d\gamma + (4n-1)e\beta + 5nf\alpha \end{aligned}$$

u. s. w.

wovon das Gesetz des Fortgangs deutlich ist. Dabey bleibt die erste Größe α unbestimmt. Es ist aber $\alpha = a^n$, wie man findet, wenn man in dem ersten Ausdrucke vor u die Größe $x = o$ setzt.

Wenn die Anzahl der Glieder des gegebenen Polynoms endlich, und n eine ganze positive Zahl ist, so werden auch von den gesuchten Größen $\alpha \beta \gamma \ldots$, so bald eines derselben verschwindet, alle andern ebenfalls gleich Null seyn. Ist z. B. $d = e = f \ldots$ gleich Null, und $n = 3$, so hat man für die dritte Potenz des Trinoms

$$a + bx + cx^2, \text{ oder für}$$
$$(a + bx + cx^2)^3 = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots$$

wo die Werthe von α, β, $\gamma \ldots$ durch folgende Ausdrücke bestimmt werden:

$$\alpha = a^3, \quad \beta = 3a^2b, \quad \gamma = 3ab^2 + 3a^2c,$$
$$\delta = b^3 + 6abc, \quad \varepsilon = 3b^2c + 3ac^2, \quad \zeta = 3bc^2, \quad \eta = c^3,$$

und wo alle übrigen Größen θ, ι, $\varkappa \ldots$ gleich Null sind.

§. 51. (Entwicklung des Logarithmus eines Polynoms).

Sey der Ausdruck

$$u = \log. (1 + ax + bx^2 + cx^3 + \ldots)$$

in einer Reihe der Form

$$u = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \ldots$$

zu entwickeln, so gibt das Differential des ersten Ausdrucks von u

$$(1 + ax + bx^2 + \ldots) \frac{du}{dx} = a + 2bx + 3cx^2 + \ldots$$

und das des zweyten Ausdrucks

$$\frac{du}{dx} = \alpha + 2\beta x + 3\gamma x^2 + \ldots$$

Setzt man diese beyden Werthe von $\frac{du}{dx}$ einander gleich, so erhält man

$$\begin{aligned} o = & (\alpha - a) \\ & + (2\beta + \alpha a - 2b) x \\ & + (3\gamma + 2\beta a + \alpha b - 3c) x^2 + \ldots \end{aligned}$$

und daraus folgt für die Bestimmung der Größen α, β, $\gamma \ldots$

$$\begin{aligned} \alpha &= a, \\ \beta &= -\tfrac{1}{2}\alpha a + b, \\ \gamma &= -\tfrac{2}{3}\beta a - \tfrac{1}{3}\alpha b + c, \\ \delta &= -\tfrac{3}{4}\gamma a - \tfrac{2}{4}\beta b - \tfrac{1}{4}\alpha c + d, \\ \varepsilon &= -\tfrac{4}{5}\delta a - \tfrac{3}{5}\gamma b - \tfrac{2}{5}\beta c - \tfrac{1}{5}\alpha d + e \quad \text{rc.} \end{aligned}$$

§. 52. (**Entwicklung einer polynomischen Exponentialgröße**). Ist eben so die Funktion

$$u = e^{ax+bx^2+cx^3+\dots}$$

gegeben, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet, und setzt man

$$u = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \dots$$

so hat man, wenn man die Logarithmen nimmt:

$$\log. u = ax + bx^2 + cx^3 + \dots$$

und davon ist das Differential

$$\frac{du}{dx} = u(a + 2bx + 3cx^2 + \dots).$$

Eben so hat man aber auch

$$\frac{du}{dx} = \alpha + 2\beta x + 3\gamma x^2 + \dots$$

Setzt man daher beyde Werthe von $\frac{du}{dx}$ einander gleich, so erhält man, wie zuvor:

$$\alpha = a,$$
$$\beta = b + \tfrac{1}{2}\alpha a,$$
$$\gamma = c + \tfrac{2}{3}\alpha b + \tfrac{1}{3}\beta a,$$
$$\delta = d + \tfrac{3}{4}\alpha c + \tfrac{2}{4}\beta b + \tfrac{1}{4}\gamma a,$$
$$\varepsilon = e + \tfrac{4}{5}\alpha d + \tfrac{3}{5}\beta c + \tfrac{2}{5}\gamma b + \tfrac{1}{5}\delta a \quad \text{rc.}$$

wovon das Gesetz des Fortgangs deutlich ist.

V.
Differentiation der Funktionen von zwey und mehr veränderlichen Größen.

§. 53. (**Erweiterung von Taylor's Theorem auf Funktionen von zwey veränderlichen Größen**). Sey $u = f(x, y)$ eine Funktion von zwey veränderlichen Größen x und y. Nimmt man zuerst an, daß bloß die Größe x sich ändere, und in $x + h$ übergehe, während y als constant betrachtet wird, so kann man, um die daraus folgende Änderung von u, oder um die Größe f(x + h, y) zu finden, unmittelbar das Theorem Taylor's (§. 39) anwenden, so daß man hat

$$f(x+h,\,y) = u + h\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{h^2}{1\,.\,2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) + \frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3}\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right) + \ldots$$

wo also die Ausdrücke $\left(\frac{du}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)$ ... die ersten und zweyten Differential-Coefficienten der Funktion $u = f(x, y)$, aber bloß in Beziehung auf die eine x der beyden veränderlichen Größen x und y bezeichnen.

Wollte man eben so bloß die Größe y ändern, und in $y + k$ übergehen lassen, während x unverändert bleibt, so würde man auf dieselbe Weise erhalten:

$$f(x,\,y+k) = u + k\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{k^2}{1\,.\,2}\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) + \ldots$$

wo wieder $\left(\frac{du}{dy}\right)$, $\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)$ die Differentialien der gegebenen Funktion $u = f(x, y)$, bloß in Beziehung auf die Größe y genommen, bezeichnen. Man nennt diese Größen $\left(\frac{du}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)$ ... die ersten und zweyten partiellen Differentialien der Größe u in Beziehung auf x, und schließt sie in Klammern ein, um sie von den vollständigen Differentialien der Größe u zu unterscheiden, in welchen letzten beyde Größen x und y als veränderlich vorausgesetzt werden. Diese sehr angemessene Bezeichnung wollen wir auch künftig beybehalten.

Um aber das vollständige Differential der Größe u, oder um den Ausdruck

$$f(x+h,\,y+k) - f(x,\,y)$$

zu erhalten, wird man, nur in jedem Gliede der bereits erhaltenen Entwicklung von $f(x + h, y)$, in welcher bloß x veränderlich war, auch die Größe y in $y + k$ übergehen lassen, wobey aber die Größe x als constant angesehen, und jedes dieser Glieder als eine bloße Funktion von y betrachtet werden muß.

Wir hatten aber bereits

$$f(x+h,\,y) = u + h\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{h^2}{1\,.\,2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) + \ldots$$

Sucht man daher von dem ersten Gliede u dieses Ausdruckes das Differential in Beziehung auf y, so hat man, nach demselben Taylor'schen Theorem, statt u die Größe

$$u + k\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{k^2}{1\,.\,2}\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) + \ldots$$

und eben so wird man erhalten

$$\text{statt} \left(\frac{du}{dx}\right) \text{ die Größe } \left(\frac{du}{dx}\right) + k\left(\frac{d^2u}{dydx}\right) + \frac{k^2}{1.2}\left(\frac{d^3u}{dy^2dx}\right) + ..$$

$$\text{»} \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) \text{ » » } \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) + k\left(\frac{d^3u}{dydx^2}\right) + \frac{k^2}{1.2}\left(\frac{d^4u}{dy^2dx^2}\right) + ..$$

$$\text{»} \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right) \text{ » » } \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right) + k\left(\frac{d^4u}{dydx^3}\right) + \frac{k^2}{1.2}\left(\frac{d^5u}{dy^2dx^3}\right) + ..$$

Substituirt man diese Werthe in dem vorhergehenden Ausdruck von $f(x+h, y)$, so erhält man für das gesuchte vollständige Differential der Größe $u = f(x, y)$

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) - u = {} & k\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{k^2}{1.2}\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) + \frac{k^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3u}{dy^3}\right) + \ldots \\ & + h\left(\frac{du}{dx}\right) + kh\left(\frac{d^2u}{dydx}\right) + \frac{k^2h}{1.2}\left(\frac{d^3u}{dy^2dx}\right) + \ldots \\ & + \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) + \frac{kh^2}{1.2}\left(\frac{d^3u}{dydx^2}\right) + \ldots \\ & + \frac{h^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right) + \ldots \end{aligned}$$

Das allgemeine Glied dieses Ausdrucks ist

$$\frac{h^m k^n}{1.2.3\ldots m.1.2.3.n}\left(\frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n}\right)$$

wo man z. B. um die vier Glieder der dritten vertikalen Reihe zu erhalten, $m+n=3$, also nach einander

m gleich 3 oder 2 oder 1 und 0
und n » 0 » 1 » 2 » 3

setzen wird.

I. Man hat diesen Ausdruck erhalten, indem man zuerst x in $x+h$ und dann y in $y+k$ verwandelt hat. Hätte man aber umgekehrt zuvor y und dann erst x sich verändern lassen, so würde man in

$$f(x, y+k) = u + k\left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{k^2}{1.2}\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) + \ldots$$

$$\text{statt u die Größe } u + h\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) + \ldots$$

$$\text{»} \left(\frac{du}{dy}\right) \text{ » » } \left(\frac{du}{dy}\right) + h\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right) + \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^3u}{dx^2dy}\right) + \ldots$$

$$\text{»} \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) \text{ » » } \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) + h\left(\frac{d^3u}{dxdy^2}\right) + \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^4u}{dx^2dy^2}\right) + \ldots$$

setzen, und dadurch für das vollständige Differential von u erhalten:

$$f(x+h,\, y+k) - u = h\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) + \ldots$$
$$+ k\left(\frac{du}{dy}\right) + hk\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right) + \ldots$$
$$+ \frac{k^2}{1.2}\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) + \ldots$$

II. Da aber beyde Entwicklungen offenbar identisch seyn müssen, so hat man auch die Gleichungen

$$\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right),\quad \left(\frac{d^3u}{dx^2\,dy}\right) = \left(\frac{d^3u}{dx^2\,dy}\right),$$

und überhaupt

$$\left(\frac{d^{m+n}u}{dx^m\,dy^n}\right) = \left(\frac{d^{m+n}u}{dy^n\,dx^m}\right),$$

woraus hervorgeht, daß bey diesen partiellen Differential-Coefficienten die Ordnung, in welcher man die Differentiation in Beziehung auf x und auf y vornimmt, ganz willkürlich ist.

Ist z. B. die Funktion $u = x^m y^n$ gegeben, so hat man, wenn man zuerst in Beziehung auf x differentiirt:

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = m x^{m-1} y^n \quad \text{und dann} \quad \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right) = m n x^{m-1} y^{n-1}.$$

Differentiirt man aber zuerst in Beziehung auf y, so hat man

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = n x^m y^{n-1} \quad \text{und} \quad \left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right) = m n x^{m-1} y^{n-1},$$

wie zuvor.

§. 54. (**Differential einer Funktion von zwey und mehr veränderlichen Grölzen**). Bleibt man endlich bey den ersten Differentialien stehen, so erhält man

$$d.f(x,y) = du = \left(\frac{du}{dx}\right)dx + \left(\frac{du}{dy}\right)dy,$$

so daß daher das vollständige Differential einer Funktion u von zwey veränderlichen Größen x und y gleich der Summe der beyden partiellen Differentialien dieser Funktion ist.

Ist z. B. $u = xy$ gegeben, so hat man

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = y \quad \text{und} \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = x,$$

also ist auch das vollständige Differential von u, oder

$$du = y\,dx + x\,dy$$

übereinstimmend mit §. 27.

Ist aber $u = \text{arc. tang.} \frac{x}{y}$ gegeben, so hat man

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{y}{x^2 + y^2} \text{ und } \left(\frac{du}{dy}\right) = -\frac{x}{x^2 + y^2};$$

also ist auch

$$du = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}.$$

I. Dieselbe Bemerkung wird auch für Funktionen von drey und mehreren veränderlichen Größen gelten. Wäre z. B.

$$u = f(t, x, y, z)$$

eine Funktion von vier Größen, so wird das vollständige Differential derselben seyn:

$$du = \left(\frac{du}{dt}\right) dt + \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy + \left(\frac{du}{dz}\right) dz.$$

II. Durch diese Bemerkung wird die Differentiation eines Ausdrucks von mehr veränderlichen Größen oft sehr erleichtert. Wir wollen dieß sogleich an einem Beyspiele aus der sphärischen Trigonometrie zeigen.

Nennt man A, B, C die Winkel eines sphärischen Dreyecks, und $BC = \alpha$, $AC = \beta$, $AB = \gamma$ die ihnen gegenüberstehenden Seiten, und nimmt man an, daß in diesem Dreyecke die Seite α um $d\alpha$, die Seite γ um $d\gamma$ und der Winkel B um dB geändert werde: wie groß wird dann die daraus folgende Änderung $d\beta$ der Seite β, und die Änderung dA des Winkels A seyn?

Diese Frage zu beantworten, wird man diejenigen Gleichungen der sphärischen Trigonometrie zu Grunde legen, welche den Winkel A und die Seite β durch die drey Größen α, γ und B geben. Diese sind bekanntlich (§. 21, C.)

$$\text{cotang. } A = \frac{\text{cotang. } \alpha \text{ sin. } \gamma - \text{cos. } \gamma \text{ cos. } B}{\text{sin. } B} \text{ und}$$

$$\text{cos. } \beta = \text{cos. } \alpha \text{ cos. } \gamma + \text{sin. } \alpha \text{ sin. } \gamma \text{ cos. } B.$$

Differentiirt man diese Gleichungen in Beziehung auf alle in ihnen enthaltenen Größen, so wird man die unbekannten Größen dA und $d\beta$ durch die bekannten $d\alpha$, dB und $d\gamma$ ausgedrückt erhalten. Allein statt auf diese Weise sogleich die vollständigen Differentialien von A und β zu suchen, wird es bequemer seyn, vorerst die partiellen Differentialien dieser Größen in Beziehung auf α, B und γ zu bestimmen.

Sucht man demnach z. B. das partielle Differential $\left(\frac{d\beta}{dB}\right)$, indem man α und γ constant voraussetzt, so gibt die zweyte der angeführten Gleichungen

$$-d\beta \sin.\beta = - dB \sin.B \sin.\alpha \sin.\gamma \quad \text{oder}$$

$$\left(\frac{d\beta}{dB}\right) = \frac{\sin.B \sin.\alpha \sin.\gamma}{\sin.\beta},$$

oder endlich, da $\frac{\sin.B \sin.\gamma}{\sin.\beta} = \sin.C$ ist:

$$\left(\frac{d\beta}{dB}\right) = \sin.C \sin.\alpha.$$

Eben so erhält man das partielle Differential

$$\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right) = \cos.C \quad \text{und} \quad \left(\frac{d\beta}{d\gamma}\right) = \cos.A;$$

für den Winkel A aber erhält man auf dieselbe Weise

$$\left(\frac{dA}{dB}\right) = -\frac{\sin.\alpha}{\sin.\beta}\cos.C,$$

$$\left(\frac{dA}{d\alpha}\right) = \frac{\sin.C}{\sin.\beta} \quad \text{und}$$

$$\left(\frac{dA}{d\gamma}\right) = -\sin.A \operatorname{cotang}.\beta.$$

Da nun, dem Vorhergehenden zu Folge, das vollständige Differential gleich der Summe aller seiner partiellen Differentiale ist, so hat man für die gesuchte vollständige Änderung der beyden Größen β und A folgende Ausdrücke:

$$d\beta = d\alpha \cos.C + d\gamma \cos.A + dB \sin.\alpha \sin.C \quad \text{und}$$

$$dA = d\alpha\frac{\sin.C}{\sin.\beta} - d\gamma \operatorname{cotang}.\beta \sin.A - dB\frac{\sin.\alpha \cos.C}{\sin.\beta}.$$

Ist das gegebene Dreyeck ABC ein ebenes oder geradliniges, so wird man in den vorhergehenden Ausdrücken statt dem Sinus der Seiten, diese Seiten $\alpha\beta\gamma$ selbst setzen, und dadurch erhalten:

$$d\beta = d\alpha \cos.C + d\gamma \cos.A + dB.\alpha \sin.C,$$

$$dA = \frac{d\alpha}{\beta}\sin.C - \frac{d\gamma}{\beta}\sin.A - dB.\frac{\alpha}{\beta}\cos.C.$$

Ist endlich der Winkel C ursprünglich ein rechter Winkel, so hat man

$$d\beta = d\gamma \cos.A + \alpha.dB \quad \text{und}$$

$$dA = \frac{d\alpha - d\gamma \sin.A}{\beta}.$$

III. Wenn man auf die erwähnte Weise alle Fälle durchgeht, die bey einem sphärischen Dreyecke Statt haben können, so erhält man, indem man immer zwey Seiten oder zwey Winkel, oder einen Winkel und eine Seite des Dreyecks constant annimmt, folgende Tabelle, die bey der Auflösung der Dreyecke sehr nützlich ist.

A. Wenn der Winkel A und die Seite γ constant ist.

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \cos. C, \quad \frac{d\beta}{dB} = \frac{\sin.\alpha}{\sin. C}, \quad \frac{d\alpha}{dB} = \frac{\sin.\alpha}{\mathrm{tang.}\, C},$$

$$\frac{d\beta}{dC} = -\frac{\mathrm{tang.}\,\alpha}{\sin. C}, \quad \frac{d\alpha}{dC} = -\frac{\mathrm{tang.}\,\alpha}{\mathrm{tang.}\, C}, \quad \frac{dB}{dC} = -\frac{1}{\cos.\alpha}.$$

B. Wenn A und α constant ist.

$$\frac{d\gamma}{d\beta} = -\frac{\cos. C}{\cos. B}, \quad \frac{dC}{dB} = -\frac{\cos.\gamma}{\cos.\beta}, \quad \frac{d\gamma}{dC} = \frac{\mathrm{tang.}\,\gamma}{\mathrm{tang.}\, C},$$

$$\frac{d\beta}{dB} = \frac{\mathrm{tang.}\,\beta}{\mathrm{tang.}\, B}, \quad \frac{d\gamma}{dB} = -\frac{\mathrm{tang.}\,\beta \cos. C}{\sin. B},$$

$$\frac{d\beta}{dC} = -\frac{\mathrm{tang.}\,\gamma \cos. B}{\sin. C}.$$

C. Wenn β und γ constant ist.

$$\frac{dB}{dC} = \frac{\mathrm{tang.}\, B}{\mathrm{tang.}\, C}, \quad \frac{d\alpha}{dB} = -\frac{\sin.\alpha}{\mathrm{cotang.}\, C}, \quad \frac{d\alpha}{dC} = -\frac{\sin.\alpha}{\mathrm{cotang.}\, B},$$

$$\frac{d\alpha}{dA} = \sin. B \sin.\gamma, \quad \frac{dA}{dB} = -\frac{\sin. A}{\sin. B \cos. C},$$

$$\frac{dA}{dC} = -\frac{\sin.\alpha}{\sin.\gamma \cos. B}.$$

D. Wenn B und C constant ist.

$$\frac{d\beta}{d\gamma} = \frac{\mathrm{tang.}\,\beta}{\mathrm{tang.}\,\gamma}, \quad \frac{dA}{d\beta} = \sin. A\, \mathrm{tang.}\,\gamma, \quad \frac{dA}{d\gamma} = \sin. A\, \mathrm{tang.}\,\beta,$$

$$\frac{dA}{d\alpha} = \sin.\gamma \sin. B, \quad \frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{\sin.\alpha}{\sin.\beta \cos.\gamma}, \quad \frac{d\alpha}{d\gamma} = \frac{\sin.\alpha}{\cos\beta \sin.\gamma}.$$

§. 55. (**Höhere Differentiale einer Funktion von zwey veränderlichen Grösze n**). Man kann die höheren Differentialien solcher Funktionen unmittelbar aus der oben (§. 53) gegebenen Entwicklung von $f(x+h, y+k) - f(x, y)$ ableiten. Setzt man nämlich daselbst $h = dx$ und $k = dy$, so ist die erste vertikale Reihe jener Entwicklung, oder $\left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy$ das erste vollständige Differential der Größe u, und eben so erhält man das zweyte, dritte, vierte Differential von u, wenn man die zweyte vertikale Reihe durch

1.2, die dritte durch 1.2.3, die vierte durch 1.2.3.4 multiplicirt u. s. w.

Allein man kann diese höheren Differentialien auch sehr leicht unmittelbar aus dem ersten ableiten. Das erste vollständige Differential der Funktion u ist nämlich

$$du = \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy.$$

Nimmt man nun wieder die Differentiale der Großen $\left(\frac{du}{dx}\right)$ und $\left(\frac{du}{dy}\right)$, so erhält man, da diese Größen Funktionen von x sowohl, als auch von y sind, wenn man dx und dy als constant betrachtet (vergl. §. 38)

$$d\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) dx + \left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right) dy \quad \text{und}$$
$$d\left(\frac{du}{dy}\right) = \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right) dx + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) dy,$$

so daß man daher, da (nach §. 53, II.)

$$\left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right) = \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)$$

ist, für das vollständige zweyte Differential der Funktion u hat:

$$d^2u = d\left(\frac{du}{dx}\right) dx + d\left(\frac{du}{dy}\right) dy \quad \text{oder}$$
$$d^2u = \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) dx^2 + 2\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right) dx\,dy + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) dy^2.$$

Um daraus das dritte vollständige Differential d^3u zu erhalten, hat man auf dieselbe Weise

$$d\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2u}{dx^3}\right) dx^3 + \left(\frac{d^3u}{dy\,dx^2}\right) dy,$$
$$d\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{d^2u}{dx^2\,dy}\right) dx + \left(\frac{d^3u}{dy\,dx\,dy}\right) dy,$$
$$d\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^3u}{dx\,dy^2}\right) dx + \left(\frac{d^3u}{dy^3}\right) dy,$$

und daher für das gesuchte dritte Differential

$$d^3u = \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right) dx^3 + 3\left(\frac{d^3u}{dx^2\,dy}\right) dx^2\,dy + 3\left(\frac{d^3u}{dx\,dy^2}\right) dx\,dy^2 + \left(\frac{d^3u}{dy^3}\right) dy^3;$$

ein Verfahren, welches man leicht fortsetzen und dabey bemerken wird, daß die Zahlen-Coefficienten 1, 2, 1 und 1, 3, 3, 1 und 1, 4, 6, 4, 1 u. f. mit jenen des Binomiums (§. 41) übereinstimmen.

§. 56. (**Erster specieller Fall der Entwicklung einer Funktion von zwey Größen**). Sey

$$u = \sqrt[2]{x} \,.\, \sqrt[3]{y}$$

gegeben; man suche das dritte vollständige Differential $d^3 u$ dieser Funktion.

Differentiirt man diese Größe u dreymal nach einander in Beziehung auf x, so erhält man

$$\left(\frac{d^3 u}{d x^3}\right) = \tfrac{3}{8} x^{-\frac{5}{2}} y^{\frac{1}{3}}.$$

Eben so ist auch

$$\left(\frac{d^3 u}{d x^2 d y}\right) \text{ oder } \left(\frac{d^3 u}{d y d x^2}\right), \text{ oder}$$

$$\left(\frac{d^3 u}{d x d y d x}\right) = -\tfrac{1}{12} x^{-\frac{3}{2}} y^{-\frac{2}{3}} \text{ und}$$

$$\left(\frac{d^3 u}{d x d y^2}\right) = -\tfrac{1}{9} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{5}{3}}; \text{ so wie endlich}$$

$$\left(\frac{d^3 u}{d y^3}\right) = \tfrac{10}{27} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{8}{3}}.$$

Substituirt man diese Werthe in der letzten Gleichung des §. 55, so erhält man für das gesuchte dritte Differential

$$d^3 u = -\frac{3 y^{\frac{1}{3}} d x^3}{8 x^{\frac{5}{2}}} - \frac{d x^2 d y}{4 x^{\frac{3}{2}} y^{\frac{2}{3}}} - \frac{d x d y^2}{3 x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{5}{3}}} + \frac{10 x^{\frac{1}{2}} d y^3}{27 y^{\frac{8}{3}}}.$$

Zu demselben Resultate wird man auch gelangen, wenn man die gegebene Funktion

$$u = \sqrt[2]{x} \,.\, \sqrt[3]{y}$$

dreymal auf die gewöhnliche Weise differentiirt, wodurch man erhält:

$$\begin{aligned}
d u &= \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}} d x + \tfrac{1}{3} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{2}{3}} d y, \\
d^2 u &= -\tfrac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{3}} d x^2 + \tfrac{1}{3} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{2}{3}} d x d y - \tfrac{2}{9} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{5}{3}} d y^2, \\
d^3 u &= -\tfrac{3}{8} x^{-\frac{5}{2}} y^{\frac{1}{3}} d x^3 - \tfrac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} y^{-\frac{2}{3}} d x^2 d y \\
&\quad - \tfrac{1}{3} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{5}{3}} d x d y^2 + \tfrac{10}{27} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{8}{3}} d y^3,
\end{aligned}$$

übereinstimmend mit dem Vorhergehenden.

§. 57. (Weitere specielle Fälle aus der Trigonometrie).

(I). In dem bereits oben (§. 54) angeführten sphärischen Dreyecke ABC seyen die Seiten β und γ constant, während der Winkel A sich ändert und in $A + dA$ übergeht. Dadurch wird also auch die dem Winkel A gegenüberstehende Seite α eine Änderung erleiden, und in $\alpha' = \alpha + d\alpha$ übergehen. Man suche den Werth von $d\alpha$.

Da hier in dem Dreyecke ABC nur zwey veränderliche Größen A und α betrachtet werden, so gehört das Problem unmittelbar in das Gebiet des Taylor'schen Lehrsatzes, nach welchem man hat, wenn man auch auf die höheren Differentialien Rücksicht nimmt:

$$\alpha' = \alpha + \left(\frac{d\alpha}{dA}\right) dA + \left(\frac{d^2\alpha}{dA^2}\right)\frac{dA^2}{1.2} + \left(\frac{d^3\alpha}{dA^3}\right)\frac{dA^3}{1.2.3} + \ldots$$

Für die Werthe dieser partiellen Differential-Coefficienten findet man aber, aus den bekannten Gleichungen der sphärischen Trigonometrie (§. 20), wenn man der Kürze wegen

$$m = \frac{\sin.\beta \sin.\gamma}{\sin.\alpha} . \sin. A = \sin. B \sin.\gamma$$

annimmt:

$$\left(\frac{d\alpha}{dA}\right) = m,$$

$$\left(\frac{d^2\alpha}{dA^2}\right) = m \text{ cotang. } A - m^2 \text{ cotang. } \alpha,$$

$$\left(\frac{d^3\alpha}{dA^3}\right) = m^3 (1 + 3 \text{ cotang.}^2 \alpha) - 3 m^2 \text{ cotang. } \alpha \text{ cotang. } A - m,$$

so daß man daher für den gesuchten Werth von α' erhält, wenn

$$n = m \text{ cotang. } A$$

gesetzt, und diese Differentiation weiter fortgesetzt wird:

$$\begin{aligned}\alpha' = \alpha &+ m\,dA + (n - m^2 \text{ cotang. } \alpha)\frac{dA^2}{1.2} \\ &+ (m^3 + 3 m^3 \text{ cotang.}^2 \alpha - 3 m n \text{ cotang. } \alpha - m)\frac{dA^3}{1.2.3} \\ &+ [6 m^2 n (1 + 3 \text{ cotang.}^2 \alpha) - 15 m^4 \text{ cotang.}^3 \alpha \\ &+ (4 m^2 - 3 n^2 - 9 m^4) \text{ cotang. } \alpha - n]\frac{dA^4}{1.2.3.4} + \ldots\end{aligned}$$

(II). In dem sphärischen Dreyecke ABC ändere sich nun der Winkel A um dA, und zugleich die Seite β um $d\beta$. Man suche die daraus entspringenden Änderungen dC und $d\alpha$ des Winkels C und der Seite α, die dadurch in $C' = C + dC$ und in $\alpha' = \alpha + d\alpha$ übergehen sollen.

Da hier der Winkel C, so wie die Seite α, als eine Funktion von zwey veränderlichen Größen A und β betrachtet wird, so hat man, nach §. 53,

$$C' = C + \left(\frac{dC}{dA}\right) dA + \left(\frac{dC}{d\beta}\right) d\beta$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2C}{dA^2}\right) dA^2 + \left(\frac{d^2C}{dA\,d\beta}\right) dA\,d\beta + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2C}{d\beta^2}\right) d\beta^2 + \ldots$$

mit dem ähnlichen Ausdrucke für

$$\alpha' = \alpha + \left(\frac{d\alpha}{dA}\right) dA + \ldots$$

Um diese partiellen Differential-Coefficienten zu finden, wollen wir zuerst bemerken, daß in dem gegebenen Dreyecke die Größen A und β sich ändern, während die Seite γ immer constant bleibt. Um also zuerst die Größen $\left(\frac{dC}{dA}\right)$ und $\left(\frac{d\alpha}{dA}\right)$ zu finden, werden wir außer der immer constanten Größe γ auch die Seite β unveränderlich annehmen, wodurch man mittelst der bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie sofort erhält:

$$\left(\frac{dC}{dA}\right) = -\frac{\cos.B\ \sin.\gamma}{\sin.\alpha} \quad \text{und} \quad \left(\frac{d\alpha}{dA}\right) = \sin.\gamma\ \sin.B.$$

Wollte man aber diese und alle folgenden Differential-Coefficienten bloß durch die gegebenen zwey Seiten α und β, und durch den von ihnen eingeschlossenen Winkel C ausdrücken, so würde man erhalten:

$$\left(\frac{dC}{dA}\right) = \text{cotang.}\,\alpha\ \sin.\beta\ \cos.C - \cos.\beta \quad \text{und}$$
$$\left(\frac{d\alpha}{dA}\right) = \sin.\beta\ \sin.C.$$

Um dann eben so die Größen $\left(\frac{dC}{d\beta}\right)$ und $\left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)$ zu finden, wird man nebst der Seite γ auch den Winkel A constant annehmen, wodurch man sofort erhält:

$$\left(\frac{dC}{d\beta}\right) = -\sin.C\ \text{cotang.}\,\alpha \quad \text{und}$$
$$\left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right) = \cos.C.$$

Weiter hat man, wenn wieder γ und β constant ist:

$$\left(\frac{d^2C}{dA^2}\right) = -\left(\frac{dC}{dA}\right)\sin.C\ \text{cotang.}\,\alpha\ \sin.\beta - \left(\frac{d\alpha}{dA}\right)\frac{\cos.C\ \sin.\beta}{\sin.^2\alpha},$$

oder wenn man die vorhergehenden Werthe von $\left(\frac{dC}{dA}\right)$ und $\left(\frac{d\alpha}{dA}\right)$

substituirt:

$$\left(\frac{d^2 C}{d A^2}\right) = -\sin.^2\beta \left[\tfrac{1}{2}\sin. 2C - \text{cotang.}\,\alpha\ \text{cotang.}\,\beta\ \sin. C + \text{cotang.}^2\alpha\ \sin. 2C\right].$$

Fährt man so fort, so erhält man endlich:

$$\begin{aligned} C' - C = {} & (\text{cotang.}\,\alpha \sin.\beta \cos. C - \cos.\beta)\, dA - \text{cotang.}\,\alpha \sin. C \,.\, d\beta \\ & + \tfrac{1}{2}\sin.^2\beta \left[\text{cotang.}\,\alpha\ \text{cotang.}\,\beta\ \sin. C - \text{cotang.}^2\alpha\ \sin. 2C - \tfrac{1}{2}\sin. 2C\right] .\, dA^2 \\ & + \sin.\beta\left[\sin.^2 C + \text{cotang.}\,\alpha\ \text{cotang.}\,\beta\ \cos. C - \text{cotang.}^2\alpha\ \cos. 2C\right] .\, dA\, d\beta \\ & + \tfrac{1}{2}\sin. 2C\left[\tfrac{1}{2} + \text{cotang.}^2\alpha\right] .\, d\beta^2, \end{aligned}$$

und eben so

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha = {} & \sin.\beta \sin. C \,.\, dA + \cos. C \,.\, d\beta \\ & + \tfrac{1}{2}\sin.^2\beta \cos. C\left[\text{cotang.}\,\alpha \cos. C - \text{cotang.}\,\beta\right] .\, dA^2 \\ & + \sin.\beta \sin. C\left[\text{cotang.}\,\beta - \text{cotang.}\,\alpha\ \cos. C\right] .\, dA\, d\beta \\ & + \tfrac{1}{2}\text{cotang.}\,\alpha \sin.^2 C \,.\, d\beta^2. \end{aligned}$$

Wenn die gegebenen Variationen dA und $d\beta$ nur sehr klein sind, so wird man sich mit den beyden ersten Gliedern dieser Ausdrücke von $C' - C$ und $\alpha' - \alpha$ begnügen, wie in §. 54, II.; sind sie aber größer, oder will man die gesuchten Variationen $C' - C$ und $\alpha' - \alpha$ mit besonderer Schärfe haben, so wird man auch die folgenden Glieder berücksichtigen.

§. 58. (**Bedingungen der Vollständigkeit eines Differentials**). Wir haben oben (§. 53, II.) gesehen, daß das erste Differential einer Funktion $u = f(x, y)$ von zwey veränderlichen Größen die Form habe:

$$du = P dx + Q dy,$$

wo $P = \left(\frac{du}{dx}\right)$ und $Q = \left(\frac{du}{dy}\right)$ ist; d. h. wo P und Q die partiellen Differential-Coefficienten von u in Beziehung auf x und y bezeichnen, und daß überdieß

$$\left(\frac{d^2 u}{dx\, dy}\right) = \left(\frac{d^2 y}{dy\, dx}\right), \text{ oder daß}$$

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) \ldots (1)$$

seyn muß, wenn anders der Ausdruck $P dx + Q dy$ ein vollständiges Differential irgend einer Funktion $f(x, y)$ seyn soll.

Hätte man z. B. $du = y\,dx - x\,dy$, so ist $P = y$ und $Q = -x$, und da für diese Werthe von P und Q die Gleichung (I) nicht befriedigt wird, so ist auch $y\,dx - x\,dy$ kein vollständiges Differential, oder, mit andern Worten, es gibt keinen endlichen Ausdruck von x und y, dessen Differential durch die Größe $y\,dx - x\,dy$ ausgedrückt werden kann. — Hätte man im Gegentheile

$$du = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}, \text{ so ist}$$

$$P = -\frac{1}{y} \quad \text{und} \quad Q = -\frac{x}{y^2}; \quad \text{also auch}$$

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) = -\frac{1}{y^2},$$

oder der Ausdruck $\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$ ist ein vollständiges Differential. In der That entsteht er, wie man weiß, durch die Differentiation des endlichen Ausdrucks $\frac{x}{y}$ (§. 28).

I. Setzt man das Verfahren des §. 53 auch auf eine Funktion $u = f(x, y, z)$ von drey veränderlichen Größen fort, so findet man eben so, daß das erste Differential dieser Funktion zum Ausdruck erhält:

$$du = P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

wo wieder $P = \left(\frac{du}{dx}\right)$, $Q = \left(\frac{du}{dy}\right)$, $R = \left(\frac{du}{dz}\right)$ ist, und wo der Ausdruck $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ nur dann ein vollständiges Differential von irgend einer endlichen Funktion $u = f(x, y, z)$ von drey Größen seyn kann, wenn die folgenden drey Bedingungsgleichungen Statt haben:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{dP}{dy}\right) &= \left(\frac{dQ}{dx}\right) \\ \left(\frac{dP}{dz}\right) &= \left(\frac{dR}{dx}\right) \\ \left(\frac{dQ}{dz}\right) &= \left(\frac{dR}{dy}\right) \end{aligned}\right\} \ldots \text{(II).}$$

VI.

Differentiation der Gleichungen.

§. 59. (**Erstes Differential einer gegebenen Gleichung $u=0$ zwischen x und y**). Bisher haben wir im Allgemeinen nur explicite oder solche Funktionen $y=f(x)$ betrachtet, in welchen die veränderlichen Größen x und y gesondert sind, wie z. B. die Gleichung $Y=X$, wo X bloß eine Funktion von x, und Y von y ist. Wenn aber beyde Größen x und y zugleich auf jeder Seite des Gleichheitszeichens vorkommen, so wird ein solcher Ausdruck eine implicite oder ungesonderte Funktion genannt, und diese Funktionen sind es, welche wir hier näher betrachten wollen.

Sey also

$$f(x, y) = 0$$

eine solche ungesonderte Funktion oder eine noch unentwickelte Gleichung zwischen x und y. Läßt man in ihr x um dx, und y um dy wachsen, so besteht auch noch die Gleichung

$$f(x+dx, y+dy) - f(x, y) = 0.$$

Setzt man aber in dem ähnlichen Ausdrucke des §. 53 statt h und k die Größe dx und dy, so hat man, wenn der Kürze wegen $f(x, y)$ durch u bezeichnet wird:

$$f(x+dx, y+dy) - f(x, y) = \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy,$$

so daß man daher für das erste Differential der gegebenen Gleichung $u=0$ hat:

$$\left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{I}).$$

Um daher das erste Differential einer solchen Gleichung $u=0$ zu finden, wird man von der Größe u die partiellen Differentialien $\left(\frac{du}{dx}\right)$ und $\left(\frac{du}{dy}\right)$ so nehmen, als ob die Größen x und y von einander unabhängig wären, wo dann der gesuchte erste Differential-Coefficient $\frac{dy}{dx}$ seyn wird:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{du}{dx}\right) : \left(\frac{du}{dy}\right).$$

§. 60. (**Zweytes und höheres Differential einer gegebenen Gleichung** $u=0$ **zwischen** x **und** y). Auf dieselbe Weise, wie wir aus der gegebenen Gleichung $u=0$ ihre erste Differentialgleichung

$$\left(\frac{du}{dx}\right)dx+\left(\frac{du}{dy}\right)dy=0$$

gefunden haben, werden wir nun auch von dieser letzten Gleichung das Differential ableiten, indem wir, durch Wiederholung des vorhergehenden Verfahrens, die partiellen Differentialien des letzten Ausdrucks suchen, und die Summe derselben wieder gleich Null setzen, wodurch wir demnach die zweyte Differentialgleichung der gegebenen Gleichung $u=0$ erhalten werden. Es ist aber das vollständige Differential des ersten Theils $\left(\frac{du}{dx}\right)dx$ des vorhergehenden Ausdrucks, da in ihm die Größe u eine Funktion von x und y ist, und da die Größen $\left(\frac{du}{dx}\right)$ und $\left(\frac{du}{dy}\right)$ das Differential dy nicht enthalten:

$$\left[\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)dx+\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)dy\right]dx.$$

Eben so ist auch das vollständige Differential des zweyten Theils $\left(\frac{du}{dy}\right)dy$, in Beziehung auf x, y und dy genommen:

$$\left[\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)dx+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)dy\right]dy+\left(\frac{du}{dy}\right)d^2y=0;$$

so daß man daher für das gesuchte zweyte Differential der Gleichung $u=0$ hat:

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)dx^2+2\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)dx\,dy+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)dy^2+\left(\frac{du}{dy}\right)d^2y=0\ldots\text{(II)}.$$

Dividirt man diesen Ausdruck in allen seinen Gliedern durch dx^2, so erhält man

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)+2\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)\frac{dy^2}{dx^2}+\left(\frac{du}{dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

und substituirt man hierin den bereits oben (§. 59) erhaltenen Werth von $\frac{dy}{dx}$, so wird man aus dieser Gleichung den Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$, oder den zweyten Differential-Coefficienten von y finden, so wie man oben den ersten gefunden hat.

I. Behandelt man die Gleichung (II) auf dieselbe Weise, wie die Gleichung (I), so ist das Differential ihres ersten Theils

$$\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)dx^3 + \left(\frac{d^3u}{dx^2dy}\right)dx^2dy,$$

und das des zweyten Theils

$$2\left(\frac{d^3u}{dx^2dy}\right)dx^2dy + 2\left(\frac{d^3u}{dxdy^2}\right)dxdy^2 + 2\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)dxd^2y,$$

und fährt man so fort, so findet man endlich für das dritte Differential der Gleichung $u=0$ den Ausdruck

$$\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)dx^3+3\left(\frac{d^3u}{dx^2dy}\right)dx^2dy+3\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)dxd^2y+\left(\frac{du}{dy}\right)d^3y$$
$$+3\left(\frac{d^3u}{dxdy^2}\right)dxdy^2+3\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)dyd^2y=0 \;...\; \text{(III)}$$

Dividirt man diesen Ausdruck durch dx^3, und substituirt dann in ihm die Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ aus I. und II., so erhält man den gesuchten Werth des dritten Differential-Coefficienten $\frac{d^3y}{dx^3}$, welcher der Gleichung $u=0$ entspricht. Man sieht, wie man dieses Verfahren ohne Mühe fortsetzen kann.

Ex. Sey die Gleichung $u = y^2 - 2axy + x^2 - b^2 = 0$ gegeben, so ist

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = 2(x-ay) \quad \text{und} \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = 2(y-ax),$$

und daher die Gleichung (I)

$$(x-ay)dx + (y-ax)dy = 0 \quad \text{oder}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-ay}{ax-y},$$

oder wenn man den Werth von y in x aus der gegebenen Gleichung $u=0$ substituirt:

$$\frac{dy}{dx} = a \pm \frac{(a^2-1)x}{\sqrt{(a^2-1)x^2+b^2}},$$

wo also der Differential-Coefficient $\frac{dy}{dx}$ zwey Werthe hat, weil auch y in der Gleichung $u=0$ einen doppelten Werth hat.

Weiter ist

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)=\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)=2, \quad \left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)=-2a \quad \text{und} \quad \left(\frac{du}{dy}\right)=2(y-ax),$$

also ist auch die Gleichung (II)

$$dx^2 - 2adxdy + dy^2 + (y-ax)d^2y = 0 \quad \text{oder}$$

$$1 - 2a\frac{dy}{dx} + \frac{dy^2}{dx^2} + (y - ax)\frac{d^2y}{dx^2} + o,$$

woraus man den Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ erhält, der wieder doppelt seyn wird, weil schon $\frac{dy}{dx}$ zwey Werthe hat.

Fährt man auf diese Weise fort, so wird man auch die dritten und höheren Differentiale der Gleichung $u = o$ erhalten.

II. Man sieht, daß man diese Differentialgleichungen in jedem gegebenen speciellen Falle durch eine einfache Differentiation aller Glieder der gegebenen Gleichung erhält, ohne erst zu dem allgemeinen Ausdrucke (I) und (II) zurückzugehen. So gibt der Ausdruck

$$u = y^2 - 2axy + x^2 - b^2 = o,$$

wenn man die einzelnen Theile desselben nach den bisherigen Vorschriften differentiirt:

$$ydy - aydx - axdy + xdx = o \ldots (I')$$

$$\text{oder } \frac{dy}{dx} = \frac{x - ay}{ax - y}, \text{ wie zuvor.}$$

Verfährt man mit der Gleichung (I') eben so, so erhält man

$$dy^2 + yd^2y - 2adxdy - axd^2y + dx^2 = o \ldots (II')$$

$$\text{oder } 1 - 2a\frac{dy}{dx} + \frac{dy^2}{dx^2} + (y - ax)\frac{d^2y}{dx^2} = o, \text{ wie zuvor.}$$

Hätte man endlich die gegebene Gleichung, ehe man zu ihrer Differentiation schreitet, gesondert, was in unserem Beyspiele sehr leicht ist, so würde man für $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ dieselben Resultate erhalten. In der That, die gegebene Gleichung $u = o$ gibt

$$y = -ax \pm \sqrt{(a^2 - 1)x^2 + b^2},$$

und von dieser expliciten Funktion ist das Differential, nach dem Vorhergehenden, gleich

$$\frac{dy}{dx} = -a \pm \frac{(a^2 - 1)x}{\sqrt{(a^2 - 1)x^2 + b^2}},$$

und denselben Ausdruck haben wir auch oben erhalten.

§ 61. (**Verschwindung der Constanten in den Differentialgleichungen.**) Wenn die gegebene Gleichung $u = o$ zwischen x und y ein constantes Glied enthält, so fällt dieses durch die Differentiation weg. Ist z. B. $u = y^2 - ax - b = o$ gegeben, so ist das erste Differential dieser Gleichung

$$2ydy - adx = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ein von b unabhängiger Ausdruck. Man kann diese erste Differentialgleichung aber auch von der andern Constante a unabhängig machen, wenn man in ihr statt a den Werth dieser Größe aus der Gleichung $u = 0$ substituirt, wodurch man erhält

$$(y^2 - b)dx - 2xydy = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

und die Gleichung (2) ist eben sowohl die Differentialgleichung von $u = 0$, als es die Gleichung (1) ist.

Differentiirt man die gegebene Gleichung $y^2 - ax - b = 0$ zwey Mal, so erhält man die drey Gleichungen:

$$y^2 = ax + b,$$

$$2ydy = adx, \text{ und, wenn } dx \text{ constant ist,}$$

$$dy^2 + yd^2y = 0,$$

und diese letzte Differentialgleichung ist von a und b, und selbst von x unabhängig. Man kann sie aber, wenn man die zwey ersten Gleichungen zu Hülfe nimmt, von a oder von b, oder auch von a und b zugleich abhängig machen.

I. Man sieht, daß man durch fortgesetzte Differentiation immer mehr Constanten wegschaffen kann. Die bekannte Gleichung des Kreises ist

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2 \quad . \quad . \quad . \quad (A),$$

wo a und b die Coordinaten seines Mittelpunktes, und c seinen Halbmesser bezeichnet. Die Differentialien dieser Gleichung sind:

$$(x - a)dx + (y - b)dy = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (B).$$

$$dx^2 + dy^2 + (y - b)d^2y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (C),$$

$$3dyd^2y + (y - b)d^3y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (D).$$

Aus den drey ersten dieser vier Gleichungen folgt, wenn man der Kürze wegen $ds^2 = dx^2 + dy^2$ setzt:

$$x - a = \frac{ds^2 . dy}{dx . d^2y},$$

$$y - b = - \frac{ds^2}{d^2y} \quad \text{und}$$

$$c^2 = \frac{ds^3}{dx\, d^2y}.$$

Substituirt man den Werth $y - b = - \dfrac{ds^2}{d^2y}$ in der Gleichung (D), so geht sie in folgende über:

$$3\,dy\,d^2y^2 - ds^2\,d^3y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (E).$$

Demnach enthält die Gleichung (A) drey, (B) zwey, (C) nur eine Constante, und die Gleichung (E) endlich enthält gar keine weitere Constante mehr. Demungeachtet sind sie alle als Gleichungen des Kreises zu betrachten. Die erste (A) ist die Gleichung eines in Beziehung auf seine Größe und Lage vollständig bestimmten Kreises. Die Gleichung (B) bestimmt nur die Lage des Mittelpunktes durch die Größe a und b, und läßt dafür seinen Halbmesser ganz willkürlich. Die Gleichung (C), welche nur mehr die Größe b enthält, sagt bloß, daß der Mittelpunkt irgendwo in einer geraden Linie liegt, die mit der Axe der x in der Entfernung b von ihr parallel gezogen wird, und sie läßt die Entfernung dieses Mittelpunktes von der Axe der y sowohl, als auch dem Halbmesser des Kreises, ganz unbestimmt. Die Gleichung (E) endlich sagt bloß aus, daß die krumme Linie, welche durch sie vorgestellt wird, einen Kreis ausdrücke, ohne über die Lage und Größe desselben weiter etwas festzusetzen. Man sieht aus diesen Bemerkungen, daß die Differentialgleichungen, besonders die höheren, eine viel allgemeinere Bedeutung haben, als die ihnen zu Grunde liegenden endlichen Gleichungen, aus welchen sie durch Differentiation entspringen.

II. Man kann noch bemerken, daß, wenn die zu eliminirende Constante in der gegebenen Gleichung $u = 0$ in verschiedenen Graden vorkömmt, die durch die Elimination derselben entstehende erste Differentialgleichung höhere Potenzen von dx und dy enthält, und demnach auch zu den Differentialgleichungen höherer Ordnungen gehört. Ist z. B. die Gleichung

$$u = x^2 + y^2 - 2ax - a^2 = 0$$

gegeben, so ist ihr erstes Differential

$$x\,dx + y\,dy - a\,dx = 0 \quad \text{oder} \quad a = \frac{x\,dx + y\,dy}{dx}.$$

Wird dieser Werth von a in der gegebenen Gleichung $u = 0$ substituirt, so erhält man

$$x^2 + y^2 - 2x\,\frac{(x\,dx + y\,dy)}{dx} - \left(\frac{x\,dx + y\,dy}{dx}\right)^2 = 0$$

oder

$$\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{4x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{2x - y^2}{y^2} = 0.$$

Endlich lassen sich durch dieses Verfahren aus den gegebenen Gleichungen auch die transcendenten Größen wegschaffen, wie wir schon oben bey den Problemen des §. 51 und 52 gesehen haben.

VII.

Anwendung der Differentialrechnung auf die Theorie der Reihen.

§. 62. (Erfindung summirbarer Reihen.) Da die Gegenstände, welche den Inhalt dieses Abschnittes bilden, zu reich und mannigfaltig sind, um sie hier alle umständlich aufzuführen, so wird es genügen, nur die vorzüglichsten derselben kurz anzuzeigen.

Wenn man eine Reihe hat, deren Summe gegeben ist, so lassen sich daraus sofort viele andere Reihen ableiten, deren Summe ebenfalls bekannt ist. So hat man z. B., wenn x kleiner als die Einheit ist, für die convergente Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

die Summe $\frac{1}{1-x}$. Multiplicirt man beyde Ausdrücke durch x^m und differentiirt sie dann, so erhält man sofort

$$\frac{m}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2} = m + (m+1)x + (m+2)x^2 + (m+3)x^3 + \ldots,$$

so daß also auch die Summe von dieser Reihe bekannt ist. Multiplicirt man auch diese wieder durch x^n und differentiirt, so erhält man

$$\frac{mn}{1-x} + \frac{(m+n+1)x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3} = mn + (m+1)(n+1)x + (m+2)(n+2)x^2 + \ldots,$$

so daß also auch die Summe von dieser Reihe bekannt ist. Man sieht, wie man dieses Verfahren fortsetzen und auch auf jede andere Reihe, deren Summe gegeben ist, anwenden kann.

I. Ist z. B. die Reihe

$$S = a + bx + cx^2 + \ldots$$

gegeben, deren Summe S bekannt ist, so hat man, wenn man diesen Ausdruck durch x^m multiplicirt und dann differentiirt:

$$mS + x \cdot \frac{dS}{dx} = ma + (m+1)bx + (m+2)cx^2 + \ldots$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck wieder durch x^n und differentiirt, so erhält man

$$mnS + (m+n+1)x \cdot \frac{dS}{dx} + x^2 \cdot \frac{d^2S}{dx^2}$$

$$= mna + (m+1)(n+1)bx + (m+2)(n+2)cx^2 + \ldots$$

II. Man sieht daraus, daß, wenn die Summe S einer Reihe

$$S = a + bx + cx^2 + \ldots$$

bekannt ist, und wenn $A, B, C, D, \ldots$ eine Reihe bilden, deren wiederholte Differenzen einmal sämmtlich gleich Null werden, daß sich dann auch die Summe der Reihe

$$Z = Aa + Bbx + Ccx^2 + Ddx^3 + \ldots$$

angeben lassen wird.

Diese Summe wird nämlich, wie man aus I. schließen kann, die Form haben:

$$\alpha S + \beta x \cdot \frac{dS}{dx} + \gamma x^2 \cdot \frac{d^2S}{1 \cdot 2\, dx^2} + \delta x^3 \cdot \frac{d^3S}{1 \cdot 2 \cdot 3\, dx^3} + \ldots$$

Um aber die Werthe dieser Größen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ zu finden, hat man

$$\begin{aligned} \alpha S &= \alpha a + \alpha bx + \alpha cx^2 + \\ \beta x \frac{dS}{dx} &= \qquad\quad \beta bx + 2\beta cx^2 + \\ \gamma x^2 \frac{d^2S}{2\,dx^2} &= \qquad\qquad\qquad\quad \gamma cx^2 + \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

Vergleicht man die Summe dieser Glieder mit dem ihr gleichgeltenden Ausdruck

$$Z = Aa + Bbx + Ccx^2 + \ldots,$$

so findet man

$$\begin{aligned} \alpha &= A, \\ \beta &= B - A, \\ \gamma &= C - 2B + A, \\ \delta &= D - 3C + 3B - A, \\ \varepsilon &= E - 4D + 6C - 4B + A \text{ ꝛc.}, \end{aligned}$$

wovon das Gesetz des Fortganges klar ist, da die numerischen Factoren die des Binoms sind.

Diesem gemäß wird man also für die Summe Z der gesuchten Reihe $Aa + Bbx + Ccx^2 + \ldots$ den Ausdruck haben

$$Z = AS + \Delta A \cdot \frac{x\,dS}{dx} + \Delta^2 A \cdot \frac{x^2\,d^2S}{1 \cdot 2\, dx^2} + \Delta^3 A \cdot \frac{x^3\,d^3S}{1 \cdot 2 \cdot 3\, dx^3} + \text{ꝛc.},$$

wo der Kürze wegen die, auch später noch oft vorkommenden, Größen

$B - A = \Delta A$, $C - 2B + A = \Delta^2 A$, $D - 3C + 3B - A = \Delta^3 A$ 2c. gesetzt worden sind.

Ex. Sey die Summe Z der Reihe zu suchen:

$$2 + \frac{5x}{1} + \frac{10x^2}{1.2} + \frac{17x^3}{1.2.3} + \frac{26x^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

Da bekanntlich

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

ist, so hat man

$$A = 2,\quad B = 5,\quad C = 10,\quad D = 17 \text{ u. f.},$$

also auch

$$\Delta A = 3,\quad \Delta^2 A = 2 \quad \text{und} \quad \Delta^3 A,\ \Delta^4 A, \ldots$$

so wie alle folgenden Factoren $\Delta^5 A$, $\Delta^6 A$, ... gleich Null. Also ist die gesuchte Summe der gegebenen Reihe gleich

$$Z = e^x(2 + 3x + x^2) = e^x(1 + x)(2 + x).$$

Wenn aber auch die folgenden Factoren ΔA, $\Delta^2 A$, $\Delta^3 A$, ... nicht eben gleich Null, wenn sie nur immer kleiner werden, so sieht man, daß dann der Ausdruck von Z zwar auch wieder eine ohne Ende fortgehende, aber doch zugleich eine schnell convergirende Reihe ist, die in vielen Fällen mit Vortheil angewendet werden kann. Daß sich dasselbe Verfahren auch auf Reihen anwenden lasse, deren Glieder in ihren Zeichen wechseln, ist für sich klar.

§. 63. (**Transformation der Reihen.**) Sey die Reihe gegeben

$$Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots,$$

deren Summe S bekannt oder unbekannt seyn mag. Setzt man darin $x = \frac{y}{1+y}$, so erhält man

$$x = y - y^2 + y^3 - \ldots$$
$$x^2 = y^2 - 2y^3 + 3y^4 - \ldots$$
$$x^3 = y^3 - 3y^4 + 6y^5 - \ldots$$

Substituirt man diese Werthe von x, x^2, x^3, ... in der gegebenen Reihe, und behält man die Bedeutung der Ausdrücke ΔA, $\Delta^2 A$, ... aus §. 62 bey, so findet man, da $y = \frac{x}{1-x}$ ist:

$$S = A \cdot \frac{x}{1-x} + \Delta A \cdot \frac{x^2}{(1-x)^2} + \Delta^2 A \cdot \frac{x^3}{(1-x)^3} + \Delta^3 A \cdot \frac{x^4}{(1-x)^4} + \ldots$$

Ist daher die Reihe der Größen A, B, C, D, ... so beschaffen, daß ihre auf einander folgenden Differenzen ΔA, $\Delta^2 A$, $\Delta^3 A$, ... endlich gleich Null werden, so kann man dadurch die Summe der ersten gegebenen Reihe bestimmen.

So hat man für die Reihe

$$S = x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + \ldots$$

$A = 1$ und $\Delta A = 2$, also ist auch die Summe dieser Reihe

$$S = \frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{(1-x)^2}.$$

Eben so findet man für die Summe der Reihe

$$S = x + (2x)^2 + (3x)^3 + (4x)^4 + \ldots$$

$A = 1$, $\Delta A = 3$, $\Delta^2 A = 2$, und daher

$$S = \frac{x}{1-x} + \frac{3x^2}{(1-x)^2} + \frac{2x^3}{(1-x)^3}.$$

I. Ist eben so die Reihe mit abwechselnden Zeichen

$$S = Ax - Bx^2 + Cx^3 - Dx^4 + \ldots$$

gegeben, so findet man wie zuvor

$$S = A \cdot \frac{x}{1+x} - \Delta A \cdot \frac{x^2}{(1+x)^2} + \Delta^2 A \cdot \frac{x^3}{(1+x)^3} - \ldots$$

So hat man für die Reihe

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \ldots$$

$A = 1$, $\Delta A = 1$, also $S = \frac{1}{4}$; und eben so findet man

$$1 - 3 + 5 - 7 + 9 - \ldots = 0,$$
$$1 - 3 + 6 - 10 + 15 - \ldots = \tfrac{1}{8},$$
$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \ldots = 0 \text{ u. s.}$$

Wenn man auf diese Weise auch nicht immer einen geschlossenen Ausdruck für die Summe der gegebenen Reihe finden kann, so läßt sie sich doch meistens in eine andere, mehr convergirende Reihe verwandeln. So hat man für die geometrische Reihe

$$S = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - \ldots$$

$A = \Delta A = \Delta^2 A = \Delta^3 A \ldots = 1$, also ist auch jene Reihe

$$S = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} - \ldots,$$

wovon die Summe gleich $\frac{1}{3}$ ist, da sie aus der Entwicklung des Bruches $\frac{1}{2+x}$ entsteht, wenn man $x = 1$ setzt.

Eben so hat man für

$$S = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \ldots$$

$\Delta A = -\tfrac{1}{2}$, $\Delta^2 A = \tfrac{1}{3}$, $\Delta^3 A = -\tfrac{1}{4}$, $\Delta^4 A = \tfrac{1}{5}$ u. f., also ist auch

$$S = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{4.16} + \ldots,$$

und man weiß aus dem Vorhergehenden (§. 42), daß der Werth von S in diesem Beyspiele gleich log. 2 ist.

Ist endlich die Reihe $S = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \ldots$ gegeben, so hat man

$$\Delta A = -\frac{2}{1.3},\quad \Delta^2 A = \frac{2.4}{1.3.5},\quad \Delta^3 A = -\frac{2.4.6}{1.3.5.7} \text{ u. f.,}$$

also ist auch

$$2S = 1 + \frac{1}{1.3} + \frac{1.2}{3.5} + \frac{1.2.3}{3.5.7} + \frac{1.2.3.4}{3.5.7.9} + \ldots,$$

und in diesem Beyspiele ist $S = \text{arc. tang. } 45^0 = \tfrac{1}{4}\pi$ (vergl. §. 47).

§. 64. (**Berechnung der Sinus und Cosinus.**) Wir haben oben (§. 45) die beyden Ausdrücke erhalten:

$$\sin. x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

$$\cos. x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots$$

Setzt man in ihnen $x = m.\tfrac{1}{2}\pi$, so erhält man

$$\sin. m.\tfrac{1}{2}\pi = (\tfrac{1}{2}m\pi) - \frac{1}{1.2.3}(\tfrac{1}{2}m\pi)^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5}(\tfrac{1}{2}m\pi)^5 - \ldots$$

$$\cos. m.\tfrac{1}{2}\pi = 1 - \frac{1}{1.2}(\tfrac{1}{2}m\pi)^2 + \frac{1}{1.2.3.4}(\tfrac{1}{2}m\pi)^4 - \ldots$$

Es ist aber

$$\tfrac{1}{2}\pi = 1.5707963,\ \tfrac{1}{8}\pi^2 = 1.2337005,\ \tfrac{1}{48}\pi^3 = 0.6459641 \text{ rc.,}$$

so daß also die vorhergehenden Reihen in folgende übergehen:

$$\begin{aligned}\sin.(m.90^0) = &\ 1.57080\,m\\ &- 0.64596\,m^3\\ &+ 0.07969\,m^5\\ &- 0.00468\,m^7\\ &+ 0.00016\,m^9 \quad \text{und}\end{aligned}$$

$$\cos.(m\,.\,90^0) = 1 - 1.23370\,m^2 + 0.25367\,m^4 - 0.02086\,m^6 + 0.00092\,m^8 - 0.00002\,m^{10}.$$

Um nach diesen Ausdrücken z. B. $\sin.\,9^0$ zu finden, ist $m\,.\,90 = 9$, also $m = \frac{1}{10}$, und daher

$$\begin{aligned}\sin.\,9^0 &= 0.157080\\ &- 0.000646\\ &+ 0.000001\\ \hline &\ 0.156435.\end{aligned}$$

Wenn man die numerischen Factoren der beyden Ausdrücke von $\sin.(m\,.\,90^0)$ und $\cos.(m\,.\,90^0)$ auf mehr Decimalstellen entwickelt, so wird man dadurch die Tafeln der Sinus und Cosinus für alle Grade und Minuten genau berechnen können.

§. 65. (**Ausdruck der Sinus und Cosinus durch Produkte unendlich vieler Factoren.**) Da die Reihe

$$\sin.\,x = x\left(1 - \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} - \ldots\right)$$

gleich Null wird, wenn x die Werthe $0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ oder die Werthe $-\pi, -2\pi, -3\pi, \ldots$ erhält, so kann man diese Werthe als die Wurzeln der Gleichung

$$0 = 1 - \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} = \ldots$$

betrachten. Setzt man aber $x = \frac{1}{y}$, so geht diese Gleichung über in

$$0 = y^n - \frac{y^{n-2}}{1.2.3} + \frac{y^{n-4}}{1.2.3.4} - \ldots,$$

und von dieser letzten Gleichung sind daher die Wurzeln

$$\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \ldots \text{ und } -\frac{1}{\pi}, -\frac{1}{2\pi}, -\frac{1}{3\pi}, \ldots,$$

so daß man also hat

$$y^n - \frac{y^{n-2}}{1.2.3} + \frac{y^{n-4}}{1.2.3.4.5} - \ldots$$
$$= \left(y - \frac{1}{\pi}\right)\left(y + \frac{1}{\pi}\right)\left(y - \frac{1}{2\pi}\right)\left(y + \frac{1}{2\pi}\right)\ldots,$$

oder wenn man diese Gleichung durch y^n dividirt:

$$1 - \frac{1}{1.2.3 y^2} + \frac{1}{1.2.3.4.5 y^4} - \ldots$$
$$= \left(1 - \frac{1}{\pi^2 y^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4\pi^2 y^2}\right)\left(1 - \frac{1}{9\pi^2 y^2}\right)\ldots;$$

oder endlich, wenn man den Werth von x wieder herstellt:

$$1 - \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} - \ldots$$
$$= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots$$

Diesem gemäß hat man also

$$\sin. x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots,$$

und auf dieselbe Weise erhält man auch

$$\cos. x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\ldots,$$

welche Ausdrücke sehr geschickt sind, für jeden Werth von x die Logarithmen der sin. x und cos. x auf dieselbe Art zu berechnen, wie wir in §. 64 dieß für die Sinus und Cosinus selbst gezeigt haben.

§. 66. (**Zurückführung der Reihen auf Differentialgleichungen.**) Öfters lassen sich Reihen, deren Summe man nicht kennt, auf Differentialgleichungen bringen, deren weitere Behandlung dann auch die Summe jener Reihen kennen lehrt. Um z. B. die Summe der Reihe

$$S = 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots$$

zu finden, sey

$$y = x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

Differentiirt man diesen Ausdruck, so hat man

$$\frac{dy}{dx} = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

das heißt also, es ist

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y \quad \text{oder} \quad dx = \frac{dy}{1+y}$$

die gesuchte Differentialgleichung, und da diese aus der Differentiation der Gleichung

$$x = \log.(1 + y) \text{ oder } e^x = 1 + y$$

entsteht, so ist auch, wenn man $x = 1$ setzt, die gesuchte Summe $S = e - 1$.

Sey eben so die Reihe

$$S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{(1.2)^2} + \frac{1}{(1.2.3)^2} + \frac{1}{(1.2.3.4)^2} + \ldots$$

gegeben. Setzt man wieder

$$y = x + \frac{y^2}{(1.2)^2} + \frac{y^3}{(1.2.3)^2} + \ldots,$$

so erhält man durch Differentiation

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{2^2.3} + \frac{x^3}{2^2.3^2.4} + \ldots$$

Multiplicirt man aber diesen Ausdruck durch x, und nimmt dann von ihm wieder das Differential, so ist

$$\frac{x\,d^2y + dy\,dx}{dx^2} = 1 + x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^2.3^2} + \ldots,$$

woraus daher folgt

$$\frac{x\,d^2y + dy\,dx}{dx^2} = 1 + y \text{ oder}$$

$$x\,d^2y + dy\,dx - xy\,dx^2 - dx^2 = 0,$$

und diese Differentialgleichung der zweyten Ordnung wird die Summe der vorhergehenden Reihe angeben, wenn man die endliche Gleichung finden kann, aus welcher diese, durch eine zweymalige Differentiation, entstanden ist.

I. Es ist nach dem Vorhergehenden (§. 42)

$$\log.\frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Multiplicirt man alle Glieder dieses Ausdruckes durch dx, so erhält man

$$dx \log.\frac{1}{1-x} = x\,dx + \frac{x^2\,dx}{2} + \frac{x^3\,dx}{3} + \ldots$$

Von den Differentialausdrücken rechts dem Gleichheitszeichen lassen sich, nach dem Vorhergehenden, die endlichen Ausdrücke, aus welchen sie durch Differentiation entstanden sind, sehr leicht angeben. Diese sind nämlich

$$\frac{x^2}{2},\ \frac{x^3}{2.3},\ \frac{x^4}{3.4},\ \text{u. f.}$$

Aber auch von $dx \log. \frac{1}{1-x}$ findet man jenen endlichen Ausdruck, wie man sich leicht durch die Differentiation desselben überzeugen kann, gleich

$$x + (1-x) \log. (1-x),$$

so daß man daher hat

$$x + (1-x) \log. (1-x) = \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{3.4} + \ldots,$$

und dadurch ist also auch die Summe der letzten Reihe bekannt.

Multiplicirt man auch diesen Ausdruck wieder durch dx, so erhält man

$$x\,dx + (1-x)\,dx . \log. (1-x)$$
$$= \frac{x^2}{1.2} dx + \frac{x^3}{2.3} dx + \frac{x^4}{3.4} dx + \ldots,$$

und davon geben die Glieder rechts des Gleichheitszeichens zu ihrem ursprünglichen endlichen Ausdrucke

$$\frac{x^3}{1.2.3}, \frac{x^4}{2.3.4}, \frac{x^5}{3.4.5}, \ldots$$

und das erste Glied gibt eben so

$$\frac{x^2}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}(1-x)^2 . [\tfrac{1}{2} - \log. (1-x)],$$

so daß man daher diesen letzten Ausdruck als die Summe der Reihe

$$\frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5}{3.4.5} + \ldots$$

zu betrachten hat. Für $x = 1$ erhält man aus den beyden vorhergehenden Reihen

$$1 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots \text{ und}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \ldots$$

II. Sucht man eben so die Summe s der Reihe

$$s = 1.x - 1.2x^2 + 1.2.3x^3 - \ldots,$$

so hat man, wenn man sie durch x multiplicirt und differentiirt:

$$\frac{d.(sx)}{dx} = 1.2x - 1.2.3x^2 + 1.2.3.4x^3 - \ldots,$$

und wenn man auch diesen Ausdruck wieder durch x multiplicirt:

$$\frac{x\,d.(sx)}{dx} = 1.2x^2 - 1.2.3x^3 + 1.2.3.4x^4,$$

das heißt

$$\frac{x\,d.(s\,x)}{d\,x} = x - s \quad \text{oder} \quad d\,s + \frac{s(x+1)}{x^2}\,d\,x = \frac{d\,x}{x},$$

und davon ist, wie man weiter unten (§. 205) sehen wird, der ursprüngliche endliche Ausdruck leicht zu finden.

Man sieht, wie sich dieses Verfahren fortsetzen und auch auf andere Reihen vortheilhaft anwenden läßt.

§. 67. (**Entwicklung der Differentialgleichungen in Reihen.**) Dieses Verfahren, welches gleichsam das Umgekehrte von dem im §. 66 Vorgetragenen ist, kann oft mit Nutzen angewendet werden, um den Werth von transcendenten oder andern verwickelten Größen, die durch eine Gleichung gegeben sind, mittelst einer Reihe zu finden.

Sey z. B. die Gleichung gegeben

$$u\,.\,\sin.^3 y = 2\,y - \sin.\,2\,y,$$

und daraus der Werth von u durch y ausgedrückt zu bestimmen. Zu dieser Absicht differentiire man diese Gleichung, wodurch man erhält

$$3\,u\,\cos.\,y\,\sin.^2 y + \frac{d\,u}{d\,y}\,.\,\sin.^3 y = 4\,\sin.^2 y.$$

Setzt man nun der Kürze wegen $x = \sin.^2 \tfrac{1}{2} y$, also auch $\frac{d\,x}{d\,y} = \tfrac{1}{2}\sin.\,y$, so erhält man

$$\frac{d\,u}{d\,x} = \frac{8 - 6\,u\,\cos.\,y}{\sin.^2 y} = \frac{4 - 3\,u\,(1 - 2\,x)}{2\,x\,(1 - x)} \quad \text{oder}$$

$$2\,x\,(1 - x)\,\frac{d\,u}{d\,x} - 4 + (3 - 6\,x)\,.\,u = 0.$$

Es sey nun

$$u = \tfrac{4}{3}(1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \ldots),$$

wo die Factoren α, β, γ, . . . noch zu bestimmen sind.

Substituirt man diesen Werth von u und sein Differential in der vorhergehenden Gleichung, und setzt dann die Factoren der gleichen Potenzen von x, jeden für sich, gleich Null, so findet man

$$\alpha = \frac{6}{5},\quad \beta = \frac{8\,\alpha}{7},\quad \gamma = \frac{10\,\beta}{9},\quad \delta = \frac{12\,\gamma}{11},\ \ldots,$$

und dadurch erhält man den gesuchten Ausdruck

$$u = \frac{4}{3} + \frac{4\,.\,6}{3\,.\,5}\,x + \frac{4\,.\,6\,.\,8}{3\,.\,5\,.\,7}\,x^2 + \frac{4\,.\,6\,.\,8\,.\,10}{3\,.\,5\,.\,7\,.\,9}\,x^3 + \ldots$$

§. 68. (Zusammenhang der trigonometrischen Funktionen mit den Exponentialgrößen und den Logarithmen.) Wenn man die Reihen, welche wir oben (§. 44 und 45) für e^x und $\sin. x$, $\cos. x$ erhalten haben:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \ldots$$

$$\sin. x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$\cos. x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \ldots$$

unter sich vergleicht, so bemerkt man sofort, daß, wenn man $x\sqrt{-1}$ statt x in diesen Ausdrücken setzt, die Gleichung erhalten wird

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos. x + \sqrt{-1} . \sin. x,$$

also auch, da x ganz willkürlich ist, und daher auch gleich $-x$ gesetzt werden kann:

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos. x - \sqrt{-1} . \sin. x,$$

und diese beyden Gleichungen geben sofort auch die folgenden, in welchen wir der Kürze wegen k statt $\sqrt{-1}$ gesetzt haben:

$$\sin. x = \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2k}, \quad \cos. x = \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2},$$

$$e^{2kx} = \frac{1 + k . \tang. x}{1 - k . \tang. x},$$

wo $k^2 = -1$, $k^3 = -k$, $k^4 = +1$, u. s. w.

Auf diese Weise stehen daher die trigonometrischen Funktionen mit den Exponentialgrößen in Verbindung.

I. Wenn man in der vorhergehenden Gleichung

$$e^{kx} = \cos. x + k \sin. x$$

die Größe $\cos. x + k \sin. x = y$ setzt, und dann die Logarithmen nimmt, so erhält man

$$kx = \log. y.$$

Allein die angenommene Gleichung

$$k \sin. x - y = \sqrt{1 - \sin.^2 x}$$

gibt, wenn man sie quadrirt,

$$y^2 - 2ky \sin. x = 1 \quad \text{oder}$$

$$x = \text{arc. sin.} \frac{k(1 - y^2)}{2y}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck von x in der Gleichung $kx = \log. y$, so erhält man

$$\log. y = k . \text{arc. sin.} \frac{k(1-y^2)}{2y} = k \text{ arc. cos.} \frac{1+y^2}{2y},$$

und eben so findet man auch

$$\log. y = 2k . \text{arc. tang.} \frac{k(1-y)}{1+y} = k . \text{arc. sec.} \frac{2y}{1+y^2}$$

$$= k . \text{arc. sin. vers.} \frac{(1-y)^2}{-2y},$$

und auf diese Weise hängen daher die Logarithmen von den Kreisbogen ab.

II. Nimmt man in dem gefundenen Ausdrucke

$$\cos. y = 2k . \text{arc. tang.} \frac{k(1-y)}{1+y}$$

die Größe $y=1$, so wird $\log. 1 = 2k . \text{arc. tang.} 0$, also auch, wenn n eine ganze, positive oder negative Zahl ist:

$$\log. 1 = 2n\pi\sqrt{-1}.$$

Ist aber $y = -1$, so ist $\log.(-1) = 2k \text{ arc. tang.} \frac{2}{0}$, und daher

$$\log.(-1) = (2n+1)\pi . \sqrt{-1},$$

oder der Logarithmus jeder positiven und jeder negativen Zahl hat unendlich viele Werthe, die aber alle imaginär sind, einen einzigen bey den positiven Zahlen ausgenommen, für welchen $n=0$ ist, da man für jede positive Zahl a hat

$$\log. a = \log.(a . 1) = \log. a + \log. 1 = \log. a + 2n\pi\sqrt{-1}.$$

III. Der vorhergehende Ausdruck

$$e^{2kx} = \frac{1 + k \text{ tang. } x}{1 - k \text{ tang. } x}$$

gibt, wenn man $x = \frac{1}{6}\pi = 30^{\circ}$, also $\text{tang.} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ setzt:

$$\pi = \frac{3}{k} . \log. \frac{\sqrt{3}+k}{\sqrt{3}-k}.$$

Wenn man aber $x = \frac{1}{n}\pi$ und $\text{tang.} x = y$ setzt, so hat man

$$\pi = \frac{n}{2k} \log. \frac{1+ky}{1-ky}.$$

Setzt man beyde Werthe von π einander gleich, so erhält man

$$y = \frac{1}{k} . \frac{(\sqrt{3}+k)^{\frac{6}{n}} - (\sqrt{3}-k)^{\frac{6}{n}}}{(\sqrt{3}+k)^{\frac{6}{n}} + (\sqrt{3}-k)^{\frac{6}{n}}},$$

und $2y$ ist die Seite eines regelmäßigen, um den Kreis des Halbmessers 1 beschriebenen Polygons von n Seiten.

Bezeichnet $2z$ die Seite des ähnlichen um den Kreis beschriebenen Polygons, so ist

$$2z = \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}},$$

also auch, wenn man den vorhergehenden Werth von y substituirt:

$$2z = \frac{(\sqrt{3}+k)^{\frac{6}{n}} - (\sqrt{3}-k)^{\frac{6}{n}}}{k \cdot \sqrt{4}^{\frac{6}{n}}}.$$

Für $n = 6$ oder für das regelmäßige Sechseck findet man durch diese Ausdrücke $2y = \frac{2}{\sqrt{3}}$ und $2z = 1$. Für $n = 4$ oder für das regelmäßige Viereck ist $2y = 2$ und $2z = \sqrt{2}$ u. s. f.

§. 69. (**Moivre's Binomialformel**). Setzt man in der vorhergehenden Gleichung

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos. x + \sqrt{-1} \,.\, \sin. x$$

statt x die Größe nx, so hat man:

$$e^{nx\sqrt{-1}} = \cos. nx + \sqrt{-1} \,.\, \sin. nx.$$

Erhebt man aber beyde Theile derselben Gleichung auf die Potenz n, so ist

$$e^{nx\sqrt{-1}} = (\cos. x + \sqrt{-1} \,.\, \sin. x)^n,$$

so daß man daher hat

$$(\cos. x + \sqrt{-1} \,.\, \sin. x)^n = \cos. nx + \sqrt{-1} \,.\, \sin. nx;$$

oder auch, wenn r eine willkürliche ganze Zahl bezeichnet, und statt x die Größe $x + 2r\pi$ gesetzt wird, da jeder Quadratwurzel ein doppeltes Zeichen zukommt:

$$(\cos. x \pm \sqrt{-1} \,.\, \sin. x)^n = \cos. n(x + 2r\pi) \pm \sqrt{-1} \,.\, \sin. n(x + 2r\pi),$$

und dieser Ausdruck heißt, nach seinem Erfinder, die Moivre'sche Formel.

§. 70. (**Vielfältigkeit der Werthe der Wurzelgrößen**). Wenn man in der letzten Gleichung die Größe x gleich 0 und gleich π setzt, so erhält man

$$(+1)^n = \cos. 2rn\pi + \sqrt{-1} \,.\, \sin. 2rn\pi \quad \text{und}$$
$$(-1)^n = \cos. (2r+1)n\pi + \sqrt{-1} \,.\, \sin. (2r+1)n\pi.$$

Da man aber für jede ganze Zahl n hat:

$$\sin. 2rn\pi = \sin. (2r+1)n\pi = 0, \quad \cos. 2rn\pi = 1,$$

und endlich

$$\cos. (2r+1)n\pi = \pm 1$$

das obere oder untere Zeichen, wenn n gerade oder ungerade ist, so ist auch für jede ganze Zahl n

$$(+1)^n = 1, \quad (-1)^{2n} = 1 \quad \text{und} \quad (-1)^{2n+1} = -1,$$

wie bekannt.

Allein wenn n keine ganze Zahl ist, so müssen diese Potenzen der Einheit, da die willkürliche Zahl r von $-\infty$ bis $+\infty$ wachsen kann, im Allgemeinen unendlich viele Werthe anzunehmen fähig seyn. Doch kann es sich ereignen, daß bey den Sinus und Cosinus der Bogen $2rn\pi$ und $(2r+1)n\pi$ eine periodische Wiederkehr eintritt, und daß daher auch die Werthe von $(+1)^n$ und $(-1)^n$ sich periodisch wiederholen. Um dieß zu untersuchen, wollen wir bemerken, daß zwey Kreisbogen nur dann durchaus gleiche trigonometrische Funktionen haben, wenn sie um ein Vielfaches der ganzen Peripherie 2π von einander verschieden sind, oder wenn man die beyden Bedingungsgleichungen hat:

$$2rn\pi - 2r'n\pi = 2h\pi \quad \text{und}$$
$$(2r+1)n\pi - (2r'+1)n\pi = 2h\pi,$$

wo h irgend eine willkürliche ganze Zahl bezeichnet.

Diese beyden Gleichungen lassen sich aber, wie man sieht, auf die einzige

$$(r-r')n = h \quad \text{oder} \quad n = \frac{h}{r-r'}$$

zurückführen, und aus dieser Gleichung folgt, daß bey den Potenzen $(+1)^n$ und $(-1)^n$ eine periodische Rückkehr derselben Werthe dann Statt haben werde, wenn n ein rationaler Bruch ist. Ist also n eine irrationale Zahl, so ist die Anzahl jener unter sich verschiedenen Werthe in der That unendlich groß.

Sey also, um jenen Fall näher zu untersuchen, n irgend ein rationaler Bruch $\frac{k}{m}$, wo k und m die kleinstmöglichen ganzen Zahlen bezeichnen, deren Division diesen Bruch $\frac{k}{m}$ gibt. Dieß vorausgesetzt, ist nach dem Vorhergehenden

$$(+1)^{\frac{k}{m}} = \sqrt[m]{1^k} = \sqrt[m]{1} \quad \text{und}$$

$$(-1)^{\frac{k}{m}} = \sqrt[m]{(-1)^k} = \sqrt[m]{(\pm 1)}$$

das obere oder untere Zeichen, wenn k gerade oder ungerade ist. Daraus folgt, daß die Anzahl der Werthe der Potenzen

$$(+1)^{\frac{k}{m}} \quad \text{und} \quad (-1)^{\frac{k}{m}}$$

bloß von dem Nenner m abhängen, den wir stets als positiv annehmen wollen, und daß wir daher nur die Werthe der Ausdrücke

$$\sqrt[m]{(+1)} \quad \text{und} \quad \sqrt[m]{(-1)}$$

hier näher zu untersuchen haben.

Es ist aber, nach dem Vorhergehenden, $\sqrt[m]{(+1)}$ oder

$$(+1)^{\frac{1}{m}} = \cos.\frac{2r\pi}{m} + \sqrt{(-1)}\,.\,\sin.\frac{2r\pi}{m} \quad \text{und}$$

$$(-1)^{\frac{1}{m}} = \cos.\frac{2r+1}{m}\pi + \sqrt{(-1)}\,.\,\sin.\frac{2r+1}{m}\pi.$$

Bey diesen Werthen tritt demnach, wie man aus der obigen Gleichung $(r-r')\,n = h$ sieht, die hier in

$$r - r' = hm$$

übergeht, eine periodische Wiederkehr ein, so oft zwey Zahlen r und r' um ein Vielfaches des Wurzelexponenten m verschieden sind. Die Anzahl dieser verschiedenen Werthe ist gleich m, und man findet diese Werthe, wenn man aus der Reihe der von $-\infty$ bis $+\infty$ fortgehenden ganzen Zahlen, eine Anzahl m nach einander folgenden, am einfachsten die m kleinsten positiven Zahlen 0, 1, 2, 3... $m-1$ statt r setzt. Sollen überdieß, was immer wünschenswerth bleibt, die Zahlenwerthe der Bogen $\frac{2r\pi}{m}$ und $\frac{(2r+1)\pi}{m}$ so klein, als möglich, ausfallen, so wird man die eine Hälfte der Werthe von r aus der positiven und die andere Hälfte aus den kleinsten negativen Zahlen wählen, folglich alle zwischen $-\frac{1}{2}m$ und $+\frac{1}{2}m$ liegenden ganzen Zahlen nehmen.

Von allen diesen Werthen werden übrigens nur diejenigen reell seyn, für welche $\sin.\frac{2r\pi}{m} = 0$ und $\sin.\frac{(2r+1)\pi}{m} = 0$ ist.

Auf diese Weise findet man für $\sqrt{(+1)}$ die Werthe

$$\cos. 0 + \sqrt{(-1)} . \sin. 0 = + 1 \quad \text{und}$$
$$\cos. \pi + \sqrt{(-1)} . \sin. \pi = - 1.$$

Für $\sqrt[3]{(+1)}$ aber hat man

$$\cos. \left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \sqrt{(-1)} . \sin. \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \tfrac{1}{2}(-1 - \sqrt{(-3)}),$$
$$\cos. 0 + \sqrt{(-1)} . \sin. 0 = + 1,$$
$$\cos. \left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sqrt{(-1)} . \sin. \left(\frac{2\pi}{3}\right) = \tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{(-3)}).$$

Für $\sqrt[3]{(-1)}$ endlich findet man

$$\cos. \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{(-1)} . \sin. \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{(-3)}),$$
$$\cos. \pi + \sqrt{(-1)} \sin. n = - 1,$$
$$\cos. \left(\frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{(-1)} . \sin. \left(\frac{\pi}{3}\right) = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{(-3)}).$$

§. 71. (**Auflösung der reinen algebraischen Gleichungen**). So nennt man nämlich die Gleichungen der Form

$$x^n \mp A = 0,$$

wo A eine an sich positive Größe darstellt, für welche wir hier a^n setzen wollen.

Diese Gleichung gibt sofort

$$x = (\pm A)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{A} . \sqrt[n]{(\pm 1)} = a\sqrt[n]{(\pm 1)}.$$

Da wir aber bereits die Werthe von $\sqrt[n]{(\pm 1)}$ in §. 70 gefunden haben, so sind auch dadurch die Wurzeln der Gleichungen

$$x^n \mp a^n = 0$$

für alle Werthe von n bekannt. So sind die Wurzeln der Gleichung

$$x^n + a^n = 0$$

alle in der allgemeinen Form enthalten:

$$x = a \left[\cos. \frac{2r+1}{n} \pi + \sqrt{(-1)} . \sin. \frac{2r+1}{n} \pi \right],$$

und die Wurzeln der Gleichung

$$x^n - a^n = 0$$

werden sämmtlich die Gestalt haben:

$$x = a\left[\cos.\frac{2r\pi}{n} + \sqrt{(-1)}\;.\;\sin.\frac{2r\pi}{n}\right],$$

wo r alle zwischen $-\frac{1}{2}n$ und $+\frac{1}{2}n$ liegende ganze Zahlen bezeichnet.

Ex. I. Für $x^2 + a^2 = 0$ hat man

$$x = a\,(\cos.\tfrac{1}{2}\pi + \sqrt{(-1)}\sin.\tfrac{1}{2}\pi) \quad \text{und}$$
$$x = a\,(\cos.\tfrac{1}{2}\pi - \sqrt{(-1)}\sin.\tfrac{1}{2}\pi,$$

also ist auch

$$x^2 + a^2 = (x - a\sqrt{(-1)})\;.\;(x + a\sqrt{(-1)}).$$

Ex. II. Für $x^5 - a^5 = 0$ erhält man:

$$x = a\,(\cos.0 + \sqrt{(-1)}\sin.0) \quad \text{oder} \quad x = a,$$
$$x = a\,(\cos.\tfrac{2}{5}\pi \pm \sqrt{(-1)}\sin.\tfrac{2}{5}\pi), \quad \text{und}$$
$$x = -\tfrac{1}{4}a\,[1 - \sqrt{5} \mp \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}\,.\,\sqrt{(-1)}] \quad \text{und}$$
$$x = a\,(\cos.\tfrac{4}{5}\pi \pm \sqrt{(-1)}\sin.\tfrac{4}{5}\pi), \quad \text{und endlich}$$
$$x = -\tfrac{1}{4}a\,[1 + \sqrt{5} \mp \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}\,.\,\sqrt{(-1)}],$$

weil nämlich

$$\sin.\tfrac{2}{5}\pi = \sin.72^0 = \tfrac{1}{4}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} \quad \text{und}$$
$$\sin.\tfrac{4}{5}\pi = \sin.36^0 = \tfrac{1}{4}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$$

ist; so daß man daher die Gleichung $x^5 - a^5 = 0$ auch durch die angeführten fünf zweynamigen Faktoren, oder auch durch einen zwey und zwey dreynamigen Faktoren, nämlich durch das Produkt

$$x^5 - a^5 = (x - a)\left[x^2 + \frac{ax}{2}\sqrt{(1 - \sqrt{5})} + a^2\right] \times \left[x^2 + \frac{ax}{2}\sqrt{(1 + \sqrt{5})} + a^2\right]$$

darstellen kann.

§. 72. (**Entwicklung der Exponentialgrößen und der Logarithmen aus dem Binom**). Da die drey Reihen, welche wir oben (§. 41—43) für diese drey Funktionen gegeben haben, durch das gesammte Gebiet der höheren Analyse von der größten Wichtigkeit sind, so wird es nicht unangemessen seyn, ihre innige Verbindung unter einander hier näher zu zeigen.

Sey also $u = a^x$, so ist auch sofort, was auch n für einen Werth haben mag:

$$u = [(1 + a - 1)^n]^{\frac{x}{n}}.$$

Entwickelt man diesen Ausdruck nach dem Binom (§. 41), so müssen, da die Größe n auf den Werth von u keinen Einfluß haben kann, alle diejenigen Glieder, welche n enthalten, sich gegenseitig aufheben. Es ist aber zuerst, wenn $(1 + (a - 1))^n$ nach dem Binom entwickelt wird:

$$(1 + (a - 1))^n = 1 + n(a - 1) + \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2}(a - 1)^2 + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}(a - 1)^3 + \ldots$$

Ordnet man diese Reihe nach den Potenzen von n, und nennt die Coefficienten α, β, γ, δ..., so hat man

$$(1 + a - 1)^n = 1 + \alpha n + \beta n^2 + \gamma n^3 + \ldots$$

Zu unserem Zwecke ist es aber nur nothwendig, den ersten dieser Coefficienten oder α zu kennen, und man hat, wie man sieht:

$$\alpha = (a - 1) - \tfrac{1}{2}(a - 1)^2 + \tfrac{1}{3}(a - 1)^3 - \tfrac{1}{4}(a - 1)^4 + \ldots$$

Entwickelt man dann das Binom

$$u = [1 + (\alpha n + \beta n^2 + \gamma n^3 + \ldots)]^{\frac{x}{n}},$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$P = \alpha + \beta n + \gamma n^2 + \ldots$$

setzt, das Binom

$$u = (1 + Pn)^{\frac{x}{n}},$$

so erhält man

$$u = 1 + \frac{x}{n} \cdot Pn + \frac{x \cdot x - n}{n \cdot 2n} \cdot P^2 n^2 + \frac{x \cdot x - n \cdot x - 2n}{n \cdot 2n \cdot 3n} \cdot P^3 n^3 + \ldots$$

oder

$$u = 1 + x \cdot P + \frac{x \cdot x - n}{1 \cdot 2} \cdot P^2 + \frac{x \cdot x - n \cdot x - 2n}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot P^3 + \ldots$$

Da sich aber in diesem Ausdrucke alles, was die willkürliche Zahl n enthält, aufheben muß, so bleiben von dem Coefficienten bloß die Theile x, $\frac{x^2}{1 \cdot 2}$, $\frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$... und von P bleibt bloß der Theil α, so daß man daher hat:

$$u = a^x = 1 + \frac{\alpha}{1} \cdot x + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{\alpha^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \ldots$$

welches die erste der gesuchten Reihen ist; dieselbe, die wir oben (§. 43) gefunden haben, da sich die Größe α leicht bestimmen läßt, die bekanntlich gleich log. nat. a ist.

I. Aus derselben ursprünglichen Gleichung $a^x = u$ folgt aber auch

$$(1 + a - 1)^{nx} = (1 + u - 1)^n.$$

Entwickelt man beyde Binome, so erhält man, wie zuvor:

$$(1+(a-1))^{nx} = 1 + nx(a-1) + \frac{nx.nx-1}{1.2}(a-1)^2 + \ldots$$

und

$$(1+(u-1))^n = 1 + n(u-1) + \frac{n.n-1}{1.2}(u-1)^2 + \ldots$$

Setzt man beyde Reihen einander gleich, so ist

$$x(a-1) + \frac{x.nx-1}{1.2}(a-1)^2 + \ldots = (u-1) + \frac{n-1}{1.2}(u-1)^2 + \ldots$$

oder da sich hier wieder alle in n multiplicirten Glieder aufheben müssen:

$$x[(a-1) - \tfrac{1}{2}(a-1)^2 + \ldots] = (u-1) - \tfrac{1}{2}(u-1)^2 + \ldots$$

Wir haben aber bereits oben erhalten:

$$\alpha = (a-1) - \tfrac{1}{2}(a-1)^2 + \ldots,$$

also ist auch

$$x = \frac{1}{\alpha}[(u-1) - \tfrac{1}{2}(u-1)^2 + \ldots].$$

Da aber $a^x = u$ war, so ist auch in demjenigen System, dessen Basis a ist,

$$x = \log. u;$$

und daher ist

$$\log. u = \frac{1}{\alpha}[(u-1) - \tfrac{1}{2}(u-1)^2 + \tfrac{1}{3}(u-1)^3 - \ldots]$$

übereinstimmend mit §. 42.

II. Um die Gränze zu bestimmen, welcher sich der Ausdruck $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ immer mehr nähert, je kleiner x wird, sey $x = \frac{1}{\omega}$, so hat man:

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \left(1+\frac{1}{\omega}\right)^\omega = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2}\left(1-\frac{1}{\omega}\right)$$
$$+ \frac{1}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{\omega}\right)\left(1-\frac{2}{\omega}\right) + \ldots$$

Da aber die Glieder dieses Ausdrucks, welche die Größe ω enthalten, alle positiv sind, und an Werth und Anzahl mit ω zugleich wachsen, so muß auch diese Größe $\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^\omega$ mit der Größe ω zugleich wachsen, doch so, daß sie immer zwischen den beyden Gränzen

$$1 + \tfrac{1}{1} \quad \text{und}$$

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$$

enthalten bleibt. Da aber

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots$$

für $z = \frac{1}{2}$ gibt:

$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots,$$

so sind jene beyden Gränzen, zwischen welchen die Größe $\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^\omega$, wenn ω immer wächst, oder die Größe $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$, wenn x immer abnimmt, enthalten ist, gleich

2 und 3,

und der Werth, dem sich diese, immer zwischen 2 und 3 enthaltene Größe, stets mehr und mehr nähert, wird desto genauer gefunden werden, eine je größere Zahl man für ω in dem Ausdrucke $\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^\omega$ annimmt. Ist z. B. $\omega = 10000$, so findet man mit Hülfe der bekannten Logarithmen-Tafeln für die Gränze dieser Größe

$$\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^\omega = \left(\frac{10001}{10000}\right)^{10000} = 2.7183\ldots$$

oder diese Gränze ist die Basis e der natürlichen Logarithmen (§. 44).

III. Sey $a^x = 1 + kx$ und x eine immer kleiner werdende Größe, also auch

$$\frac{a^x - 1}{x} = k.$$

Setzt man aber $a = 1 + b$, so geht die Gleichung

$$a^x = 1 + kx \quad \text{über in}$$

$$(1 + b)^x = 1 + kx,$$

und wenn man $(1 + b)^x$ nach dem Binom entwickelt, so hat man

$$1 + x.b + \frac{x.x-1}{1.2}.b + \frac{x.x-1.x-2}{1.2.3}.b^3 + \ldots = 1 + kx,$$

oder wenn man durch x dividirt:

$$b + \frac{x-1}{1.2}.b^2 + \frac{x-1.x-2}{1.2.3}.b^3 + \ldots = k,$$

oder endlich, wenn $x = 0$ gesetzt wird, so hat man für den Gränzwerth von k

$$k = b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \ldots$$

Diese Reihe ist aber (nach §. 42) gleich log. nat. $(1+b)$, also ist auch

$$\frac{a^x - 1}{x} = \log. a,$$

vorausgesetzt, daß x unendlich klein ist.

IV. Sey ferner $x = \frac{y}{\theta}$, wo x wieder unendlich klein, und θ unendlich groß vorausgesetzt wird. Dadurch geht die vorhergehende Gleichung $a^x = 1 + kx$ in folgende über:

$$a^{\frac{y}{\theta}} = 1 + kx \quad \text{oder} \quad a^y = (1 + kx)^\theta.$$

Entwickelt man $(1+kx)^\theta$ nach dem Binom, so hat man

$$a^y = 1 + \theta \,.\, kx + \frac{\theta \,.\, \theta - 1}{1 \,.\, 2} \,.\, k^2 x^2 + \frac{\theta \,.\, \theta - 1 \,.\, \theta - 2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \,.\, k^3 x^3 + \ldots$$

oder da $\theta = \infty$, $x = 0$ und $\theta x = y$ ist

$$a^y = 1 + ky + \frac{k^2 y^2}{1 \,.\, 2} + \frac{k^3 y^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \ldots$$

übereinstimmend mit der Reihe in §. 43, wenn $k = \log.\text{nat.}\, a$ gesetzt wird.

Es ist daher

$$(1 + x \log.\text{ nat. } a)^\theta \quad \text{desto näher gleich} \quad a^{x\theta},$$

je kleiner x und je größer θ ist, also auch

$$(1+x)^\theta \quad \text{oder} \quad (1+x)^{\frac{1}{x}} \quad \text{desto näher gleich} \quad e,$$

je kleiner die Größe x ist, wie zuvor.

V. Man kann noch bemerken, daß man hat

$$\sqrt[x]{(1+x)} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{(1-x)}{1 \,.\, 2} + \frac{(1-x)(1-2x)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \ldots$$

Setzt man aber in diesem Ausdrucke x gleich Null, so hat man

$$\sqrt[0]{1} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \,.\, 2} + \frac{1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \ldots,$$

und da (nach §. 44, I.) diese letzte Reihe gleich e ist, so hat man auch

$$e = \sqrt[0]{1} \quad \text{oder} \quad e = 1^{\frac{1}{x}},$$

wenn x unendlich klein ist, wie zuvor.

§. 73. (**Ableitung des Binoms, der Logarithmen und der Exponentialgrößen aus einer ihnen allen gemeinschaftlichen Reihe**). Sey die unendliche Reihe gegeben:

$$1 + ax + a(a+k)\frac{x^2}{1.2} + a(a+k)(a+2k)\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

Da diese Reihe offenbar von der Größe a auf irgend eine Weise abhängt, so wollen wir sie, als eine Funktion von a, durch fa bezeichnen.

Verwandelt man a in b, so wird man eben so haben:

$$1 + bx + b(b+k)\frac{x^2}{1.2} + b(b+k)(b+2k)\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots = fb.$$

Wenn man diese beyden Reihen durch einander multiplicirt, so erhält man, nach einigen einfachen Reduktionen:

$$1 + (a+b)x + (a+b)(a+b+k)\frac{x^2}{1.2}$$
$$+ (a+b)(a+b+k)(a+b+2k)\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

und da dieser Ausdruck völlig dieselbe Form hat, wie die beyden vorhergehenden, so wird man ihn, unserer angenommenen Bezeichnung gemäß, durch $f(a+b)$ ausdrücken können.

Daraus folgt also, daß unsere eingeführte Funktion die Eigenschaft hat, daß für sie immer die Gleichung besteht:

$$fa \,.\, fb = f(a+b) \,.\,.\,.\, (\mathrm{I}),$$

und man sieht zugleich, daß, nach der angenommenen Bezeichnung, immer $f(o) = 1$ seyn muß.

I. Setzt man in der Gleichung (I) statt b die Größe $b+c$, so hat man

$$fa \,.\, f(b+c) = f(a+b+c),$$

oder, da bereits $f(b+c) = fb \,.\, fc$ war:

$$fa \,.\, fb \,.\, fc = f(a+b+e);$$

und eben so findet man auch

$$fa \,.\, fb \,.\, fc \,.\, fd = f(a+b+c+d) \quad \text{u. s. f.}$$

Nimmt man aber in diesen Ausdrücken $a = b = c \ldots$, und setzt die Anzahl dieser Buchstaben gleich n, so geht die letzte Gleichung in folgende über:

$$(fa)^n = f(na) \,.\,.\,.\, (\mathrm{II}),$$

oder die vorhergehende Reihe fa auf die n^{te} Potenz erhoben, ist gleich dieser Reihe fa, wenn man in ihr statt a die Größe na setzt.

Setzt man aber in der Gleichung (I) oder in $fb.fc = f(b+c)$ die Größe c gleich $a-b$, so erhält man

$$\frac{fa}{fb} = f(a-b) \;.\;.\;.\; \text{(III)},$$

oder die beyden vorhergehenden, durch fa und fb bezeichneten Reihen, geben, wenn man sie durch einander dividirt, die Reihe fa wieder, wenn man in der letzten a in $a-b$ verwandelt.

Endlich gibt die Gleichung (II), oder $(fb)^n = f(nb)$, wenn man in ihr $nb = a$ setzt:

$$\left(f\frac{a}{n}\right)^n = fa \quad \text{oder}$$

$$\sqrt[n]{fa} = f\frac{a}{n} \;.\;.\;.\; \text{(IV)},$$

oder die n^{te} Wurzel der vorhergehenden Reihe fa ist gleich dieser Reihe fa, vorausgesetzt, daß man in derselben $\frac{a}{n}$ statt a setzt.

II. Drücken wir nun die Gleichung (II) oder $(fa)^n = fna$ umständlich durch die ihr entsprechenden Reihen aus, so hat man

$$\left(1 + a.x + a(a+k)\frac{x^2}{1.2} + a(a+k)(a+2k)\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\right)^n$$
$$= 1 + na.x + na(na+k)\frac{x^2}{1.2} + na(na+k)(na+2k)\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

Setzt man in diesem Ausdrucke $a = 1$ und $k = -1$, so erhält man sofort

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n.n-1}{1.2}x^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}x^3 + \ldots,$$

welches das bekannte Newton'sche Binom ist (§. 41).

III. Setzt man aber in demselben Ausdrucke $k = o$, $a = x = 1$ und $n = hx$, so erhält man

$$\left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots\right)^{hx} = 1 + \frac{hx}{1} + \frac{h^2x^2}{1.2} + \frac{h^3x^3}{1.2.3} + \ldots$$

Von dieser Gleichung ist aber das erste Glied (nach §. 44, I.) gleich e^{hx}, wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet; also ist auch

$$e^{hx} = 1 + \frac{hx}{1} + \frac{h^2x^2}{1.2} + \frac{h^3x^3}{1.2.3} + \ldots$$

IV. Setzt man aber $a = e^h$ oder $h = \log.\,\text{nat.}\,a$, so hat man

$$a^x = 1 + \frac{x}{1}(\log.\text{nat.}a) + \frac{x^2}{1.2}(\log.\text{nat.}a)^2 + \frac{x^3}{1.2.3}(\log.\text{nat.}a)^3 + \ldots$$

und denselben Ausdruck für die Exponentialgröße a^x haben wir auch oben (§. 43) gefunden.

V. Setzt man endlich in dem letzten Ausdrucke (Nr. IV.) die Größe $x = n$ und $a = 1 + x$, so hat man, wenn wieder log. statt log. nat. gesetzt wird:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}\log.(1+x) + \frac{n^2}{1.2}\log.^2(1+x)^2 + \ldots$$

Da aber bereits oben (Nr. II.) erhalten wurde

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1} + \frac{n.n-1}{1.2}x^2 + \ldots,$$

so hat man, wenn man beyde Ausdrücke einander gleich setzt:

$$\log.(1+x) + \frac{n}{1.2}\log.^2(1+x) + \frac{n^2}{1.2.3}\log.^3(1+x) + \ldots$$
$$= x + (n-1)\frac{x^2}{1.2} + (n-1)(n-2)\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots;$$

also auch, wenn man in diesem Ausdrucke $n = 0$ setzt:

$$\log.(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots,$$

wie auch bereits oben (§. 42) gefunden worden ist.

§. 74. (**Erweiterung von Maclaurin's Theorem**). Bezeichnet zuerst u irgend eine Funktion von x, die man in Beziehung auf die Potenzen von x entwickeln will, so wird diese Entwicklung im Allgemeinen die Form haben:

$$u = U + xq_1 + x^2q_2 + x^3q_3 + \ldots + x^nq_n + \ldots,$$

wo $U\,q_1\,q_2\,q_3\ldots$ von x unabhängige Größen bezeichnen.

Es ist klar, daß M der Werth von u für $x = 0$ ist. Differentiirt man aber den gegebenen Ausdruck von u mehrmal nach einander, so erhält man:

$$\frac{du}{dx} = q_1 + 2xq_2 + 3x^2q_3 + \ldots,$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 2 + 2.3xq_3 + 3.4x^2q_4 + \ldots,$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} = 2.3q_3 + 2.3.4xq_3 + \ldots,$$

und man sieht, daß man für jede ganze positive Zahl n erhält:

$$\frac{d^n u}{d x^n} = 1.2.3\ldots n q_n + 1.2.3\ldots(n+1) x q_{n+1} + 1.2.3\ldots(n+2) x^2 q_{n+2} + \ldots$$

Setzt man also in diesem Ausdrucke $\left(\frac{d^n u}{d x^n}\right)$, nach der Differentiation, die Größe $x = 0$, so erhält man

$$q_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{d^n u}{d x^n}\right),$$

und darin besteht das bereits oben (§. 40) angeführte Theorem Maclaurin's, wenn u bloß eine Funktion von einer einzigen Größe x ist.

I. Ist aber u eine Funktion von zwey veränderlichen Größen x und x', und will man u in Beziehung auf die Potenzen von x und x' entwickeln, so kann man diese Entwicklung so darstellen:

$$\begin{array}{rl} u = U + x q_{1.0} + & x^2 q_{2.0} + \quad x^3 q_{3.0} + \ldots \\ + x' q_{0.1} + & x x' q_{1.1} + x^2 x' q_{2.1} + \ldots \\ & + \; x'^2 q_{0.2} + x x'^2 q_{1.2} + \ldots \\ & \qquad\qquad + \; x'^3 q_{0.3} + \ldots \end{array}$$

und man findet auf dieselbe Weise den Coefficienten $q_{n.n'}$ des Produkts $x^n x'^{n}$ durch den Ausdruck

$$q_{n.n'} = \frac{1}{1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots n'}\left(\frac{d^{n+n'} u}{d x^n d x^{n'}}\right),$$

wo wieder, nach vollendeter Differentiation, x und x' gleich Null gesetzt werden soll. Um z. B. die dritte der vorhergehenden senkrechten Columnen zu erhalten, wird man $n + n' = 3$ setzen, und dann für n und n' alle ganze und positive Zahlen nehmen, deren Summe gleich 3 ist, also

n	gleich	3	2	1	0	und
n'	»	0	1	2	3	

setzen.

Ex. Sey die Funktion

$$u = (x + h)^m . (x' + k)^n$$

gegeben, so hat man:

$$U = h^m k^n,$$

$$q_{1.0} = \left(\frac{d u}{d x}\right) = m h^{m-1} k^n,$$

$$q_{0.1} = \left(\frac{d u}{d x'}\right) = n h^m k^{n-1} \quad \text{und}$$

$$q_{2.0} = \frac{m.m-1}{1.2} h^{m-2} k^n,$$

$$q_{1.1} = \frac{m.n}{1.1} h^{m-1} k^{n-1},$$

$$q_{1.2} = \frac{n.n-1}{1.2} h^m k^{n-2} \quad \text{u. s. w.},$$

und daher die gesuchte Entwicklung der Funktion $u = (x+h)^m . (x'+h)^n$ gleich

$$h^m k^n + m h^{m-1} k^n . x + \frac{m.m-1}{1.2} h^{m-2} k^n . x^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} h^{m-3} k^n . x^3 + \ldots$$
$$+ n k^{n-1} h^m . x' + \frac{mn}{1.1} h^{m-1} k^{n-1} . x x' + \frac{m.m-1.n}{1.2.1} h^{m-2} k^{n-1} . x^2 x' + \ldots$$
$$+ \frac{n.n-1}{1.2} h^m k^{n-2} . x'^2 + \frac{m.n.n-1}{1.1.2} h^{m-1} k^{n-2} . x x'^2 + \ldots$$
$$+ \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} h^m k^{n-3} . x'^3 + \ldots$$

II. Ist überhaupt $u = f(x, x', x'' \ldots)$ eine Funktion von mehreren veränderlichen Größen $x, x', x'', \ldots$, und will man sie in eine nach den Potenzen und Produkten von $x, x', x'' \ldots$ geordnete Reihe entwickeln, und bezeichnet man durch

$$x^n . x'^{n'} . x''^{n''} \ldots q_{n.n'.n''\ldots}$$

dasjenige Glied dieser Reihe, welches das Produkt $x^n . x'^{n'} . x''^{n''} \ldots$ zum Factor hat, so erhält man

$$q_{n.n'.n''\ldots} = \frac{1}{1.2.3\ldots n.1.2.3.n'.1.2.3\ldots n''} . \left(\frac{d^{n+n'+n''\ldots} u}{dx^n . dx'^{n'} . dx''^{n''} \ldots}\right),$$

wo man wieder, nach der Differentiation, die Größen $x, x', x'' \ldots$ gleich Null setzen wird.

§. 75. (Erweiterung des Taylor'schen Theorems). Auf ganz analoge Weise läßt sich auch das oben (§. 39) gegebene Theorem Taylor's auf mehrere veränderliche Größen fortsetzen.

Ist zuerst $u = f(x)$, und sucht man $u' = f(x + dx)$, so kann man annehmen:

$$u' = u + q_1 dx + q_2 dx^2 + q_3 dx^3 + \ldots,$$

und wenn man diese Reihe mit dem ähnlichen Ausdrucke für u' in §. 39 vergleicht, so hat man sofort für das allgemeine Glied derselben

$$q_n \,.\, dx^n$$

den Faktor

$$q_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{d^n u}{dx^n}\right),$$

und dieß ist der bekannte Taylor'sche Lehrsatz in seiner größten Einfachheit.

I. Ist aber $u = f(x, x')$ eine Funktion von zwey veränderlichen Größen, und sucht man

$$u' = f(x + dx, x' + dx'),$$

in eine nach den Potenzen und Produkten von dx und dx' fortgehende Reihe zu entwickeln, so kann man annehmen:

$$\begin{aligned} u' = u &+ q_{1.0} dx + q_{2.0} dx^2 + \ldots \\ &+ q_{0.1} dx' + q_{1.1} dx dx' + \ldots \\ &\qquad + q_{0.2} dx'^2 \ldots \end{aligned}$$

Setzt man das allgemeine Glied einer jeden vertikalen Columne dieses Ausdrucks gleich

$$q_{n.n'} \,.\, dx^n dx'^{n'},$$

und vergleicht man diesen Ausdruck mit dem bereits oben (§. 53) erhaltenen analogen Werthe von u', so hat man für den Factor $q_{n.n'}$ dieses allgemeinen Gliedes

$$q_{n.n'} = \frac{1}{1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots n'}\left(\frac{d^{n+n'} u}{dx^n dx'^{n'}}\right).$$

II. Ist endlich überhaupt

$$u = f(x, x', x'' \ldots)$$

eine Funktion mehrerer veränderlichen Größen, und sucht man den Werth

$$u' = f(x + dx, x' + dx', x'' + dx'' \ldots)$$

dieser Funktion, so wird, analog mit dem Vorhergehenden, von der gesuchten Entwicklung der Funktion u′ das allgemeine Glied

$$q_{n.n'.n''...} \,.\, dx^n \,.\, dx'^{n'} \,.\, dx''^{n''} \,.\,.\,.$$

seyn, wo man für den Faktor $q_{n.n'.n''...}$ desselben haben wird:

$$q_{n.n'.n''..} = \frac{1}{1.2.3..n.1.2.3..n'.1.2.3..n''..} \cdot \left(\frac{d^{n+n'+n''...}u}{dx^n . dx'^{n'} . dx''^{n''}..}\right).$$

So findet man z. B. wenn $u = f(x, x', x'')$ eine Funktion von drey veränderlichen Größen ist:

$$\begin{aligned} u' = u &+ \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) \frac{dx^2}{1.2} + \ldots \\ &+ \left(\frac{du}{dx'}\right) dx' + \left(\frac{d^2u}{dx'^2}\right) \frac{dx'^2}{1.2} + \ldots \\ &+ \left(\frac{du}{dx''}\right) dx'' + \left(\frac{d^2u}{dx''^2}\right) \frac{dx''^2}{1.2} + \ldots \\ &\qquad + \left(\frac{d^2u}{dx\,dx'}\right) dx\,dx' + \ldots \\ &\qquad + \left(\frac{d^2u}{dx\,dx''}\right) dx\,dx'' + \ldots \\ &\qquad + \left(\frac{d^2u}{dx'\,dx''}\right) dx'dx'' + \ldots \end{aligned}$$

§. 76. (**Allgemeines Reversionstheorem.**) Die Betrachtung der Differentialien einer Funktion u von mehreren veränderlichen Größen, bloß in Beziehung auf eine derselben genommen, die uns in der Folge zu sehr wichtigen und allgemeinen Resultaten führen wird, bietet jetzt schon ein Mittel dar, eine gegebene Funktion $u = \psi(y)$ nach den Potenzen einer anderen veränderlichen Größe x zu entwickeln, deren Abhängigkeit von y durch eine ganz allgemeine Gleichung gegeben ist.

Sey diese Gleichung

$$y = F[\omega + x\varphi(y)],$$

wo F und φ wieder andere Funktionen bezeichnen sollen.

Differentiirt man diese Gleichung in Beziehung auf x und auf ω, so erhält man

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left[\varphi(y) + x\varphi'(y) \cdot \frac{dy}{dx}\right] . F'(\omega + x\varphi(y)) \quad \text{und}$$

$$\left(\frac{dy}{d\omega}\right) = \left[1 + x\varphi'(y) \cdot \frac{dy}{d\omega}\right] . F'(\omega + x\varphi(y)),$$

wo F′ und φ' die Differential-Coefficienten bezeichnen, die, wie in

§. 39, von beyden Gleichungen identisch sind. Eliminirt man aus diesen beyden Gleichungen die Größe $F'(\omega + x\varphi(y))$, so findet man nach einigen einfachen Reductionen

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y) \cdot \frac{dy}{d\omega}.$$

Da aber u oder $\psi(y)$ bloß von y abhängt, so hat man

$$\frac{du}{dx} = \psi'(y) \cdot \frac{dy}{dx} \quad \text{und} \quad \frac{du}{d\omega} = \psi'(y) \cdot \frac{dy}{d\omega},$$

woraus man, durch die Elimination von $\psi'(y)$, erhält

$$\frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{d\omega} = \frac{du}{d\omega} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Setzt man aber statt $\frac{dy}{dx}$ seinen Werth $\varphi(y) \cdot \frac{dy}{d\omega}$, und nimmt der Kürze wegen $\varphi(y) = z$, so erhält man

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = z \cdot \frac{du}{d\omega}.$$

Differentiirt man diese Gleichung in Beziehung auf x, so erhält man

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{d \cdot z\frac{du}{d\omega}}{dx}.$$

Allein die Größe $z \cdot \frac{du}{d\omega}$ ist nichts anderes, als $\varphi(y) \cdot \psi'(y) \cdot \frac{dy}{d\omega}$, das heißt also, eine Funktion von y multiplicirt durch $\frac{dy}{d\omega}$, daher kann man sie als den Differential-Coefficienten einer neuen Funktion von y ansehen, die wir durch u′ bezeichnen wollen, so daß man hat

$$\frac{du'}{d\omega} = z \cdot \frac{du}{d\omega} \quad \text{und} \quad \frac{d \cdot z\frac{du}{d\omega}}{dx} = \frac{d^2 u'}{dx\, d\omega}.$$

Kehrt man die Ordnung der Differentiation um, so erhält man

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{d^2 u'}{d\omega\, dx} = \frac{d \cdot \frac{du'}{dx}}{d\omega}.$$

Man muß aber bemerken, daß die Relation $\frac{du}{dx} = z \cdot \frac{du}{d\omega}$ auch in Beziehung auf u′ Statt hat, und daß daher auch ist

$$\frac{du'}{dx} = z \cdot \frac{du'}{d\omega},$$

wie man daraus sieht, daß u' auch eine Funktion von y ist, und daß man daher, so wie früher für u, auch haben muß

$$\frac{d\,u'}{d\,x} \cdot \frac{d\,y}{d\,\omega} = \frac{d\,u'}{d\,\omega} \cdot \frac{d\,y}{d\,x}.$$

Setzt man also in dem Ausdrucke von $\frac{d^2 u}{d\,x^2}$ statt $\frac{d\,u'}{d\,x}$ seinen Werth $z \cdot \frac{d\,u'}{d\,\omega}$, und ferner auch statt $\frac{d\,u'}{d\,\omega}$ seinen Werth $z \cdot \frac{d\,u}{d\,\omega}$, so findet man

$$\left(\frac{d^2 u}{d\,x^2}\right) = \frac{d\,.\,z\frac{d\,u'}{d\,\omega}}{d\,\omega} = \frac{d\,.\,z^2\frac{d\,u}{d\,\omega}}{d\,\omega}.$$

Differentiirt man dann diese Gleichung in Beziehung auf x, so erhält man

$$\frac{d^3 u}{d\,x^3} = \frac{d^2\,.\,z^2\frac{d\,u}{d\,\omega}}{d\,x\,d\,\omega}.$$

Macht man aber wieder, der Kürze wegen, $\frac{d\,u''}{d\,\omega} = z^2 \frac{d\,u}{d\,\omega}$, und kehrt man die Ordnung der Differentiation um, so erhält man

$$\frac{d^3 u}{d\,x^3} = \frac{d^3 u''}{d\,\omega^2\,d\,x} = \frac{d^2\,.\,\frac{d\,u''}{d\,x}}{d\,\omega^2}.$$

Da man aber ebenfalls $\frac{d\,u''}{d\,x} = z\frac{d\,u''}{d\,\omega}$, also auch $\frac{d\,u''}{d\,x} = z^3 \cdot \frac{d\,u}{d\,\omega}$ hat, so ist auch

$$\left(\frac{d^3 u}{d\,x^3}\right) = \frac{d^2\,.\,z^3\frac{d\,u}{d\,\omega}}{d\,\omega^2}.$$

Wir haben demnach die Gleichungen erhalten:

$$\left(\frac{d\,u}{d\,x}\right) = z\frac{d\,u}{d\,\omega},$$

$$\left(\frac{d^2 u}{d\,x^2}\right) = \frac{d\,.\left(z^2\frac{d\,u}{d\,\omega}\right)}{d\,\omega},$$

$$\left(\frac{d^3 u}{d\,x^3}\right) = \frac{d^2\,.\left(z^3\frac{d\,u}{d\,\omega}\right)}{d\,\omega^2} \text{ u. s.,}$$

also ist auch allgemein

$$\left(\frac{d^n u}{d\,x^n}\right) = \frac{d^{n-1}.\left(z^n\frac{d\,u}{d\,\omega}\right)}{d\,\omega^{n-1}}.$$

Da nun, wie in Maclaurin's Theorem, die nach den Potenzen von x zu entwickelnde Größe u die Form hat (§. 73)

$$u = U + x q_1 + x^2 q_2 + x^3 q_3 + \ldots + x^n q_n + \ldots,$$

wo $q_n = \left(\frac{d^n u}{d x^n}\right)$ ist, wenn nach der Differentiation die Größe $x = o$ gesetzt wird, so wird von dem allgemeinen Gliede

$$x^n \cdot q_n$$

dieser Entwicklung der Factor q_n seyn

$$q_n = \left(\frac{d^n u}{d x^n}\right) = \frac{d^{n-1} \cdot \left(z^n \frac{d u}{d \omega}\right)}{d \omega^{n-1}},$$

oder man wird für die gesuchte Entwicklung der Funktion u nach den Potenzen von x den Ausdruck haben

$$u = U + \frac{x}{1} \cdot \left(\frac{z\, d u}{d \omega}\right) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \frac{d \cdot \left(z^2 \frac{d u}{d \omega}\right)}{d \omega} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^2 \cdot \left(z^3 \frac{d u}{d \omega}\right)}{d \omega^2} + \ldots,$$

wo U den Werth von u für $x = o$ bezeichnet. Dieselbe Voraussetzung läßt die Gleichung $y = F(\omega + x \varphi(y))$ in die einfachere $y = F(\omega)$, und den vorhergehenden Werth von $\frac{d y}{d \omega}$ in $F'(\omega)$ übergehen, so daß man also in der letzten Reihe

statt $z = \varphi(y)$ die Größe $z = \varphi . [F(\omega)]$,

und statt $\frac{d u}{d \omega}$ die Größe $\frac{d u}{d \omega} = F'(\omega)$

setzen wird. Hat man also die Gleichungen gegeben:

$$u = \psi(y) \quad \text{und} \quad y = F(\omega + x z),$$

wo $z = \varphi(y)$ wieder eine Funktion von y ist, und will man u in eine nach den Potenzen von x fortgehende Reihe entwickeln, so wird diese Reihe seyn

$$u = U + \frac{x}{1} \cdot \left(Z \frac{d U}{d \omega}\right) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \frac{d \cdot \left(Z^2 \frac{d U}{d \omega}\right)}{d \omega} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^2 \cdot \left(Z^3 \frac{d U}{d \omega}\right)}{d \omega^2} + \ldots;$$

wobey vorausgesetzt wird, daß $x = o$ gebe $y = F(\omega)$, und daß dieser Werth von $y = F(\omega)$, in z und u substituirt, Z und U geben soll.

Dieses sehr allgemeine und wichtige Theorem ist von Lagrange gefunden, und später von Laplace in der hier vorgetragenen Gestalt dargestellt worden.

§. 77. (**Specielle Fälle des vorhergehenden allgemeinen Theorems.**) I. Ist die Gleichung $y = \omega + x\varphi(y)$ gegeben, und sucht man $u = \psi(y)$ in eine nach den Potenzen von x fortgehende Reihe zu entwickeln, so ist hier $z = \varphi(y)$, und unter der Voraussetzung $x = o$ hat man

$$y = \omega, \quad \text{also auch} \quad Z = \varphi(\omega) \quad \text{und} \quad U = \psi(\omega),$$

so daß daher die gesuchte Reihe ist

$$\psi(y) = \psi(\omega) + x\left(\varphi\omega \cdot \frac{d\psi\omega}{d\omega}\right) + \frac{x^2}{1 \cdot 2}\, d \cdot \left(\frac{(\varphi\omega)^2 \cdot \frac{d\psi\omega}{d\omega}}{d\omega}\right)$$
$$+ \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\, d^2 \cdot \left(\frac{(\varphi\omega)^3 \cdot \frac{d\psi\omega}{d\omega}}{d\omega^2}\right) + \ldots,$$

und auf diese Weise wurde die Reihe zuerst von Lagrange gegeben.

II. Ist die Gleichung $x = (y - \omega)\varphi y$ gegeben, und sucht man $u = \psi y$, so hat man auch $y = \omega + \frac{x}{\varphi y}$, und daher ist $z = \frac{1}{\varphi y}$.

Für $x = o$ aber erhält man

$$y = \omega, \quad Z = (\varphi\omega)^{-1} \quad \text{und} \quad U = \psi\omega,$$

so daß man daher hat

$$\psi y = \psi\omega + x\left((\varphi\omega)^{-1} \cdot \frac{d\psi\omega}{d\omega}\right)$$
$$+ \frac{x^2}{1 \cdot 2}\, d \cdot \left(\frac{(\varphi\omega)^{-2} \cdot \frac{d\psi\omega}{d\omega}}{d\omega}\right) + \ldots,$$

und so fort für mehrere andere Formen, die man der ursprünglichen Gleichung $y = F(\omega + x\varphi y)$ geben kann.

Wir wollen nun das Vorhergehende auf einige specielle Beyspiele anwenden.

(A.) Sey zuerst die Gleichung $\omega - y + y^n = o$ gegeben. Man suche den natürlichen Logarithmus von y.

Vergleicht man dieß mit der Gleichung $\omega - y + x\varphi y = o$ in §. 77, I., so erhält man

$$x = 1, \quad \text{alſo auch} \quad \varphi\omega = \omega^n,$$
$$\varphi y = y^n, \quad » \quad » \quad \psi\omega = \log.\omega \quad \text{und}$$
$$\psi y = \log.y, \quad » \quad » \quad \frac{d.\psi\omega}{d\omega} = \frac{1}{\omega},$$

ſo daß man alſo hat

$$\log.y = \log.\omega + \omega^{n-1} + \frac{2n-1}{1.2}\omega^{2(n-1)} + \frac{3n-1.3n-2}{1.2.3}\omega^{3(n-1)}$$
$$+ \frac{4n-1.4n-2.4n-3}{1.2.3}\omega^{4(n-1)} + \ldots$$

Für $n = 0$ hat man $\omega - y + 1 = 0$, alſo auch

$$\log.y = \log.\omega + \frac{1}{\omega} - \frac{1}{2\omega^2} + \frac{1}{3\omega^3} - \ldots \quad \text{oder}$$
$$\log.\frac{y}{\omega} = \log.\frac{\omega+1}{\omega} = \frac{1}{\omega} - \frac{1}{2\omega^2} + \frac{1}{3\omega^3} - \ldots$$

(B). Iſt die Gleichung $y = \omega + a y^m$ gegeben und y^n zu ſuchen, ſo hat man, wenn dieſer Ausdruck mit $y = \omega + x\varphi y$ verglichen wird:

$$x = a, \quad \text{alſo auch} \quad \varphi\omega = \omega^m,$$
$$\varphi y = y^m, \quad » \quad » \quad \psi\omega = \omega^n,$$
$$\psi y = y^n, \quad » \quad » \quad \frac{d.\psi\omega}{d\omega} = n\omega^{n-1},$$

und die geſuchte Reihe für y^n wird ſeyn

$$y^n = \omega^n + a.n\omega^{m+n-1}$$
$$+ \frac{a^2}{1.2}n(2m+n-1)\omega^{2m+n-2}$$
$$+ \frac{a^3}{1.2.3}n(3m+n-1)(3m+n-2)\omega^{3m+n-3} + \ldots$$

(C). Iſt die quadratiſche Gleichung $a - y + by^2 = 0$ gegeben, ſo kann man, durch Hülfe des vorhergehenden Theorems, jede Funktion der Wurzeln dieſer Gleichung finden. Iſt z. B. $\psi y = y^m$, ſo hat man

$$y^m = a^m + m a^{m+1} b + \frac{m.m+3}{1.2}a^{m+2}b^2$$
$$+ \frac{m.m+4.m+5}{1.2.3}a^{m+3}b^3$$
$$+ \frac{m.m+5.m+6.m+7}{1.2.3.4}a^{m+4}b^4 + \ldots$$

Iſt aber $\psi y = \log.\text{nat}.y$, ſo findet man

$$\log.y = \log.a + ab + \frac{3}{2}(ab)^2 + \frac{4.5}{2.3}(ab)^3$$
$$+ \frac{5.6.7}{2.3.4}(ab)^4 + \ldots$$

(D). Ist die Gleichung $x = y - a \sin. y$ gegeben, und sucht man $\psi y = y$, so erhält man

$$y = x + a \sin. x + \frac{a^2}{1.2.2} . 2 \sin. 2x$$
$$+ \frac{a^3}{1.2.3.2^2}(3^2 \sin. 3x - 3 \sin. x)$$
$$+ \frac{a^4}{1.2.3.4.2^3}(4^3 \sin. 4x - 4.2^3 \sin. 2x) + \ldots;$$

(E). Ist die Gleichung gegeben

$$z = y + \alpha y^2 + \beta y^3 + \gamma y^4 + \ldots,$$

und sucht man $\psi y = y^n$, so hat man auch

$$z - y - y^2(\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \ldots) = 0,$$

und diese Gleichung mit der vorhergehenden $\omega - y + x \varphi y = 0$ verglichen, gibt

$$\omega = z,$$
$$x = -1,$$
$$\psi y = y^2(\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \ldots),$$

also auch

$$\varphi \omega = z^2(\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \ldots),$$
$$\psi \omega = z^n \text{ und}$$
$$\frac{d.\psi\omega}{d\omega} = n z^{n-1}.$$

Man hat daher, wenn man der Kürze wegen $Z = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \ldots$ setzt:

$$y^n = z^n - n z^{n+1}. Z + \frac{n}{1.2} d. \left(\frac{z^{n+3}. Z}{dz}\right)$$
$$- \frac{n}{1.2.3} d^2. \left(\frac{z^{n+5}. Z}{dz^2}\right) + \ldots,$$

und dieser Satz enthält die sogenannte Reversion der Reihen.

Setzt man

$$z = y + \alpha y^2 + \beta y^3 + \gamma y^4 + \ldots,$$

und sucht man daraus $\psi y = y$, so wird man in dem vorhergehenden Ausdrucke bloß die Größe $n = 1$ setzen. Entwickelt man dann die dort angezeigten Differentialien, so erhält man

$$y = z + a z^2 + b z^3 + c z^4 + d z^5 + \ldots,$$

wo man für die Factoren a, b, c, ... folgende Ausdrücke findet:

$$a = -\alpha,$$
$$b = 2\alpha^2 - \beta,$$
$$c = 5\alpha\beta - \gamma - 5\alpha^3,$$
$$d = 14\alpha^4 - 21\alpha^2\beta + 6\alpha\gamma + 3\beta^2 - \delta,$$
$$e = -42\alpha^5 + 84\alpha^3\beta - 28\alpha^2\gamma - 28\alpha\beta^2 + 7\alpha\delta + 7\beta\gamma - \varepsilon,$$

u. s. w.

VIII.

Untersuchung unbestimmter analytischer Ausdrucke.

---

§. 78. **(Bestimmung dieser Werthe durch Taylor's Theorem).** Funktionen von einer oder von mehreren veränderlichen Größen nehmen zuweilen, für gegebene Werthe dieser Größen, die scheinbar unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an. So geht z. B. die Funktion

$$u = \frac{(x-a)^m \cdot b^x}{(x-a)^n \cdot \log. x}$$

für den besondern Fall, wo $x = a$ ist, in $u = \frac{0}{0}$ über. Allein der Werth von u für diesen Fall ist demungeachtet ein bestimmter Werth, da offenbar u für $x = a$ entweder gleich Null, oder unendlich groß, oder gleich der endlichen Größe $\frac{b^a}{\log. a}$ seyn wird, je nachdem $m > n$, oder $m < n$, oder $m = n$ ist. Man kann diese bloß scheinbare Unbestimmtheit sogleich entfernen, wenn man die vorhergehende Gleichung auf folgende Weise ausdrückt:

$$u = (x-a)^{m-n} \cdot \frac{b^x}{\log. x}.$$

Allein nicht immer liegen die Factoren des Zählers und Nenners, welche diese Erscheinung hervorbringen, so offen da, und man muß daher zu andern Mitteln übergehen, die wahren Werthe der Funktionen in solchen Fällen zu bestimmen. Der Taylor'sche Lehrsatz ist zu diesem Zwecke in den meisten Fällen sehr geeignet. Sey

$$u = \frac{X}{X'},$$

wo X sowohl als X′ Funktionen von x bezeichnen. Geht in diesem Ausdrucke die Größe x in x + h über, so hat man, nach Taylor's Theorem:

$$u' = \frac{X + \frac{dX}{dx} \cdot h + \frac{d^2X}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \ldots}{X' + \frac{dX'}{dx} \cdot h + \frac{d^2X'}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \ldots},$$

wo $u' = u$ für $h = o$ ist. Ist nun die gegebene Funktion $u = \frac{X}{X'}$ so beschaffen, daß sie für den besondern Werth von $x = o$ in $u = \frac{o}{o}$ übergeht, so erhält man

$$u' = \frac{\frac{dX}{dx} + \frac{d^2X}{dx^2} \cdot \frac{h}{1.2}}{\frac{dX'}{dx} + \frac{d^2X'}{dx^2} \cdot \frac{h}{1.2}};$$

und da auch hier wieder $u' = u$ für $h = o$ wird, so hat man für den gesuchten Werth von

$$u = \frac{dX}{dx} : \frac{dX'}{dx}.$$

Sollte aber auch dieser Ausdruck $\frac{dX}{dx} : \frac{dX'}{dx}$ für $x = o$ wieder $o : o$ geben, so wird man auf dieselbe Weise

$$u = \frac{d^2X}{dx^2} : \frac{d^2X'}{dx^2}$$

finden, u. s. w., so daß man daher von einem solchen Bruche, der für einen bestimmten Werth von x die Gestalt $\frac{o}{o}$ annimmt, den wahren Werth desselben finden wird, wenn man das erste oder überhaupt das n^{te} Differential des Zählers durch das n^{te} Differential des Nenners dividirt.

Ex. I. Sey $u = \frac{x^n - 1}{x - 1}$ gegeben. Um den Werth dieses Ausdrucks für den besondern Fall $x = 1$ zu suchen, hat man schon nach einer ersten Differentiation $u = \frac{n x^{n-1} dx}{dx}$, oder der gesuchte Werth ist $u = n x^{n-1} = n$.

Ex. II. Eben so gibt $u = \frac{ax^2 - 2acx + ac^2}{bx^2 - 2bcx + bc^2}$ für $x = c$ nach der ersten Differentiation

$$u = \frac{ax - ac}{bx - bc},$$

und da auch dieser Ausdruck für $x = c$ noch gleich $\frac{o}{o}$ wird, so erhält man durch eine zweyte Differentiation den gesuchten wahren Werth von

$$u = \frac{a\,dx}{b\,dx} = \frac{a}{b}.$$

Auf dieselbe Weise findet man für den besondern Fall $x = 0$ folgende Werthe:

$$\frac{\sin. x}{x} = 1, \quad \frac{\sin.^2 x}{x} = 0, \quad \frac{\sin. x}{x^2} = \infty, \quad \frac{1 - \cos. x}{x^2} = \tfrac{1}{2}, \quad \frac{x - \sin. x}{x^3} = \tfrac{1}{6},$$

$$\frac{\log.(1+x)}{x} = 1, \quad \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} = \frac{1}{2a}, \quad \frac{(1+x)\log. x}{(1-x)^2} = \infty,$$

$$\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin. x} = 2;$$

und eben so ist für den Fall $x = 1$:

$$\frac{\log. x}{x - 1} = 1, \quad \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \tfrac{1}{2}, \quad \frac{x - 1}{x^n - 1} = \frac{1}{n}.$$

§. 79. **(Fälle, wo sich der Taylor'sche Lehrsatz nicht anwenden läßt.)** Wenn der im Zähler und Nenner für einen bestimmten Fall verschwindende Factor einen gebrochenen Exponenten hat, so läßt sich die vorhergehende Methode nicht mehr anwenden, weil die Differentiation, wenn sie auch noch so weit fortgesetzt wird, diesen Factor immer wieder erzeugt, wie dieß z. B. bey der Funktion

$$u = \frac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

fur $x = 1$ der Fall ist.

Wenn aber irgend eine Funktion u von x für einen besondern Werth $x = a$ die Form $\frac{0}{0}$ erhält, so wird man in ihr statt x den Ausdruck $a + h$ substituiren, wo h eine sehr kleine Größe ist, und dann den Ausdruck u nach den Potenzen von h entwickeln, wo man gewöhnlich schon bey den ersten Gliedern der Entwicklung stehen bleiben kann, und wo man sodann den gesuchten Werth von u erhält, wenn man in dieser Entwicklung die Größe $h = 0$ setzt.

In unserem vorhergehenden Beyspiele erhält man, wenn man $x = 1 + h$ setzt:

$$u = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt[3]{2h + h^2}} = \frac{h^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[3]{2 + h}} = 0 \quad \text{für} \quad x = 1,$$

so daß also $u = 0$ der gesuchte Werth ist.

Eben so gibt $u = \sqrt{\frac{x^4 + 2x^3 - 3}{x^2 - 1}}$, wenn man $x = 1 + h$ setzt:

$$u = \sqrt{\frac{10 + 12h + 6h^2 + h^3}{2 + h}} = \sqrt{5} \quad \text{für} \quad x = 1.$$

Auf dieselbe Weise findet man

$$\frac{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{(x - a)^{\frac{3}{2}}} = (2a)^{\frac{3}{2}} \quad \text{für} \quad x = a, \text{ u. s. w.}$$

Man sieht, daß dieses Verfahren ganz allgemein ist, und selbst da oft mit Vortheil angewendet werden kann, wo auch die beschränktere Methode des §. 78 noch anwendbar ist. Hätte man z. B. den Ausdruck

$$u = \frac{x^3 - 4x^2 + 7x - 2 - 2\sqrt{2x - 1}}{x^2 - 2x - 1 + 2\sqrt{2x - x^2}}$$

für $x = 1$ zu suchen, so würde nach §. 78 erst eine viermalige Differentiation zum Zwecke führen. Setzt man aber in ihm $1 + h$ statt x, so erhält man

$$u = \frac{2 + 2h - h^2 + h^3 - 2\sqrt{1 + 2h}}{-2 + h^2 + 2\sqrt{1 - h^2}}.$$

Allein

$$\sqrt{1 + 2h} = 1 + h - \tfrac{1}{2}h^2 + \tfrac{1}{2}h^3 - \tfrac{5}{8}h^4 + \dots$$

$$\text{und} \quad \sqrt{1 - h^2} = 1 - \tfrac{1}{2}h^2 - \tfrac{1}{8}h^4,$$

also ist auch der gesuchte Werth von

$$u = -5 \quad \text{für} \quad x = 1.$$

§. 80. (**Andere unbestimmt scheinende Formen.**) Zuweilen kann eine Funktion für einen bestimmten Werth ihrer Stammgröße eine Form der Art $\frac{\infty}{\infty}$ oder $0 . \infty$ oder $\infty - \infty$ u. s. annehmen, die sich aber immer, durch eine angemessene Verwandlung, auf die bisher betrachtete Gestalt $\frac{0}{0}$ zurückführen läßt. Wird z. B. von dem Bruche $u = \frac{X}{X'}$ für $x = a$ der Zähler sowohl als auch der Nenner gleich ∞, so kann man diesen Bruch auch so ausdrücken:

$$u = \frac{1}{X'} : \frac{1}{X},$$

wo er dann für $x = a$ die Form $u = \frac{0}{0}$ annehmen wird. Wird in dem

Ausdrucke $u = X . X'$ für $x = a$ der Factor $X = o$ und $X' = \infty$, so kann man dafür nehmen

$$u = X : \frac{1}{X'},$$

wo dann für $x = a$ die Größe u wieder gleich $\frac{o}{o}$ wird, u. s. w.

Ist z. B. $u = (1 - x) \text{ tang. } \frac{1}{2} \pi x$ für $x = 1$ zu suchen, so hat man auch $u = \frac{1 - x}{\text{cotang. } \frac{1}{2} \pi x}$, und dieß gibt

$$u = \frac{2}{\pi} \text{ für } x = 1.$$

Auf dieselbe Weise findet man

$$\frac{\text{sec. } x}{\text{tang. } x} = 1 \text{ für } x = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \frac{\log. \frac{1}{x}}{\text{cotang. } x} = o \text{ für } x = o,$$

$$\frac{x^a}{e^x} = o \text{ für } x = \infty, \quad e^{-x} . \log. x = o \text{ für } x = \infty,$$

$$(1 - x) \text{ sec. } \tfrac{1}{2}\pi x = \tfrac{1}{2}\pi \text{ für } x = 1, \quad x \log. x = o \text{ für } x = o,$$

$$x^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{x}} = 1 \text{ für } x = \infty, \quad x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{e} \text{ für } x = 1.$$

Die Funktion endlich

$$u = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{\log. x} \text{ gibt } u = \infty - \infty \text{ für } x = 1.$$

Wenn man aber diese beyden Brüche auf einerley Nenner bringt, so hat man $u = \frac{\log. x - x + 1}{(x - 1) \log. x}$, was $u = \frac{o}{o}$ für $x = 1$ gibt. Eine zweymalige Differentiation des letzten Ausdrucks gibt dann $u = -\frac{1}{2}$ für $x = 1$, u. s. w.

§. 81. (**Anwendung des Vorhergehenden auf Differentialgleichungen.**) Wenn $u = o$ eine Gleichung zwischen zwey veränderlichen Größen x und y ausdrückt, so hat das erste Differential dieser Gleichung, nach §. 59, die Form

$$\left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy = o,$$

wo $\left(\frac{du}{dx}\right)$ und $\left(\frac{du}{dy}\right)$ die partiellen Differentialien von u in Beziehung auf x und auf y bezeichnen. Wenn nun für einen besondern Werth der Größen x und y diese partiellen Differential-Coefficienten beyde verschwinden, so folgt aus der vorhergehenden Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}.$$

Um aber in diesem Falle den wahren Werth von $\frac{dy}{dx}$ zu finden, wird man die vorhergehende Gleichung, die man auch so darstellen kann:

$$M dx + N dy = o,$$

noch einmal differentiiren, wodurch man, nach §. 60, Gleichung (II), einen Ausdruck der Form erhält:

$$P dx^2 + Q dx dy + R dy^2 + N d^2 y = o.$$

Da der Factor N in beyden Gleichungen derselbe bleibt, so geht der letzte Ausdruck in folgenden über:

$$P dx^2 + Q dx dy + R dy^2 = o \quad \text{oder}$$

$$P + Q \frac{dy}{dx} + R \frac{dy^2}{dx^2} = o,$$

und daraus wird man den gesuchten Werth von $\frac{dy}{dx}$ finden, der, wie man sieht, doppelt ist. Sollte auch m noch die Form $\frac{o}{o}$ haben, so wird man zu einer dritten Differentiation übergehen, u. s. f.

Ex. Ist $u = y^4 - 96 y^2 + 100 x^2 - x^4 = o$ gegeben, so erhält man daraus

$$y^3 dy - 48 y dy = x^3 dx - 50 x dx;$$

und für $x = o$, wo auch $y = o$ ist, hat man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}.$$

Differentiirt man aber die letzte Gleichung noch ein Mal, und setzt $d^2 y = o$, so hat man

$$3 y^2 dy^2 - 48 dy^2 = 3 x^2 dx^2 - 50 dx^2 \quad \text{oder}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{3x^2 - 50}{3y^2 - 48}},$$

und dieser Ausdruck gibt für $x = o$ den gesuchten Werth

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{25}{24}}.$$

§. 82. (Ueber die Ergänzung der Taylor'schen Reihe.)

Wenn man der Kürze wegen

$$f'x = \frac{d.fx}{dx}, \quad f''x = \frac{d^2.fx}{dx^2}, \quad f'''x = \frac{d^3.fx}{dx^3}, \text{ u. f.}$$

setzt, so hat die oben (§. 39) gegebene Taylor'sche Reihe folgende einfache Gestalt:

$$f(x+dx) = fx + f'x \,.\, dx + \tfrac{1}{2} f''x \,.\, dx^2 + \frac{1}{1.2.3} f'''x \,.\, dx^3 + \ldots,$$

so daß demnach die Größe

$$\frac{f(x+dx) - fx}{dx}$$

aus zwey wesentlich von einander verschiedenen Theilen besteht, wovon der eine $f'x$ von dx ganz unabhängig ist, während der zweyte, den wir durch $\omega\, dx$ bezeichnen wollen, bey dem unendlichen Abnehmen von dx selbst unendlich klein wird. Wir können daher annehmen

$$\frac{f(x+dx) - fx}{dx} = f'x + \omega\, dx \quad \text{oder}$$

$$\frac{f(x+dx) - fx - f'x \,.\, dx}{dx^2} = \omega.$$

Ist aber dx unendlich klein, so wird in dem letzten Ausdrucke der Zähler sowohl als auch der Nenner gleich Null, oder man erhält den unbestimmten Ausdruck $\omega = \frac{0}{0}$. Um den wahren Werth von ω zu erhalten, wird man also, nach §. 78, das Differential dieses Zählers durch das Differential des Nenners dividiren, wodurch man erhält

$$\omega = \frac{f'(x+dx) - f'x}{2\,dx};$$

und da auch dieser Ausdruck, für ein unendlich kleines dx, noch $\omega = \frac{0}{0}$ gibt, so wird man dasselbe Verfahren auch auf ihn wieder anwenden, und in dem so erhaltenen Resultate $\frac{1}{2} f''(x+dx)$ die Größe $dx = 0$ setzen, wodurch man also

$$\omega = \tfrac{1}{2} f''x$$

als den gesuchten Werth von ω für $dx = 0$ erhält, so daß man daher hat:

$$\frac{f(x+dx) - fx - f'x \,.\, dx}{dx^2} = \tfrac{1}{2} f''x.$$

Diesem gemäß werden wir also, wie zuvor, setzen können

$$\frac{f(x+dx) - fx - f'x \,.\, dx}{dx^2} = \tfrac{1}{2} f''x + \omega_1 \,.\, dx \quad \text{oder}$$

$$\frac{f(x+dx) - fx - f'x \,.\, dx - \frac{1}{2} f''x \,.\, dx^2}{dx^3} = \omega_1.$$

Der letzte Ausdruck nimmt aber für $dx = 0$ die Form $\frac{0}{0}$ an, und er thut dieß auch, wenn man den Zähler und Nenner desselben noch zwey Mal differentiirt. Erst die dritte Differentiation gibt

$$\omega_1 = \frac{1}{2.3} f'''x$$

als den gesuchten Werth von ω_1 für $dx = 0$, so daß man daher hat

$$\frac{f(x+dx) - fx - f'x \cdot dx - \frac{1}{2} f''x \cdot dx^2}{dx^3} = \frac{1}{2 \cdot 3} f'''x + \omega_2 \cdot dx.$$

Fährt man so fort, so findet man allgemein

$$f(x+dx) = fx + f'x \cdot dx + \frac{1}{1 \cdot 2} f''x \cdot dx^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''x \cdot dx^3 + \ldots$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} f^n x \cdot dx^n + \omega_{n-1} dx^{n+1},$$

und dieß ist der vollständige Ausdruck des Taylor'schen Theorems. Wenn das letzte Glied $\omega_{n-1} dx^{n+1}$ für ein unendlich großes n verschwindet, so geht diese Reihe in die oben (§. 39) gegebene über. Wenn dieß aber nicht der Fall ist, so ist es, wie man sieht, von großer Wichtigkeit, den Werth dieser Ergänzung für jeden besondern Fall bestimmen zu können.

Zu diesem Zwecke bemerken wir zuerst, daß die Größe fx, wenn x allmählich in $x + dx$ übergeht, immer wächst oder immer abnimmt, je nachdem $f'x$, innerhalb derselben Gränzen von x und $x + dx$, stets positiv oder stets negativ ist, wie dieß schon unmittelbar aus dem Ausdrucke folgt

$$\frac{f(x+dx) - fx}{dx} = f'x.$$

Betrachten wir nun die Funktion $\varphi z = f(x+z) - a \cdot z^n$, wo a eine Constante und n eine ganze positive Zahl bezeichnet. Die n auf einander folgenden Differentialien dieses Ausdrucks in Beziehung auf z sind:

$$\varphi' z = f'(x+z) - n a z^{n-1},$$

$$\varphi'' z = f''(x+z) - (n-1) n a z^{n-2},$$

$$\varphi''' z = f'''(x+z) - (n-2)(n-1) n a z^{n-3},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\varphi^{n-1} z = f^{n-1}(x+z) - 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) n a z,$$

$$\varphi^n z = f^n(x+z) - 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) n a.$$

Ist nun der Ausdruck fx der Art, daß die Differential-Coefficienten $f'x$, $f''x$, ... bis $f^{n-1}x$ für einen bestimmten Werth von $x = x_0$ verschwinden, so werden auch alle diese Größen $\varphi' z$, $\varphi^2 z$, ... bis $\varphi^{n-1} z$ verschwinden, wenn man in ihnen $x = x_0$ und $z = 0$ setzt.

Dieß vorausgesetzt, sey nun a der kleinste Werth, dessen der Quotient $\frac{f^n x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$ fähig ist, während die Größe x durch alle Zwischenwerthe von x_0 bis $x_0 + dx_0$ übergeht, so sieht man leicht, daß die Größe

$$\frac{f(x_0 + dx_0) - fx_0}{dx_0^n} - a$$

innerhalb denselben Gränzen immer positiv seyn muß, so wie sie im Gegentheile, wenn a den **größten** Werth des Quotienten $\frac{f^n x}{1.2.3\ldots n}$ bezeichnet, immer negativ seyn wird, woraus folgt, daß der Werth des Ausdrucks

$$\frac{f(x_0 + dx_0) - fx_0}{dx_0^n}$$

immer zwischen den größten und kleinsten Werth fallen muß, den $\frac{f^n x}{1.2.3\ldots n}$ von $x = x_0$ bis $x = x_0 + dx_0$ erhält, und daß man daher die Gleichung hat

$$\frac{f(x_0 + dx_0) - fx_0}{dx_0^n} = \frac{f^n(x_0 + \theta . dx_0)}{1.2.3\ldots n},$$

wo θ irgend ein zwischen o und 1 enthaltener Bruch ist, immer vorausgesetzt, daß die Größen $f'x_0 = f''x_0 = f'''x_0 \ldots f^{n-1}x_0$ sämmtlich gleich Null sind.

Wendet man dieß auf die vorhergehende **Taylor**'sche Reihe an, so sieht man, daß dieselbe, vollständig ausgedrückt, folgende Form hat:

$$f(x+dx) = fx + f'x . dx + \tfrac{1}{2} f''x . dx^2 + \frac{1}{1.2.3} f'''x . dx^3 + \ldots$$
$$+ \frac{1}{1.2.3\ldots(n\ 1)} f^{n-1}x . dx^{n-1} + \frac{1}{1.2.3\ldots n} f^n(x+\theta dx) . dx^n \ldots (I)$$

Einen ähnlichen Ausdruck erhält man auch für die oben (§. 40) gegebene Reihe **Maclaurin**'s, wenn man in dem vorhergehenden $x = o$, und dann, der Einfachheit wegen, x statt dx setzt, so daß man hat

$$fx = fo + x . f'o + \frac{x^2}{1.2} . f''o + \frac{x^3}{1.2.3} . f'''o + \ldots$$
$$+ \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots n-1} . f^{n-1}o + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} . f^n(\theta x) \ldots (II),$$

wo die Ausdrücke $f'o$, $f''o$, ... anzeigen, daß man, nach der Differentiation, die Größe x gleich Null setzen soll. Setzt man in dem letzten Ausdrucke nach der Ordnung $n = 1, 2, 3, \ldots$, so erhält man

$$fx = fo + xf'(\theta x),$$

$$fx = fo + xf'o + \frac{x^2}{1.2} f''(\theta x),$$

$$fx = fo + xf'o + \frac{x^2}{1.2} f''o + \frac{x^3}{1.2.3} f'''(\theta x), \text{ u. s. f.}$$

I. Wir wollen nun das Vorhergehende auf einige besondere Fälle anwenden. Nehmen wir nach der Reihe für die Funktion fx folgende Ausdrücke:

$$e^x, \quad \cos.x, \quad \sin.x, \quad (1+x)^m \quad \text{und} \quad \log.(1+x).$$

Diese Größen geben für $f^n x$ in derselben Ordnung

$$e^x, \quad \cos.(x + \tfrac{1}{2}n\pi), \quad \sin.(x + \tfrac{1}{2}n\pi),$$

und ferner

$$m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

$$\text{und} \quad (-1)^{n-1}.\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{(1+x)^n}.$$

Eben so geben sie für $f^n o$ die Ausdrücke

$$1, \quad \cos.\tfrac{1}{2}n\pi, \quad \sin.\tfrac{1}{2}n\pi,$$

$$m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1) \text{ und } (-1)^{n-1}.1.2.3\ldots(n-1).$$

Diesem gemäß erhält man daher aus der Gleichung (II):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} e^{\theta x},$$

$$\cos.x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots$$

$$+ \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} \cos.\tfrac{1}{2}(n-1)\pi + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} \cos.(\theta x + \tfrac{1}{2}n\pi),$$

$$\sin.x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

$$+ \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} \sin.\tfrac{1}{2}(n-1)\pi + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} \sin.(\theta x + \tfrac{1}{2}n\pi),$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)} x^{n-1} + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n} x^n (1+\theta x)^{m-n},$$

$$\log.(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \ldots$$

$$\pm \frac{x^{n-1}}{n-1} \mp \frac{1}{n}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n.$$

Ist in der zweyten und dritten dieser Reihen n eine gerade Zahl, so sind die beyden letzten Glieder von cos. x . . . $\pm \frac{x^{n-2}}{1.2.3\ldots(n-2)} \mp \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} \cos.\,\theta x$,

von sin. x . . . $\pm \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} \mp \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} \sin.\,\theta x$.

Ist aber n eine ungerade Zahl, so sind diese Glieder

von cos. x . . . $\pm \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} \mp \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} \sin.\,\theta x$,

von sin. x . . . $\pm \frac{x^{n-2}}{1.2.3\ldots(n-2)} \mp \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} \cos.\,\theta x$.

Demnach erhält man für $n=1$

$$\frac{e^x - 1}{x} = e^{\theta x},\quad \frac{1-\cos.\,x}{x} = \sin.\,\theta x,\quad \frac{\sin.\,x}{x} = \cos.\,\theta x,$$

$$\frac{(1+x)^m - 1}{mx} = (1+\theta x)^{m-1},\quad \frac{1}{x}\log.\,(1+x) = \frac{1}{1+\theta x}.$$

Für $n=2$ aber ist

$$e^x = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 . e^{\theta x},\quad \cos.\,x = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 \cos.\,\theta x,$$

$$\sin.\,x = x - \tfrac{1}{2}x^2 \sin.\,\theta x,$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \tfrac{1}{2}m(m-1)x^2(1+\theta x)^{m-2} \text{ und}$$

$$\log.\,(1+x) = x - \tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^2.$$

IX.

Größte und kleinste Werthe der Funktionen.

§. 83. (*Für Funktionen einer einzigen veränderlichen Grösze*). Ist $u = fx$ und geht x über in $x+h$, so erhält man (§. 39)

$$u' - u = h . \frac{du}{dx} + \frac{h^2}{1.2} . \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{h^3}{1.2.3} . \frac{d^3u}{dx^3} + \ldots,$$

und eben so, wenn x in $x-h$ übergeht:

$$u' - u = -h . \frac{du}{dx} + \frac{h^2}{1.2} . \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{h^3}{1.2.3} . \frac{d^3u}{dx^3} + \ldots$$

Wenn nun für einen bestimmten Werth von x, z. B. für $x=a$, die Funktion u, die wir für diesen Fall durch (u) bezeichnen wollen, größer oder kleiner ist, als die ihr zunächst vorhergehenden und ihr zunächst folgenden Werthe von u, so sagt man, daß für $x = a$ der Werth (u) in jenem Falle ein größter, und in diesem ein kleinster ist.

Bemerken wir noch, daß in den beyden vorhergehenden Reihen die Größe h immer so klein angenommen werden kann, daß das erste Glied $h \cdot \frac{du}{dx}$ die Summe aller übrigen Glieder übertrifft. Denn wenn in einem Ausdrucke der Form

$$A h^\alpha + B h^\beta + C h^\gamma + \ldots$$

die Exponenten alle positiv und steigend sind, so daß $\beta > \alpha$, $\gamma > \beta$ u. s., so kann man diesem Ausdrucke auch die Gestalt geben:

$$h^\alpha (A + B h^{\beta - \alpha} + C h^{\gamma - \alpha} + \ldots);$$

und da hier die Exponenten $\beta - \alpha$, $\gamma - \alpha \ldots$ alle positiv seyn müssen, so wird man offenbar die Größe h so klein annehmen können, daß das erste von h unabhängige Glied A größer wird, als die Summe

$$B h^{\beta - \alpha} + C h^{\gamma - \alpha} + \ldots$$

aller folgenden Glieder. Man wird also auch in den beyden Reihen für $u' - u$ die Größe h so klein nehmen können, daß schon das erste Glied $h \cdot \frac{du}{dx}$ dieser Reihe entscheidet, ob $u' - u$ positiv oder negativ ist.

Dieß vorausgesetzt, hat man also für diese beyden Werthe

$$u' - u = \pm\, h \cdot \frac{du}{dx},$$

d. h. die dem für $x = a$ zunächst vorhergehenden oder zunächst folgenden Werthe von u werden, die einen größer und die andern kleiner seyn, als das zu $x = a$ gehörende (u). Demnach wird (u) nur dann ein Größtes oder ein Kleinstes seyn können, wenn dieß erste Glied $h \cdot \frac{du}{dx}$ ganz verschwindet, d. h. wenn $\frac{du}{dx} = 0$ ist.

In diesem Falle ist aber, für positive und zugleich für negative Werthe von h, der Ausdruck von

$$u' - u = + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2 u}{dx^2}$$

immer positiv, wenn $\frac{d^2 u}{dx^2}$ positiv ist, oder negativ, wenn $\frac{d^2 u}{dx^2}$ negativ ist. In dem ersten Falle ist aber (u) kleiner und im zweyten größer, als alle ihm nächstliegenden Werthe von u, das heißt also, (u) ist, der vorhergehenden Erklärung zu Folge, im ersten Falle ein Kleinstes und im zweyten ein Größtes.

Daraus folgt demnach: Die Größe u kann nur dann ein Größtes oder ein Kleinstes seyn, wenn $\frac{du}{dx} = 0$ ist. Sucht man dann aus dieser Bedingungsgleichung den Werth von x, und substituirt ihn in $\frac{d^2u}{dx^2}$, so wird u, für diesen Werth von x, ein Größtes oder ein Kleinstes seyn, wenn $\frac{d^2u}{dx^2}$ negativ oder positiv ist.

Ist aber dieser Werth von $\frac{d^2u}{dx^2}$ ebenfalls, so wie $\frac{du}{dx}$, gleich Null, so hat man, wenn man wieder zu den ersten Gleichungen zurückgeht:

$$u' - u = \pm \frac{h^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3u}{dx^3} + \frac{h^4}{1.2.3.4} \cdot \frac{d^4u}{dx^4} \pm \ldots,$$

und man wird, wie zuvor, finden, daß nur dann ein solcher Werth von u Statt haben kann, wenn auch noch $\frac{d^3u}{dx^3} = 0$ ist, und daß, in diesem Falle, der gefundene Werth von u wieder ein Größtes oder Kleinstes seyn wird, wenn $\frac{d^4u}{dx^4}$ negativ oder positiv ist. Ist aber auch $\frac{d^4u}{dx^4}$ gleich Null, so muß für die Existenz eines solchen Werthes von u auch $\frac{d^5u}{dx^5}$ gleich Null seyn, und dann wird der positive Werth von $\frac{d^6u}{dx^6}$ ein Kleinstes, der negative aber ein Größtes geben u. s. w.

Ex. I. Sey $u = x^2 + 4x + 2$, so hat man

$$\frac{du}{dx} = 2x + 4 = 0,$$

und da aus dieser Gleichung $x + 2 = 0$ ein bestimmter Werth von x, nämlich $x = -2$ folgt, so ist es möglich, daß u für diesen Werth von x ein Größtes oder ein Kleinstes ist. Differentiirt man aber die gegebene Gleichung noch einmal, so erhält man

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 2;$$

und da der Werth von $\frac{d^2u}{dx^2}$ positiv ist, so wird die gegebene Funktion u für $x = -2$ ein Kleinstes, nämlich $u = -2$.

Ex. II. Sey $u = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$, so hat man

$$\frac{du}{dx} = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24$$

und

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 4\,(3x^2 - 12x + 11).$$

Aber $\frac{du}{dx} = 0$ gibt $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, und von dieser Gleichung sind die Wurzeln $x = 1$, $x = 2$ und $x = 3$.

Für $x = 1$ hat man $\frac{d^2u}{dx^2} = 8$, also u ein Kleinstes für $x = 1$.

Für $x = 2$ hat man $\frac{d^2u}{dx^2} = -4$, also u ein Größtes für $x = 2$.

Für $x = 3$ hat man $\frac{d^2u}{dx^2} = 8$, also u wieder ein Kleinstes für $x = 3$.

Ex. III. Sey $u = a + b\,(x - c)^4$, so hat man

$$\frac{du}{dx} = 4b\,(x - c)^3 = 0, \quad \text{woraus folgt} \quad x = c.$$

Allein für $x = c$ findet man auch $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$ und $\frac{d^3u}{dx^3} = 0$, und endlich $\frac{d^4u}{dx^4} = 24b$; also ist, für $x = c$, der Werth von u ein Größtes oder ein Kleinstes, wenn b negativ oder positiv ist.

Ex. IV. Ist $u = a + b\,(x - c)^3$, so hat man

$$\frac{du}{dx} = 3b\,(x - c)^2 = 0, \quad \text{woraus folgt} \quad x = c.$$

Aber $x = c$ gibt $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$ und $\frac{d^3u}{dx^3} = 6b$; also hat dieser Ausdruck von u keinen größten oder kleinsten Werth.

I. Es ist bereits oben (§. 40, I.) bemerkt worden, daß sich die Entwicklung der Funktionen, für besondere Werthe der Größe x, nach dem Taylor'schen Lehrsatze nicht immer vornehmen läßt. Dieß trifft nämlich dann ein, wenn diese Entwicklung der Funktion u, nachdem man in ihr $x + h$ statt x gesetzt hat, ihrer Natur nach auch gebrochene oder negative Exponenten von h enthalten muß. Allein die vorhergehenden Schlüsse werden auch dann noch anwendbar seyn, wenn auch die Entwicklung von u die Form

$$u' - u = Ah^{\alpha} + Bh^{\beta} + Ch^{\gamma} + \ldots$$

haben sollte, wo $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ gebrochene oder negative Exponenten sind, in welchem Falle aber dann die Differential-Coefficienten $\frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2} \ldots$ auch unendlich groß werden können.

Diesem gemäß kann man daher zur Bestimmung der größten und kleinsten Werthe der Funktionen auch folgende Vorschrift aufstellen, die selbst noch allgemeiner ist, als die vorhergehende, da sie nicht nur auf die eben erwähnten besonderen Fälle, sondern überhaupt auf alle möglichen anwendbar ist.

Man setze $\frac{du}{dx}$ gleich o oder auch gleich ∞. Aus dieser Bedingungsgleichung findet man einen bestimmten Werth von x, z. B. $x = a$. Setzt man dann $x = a \pm h$, wo h unendlich klein ist, in der vorhergehenden Bedingungsgleichung, und ändert dabey $\frac{du}{dx}$ sein Zeichen [indem z. B. $\frac{du}{dx}$ für $x = a + h$ positiv und für $x = a - h$ negativ wird], so kann die Funktion u für $x = a$ ein Größtes oder ein Kleinstes seyn. Um dieß zu entscheiden, setze man auch in der gegebenen Funktion u statt x die Größe $a \pm h$, wodurch also u einen doppelten Werth erhält, den wir durch u' bezeichnen wollen. Dieß vorausgesetzt, hat für $x = a$ ein Größtes Statt, wenn beyde Werthe von u' kleiner als u sind, und ein Kleinstes, wenn beyde Werthe von u' größer als u sind.

So war in dem vorhergehenden Beyspiele

$$u = a + b (x - c)^4.$$

Setzt man $\frac{du}{dx} = o$, so findet man

$$\frac{du}{dx} = 4b (x - c)^3 = o,$$

also auch $x = c$. Setzt man aber in dieser Gleichung

$$4b (x - c)^3 = o,$$

statt x die Größe $c \pm h$, so findet man

$$\frac{du}{dx} = 4b (\pm h)^3,$$

und da sonach $\frac{du}{dx}$ sein Zeichen ändert, so kann die Funktion u für $x = c$ einen größten oder kleinsten Werth haben.

Setzt man nun auch $x = c \pm h$ in der ursprünglichen Gleichung

$$u = a + b (x - c)^4,$$

so erhält man

$$u' = a + b (\pm h)^4.$$

Ist daher b eine an sich positive Größe, so ist in beyden Fällen $u' > u$, oder $x = c$ gibt einen kleinsten Werth von u. Ist aber b eine negative Größe, so ist $u' < u$, oder $x = c$ gibt einen größten Werth von u, wie zuvor.

Eben so hat man für die Funktion

$$u = a + b\,(x - c)^{\frac{2}{3}},$$

wenn man $\frac{du}{dx} = \infty$ setzt, $x = c$. Aber $x = c \pm h$ in $\frac{du}{dx}$ substituirt, gibt:

$$\frac{du}{dx} = \frac{2b}{3\,(\pm h)^{\frac{1}{3}}},$$

oder $\frac{du}{dx}$ ändert sein Zeichen. Setzt man aber auch $x = c \pm h$ in dem ursprünglichen Ausdrucke von u, so erhält man

$$u' = a + b\,(\pm h)^{\frac{2}{3}};$$

also auch, wenn b eine an sich positive Größe ist, in beyden Fällen $u' > u$, oder $x = c$ gibt einen kleinsten Werth für u.

Endlich gibt die Gleichung $u = \frac{x}{1 + x^2}$, wenn man ihr Differential gleich Null setzt, $x^2 = 1$; also entweder $x = 1$ oder $x = -1$.

Für beyde Werthe von x ändert $\frac{du}{dx}$ sein Zeichen. Überdieß gibt $x = 1 \pm h$ die ursprüngliche Funktion $u' = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}h^2$, also $u' < u$; und eben so gibt $x = -1 \pm h$ diese Funktion $u' = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}h^2$, also auch $u' > u$. Daher ist die gegebene Funktion u für $x = 1$ ein Größtes, und für $x = -1$ ein Kleinstes.

Auf dieselbe Weise wird man auch finden, daß

$u = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x - 1}$ für $x = 0$ ein Größtes und für $x = 2$ ein Kleinstes gibt, und daß

$u = \frac{2 - 3x + x^2}{2 + 3x + x^2}$ für $x = \sqrt{2}$ einen kleinsten und für $x = -\sqrt{2}$ einen größten Werth hat.

Die beyden Ausdrücke $u = \frac{\log.\,\text{nat.}\,x}{x}$ und $u = x^{\frac{1}{x}}$ geben jeder für $x = e$ einen größten Werth, wenn e, wie oben, die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet.

Eben so gibt

$u = \frac{a^x}{x}$ für $x = \frac{1}{\log.\,a}$ das Minimum $u = e\,\log.\,a$ und

$u = x^a \cdot e^{-x}$ gibt für $x = a$ das Maximum $u = a^a \cdot e^{-a}$,

$u = e^x + e^{-x} - 2\cos.x$ gibt für $x = 0$ das Minimum $u = 0$,

$u = e^x + e^{-x} + 2\cos.x$ gibt für $x = 0$ das Minimum $u = 4$.

II. Noch ist der Fall zu betrachten übrig, wenn die beyden Größen u, x oder y, x durch eine noch unentwickelte Gleichung gegeben sind. Um das hier zu beobachtende Verfahren sogleich durch ein Beyspiel deutlich zu machen, sey die gegebene Gleichung

$$y^2 - 2axy + x^2 - b^2 = 0.$$

Das Differential derselben ist

$$(y - ax)\,dy = (ay - x)\,dx.$$

Setzt man also $\frac{dy}{dx} = 0$, so hat man $ay - x = 0$.

Verbindet man aber diese letzte Gleichung mit der ursprünglich gegebenen, so findet man

$$x = \frac{ab}{\sqrt{1 - a^2}} \text{ und } y = \frac{b}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

Um zu sehen, ob dieser letzte Werth von y ein größter oder kleinster ist, so hat man für das zweyte Differential der gegebenen Gleichung

$$(y - ax)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + 1 = 0;$$

oder da bereits $\frac{dy}{dx} = 0$ ist:

$$(y - ax)\frac{d^2y}{dx^2} + 1 = 0;$$

oder endlich, wenn man in diesem Ausdrucke für x und y die oben gefundenen Werthe substituirt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{b\sqrt{1 - a^2}}.$$

Ist daher b eine an sich positive Größe, und nimmt man auch von der Wurzelgröße $\sqrt{1 - a^2}$ das positive Zeichen, so ist $\frac{d^2y}{dx^2}$ eine negative Größe, und daher der oben gefundene Werth $y = \frac{b}{\sqrt{1 - a^2}}$ ein Größtes.

Die Gleichung

$$y^3 + x^3 - 3axy = 0$$

gibt eben so

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{oder} \quad ay - x^2 = 0,$$

woraus folgt, daß

$$x = a\sqrt[3]{2} \text{ für } y \text{ das Maximum } y = a\sqrt[3]{4} \text{ gibt.}$$

§. 84. (Für Funktionen von zwey veränderlichen Größen). Ist $u = f(x, y)$ eine Funktion von x und y, und läßt man x in $x + h$ und y in $y + k$ übergehen, so erhält man, nach dem Vorhergehenden,

$$u' - u = \left(\frac{du}{dx}\right)h + \left(\frac{du}{dy}\right)k$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)h^2 + 2\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)hk + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)k^2\right] + \ldots,$$

und man wird, wie in §. 83, zeigen, daß die Funktion u nur dann einen größten oder kleinsten Werth haben kann, wenn die in h und k multiplicirten Glieder, jedes für sich, gleich Null sind. Man wird daher die beyden Bedingungsgleichungen haben

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = 0,$$

und aus ihnen einen bestimmten Werth von x und y, z. B. $x = a$ und $y = b$ ableiten, für welchen die gegebene Funktion u ein Größtes oder Kleinstes seyn kann. Ob aber dieses in der That der Fall ist, und ob dann die Funktion u für $x = a$ und $y = b$ ein Größtes oder aber ein Kleinstes ist, wird von dem Zeichen des zweyten Gliedes von $u' - u$ abhängen.

Setzt man der Kürze wegen die Größen $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)$ und $\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)$, nachdem man in ihnen $x = a$ und $y = b$ gemacht hat, gleich P, Q und R, so hat man, da bereits $\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{du}{dy}\right) = 0$ ist,

$$u' - u = \tfrac{1}{2}(Ph^2 + 2Qhk + Rk^2);$$

oder, wenn man zu diesem Ausdrucke die Größe $\frac{Q^2k^2}{2P}$ addirt und subtrahirt:

$$u' - u = \tfrac{1}{2}P\left(h + \frac{Qk}{P}\right)^2 + \tfrac{1}{2}k^2\left(\frac{PR - Q^2}{P}\right) \quad \ldots \text{(I)};$$

oder auch, wenn man P und R, so wie h und k mit einander verwechselt, was offenbar erlaubt ist:

$$u' - u = \tfrac{1}{2}R\left(k + \frac{Qh}{R}\right)^2 + \tfrac{1}{2}h^2\left(\frac{PR - Q^2}{R}\right) \quad \ldots \text{(II)}.$$

Dieß vorausgesetzt, wird man Folgendes bemerken, wo wir der Kürze wegen $PR - Q^2 = S$ setzen wollen.

Ist P und S positiv, so ist $u' - u$ in (I) positiv und
ist R und S positiv, so ist $u' - u$ in (II) positiv,
also in beyden Fällen der gesuchte Werth von u ein Kleinstes.

Ist aber P negativ und S positiv, so ist $u' - u$ in (I) negativ, und ist R negativ und S positiv, so ist $u' - u$ in (II) negativ, also in beyden Fällen der gesuchte Werth von u ein Großtes; und man sieht, daß in allen diesen Fällen das Resultat dasselbe bleibt, wenn man, statt S positiv oder negativ, $S = o$ setzt.

Sind also P und R zugleich positiv, und ist überdieß $PR - Q^2$ Null oder positiv, so ist u, für die Werthe $x = a$ und $y = b$, ein Kleinstes. Sind aber P und R zugleich negativ, und ist überdieß $PR - Q^2$ Null oder positiv, so ist u, für jene Werthe von x und y, ein Größtes.

Ex. I. Um eine Zahl a in drey Theile x, y und $a - x - y$ so zu theilen, daß das Produkt dieser drey Theile ein Größtes werde, so hat man

$$u = xy\,(a - x - y).$$

Die zwey Gleichungen

$$\left(\frac{dx}{du}\right) = o \quad \text{und} \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = o$$

geben sofort die zwey bestimmten Werthe

$$x = \frac{a}{3} \quad \text{und} \quad y = \frac{a}{3}.$$

Substituirt man diese Werthe in den Gleichungen

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) = -\,2y,$$

$$\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right) = a - 2x - 2y,$$

$$\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) = -\,2x,$$

so erhält man

$$P = -\frac{2a}{3},\quad Q = -\frac{a}{3},\quad R = -\frac{2a}{3};$$

also auch;

$$S = PR - Q^2 = \frac{a^2}{3}.$$

Da also P und R negativ, und S positiv ist, so ist u ein Größtes, wenn man $x = y = \frac{a}{3}$, d. h. wenn man die drey Theile der Größe a unter sich gleich nimmt.

Ex. II. Wäre eben so die Gleichung gegeben

$$u = x^3 \,.\, y^2\,(a - x - y),$$

so geben die zwey Gleichungen

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = 0$$

sofort die zwey bestimmten Werthe

$$x = \frac{a}{2} \quad \text{und} \quad y = \frac{a}{3}.$$

Substituirt man diese Werthe in

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) = xy^2(6a - 12x - 6y),$$

$$\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right) = x^2y(6a - 8x - 9y),$$

$$\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) = x^3(2a - 2x - 6y),$$

so erhält man

$$P = -\frac{a^4}{9}, \quad Q = -\frac{a^4}{12}, \quad R = -\frac{a^4}{8},$$

also auch

$$S = PR - Q^2 = \frac{a^8}{144};$$

mithin ist auch das Produkt

$$u = x^3y^2(a - x - y) \quad \text{für}$$

$$x = \frac{a}{2} \quad \text{und} \quad y = \frac{a}{3} \quad \text{ein Größtes.}$$

X.

Verwechslung des constanten Differentials.

§. 85. (**Verwandlung der höheren Differentialausdrücke in solche, die kein erstes Differential als constant voraussetzen**). Es ist bereits oben (§. 38) gesagt worden, daß in jedem Ausdrucke, in welchem zweyte oder noch höhere Differentialien vorkommen, irgend ein erstes Differential als constant angenommen werden muß. Gewöhnlich wählt man dazu das Differential von x, so daß $dx = \text{const.}$, also auch d^2x, d^3x u. f. gleich Null vorausgesetzt wird. Allein man kann auch irgend ein anderes erstes Differential, z. B. dy, oder auch irgend einen aus ersten Differentialien zusammengesetzten Ausdruck, z. B. $y\,dx$ oder $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ u. f. als constant annehmen; und unsere Absicht ist es nun, zu zeigen, wie man einen Differentialausdruck, in welchem $dx = \text{const.}$ angenommen worden ist, zu verändern habe, wenn irgend ein anderes Differential als beständig vorausgesetzt wird.

Zu diesem Zwecke wird es am einfachsten seyn, dasjenige Verfahren zu suchen, welches man anzuwenden hat, um einen Differentialausdruck, in welchem, wie gewöhnlich, $dx = \text{const.}$ ist, in einen andern zu verwandeln, in welchem überhaupt gar kein erstes Differential beständig ist. Denn obschon ein jeder Ausdruck der letzten Art, wie bereits a. a. O. gesagt wurde, keine bestimmte Bedeutung hat, so wird es doch, wenn man ihn einmal erhalten hat, sehr leicht seyn, denselben so umzugestalten, daß dabey irgend ein anderes Differential constant angenommen wird.

Sey der Kürze wegen $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx}$, $r = \frac{dq}{dx}$ u. f., also auch, wenn dx constant ist:

$$q = \frac{d^2y}{dx^2},\quad r = \frac{d^3y}{dx^3} \text{ u. f.,}$$

wo, wie gewöhnlich, y als eine Funktion der unbestimmten oder unabhängigen Größe x betrachtet wird.

Sieht man aber y sowohl, als auch x als eine Funktion einer dritten Größe t an, und betrachtet man t als die unabhängige oder als diejenige Größe, deren erstes Differential dt constant ist, so hat man, wie in §. 30,

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right); \text{ also auch}$$

$$\frac{dy}{dx} \text{ oder } p = \left(\frac{dy}{dt}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right).$$

Differentiirt man aber diesen Ausdruck von p, indem man das erste Differential von t als constant betrachtet, nach §. 28, so hat man

$$dp = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2y}{dt}\right) - \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt}\right)}{\frac{dx^2}{dt^2}};$$

also auch, wenn man im Zähler und Nenner die Größe dt^2 wegläßt,

$$\frac{dp}{dx} \text{ oder } q = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}.$$

Differentiirt man diesen Ausdruck wieder nach §. 28, so erhält man

$$dq = r\,dx \quad \text{oder}$$

$$r = \frac{dx^2 d^3 y - 3\,dx\,d^2x\,d^2y + 3\,dy\,d^2x^2 - dx\,dy\,d^3x}{dx^5} \quad \text{u. s. w.}$$

Da nun $q . dx^2 = d^2 y$ und $r . dx^3 = d^3 y$ u. s. ist, so sieht man, daß man in einem Ausdrucke, in welchem dx constant ist, für $d^2 y$, $d^3 y \ldots$ folgende Werthe substituiren muß, um einen andern Ausdruck zu erhalten, in welchem kein erstes Differential constant ist.

Für $d^2 y$ wird man nämlich setzen:

$$\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx} = dx\,.\,d\left[\frac{dy}{dx}\right],$$

und für $d^3 y$ wird man annehmen:

$$d^3y - \frac{3\,d^2x\,d^2y}{dx} + \frac{3\,dy\,d^2x^2}{dx^2} - \frac{dy\,d^3x}{dx} = dx^2\,.\,d\left[\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}\right]$$

u. s. w.

Ex. Sey

$$\gamma = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y}.$$

Vorausgesetzt, daß in diesem Ausdrucke dx constant angenommen worden ist. Will man ihn in einen andern Ausdruck verwandeln, in welchem kein erstes Differential constant ist, so hat man sofort, wenn man der Kürze wegen $ds^2 = dx^2 + dy^2$ setzt:

$$\gamma = \frac{ds^3}{dx\left(d^2y - \frac{dy\,d^2x}{dx}\right)} \quad \text{oder}$$

$$\gamma = \frac{ds^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} \quad \ldots \quad \text{(I)},$$

und in diesem Ausdrucke ist kein Differential constant. Setzt man daher in ihm $dx = \text{const.}$, so erhält man $\gamma = \frac{ds^3}{dx\,d^2y}$, wie zuvor. Setzt man aber dy constant, so ist $\gamma = -\frac{ds^3}{dy\,d^2x}$. Setzt man ds constant, also auch

$$d.\sqrt{dx^2 + dy^2} = 0 \quad \text{oder} \quad dx\,d^2x + dy\,d^2y = 0,$$

so hat man, wenn man mittelst der letzten Gleichung aus (I) die Größe $d^2 x$ eliminirt:

$$\gamma = \frac{ds\,dx}{d^2y} \quad \ldots \quad \text{(a)},$$

oder, wenn man $d^2 y$ eliminirt:

$$\gamma = -\frac{ds\,dy}{d^2 x} \quad . \; . \; . \; (b),$$

oder endlich, wie aus (a) folgt:

$$\gamma = \frac{dx\,(dx^2 + dy^2)}{d^2 y \sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{ds^2}{d^2 y \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}};$$

und da, nach der vorhergehenden Bedingungsgleichung $\frac{dy}{dx} = -\frac{d^2 x}{d^2 y}$ ist,

$$\gamma = \frac{ds^2}{\sqrt{d^2 x^2 + d^2 y^2}} \quad . \; . \; . \; (c),$$

und jede der drey Gleichungen a, b, c setzt das Differential ds als constant voraus.

§. 86. (**Analoge Aenderungen anderer Differentialausdrücke**). Bisher haben wir vorausgesetzt, daß der gegebene Ausdruck das erste Differential von x, oder dx als constant voraussetzt, wie dieß auch in der That gewöhnlich der Fall ist. Allein zuweilen hat man auch Differentialausdrücke, in welchen irgend ein anderes, zusammengesetztes erstes Differential als constant angenommen worden ist, und es ist daher noch übrig, zu zeigen, wie man auch diese in solche verwandeln kann, die kein Differential constant voraussetzen.

Nehmen wir z. B. an, daß der gegebene Differentialausdruck die vorhergehende Größe $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ als constant voraussetze, so hat man, wenn man wieder die vorhergehende Bedeutung von p, q, r . . . annimmt:

$$dx\sqrt{1 + p^2} = \text{const.},$$

also auch, wenn man diesen Ausdruck differentiirt:

$$d^2 x \sqrt{1 + p^2} + \frac{pq\,dx^2}{\sqrt{1 + p^2}} = 0 \quad \text{oder}$$

$$d^2 x = -\frac{pq\,dx^2}{1 + p^2}.$$

Da ferner $dy = p\,dx$ ist, so ist auch

$$d^2 y = q\,dx^2 + p\,dx^2 \quad \text{oder}$$

$$d^2 y = \frac{q\,dx^2}{1 + p^2}.$$

Setzt man in diesen Ausdrücken von $d^2 x$ und $d^2 y$ für p und q die bereits in §. 85 erhaltenen Werthe

$$p = \frac{dy}{dx} \quad \text{und} \quad q = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3},$$

so sieht man, daß man statt

$$d^2x \quad \text{die Größe} \quad \frac{dy^2\,d^2x - dx\,dy\,d^2y}{dx^2 + dy^2}, \quad \text{und statt}$$

$$d^2y \quad \text{die Größe} \quad \frac{dx^2\,d^2y - dx\,dy\,d^2x}{dx^2 + dy^2}$$

substituiren muß, um einen Ausdruck zu erhalten, in welchem kein Differential constant angenommen wird.

Ex. Wir haben zuvor (§. 85) den Ausdruck erhalten:

$$\gamma = \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2}},$$

in welchem ds constant vorausgesetzt ist. Substituirt man in ihnen für d^2x und d^2y die vorhergehenden Werthe, so erhält man

$$\gamma = \frac{ds^4}{\sqrt{[(d^2x\,dy^2 - dx\,dy\,d^2y)^2 + (dx^2\,d^2y - dx\,dy\,d^2x)^2]}}.$$

Entwickelt man die beyden Quadrate des Nenners, so erhält man

$$\gamma = \frac{ds^4}{\sqrt{[(dx^2 + dy^2)(dx^2\,d^2y^2 + dy^2\,d^2x^2 - 2\,dx\,dy\,d^2x\,d^2y)]}},$$

und daher

$$\gamma = \frac{ds^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x},$$

wie in §. 85, wo kein Differential constant angenommen wird.

I. Hätte man einen Differentialausdruck, in welchem das erste Differential $y\,dx$ als constant vorausgesetzt wird, so wird man auf dieselbe Weise finden, daß man in ihm

$$d^2x \quad \text{in} \quad -\frac{dx\,dy}{y}, \quad \text{und}$$

$$d^2y \quad \text{in} \quad d^2y - \frac{dy\,d^2x}{dx} - \frac{dy^2}{y}$$

verwandeln muß, um einen Ausdruck zu erhalten, in welchem kein Differential constant ist.