Einleitung.

Da das folgende Werk sich öfter auf die ersten Gründe der analytischen Geometrie bezieht, und da die in ihm enthaltenen Theoreme häufig auf die vorzüglichsten krummen Linien, als auf einzelne Beyspiele, angewendet werden, so wurde es für zweckmäßig erachtet, diese beyden Gegenstände, zur leichtern Übersicht und bloß in ihren Resultaten, hier kurz zusammen zu stellen.

Punkte und gerade Linien in der Ebene.

§. 1. (**Bestimmung der Lage eines Punktes in der Ebene**). Um die Lage eines Punktes in einer gegebenen Ebene zu bestimmen, nimmt man in dieser Ebene zwey feste, ihrer Lage nach gegebene, auf einander senkrecht stehende gerade Linien XAX' und YAY' (Fig. 1) an, und bestimmt dann den Ort des Punktes M durch seine senkrechten Abstände $MQ = PA = x$ und $MP = QA = y$ von jenen beyden Linien. Man nennt x die Abscisse, y die Ordinate und beyde zusammen die Coordinaten des Punktes M, und jene zwei feste Gerade heißen die Axen der Coordinaten, so wie A der Anfangspunkt derselben. Demnach ist also x die Entfernung des Punktes M von der Coordinaten-Axe der y, und y ist die Entfernung desselben Punktes von der Axe der x. Nimmt man den Quadranten XAY als den ersten an, in welchem die Coordinaten x und y beyde positiv sind, so ist offenbar in dem zweyten Quadranten YAX' die Abscisse x negativ, im dritten $X'AY'$ ist x und y, und im vierten $Y'AX$ endlich ist blos die Ordinate y negativ.

§. 2. (**Gleichungen einer geraden Linie und eines Punktes**). Jede Gleichung zwischen x, y und constanten Größen gehört für eine stetige Folge von Punkten, d. h. für eine Linie. Ist diese Gleichung für x oder y des ersten, zweyten, dritten Grades u. f., so wird auch die durch sie ausgedrückte Linie eine Linie des ersten, zweyten, dritten Grades u. f. genannt. — Gleichungen des ersten Grades gehören für gerade Linien, und die allgemeine Form dieser Gleichungen ist

$$y = ax + b.$$

$AC : AB = AC + AP : PM$
$PM = \frac{AB}{AC} . AP + AB$
$\frac{AB}{AC} = a$
$AB = b$
$AP = x$
$PM = y$
$y = ax + b$

Sey CBM diese Gerade. Für $x = o$ ist $y = b$, und für $y = o$ ist $x = -\frac{b}{a}$, also ist $AC = \frac{b}{a}$ und $AB = b$ die Entfernung der Punkte C und B, in welchen die Gerade von der Axe der x und der y geschnitten wird, so wie auch a die Tangente des Winkels XCM ist, unter welchen die Gerade die Axe der x schneidet.

Ist $b = o$, so geht die Gerade durch den Anfang A der Coordinaten. Die Gleichung $x = A$ gehört für eine der Axe der y, und die Gleichung $y = B$ für eine der Axe der x parallele Gerade. Die beyden Gleichungen

$$x = A \quad \text{und} \quad y = B$$

zusammen genommen aber, gehören für einen Punkt, der von der Axe der x um B, und von der Axe der y um die Größe A absteht. Demnach gehören auch die beyden Gleichungen $x = A$ und $y = o$ für einen Punkt in der Axe der x, und die Gleichungen $x = o$ und $y = B$ für einen Punkt in der Axe der y, und die beyden Gleichungen $x = o$ und $y = o$ endlich für den Anfangspunkt der Coordinaten.

§. 3. (**Verbindung von zwey geraden Linien**). Betrachten wir zwey gerade Linien, die wir durch (1) und (2) ausdrücken, und deren Gleichungen

$$y = ax + b \ldots (1) \quad \text{und}$$
$$y = a'x + b' \ldots (2)$$

seyn sollen. Diese zwey Gerade werden sich im Allgemeinen in einem Punkte schneiden, und die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes werden seyn

$$x = \frac{b' - b}{a' - a} \quad \text{und} \quad y = \frac{a'b - ab'}{a' - a}.$$

I. Nennt man (1 . 2) den Winkel, welchen diese beyden Geraden unter sich bilden, so hat man

$$\tang (1 . 2) = \frac{a' - a}{1 + a'a}.$$

Nennt man eben so (1 . x) und (1 . y) den Winkel, welchen die Gerade (1) mit der Axe der x und mit der Axe der y bildet, so hat man

*) Denn ist der Winkel den eine Linie schließt die Achse X = A, der Winkel der andern = B, so ist tang A = a', tang B = a, tang (A − B) = $\frac{a' - a}{1 + a'a}$

$$\cos.(1.x) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}},$$

$$\cos.(1.y) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}};$$

und eben so für die Gerade (2)

$$\cos.(2.x) = \frac{1}{\sqrt{1+a'^2}},$$

$$\cos.(2.y) = \frac{a'}{\sqrt{1+a'^2}},$$

und zwischen diesen fünf Winkeln besteht die Relation

$$\cos.(1.2) = \cos.(1.x)\cos.(2.x) + \cos.(1.y)\cos.(2.y)$$

II. Aus diesen Ausdrücken folgt zugleich, daß die beyden Geraden (1) und (2) unter sich parallel sind, wenn man hat $a = a'$, und daß sie auf einander senkrecht stehen, wenn man hat $1 + aa' = 0$ oder $a' = -\frac{1}{a}$.

III. Daher ist auch $y - y' = a(x - x')$ die Gleichung einer Geraden, die mit (1) parallel ist, und überdieß durch den Punkt geht, dessen Coordinaten x' und y' sind. Eben so ist $y - y' = -\frac{1}{a}(x - x')$ die Gleichung einer durch denselben Punkt x', y' gehenden, und auf der Geraden (1) senkrechten Linie. Nennt man x'', y'' die Coordinaten des Durchschnittspunktes der zwey letzten Linien, so hat man

$$x'' = x' + \frac{(y' - ax' - b)a}{1 + a^2} \text{ und } y'' = y' - \frac{(y' - ax' - b)}{1 + a^2},$$

und die Distanz der zwey erwähnten Punkte, deren Coordinaten $x'y'$ und $x''y''$ sind, ist gleich

$$\sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2} \text{ oder gleich } \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

IV. Endlich ist auch die Gleichung einer Geraden, welche durch die zwey Punkte geht, deren Coordinaten $x'y'$ und $x''y''$ sind,

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x'),$$

so wie die Distanz dieser zwey Punkte wieder gleich ist

$$\sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}.$$

§. 4. (**Verwandlung der Coordinaten in einer Ebene**). Oft ist es vortheilhaft und selbst nothwendig, den beyden Coordinatenaxen eine andere Lage in der Ebene zu geben. Seyen, wie zuvor, $AP = x$ und $PM = y$ (Fig. 2) die Coordinaten des Punkts M gegen die Coordinatenaxen AX und AY. Man nehme den neuen Anfangspunkt A′ gegen dieselben Axen so, daß seine Coordinaten $AB = a$ und $BA' = b$ sind, ziehe $A'P'$ mit AP parallel, und nehme den Winkel $P'A'P'' = \alpha$. Die auf die neuen Axen sich beziehenden Coordinaten des Punktes M sollen $A'P'' = x'$ und $P''M = y'$ seyn, wo MP'' auf $A'P''$ senkrecht ist. Nennt man noch m den Winkel $P''A'M$ und nimmt man die Distanz $A'M$ gleich der Einheit an, so hat man sofort die vier Gleichungen

$$A'P' = x - a = \cos.(\alpha + m),$$
$$P'M = y - b = \sin.(\alpha + m) \quad \text{und}$$
$$A'P'' = x' = \cos. m,$$
$$P''M = y' = \sin. m;$$

woraus man leicht die folgenden Ausdrücke findet, die zur Verwandlung des einen dieser zwey Coordinatensysteme in das andere dienen:

$$\left.\begin{aligned} x' &= (y - b)\sin.\alpha + (x - a)\cos.\alpha \\ y' &= (y - b)\cos.\alpha - (x - a)\sin.\alpha \end{aligned}\right\} \text{ und}$$
$$\left.\begin{aligned} x &= a + x'\cos.\alpha - y'\sin.\alpha \\ y &= b + x'\sin.\alpha + y'\cos.\alpha \end{aligned}\right\}.$$

Da durch die Substitution dieser Ausdrücke in einer Gleichung zwischen xy oder zwischen $x'y'$ der Grad der Gleichung nicht geändert wird, so können die Linien mit Recht nach ihren Gleichungen in Klassen eingetheilt werden.

§. 5. (**Polarcoordinaten in der Ebene**). Der Punkt M (Fig. 3) der Ebene, in welcher die Coordinaten $AP = x$ und $PM = y$ liegen, läßt sich auch dadurch bestimmen, daß man die Distanz $AM = r$ dieses Punktes von dem Anfangspunkte A der Coordinaten, und den Winkel $MAB = v$ dieser Distanz mit einer ihrer Lage nach bestimmten Geraden AB in dieser Ebene angibt. Nennt man m den Winkel BAX dieser Geraden mit der Axe der x, so hat man $XAM = v - m$, und daher

$$x = r\cos.(v - m), \quad y = r\sin.(v - m) \quad \text{und}$$
$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Vermittelst dieser Gleichungen läßt sich jede Gleichung zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x und y in eine andere zwischen den Polarcoordinaten r und v verwandeln, wo dann A der Pol der letzten Coordinaten heißt. Für die umgekehrte Verwandlung aber hat man

$$\cos.(v-m) = \frac{x}{r}, \quad \sin.(v-m) = \frac{y}{r}, \quad \text{tang.}(v-m) = \frac{y}{x},$$

also auch $v - m = \text{arc. tang.} \frac{y}{x}$ u. s. w.

Nimmt man, der größeren Einfachheit wegen, an, daß die fixe Gerade AB mit der Abscissenaxe AX zusammenfällt, so ist $m = o$, und man hat

$$\cos. v = \frac{x}{r}, \quad \sin. v = \frac{y}{r} \quad \text{und} \quad \text{tang. } v = \frac{y}{x}.$$

Punkte, gerade Linien und Ebenen im Raume.

§. 6. (**Bestimmung der Lage eines Punktes im Raume**). Um die Lage eines Punktes im Raume zu bestimmen, nimmt man in diesem Raume drey feste, ihrer Lage nach gegebene, und auf einander gegenseitig senkrecht stehende Ebenen an. Sey XAZ (Fig. 4) ein rechter Winkel in der Ebene des Papiers, und AY eine auf diese Ebene, also auch auf die Linien AX und AZ, senkrechte Gerade, wo AY auf der Rückseite, oder auf der von dem Leser abgewendeten Seite des Blatts steht. Verlängert man die drey unten sich senkrechten Linien XA, YA, ZA auf der andern Seite von A, und legt durch je zwey derselben eine Ebene, so sind XYX′Y′, XZX′Z′ und YZY′Z′ die erwähnten drey normalen Ebenen, deren Lage im Raume gegeben ist. Kennt man dann die senkrechten Abstände eines Punktes M von diesen drey Ebenen, so wird auch die Lage dieses Punktes im Raume bestimmt seyn. — Sey $MQ = z$ dieser Abstand des Punktes M von der Ebene der XY, sey eben so $Ma = y$ dieser Abstand von der Ebene der XZ, und endlich $Mb = x$ der Abstand von der Ebene der YZ. Ergänzt man das rechtwinklige Parallelepipedum, dessen Seiten MQ, Ma und Mb sind, so ist auch

$$AB = x, \quad BQ = y \quad \text{und} \quad QM = z,$$

und man nennt diese Größen x, y, z die Coordinaten des Punktes M, so wie man A den Anfang der Coordinaten, die Linien XAX′, YAY′, ZAZ′ die Coordinatenaxen, und jene drey normalen Ebenen die coordinirten Ebenen zu nennen pflegt.

Nimmt man unter den acht Octanten, in welche der unbegränzte

Raum durch die drey coordinirten Ebenen getheilt wird, den zwischen den Linien AX, AY und AZ enthaltenen, als den ersten oder als denjenigen an, in welchem die drey Coordinaten xyz sämmtlich positiv sind, so werden dadurch die Zeichen dieser Coordinaten in den übrigen Octanten auf folgende Weise bestimmt:

Octant	I . . .	XYZ . . .	$+x+y+z$,
»	II . . .	X′YZ . . .	$-x+y+z$,
»	III . . .	X′Y′Z. . .	$-x-y+z$,
»	IV . . .	XY′Z . . .	$+x-y+z$,
»	V . . .	XYZ′. . .	$+x+y-z$,
»	VI . . .	X′YZ′. . .	$-x+y-z$,
»	VII . . .	X′Y′Z′. . .	$-x-y-z$ und
»	VIII . . .	XY′Z′. . .	$+x-y-z$.

§. 7. (Gleichungen des Punktes und der Linie). So wie in einer gegebenen Ebene die Lage eines Punktes durch zwey, die Linie aber nur durch eine Gleichung bestimmt wurde, so wird im Raume die Lage eines Punktes durch drey, die Linie durch zwey und die Ebene durch eine einzige Gleichung bestimmt. Die Linie wird nämlich als der Durchschnitt von zwey, und der Punkt als der gemeinschaftliche Durchschnitt von drey Ebenen betrachtet. Diese für Punkte und Linien gehörenden Gleichungen werden am einfachsten, wenn man die Ebenen, durch deren Durchschnitt sie erzeugt werden, auf eine der drey coordinirten Ebenen senkrecht annimmt.

I. Diesem gemäß gehört die Gleichung $x=a$ für eine der yz parallele und von ihr um die Größe a entfernte Ebene, und überhaupt gehört die Gleichung

$x=a$	für eine der yz	parallele Ebene,
$y=b$	» » » xz	» »
$z=c$	» » » xy	» »

also auch

$x=o$	für die coordinirte Ebene der yz,
$y=o$	» » » » » xz,
$z=o$	» » » » » xy.

II. Die beyden ersten Gleichungen $x=a$ und $y=b$ zusammen genommen aber, gehören für eine der Axe der z parallelen Linie, deren Abstand von yz gleich a und von xz gleich b ist; und überhaupt gehören die Gleichungs-Paare

$x = a$ und $y = b$ für eine der Axe der z parallele Linie,
$x = a$ » $z = c$ » » » » » y » »
$y = b$ » $z = c$ » » » » » x » »
also auch $x = o$ und $y = o$ für die Axe der z
$x = o$ » $z = o$ » » » » y
$y = o$ » $z = o$ » » » » x.

Die drey Gleichungen $x = a$, $y = b$ und $z = c$ zusammen genommen endlich gehören für einen Punkt, dessen Entfernung von der Ebene der yz, xz und xy in derselben Ordnung gleich a, b und c ist.

III. Eben so gehört die Gleichung

$$y = ax + b$$

für eine auf der coordinirten Ebene der xy senkrechte Ebene, deren Durchschnitt in dieser Ebene mit der Axe der x den Winkel bildet, dessen Tangente gleich a ist.

Die beyden Gleichungen aber

$$y = ax + b \quad \text{und} \quad z = c$$

zusammen genommen gehören für eine Linie, die in einer der xy parallelen und von xy um die Größe c entfernten Ebene liegt, oder diese Linie ist der Durchschnitt der beyden Ebenen $y = ax + b$ und $z = c$, von welchen die erste auf xy senkrecht, und die zweyte mit xy parallel ist.

Eben so gehören die beyden Gleichungen

$$y = ax + b \quad \text{und} \quad z = a'x + b'$$

zusammen genommen für eine gerade Linie überhaupt, oder für den Durchschnitt von zwey Ebenen, von denen die eine auf xy und die andere auf xz senkrecht steht. Ist $b = b' = o$, so geht diese Linie durch den Anfang der Coordinaten.

§. 8. (**Gleichung der Ebene**). Die allgemeine Gleichung einer Ebene hat die Form

$$Ax + By + Cz + D = o.$$

Für sie ist die Entfernung des Anfangspunktes der Coordinaten von demjenigen Punkte, in welchem diese Ebene

die Axe der x schneidet, gleich $-\frac{D}{A}$,
» » » y » » $-\frac{D}{B}$,
» » » z » » $-\frac{D}{C}$,

und wenn die Ebene durch den Anfangspunkt geht, so ist $D = 0$. Die geraden Linien, in welchen jene Ebene die drey coordinirten Ebenen schneidet, heißen die Knotenlinien jener Ebenen. Man hat daher für die Knotenlinie der Ebene

in xy die Gleichungen $Ax + By + D = 0$ und $z = 0$,
» xz » » $Ax + Cz + D = 0$ » $y = 0$,
» yz » » $By + Cz + D = 0$ » $x = 0$.

§. 9. (**Verbindung von zwey geraden Linien**). Betrachten wir die Verbindung von zwey geraden Linien im Raume, die wir der Kürze wegen durch (1) und (2) bezeichnen wollen, und deren Gleichungen, nach dem Vorhergehenden, von der Gestalt sind:

$$\left.\begin{array}{l} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{array}\right\} \ldots (1) \quad \text{und}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = a'z + \alpha' \\ y = b'z + \beta' \end{array}\right\} \ldots (2).$$

Diese beyden Linien werden sich nur dann begegnen oder einander schneiden, wenn die Bedingungsgleichung

$$\frac{a - a'}{b - b'} = \frac{\alpha - \alpha'}{\beta - \beta'}$$

Statt hat.

I. Sey (1.2) der Winkel, welchen diese beyden Linien unter sich bilden, und sey eben so $(1.x)$, $(1.y)$ und $(1.z)$ der Winkel der Linie (1) mit der Axe der x, y und z. Setzt man der Kürze wegen

$$m^2 = 1 + a^2 + b^2 \quad \text{und} \quad m'^2 = 1 + a'^2 + b'^2,$$

so hat man

$$\cos.(1.2) = \frac{1 + aa' + bb'}{mm'} \quad \text{und}$$

$$\cos.(1.x) = \frac{a}{m}, \quad \text{so wie} \quad \cos.(2.x) = \frac{a'}{m'},$$

$$\cos.(1.y) = \frac{b}{m} \quad » \quad \cos.(2.y) = \frac{b'}{m'},$$

$$\cos.(1.z) = \frac{1}{m} \quad » \quad \cos.(2.z) = \frac{1}{m'}.$$

Zwischen diesen Winkeln haben überdieß folgende Relationen Statt:

$$\cos.(1.2) = \cos.(1.x)\cos.(2.x) + \cos.(1.y)\cos.(2.y) + \cos.(1.z)\cos.(2.z)$$

und $\cos.^2(1.x) + \cos.^2(1.y) + \cos.^2(1.z) = 1,$
$\cos.^2(2.x) + \cos.^2(2.y) + \cos.^2(2.z) = 1.$

II. Daraus folgt, daß die beyden Linien (1) und (2) parallel sind, wenn man hat $a = a'$ und $b = b'$; und daß sie auf einander senkrecht sind, wenn man hat $1 + aa' + bb' = o$. Auch lassen sich die Gleichungen der Linie (1) so darstellen:

$$x = z\,\frac{\cos.(1.x)}{\cos.(1.z)} + \alpha,$$

$$y = z\,\frac{\cos.(1.y)}{\cos.(1.z)} + \beta.$$

III. Die Linie, welche durch den Punkt geht, dessen Coordinaten x', y', z' sind, und welche überdieß mit der Linie (1) parallel ist, hat zu ihren Gleichungen

$$x - x' = a(z - z') \quad \text{und} \quad y - y' = b(z - z').$$

Diejenige Linie aber, welche durch die zwey gegebenen Punkte geht, deren Coordinaten $x'y'z'$ und $x''y''z''$ sind, hat zu ihren Gleichungen

$$x - x' = \frac{x' - x''}{z' - z''}(z - z') \quad \text{und}$$

$$y - y' = \frac{y' - y''}{z' - z''}(z - z'),$$

und die Entfernung der beyden gegebenen Punkte ist gleich

$$\sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2}.$$

IV. Die Linie, welche durch den Punkt $x'y'z'$ geht, und senkrecht auf der Geraden (1) steht, hat zu ihren Gleichungen

$$a(x - x') + b(y - y') + z - z' = o \quad \text{und}$$

$$(x - x')(y' - bz' - \beta) - (y - y')(x' - az' - \alpha)$$
$$+ (z - z')[b(x' - \alpha) - a(y' - \beta)] = o.$$

Sind dann X, Y, Z die Coordinaten des Durchschnittspunktes beyder Geraden, so hat man

$$Z = \frac{a(x' - \alpha) + b(y' - \beta) + z'}{1 + a^2 + b^2},$$

$$Y = bZ + \beta \quad \text{und} \quad X = aZ + \alpha.$$

§. 10. (**Verbindung zweyer Ebenen**). Betrachten wir die gegenseitige Lage zweyer Ebenen, die wir durch (I) und (II) bezeichnen wollen, und deren Gleichungen folgende Gestalt haben:

$$Ax + By + Cz + D = o \ldots (\mathrm{I})$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = o \ldots (\mathrm{II}).$$

Nennt man (I.II) den Winkel, unter welchem diese beyden Ebenen gegen einander geneigt sind, so hat man

$$\cos.\,(\mathrm{I}.\mathrm{II}) = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,.\,\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$

Sind daher diese Ebenen zu einander parallel, so hat man

$$\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'} \text{ und } \frac{A}{C} = \frac{A'}{C'}, \text{ also auch } \frac{B}{C} = \frac{B'}{C'},$$

und sind sie auf einander senkrecht, so ist

$$AA' + BB' + CC' = o.$$

I. Nennt man eben so (I.xy) den Winkel der Ebene (I) mit der coordinirten Ebene der xy und (I.x) den Winkel der Ebene (I) mit der Axe der x, und bezeichnet man durch (I.xz), (I.yz) und durch (I.y), (I.z) die ähnlichen Winkel für die Ebenen xz, yz und für die Axen der y und z, so hat man, wenn man der Kürze wegen

$$M^2 = A^2 + B^2 + C^2 \text{ setzt:}$$

$$\cos.\,(\mathrm{I}.xy) = \frac{C}{M} \text{ und } \sin.\,(\mathrm{I}.x) = \frac{A}{M},$$
$$\cos.\,(\mathrm{I}.xz) = \frac{B}{M} \text{ » } \sin.\,(\mathrm{I}.y) = \frac{B}{M},$$
$$\cos.\,(\mathrm{I}.yz) = \frac{A}{M} \text{ » } \sin.\,(\mathrm{I}.z) = \frac{C}{M},$$

und zwischen diesen Winkeln haben folgende Relationen Statt:

$$\cos.\,(\mathrm{I}.\mathrm{II}) = \cos.\,(\mathrm{I}.xy)\cos.\,(\mathrm{II}.xy) + \cos.\,(\mathrm{I}.xz)\cos.\,(\mathrm{II}.xz) + \cos.\,(\mathrm{I}.yz)\cos.\,(\mathrm{II}.yz)$$

$$\text{und } \cos.^2(\mathrm{I}.xy) + \cos.^2(\mathrm{I}.xz) + \cos.^2(\mathrm{I}.yz) = 1.$$

II. Nennt man R das Loth vom Anfangspunkte der Coordinaten auf die Ebene (I), so hat man

$$R = -\frac{D}{M} = -\frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

daher man die Gleichung der Ebene (I) auch so ausdrücken kann:

$$x\cos.\,(\mathrm{I}.yz) + y\cos.\,(\mathrm{I}.xz) + z\cos.\,(\mathrm{I}.xy) = R \text{ oder}$$
$$x\sin.\,(\mathrm{I}.x) + y\sin.\,(\mathrm{I}.y) + z\sin.\,(\mathrm{I}.z) = R.$$

III. Bezeichnet man durch ξ, υ, ζ die Knotenlinien der Ebene (I) in der coordinirten Ebene der yz, xz, xy, so hat man für die Winkel dieser Knotenlinien unter sich und mit den Axen der xyz folgende Ausdrücke:

$$\text{tang.}(\xi v) = \frac{CM}{AB} \quad \text{und} \quad \text{tang.}(x z) = -\frac{A}{B},$$

$$\text{tang.}(\xi z) = \frac{BM}{AC} \quad \text{»} \quad \text{tang.}(y \xi) = -\frac{B}{C},$$

$$\text{tang.}(v z) = \frac{AM}{BC} \quad \text{»} \quad \text{tang.}(v z) = +\frac{C}{A}.$$

Nennt man also den Winkel $(I.xy) = n$ und $(xz) = k$, so ist

$$\text{tang.}\,k = -\frac{A}{B} \qquad \text{oder} \quad \text{tang.}\,n\ \sin.\,k = -\frac{A}{C},$$

$$\cos.\,n = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad \text{»} \quad \text{tang.}\,n\ \cos.\,k = +\frac{B}{C}.$$

§. 11. (**Verbindung der Ebenen mit Linien**). Sey analog mit den vorigen Bezeichnungen (I, 1) der Winkel der Ebene (I) mit der Geraden (1), so hat man

$$\sin.(I.1) = \frac{Aa+Bb+C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,.\,\sqrt{1+a^2+b^2}},$$ oder auch

$$\sin.(I.1) = \cos.(I.xy)\,\cos.(1.z) + \cos.(I.xz)\,\cos.(1.y) + \cos.(I.yz)\,\cos.(1.x).$$

Soll daher die Gerade (1) auf der Ebene (I) senkrecht stehen, so hat man

$$a = \frac{A}{C} \quad \text{und} \quad b = \frac{B}{C};$$

oder die Gleichung einer auf der Geraden (1) senkrechten Ebene ist

$$ax + by + z + D = o,$$

wo die Größe D willkürlich ist; und eben sind die Gleichungen einer auf der Ebene (I) senkrechten Geraden

$$x = \frac{A}{C}z + \alpha \quad \text{und} \quad y = \frac{B}{C}z + \beta,$$

wo die Größen α und β willkürlich sind.

I. Die Gleichungen der Geraden, die durch den Punkt $x'y'z'$ geht, und senkrecht auf der Ebene (I) steht, sind:

$$x - x' = \frac{A}{C}(z - z') \quad \text{und} \quad y - y' = \frac{B}{C}(z - z').$$

Eben so ist die Gleichung der Ebene, die durch den Punkt $x'y'z'$ geht, und mit den beyden Geraden (1) und (2) parallel ist,

$$(x-x')(b'-b)+(y-y')(a-a')+(z-z')(a'b-ab')=0.$$

Die Gleichung der Ebene, die durch den Punkt $x'y'z'$ geht, und senkrecht auf der Geraden (1) steht, ist

$$a(x-x')+b(y-y')+z-z'=0.$$

Die Gleichung der Ebene, die durch den Punkt $x'y'z'$ und durch die Linie (1) geht, ist

$$(x-x')(y'-bz'-\beta)-(y-y')(x'-az'-\alpha)$$
$$+(z-z')\left[b(x'-\alpha)-a(y'-\beta)\right]=0.$$

Die Gleichung der Ebene endlich, die durch den Punkt $x'y'z'$ geht, und senkrecht auf einer Geraden steht, die mit den Axen der xyz in derselben Ordnung die Winkel $\alpha\beta\gamma$ bildet, ist

$$(x-x')\cos.\alpha+(y-y')\cos.\beta+(z-z')\cos.\gamma=0.$$

§. 12. (**Verwandlung der Coordinaten im Raume**). Sey eine Gleichung zwischen den drey rechtwinkligen Coordinaten xyz gegeben. Will man sie auf ein anderes Coordinatensystem $x'y'z'$ beziehen, in welchem die neue Axe der x zwar noch in der Ebene der xy liegt, aber mit der Axe der x den Winkel ψ bildet, so hat man

$$x=x'\cos.\psi+y'\sin.\psi \quad \text{oder} \quad x'=x\cos.\psi-y\sin.\psi,$$
$$y=y'\cos.\psi-x'\sin.\psi \quad \text{»} \quad y'=x\sin.\psi+y\cos.\psi,$$
$$z=z' \quad \text{»} \quad z'=z.$$

Geht man von diesem zweyten Systeme zu einem dritten über, in welchem die neuen Coordinaten durch $x''y''z''$ bezeichnet werden, so daß die neue Axe der x'' mit der Axe der x' zusammen fällt, die Ebene der $x''y''$ aber mit der vorhergehenden Ebene der xy den Neigungswinkel θ bildet, so hat man

$$x'=x'' \quad \text{oder} \quad x''=x',$$
$$y'=y''\cos.\theta+z''\sin.\theta \quad \text{»} \quad y''=y'\cos.\theta-z'\sin.\theta,$$
$$z'=z''\cos.\theta-y''\sin.\theta \quad \text{»} \quad z''=y'\sin.\theta+z'\cos.\theta.$$

Steigt man endlich noch von diesem dritten Systeme zu einem vierten auf, dessen Coordinaten $x'''y'''z'''$ sind, so daß wohl die Ebenen der $x''y''$ und $x'''y'''$ dieselben bleiben, aber daß die neue Axe der x'' mit der vorhergehenden Axe der x'' den Winkel φ bildet, so hat man

$$x''=x'''\cos.\varphi-y'''\sin.\varphi \quad \text{oder} \quad x'''=y''\sin.\varphi+x''\cos.\varphi,$$
$$y''=y'''\cos.\varphi+x'''\sin.\varphi \quad \text{»} \quad y'''=y''\cos.\varphi-x''\sin.\varphi,$$
$$z''=z''' \quad \text{»} \quad z'''=z''.$$

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$\begin{aligned}
A &= \cos.\theta\ \sin.\psi\ \sin.\varphi + \cos.\psi\ \cos.\varphi,\\
A' &= \cos.\theta\ \sin.\psi\ \cos.\varphi - \cos.\psi\ \sin.\varphi,\\
A'' &= \sin.\theta\ \sin.\psi;\\
B &= \cos.\theta\ \cos.\psi\ \sin.\varphi - \sin.\psi\ \cos.\varphi,\\
B' &= \cos.\theta\ \cos.\psi\ \cos.\varphi + \sin.\psi\ \sin.\varphi,\\
B'' &= \sin.\theta\ \cos.\psi;\\
C &= -\sin.\theta\ \sin.\varphi,\\
C' &= -\sin.\theta\ \cos.\varphi,\\
C'' &= \cos.\theta.
\end{aligned}$$

Substituirt man dann die gefundenen Ausdrücke von $x'y'z'$ und $x''y''z''$ in den zuerst gegebenen Werthen von xyz, so findet man

$$\left.\begin{aligned}
x &= Ax''' + A'y''' + A''z'''\\
y &= Bx''' + B'y''' + B''z'''\\
z &= Cx''' + C'y''' + C''z'''
\end{aligned}\right\}$$

und eben so umgekehrt

$$\left.\begin{aligned}
x''' &= Ax + By + Cz\\
y''' &= A'x + B'y + C'z\\
z''' &= A''x + B''y + C''z
\end{aligned}\right\}$$

Man muß aber bemerken, daß zwischen diesen Coordinaten die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'''^2 + y'''^2 + z'''^2$$

besteht, und daß daher zwischen den Coefficienten $AA'\ldots$ folgende zwölf Bedingungsgleichungen Statt finden:

$$\left.\begin{aligned}
A^2 + A'^2 + A''^2 &= 1\\
B^2 + B'^2 + B''^2 &= 1\\
C^2 + C'^2 + C''^2 &= 1
\end{aligned}\right\}\quad
\left.\begin{aligned}
A^2 + B^2 + C^2 &= 1\\
A'^2 + B'^2 + C'^2 &= 1\\
A''^2 + B''^2 + C''^2 &= 1
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
AB + A'B' + A''B'' &= 0\\
AC + A'C' + A''C'' &= 0\\
BC + B'C' + B''C'' &= 0
\end{aligned}\right\}\quad
\left.\begin{aligned}
AA' + BB' + CC' &= 0\\
AA'' + BB'' + CC'' &= 0\\
A'A'' + B'B'' + C'C'' &= 0
\end{aligned}\right\}$$

§. 13. **(Polarcoordinaten im Raume).** Statt, wie bisher, die Lage des Punktes M (Fig. 4) im Raume durch seine senkrechten Abstände von den drey coordinirten Ebenen oder durch die rechtwinkligen Coordinaten $AB = x$, $BQ = y$, $QM = z$ zu bestimmen, kann man diese Lage auch durch die Entfernung $AM = r$ dieses Punktes von dem Anfange der Coordinaten und durch die Winkel angeben, welche diese

Entfernung oder ihre Projection AQ, Aa und Ab in den coordinirten Ebenen der xy, xz und yz mit den drey Coordinatenaxen AX, AY und AZ bildet.

I. Nennt man nämlich α, β und γ die Winkel, welche die Distanz r mit den Coordinatenaxen der x, y und z macht, so hat man

$$x = r \cos.\alpha, \quad y = r \cos.\beta, \quad z = r \cos.\gamma,$$

und zwischen den drey Größen α, β, γ hat die Bedingungsgleichung Statt:

$$\cos.^2\alpha + \cos.^2\beta + \cos.^2\gamma = 1,$$

wo jeder der drey Winkel α, β, γ nie größer als 180° werden kann.

II. Ist aber m der Winkel der Projection von r in der Ebene xy mit x, und ist n der Winkel der r mit der Axe der z, das heißt, ist QAX = m und MAZ = n, so hat man

$$x = r \cos.m \sin.n, \quad y = r \sin.m \sin.n, \quad z = r \cos.n,$$

wo der Winkel m von der festen Geraden AX immer nach derselben Richtung von 0° bis 360° gezählt wird, während der Winkel n nie größer, als 180°, genommen werden kann, um alle Punkte des Raumes um den Anfangspunkt A zu umfassen.

III. Ist endlich λ der Winkel der Distanz AM = r mit der Axe der x, und μ der Winkel der Projection BM oder Ab dieser Distanz in der Ebene der yz mit der Axe der y, oder ist $\lambda = MAX$ und $\mu = MBQ = bAd$, so hat man

$$x = r \cos.\lambda, \quad y = r \sin.\lambda \cos.\mu, \quad z = r \sin.\lambda \sin.\mu,$$

und hier wird der Winkel λ von der fixen Geraden AX immer in derselben Richtung von 0 bis 360° gezählt, während wieder μ nie größer, als 180° seyn kann. Man sieht, daß der Winkel $\lambda = \alpha$ und $n = \gamma$ ist.

Algebraische krumme Linien.

§. 14. **(Linien der zweyten Ordnung).** In der nun folgenden Zusammenstellung werden nur die vorzüglichsten Curven, um sie später als Beyspiele anzuwenden, nach ihren Gleichungen, von einfachen Zeichnungen begleitet, kurz angeführt.

Die Curven der zweyten Ordnung, oder die sogenannten Kegelschnitte, sind sämmtlich in der Gleichung enthalten:

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0,$$

und diese Gleichung gehört für eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, wenn die Größe $b^2 - 4ac$ negativ, positiv oder Null ist; für den Kreis ist $a = c$ und $b = 0$.

In den beyden ersten Fällen, d. h. wenn $b^2 - 4ac$ nicht gleich Null ist, läßt sich diese Gleichung auf die Form bringen:

$$\frac{x^2}{A^2} \pm \frac{y^2}{B^2} = 1,$$

wo das obere Zeichen für die Ellipse, das untere für die Hyperbel gilt, deren halbe große und kleine Axe A und B ist, und wo der Anfang der Coordinaten in dem Mittelpunkte der Ellipse oder Hyperbel liegt. In dem dritten Falle, wo $b^2 = 4ac$ ist, läßt sich jene Gleichung auf die einfache Gestalt

$$y^2 = 2px$$

zurückführen, die also für die Parabel gehört, und wo p den halben Parameter der Parabel bezeichnet. — Aber auch die erste gegebene Gleichung bietet schon ein Mittel dar, durch die in ihr enthaltenen Coefficienten a, b ... f diese Halbaxen A und B der Ellipse oder Hyperbel, ferner die beyden der x und y parallelen Coordinaten X und Y des Mittelpunktes dieser beyden Curven, und endlich den Winkel ω zu bestimmen, welchen die große Axe 2 A der Curve mit der Coordinatenaxe der x bildet. Setzt man nämlich der Kürze wegen

$$\begin{aligned} g &= b^2 - 4ac \\ h &= bde - ae^2 - cd^2 \\ k^2 &= b^2 + (a-c)^2, \end{aligned}$$

so findet man für die gesuchten halben Axen

$$A^2 = \frac{2(h - fg)}{g(a + c - k)} \quad \text{und} \quad B^2 = \frac{2(h - fg)}{g(a + c + k)},$$

und für die Coordinaten des Mittelpunktes

$$X = \frac{2ae - bd}{g}, \quad Y = \frac{2cd - be}{g};$$

und endlich für den Winkel ω der großen Axe der Curve mit der Coordinatenaxe der x:

$$\tang. 2\omega = \frac{b}{c - a} \quad \text{oder} \quad \tang. \omega = \frac{b}{c - a + k}.$$

Für die Parabel lassen sich ähnliche Ausdrücke aufstellen. So erhält man für den halben Parameter derselben

$$p = \frac{2cd - be}{(a + c)\sqrt{b^2 + 4c^2}},$$

und für den Winkel ω den Ausdruck

$$\text{tang. } \omega = -\frac{2c}{b}.$$

Nimmt man den Anfang der Coordinaten x, y in dem Scheitel, d. h. in demjenigen Punkte der Curve, in welchem sie von ihrer großen Axe, die zugleich die Axe der x seyn soll, geschnitten wird, so hat man für die gemeinsame Gleichung dieser drey Curven

$$y^2 = 2px - \frac{px^2}{A},$$

und diese Gleichung gehört für die Ellipse, Hyperbel oder Parabel, wenn A positiv, negativ oder unendlich groß ist. Für den Kreis hat man $p = A$, also $y^2 = 2Ax - x^2$, wo A der Halbmesser des Kreises ist. — Man kann noch bemerken, daß die Gleichung der Ellipse, in die der Hyperbel übergeht, wenn man in jener A in $-A$ und B in $B\sqrt{-1}$ verwandelt. Für diese beyden Curven aber ist der halbe Parameter $p = \frac{B^2}{A}$ immer positiv. Nennt man endlich $A\varepsilon$ die Entfernung des Mittelpunktes der Ellipse oder Hyperbel von einem ihrer beyden Brennpunkte, so ist

$$\varepsilon^2 = \frac{A^2 - B^2}{A^2} \quad \text{und} \quad p = A(1 - \varepsilon^2) \quad \text{für die Ellipse,}$$

und daher auch

$$\varepsilon^2 = \frac{A^2 + B^2}{A^2} \quad \text{und} \quad p = A(\varepsilon^2 - 1) \quad \text{für die Hyperbel.}$$

Um die Gleichung dieser drey Curven in Polarcoordinaten zu erhalten, sey einer der Brennpunkte derselben der Pol, und r die Entfernung dieses Brennpunktes von irgend einem Punkte der Curve. Nennt man dann ν den Winkel, welchen der Radius Vector r mit der großen Axe, von dem dem Pole nächsten Scheitel gezählt, bildet, so ist die gesuchte Gleichung der Linien der zweyten Ordnung

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos. \nu},$$

und diese Gleichung gehört für die Ellipse, Hyperbel oder Parabel, wenn ε kleiner oder größer, oder so groß als die Einheit ist, in welchem letzten Falle daher die Gleichung der Parabel wird:

$$r = \frac{\frac{1}{2}p}{\cos.^2 \frac{1}{2}\nu}.$$

§. 15. (**Linien der dritten und vierten Ordnung**). I. Neil's Parabel, oder die kubische Parabel, zum Unterschiede der in §. 14 betrachteten, welche letzte auch die Apollonische Parabel genannt wird. Ihre Gestalt ist in Fig. 5 verzeichnet, und ihre Gleichung ist

$$y^3 = a x^2;$$

wo hier, so wie in allen folgenden Figuren, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich gesagt wird, immer $AP = x$, und die darauf senkrechte Gerade $PM = y$, also $AP\ldots$ die coordinirte Axe der x ist. Die Neil'sche Parabel hat zwey unendliche Aeste, die beyde auf der positiven Seite der y liegen, und die sich im Anfangspunkte A der Coordinaten zu einer Spitze vereinigen. Neil und Fermat hat diese Curve zuerst betrachtet, und an ihr mehrere merkwürdige Eigenschaften gefunden.

II. Cissois (Fig. 6). Die Gleichung dieser Curve ist

$$x^3 = y^2 (a - x).$$

Auch sie läuft von einer Spitze im Anfangspunkte A in zwey unendlichen Ästen aus, von welchen aber einer über und der andere unter der Axe der x liegt. Beyde Äste kommen der Geraden m B n, die in der Entfernung $AB = a$ auf der Abscissenaxe senkrecht errichtet wird, als ihrer Asymptote, immer näher, ohne sie je zu erreichen. Der griechische Geometer Diocles hat diese Curve ausgedacht, um durch sie das den Alten wichtige Problem aufzulösen, zwischen zwey gegebenen Größen zwey mittlere stetige Proportionalen zu finden. Ihre Benennung hat sie von κισσος (Epheublatt), dem sie ähnlich seyn soll.

III. Glockenlinie (Fig. 7). Ihre Gleichung ist

$$a y^2 = x (x - b) (x + c),$$

wo $AB = b$ und $AF = c$ ist. Diese Curve besteht aus zwey abgesonderten Theilen, deren einer eine geschlossene, ovale Gestalt, und der andere zwey unendliche Äste hat, die in Form einer Glocke auslaufen.

Nach den Werthen der beyden Größen b und c gehört diese Gleichung zu verschiedenen Gestalten.

Ist $c = 0$, so verschwindet der erwähnte ovale Theil, und die Curve hat die Gestalt der Fig. 8.

Ist $b = 0$, so ist die Gleichung der Curve $a y^2 - x^3 - c x^2 = 0$, und ihre Form sieht man in Fig. 9.

Ist endlich $b = 0$ und $c = 0$, so ist ihre Gleichung $x^3 = a y^2$, oder sie geht dann in die Neil'sche Parabel über.

IV. Conchois oder Muschellinie (Fig. 10). Man errichte auf der Abscissenaxe AX das Loth $AB = a$, und ziehe aus dem so bestimmten Punkte B die Gerade MBm, welche die Abscissenaxe in dem Punkte O schneidet. Von diesem Durchschnittspunkte O nehme man zu beyden Seiten der Abscissenaxe die Linien $OM = Om = b$, so liegen diese Punkte M, m in den Conchois. Ist dann $ABM = \nu$ und $BM = r$, so hat man

$$a = (r - b)\cos.\nu, \quad y = b\cos.\nu \quad \text{und} \quad r^2 = x^2 + (a + y)^2,$$

woraus man durch Elimination der beyden Größen r und ν erhält

$$x^2 y^2 = (a + y)^2 (b^2 - y^2),$$

die Gleichung der Conchois. Nennt man aber das Loth von M auf AB, oder nennt man $MQ = y'$ und $BQ = x'$, so ist $x = y'$ und $y = x' - a$, also auch die Gleichung der Conchois

$$\frac{y'^2}{x'^2} = \left(\frac{b}{x' - a}\right)^2 - 1.$$

Sie hat vier unendliche Äste, die alle die Abscissenaxe AX zur Asymptote haben. Unter dem festen Punkte B hat sie eine Schleife, so lange b größer als a ist. Für $b = a$ aber verschwindet diese Schleife, und geht bloß in eine Spitze bey B über. Für b kleiner als a endlich verschwindet auch diese Spitze, und die Curve hat dann unter der Axe der x dieselbe Gestalt, wie über derselben. Der griechische Geometer Nikomedes hat sie zur Auflösung des bey der Cissois erwähnten Problemes erfunden, und auch, um einen gegebenen Winkel in drey gleiche Theile zu theilen. Newton gebrauchte sie zur Auflösung der Gleichungen des dritten und vierten Grades, da sie in Absicht ihrer Construction so einfach ist. Auch hat man sie zu den Verzierungen in der Architektur und zur Messung des Inhalts der Fässer angewendet.

V. Cassini's Curve (Fig. 11). Wenn das Produkt den Entfernungen MF und MF' eines Punktes M von zwey festen Punkten F und F' für alle Lagen des Punktes M constant ist, so liegt dieser Punkt M in der betrachteten Curve. Sey $FF' = 2a$ die Distanz jener festen Punkte, und $MF.MF' = b^2$, so hat man, wenn der Anfangspunkt A in der Mitte zwischen F und F' liegt:

$$FM^2 = (a - x)^2 + y^2 \quad \text{und} \quad F'M^2 = (a + x)^2 + y^2,$$

und daher für die Gleichung der Curve

$$b^4 = [(a + x)^2 + y^2] \,.\, [(a - x)^2 + y^2] \quad \text{oder}$$

$$x^2 + y^2 + a^2 = \sqrt{b^4 + 4a^2x^2}.$$

Diese Curve ändert mit den Werthen von a und b ihre Gestalt. Für $b > a$ hat sie die in Fig. 11 angezeigte Form, so lange zugleich $b > a\sqrt{2}$ ist.

Ist aber $b > a$ und zugleich $b < a\sqrt{2}$, so nimmt sie die Form der Fig. 12 an. Ist $b = a$, so geht sie in die Gestalt Fig. 13 über, wo $AB = AC = a\sqrt{2}$ ist. Ist endlich $b < a$, so besteht sie aus zwey von einander abgesonderten Ovalen, oder die zwey Schleifen der Fig. 13 rücken aus einander, so daß der Zwischenraum bey A gleich $2\sqrt{a^2 - b^2}$ und die Entfernung ihre zwey äußersten Punkte $BC = 2\sqrt{a^2 + b^2}$ ist. Diese Curve, so wie sie die Fig. 11 darstellt, hat Domin. Cassini gefunden, um dadurch, wie er glaubte, die Bewegung der Planeten um die Sonne auf eine zur Rechnung bequemere Art darzustellen, als dieß durch die Ellipse geschieht.

VI. Die Lemniscate oder die Schleifenlinie hat ebenfalls die Gestalt der Fig. 13, und ihre Gleichung ist

$$x^2 + y^2 = a\sqrt{x^2 - y^2},$$

wo $AB = AC = a$ ist. Diese Curve hat Jakob Bernoulli zuerst betrachtet, und Fagnano hat die merkwürdige Eigenschaft derselben entdeckt, daß sich in ihr unzählig viele Bogen angeben lassen, die einander entweder völlig gleich, oder von welchen der eine genau doppelt so groß ist als der andere. Leonh. Euler hat dieß weiter ausgeführt (in den Novi Comment. Petrop. Vol. VI. für das Jahr 1756), und in den neuern Zeiten haben jene Untersuchungen Gelegenheit zu der Entwickelung der sogenannten elliptischen Funktionen gegeben, die für die Integralrechnung sehr wichtig sind. Ihren Namen hat sie von Lemniscus (Fransen oder Schleifen an Gewändern).

VII. Cardioide oder herzförmige Curve (Fig. 14). Ist An ein Kreis des Halbmessers $\frac{1}{2}a$, und verlängert man die Sehne An zu beyden Seiten derselben, bis $nM = nm = a$, so liegen die Punkte M und m in der Curve. Ist $AM = r$ und $PAM = \nu$, wo PA in dem Durchmesser BA des Kreises liegt, so ist die Sehne $An = a \cos. \nu$, also auch

$$r = a\,(1 + \cos. \nu)$$

die Polargleichung der Curve. Für die senkrechten Coordinaten $AP = x$ und $PM = y$ aber hat man die Gleichung

$$x^4 + y^4 - 2ax^3 = (a^2 + 2ax - 3x^2)\,y^2.$$

Man findet leicht, daß die Cardioide auch durch die Bewegung eines Kreises entsteht, der sich auf der Peripherie eines andern Kreises von gleicher Größe wälzt, und daß daher die Cardioide eine der Epicycloiden (m. s. unten §. 102 I.) ist. Sie ist auch die Brennlinie oder Catacaustik (m. s. §. 135 II.), oder sie entsteht durch den Durchschnitt der Lichtstrahlen von der inneren Seite der Peripherie eines Kreises, dessen Durchmesser gleich $3a$ ist, wenn der leuchtende Punkt in dem einen Endpunkte des Durchmessers dieses Kreises liegt.

VIII. Scyphois oder Becherlinie (Fig. 15). Auf den unter sich senkrechten Geraden AX und AY nehme man $AB = AC = AD = a$ und ziehe die Geraden BC und BD. Man nehme eben so $AF = a$ und ziehe durch F eine willkürliche Gerade FG, welche die AX in G schneidet, und errichte auf FG durch G eine senkrechte Gerade, und nehme auf dieser Senkrechten $GM = GN = GA$, so liegen die Punkte M und N in den Scyphois. Ist $AP = x$, $PM = y$ und zieht man GQ parallel mit AY, so ist $x^2 = AG^2 - (y - AG)^2$ oder

$$AG = \frac{x^2 + y^2}{2y}.$$

Da ferner die Dreyecke GQM und AFG ähnlich sind, so ist auch

$$AG = \frac{ax}{y - AG}.$$

Die Elimination der Größe AG aus diesen beyden Gleichungen gibt

$$y^4 - x^4 = 4ay^2x$$

die Gleichung der Curve. Sie hat vier unendliche Äste, und die zwey Geraden BC und BD sind, erweitert, die Asymptoten dieser Äste, von welchen die zwey untern dieser Asymptoten von außen, und die zwey obern aber von innen immer näher kommen, ohne sie doch je zu erreichen.

IX. Symmetrische Curve (Fig. 16). Obschon auch die meisten der andern krummen Linien einen symmetrischen Bau haben, so verdient doch diese jene Benennung vorzugsweise, da sie, ihrer größeren Zusammensetzung ungeachtet, doch zu beyden Seiten der Axe der x sowohl als auch der y, eine vollkommen ähnliche Gestalt hat. Die Gleichung dieser Curve ist

$$y^4 + 100a^2x^2 - 96a^2y^2 - x^4 = 0 \quad \text{oder}$$
$$y = \pm\sqrt{[48a^2 \pm \sqrt{2304a^4 - 100a^2x^2 + x^4}]}.$$

Sie besteht aus einer der Schleifenlinie ähnlichen, isolirten Curve, die zu ihren beyden Seiten von zwey ins Unendliche fortgehende Bogenpaaren begleitet ist.

§. 16. **(Linien, deren Gleichungen von höherer Ordnung oder irrationell sind).** Von diesen Linien sind vorzüglich diejenigen zu bemerken, deren Gleichung die Form hat:

$$x^{\frac{m}{n}} + y^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}},$$

wo man besonders drey Fälle unterscheiden kann.

I. Fall. Wenn m und n ungerade Zahlen sind.

Für $m = n = 1$ hat man

$$x + y = a$$

die Gleichung der geraden Linie.

Für $m = 3$ und $n = 1$ ist

$$x^3 + y^3 = a^3$$

eine Gleichung, zu welcher die Curve der Fig. 17 gehört, und welche zur Asymptote die Gerade m A n hat, deren Gleichung $x + y = 0$ ist.

II. Fall. Wenn m gerade und n ungerade ist.

Alle hieher gehörenden Curven sind in einen endlichen Raum eingeschlossen, da $x = \pm a$ und $y = \pm a$ die beyden äußersten Werthe dieser zwey Coordinaten sind.

Für $m = 2$ und $n = 1$ hat man

$$x^2 + y^2 = a^2$$

die Gleichung des Kreises, dessen Halbmesser gleich a ist.

Für $m = 2$ und $n = 3$ aber ist

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

und die zu dieser Gleichung gehörende Curve ist in Fig. 18 verzeichnet. Sie steht in naher geometrischer Verwandtschaft mit der Ellipse, wie wir später sehen werden.

III. Fall. Wenn m ungerade und n gerade ist. Alle hieher gehörenden Curven haben zwey endlose Äste, die beyde auf der positiven Seite von x und y liegen;

$m = 1$ und $n = 2$ gilt $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ oder,

$$(x - y)^2 - 2a(x + y) + a^2 = 0$$

die Gleichung der Apollonischen Parabel.

Für $m = 5$ und $n = 4$ aber hat man die Gleichung

$$x^{\frac{5}{4}} + y^{\frac{5}{4}} = a^{\frac{5}{4}},$$

zu welcher die Curve Fig. 19 gehört, deren zwey Äste die unter dem Winkel $XAN = 45$ gezogene Gerade A N zur Asymptote haben.

IV. Auf eine ähnliche Weise kann man auch die verschiedenen besonderen Fälle der Gleichung

$$y = c + b\,(x - a)^m$$

betrachten, welche zu verschiedenen Curven gehört, nachdem der Exponent m eine gerade oder eine ungerade Zahl, oder ein Bruch ist.

Hier bemerken wir nur noch die in Fig. 20 verzeichnete Schnabellinie, die zu der Gleichung

$$y = ax^2 + b\sqrt{x^5}$$

gehört, und wo die in dem Anfangspunkte A sich begegnenden Äste der Curve nicht nur, wie bey den Spitzen (Fig. 5, 6 u. f.) eine gemeinschaftliche Berührungslinie AX haben, sondern überdieß noch beyde auf derselben Seite der Berührungslinie liegen und derselben ihre convexe Seite zuwenden.

§. 17. (Transcendente Curven). So nennt man diejenigen krummen Linien, deren Gleichungen nicht algebraisch sind und z. B. die Größe a^x, log. x, arc. sin. x u. f. enthalten.

I. Die Logistik oder die logarithmische Linie (Fig. 21). Ihre Gleichung ist

$$x = a^y,$$

oder wenn man die natürlichen Logarithmen nimmt

$$\log. x = y \log. a.$$

Für $x = AB = 1$ ist also die Ordinate $y = 0$. Sey $AC = a$ und die mit der Axe der x parallele Gerade $CD = b$, also a die zur Abscisse b gehörende Ordinate, und daher auch

$$b = a^a \quad \text{oder} \quad \log. b = a \log. a.$$

Substituirt man diesen Werth von $\log. a = \frac{1}{a} \log. b$ in der vorhergehenden Gleichung, so erhält man

$$\log. x = \frac{y}{a} \log. b \quad \text{oder} \quad x = b^{\frac{y}{a}}$$

für die Gleichung der Logistik. Ist endlich $AC = 1$ und $b = e$ die Basis der natürlichen Logarithmen, so ist die einfachste Gleichung der Logistik

$$y = \log. x \quad \text{oder} \quad x = e^y.$$

In dieser Curve sind also die Ordinaten die Logarithmen der Abscissen. Für positive Abscissen, die größer als die Einheit sind, wachsen die ebenfalls positiven Ordinaten ins Unendliche. Von $x = +1$ bis $x = 0$ aber wachsen die negativen Ordinaten ebenfalls ohne Ende, und der Bogen B m nähert sich der Ordinatenaxe Y A ohne Ende.

II. Quadratrix (Fig. 22). Sey C B C' ein Kreis des Halbmesser $AB = a$, und es werde der Punkt M der Curve, zu welchem die Coordinaten $AP = x$ und $PM = y$ gehören, so genommen, daß sich M P zu A C verhält, wie der Bogen B N zu dem Bogen B C, oder daß man hat

$$y : a = \nu : \tfrac{1}{2}\pi,$$

wo ν den Winkel M A B und π die bekannte Ludolph'sche Zahl 3.14159.. bezeichnet, so ist $y = \frac{2a\nu}{\pi}$ und überdieß $y = x \text{ tang. } \nu$, also auch $x = \frac{2a\nu}{\pi \text{ tang. } \nu}$. Bezeichnet man daher den Radius Vector A M durch r, so ist $r^2 = x^2 + y^2$, und die Polargleichung der Curve

$$r = \frac{2a\nu}{\pi \sin. \nu},$$

und eben so die Gleichung zwischen den rechtwinkligen Coordinaten

$$\frac{y}{x} = \text{tang.} \frac{\pi y}{2a}.$$

Für $\nu = \pi$ ist $x = -\infty$ und $y = 2a$; also geht die Curve auf der negativen Seite der Abscissenaxe, oder in der Richtung von A X', ins Unendliche fort, und nähert sich hier, über und unter der Axe A X, einer Asymptote, die mit A X parallel und von ihr um 2 a entfernt ist. Für die Winkel $\nu = \pi$ bis $\nu = 2\pi$ kömmt die Curve von dem unendlich weit entfernten Theile dieser beyden Asymptoten wieder zurück, und erstreckt sich auf der positiven Seite der x wieder ins Unendliche, indem sie sich in ihren beyden neuen Ästen wieder zweyen, den A X parallelen Asymptoten nähert, die von der Axe A X um die Distanz 4 a entfernt sind, und solcher Hin- und Hergänge gibt es unzählig viele zwischen je zwey solcher Asymptoten, die immer um 2 a von einander abstehen. Diese Curve wurde von Dinostrates, einem Zeitgenossen Plato's, ausgedacht, um durch sie die Fläche des Kreises anzugeben, oder um den Kreis und jeden Sector desselben zu quadriren. Sie dient auch zur Theilung eines jeden Kreisbogens oder des ihm zugehörenden Winkels in eine gegebene Anzahl von Theilen, wenn man diese Curve als bereits richtig verzeichnet annimmt.

III. Sinuslinie (Fig. 23). Sie erstreckt sich zu beyden Seiten der Axe y ins Unendliche, indem sie die Axe der x in unzähligen Windungen umgibt. Ihre Gleichung ist

$$y = a \sin. x,$$

und sie schneidet daher die Abscissenaxe für $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi \ldots$, so wie sie sich von derselben am meisten entfernt, für $x = \pm \frac{1}{2}\pi, \pm \frac{3}{2}\pi, \pm \frac{5}{2}\pi$ u. s.

IV. Zuglinie oder Tractorie (Fig. 24). Ist die im Anfange A der Abscissenaxe auf dieselbe errichtete Senkrechte $AB = 1$, und setzt man $AP = x$, $PM = y$ und den Bogen $BM = s$, so ist die Gleichung dieser krummen Linie

$$s = \log. y.$$

Sie hat nur einen einzigen Bogen auf der Seite der positiven x und y, welcher sich der Abscissenaxe als einer Asymptote nähert. Stellt man die Ebene der Curve vertical, und ist an dem einen Endpunkte M eines gespannten Fadens MT von gegebener Länge, ein der Schwere ausgesetzter Körper befestiget, so wird dieser Endpunkt M des Fadens die Tractorie beschreiben, wenn der andere Endpunkt T desselben in der Axe der x mit gleichförmiger Bewegung fortgeht.

V. Kettenlinie (Chainette) Fig. 25. Ist $AP = x$, $PM = y$ und $AN = a$, und der Bogen $NM = Nm = s$, so ist die Gleichung der Curve

$$s^2 = x^2 - a^2,$$

und diese Curve beschreibt ein biegsamer, in seinen beyden Endpunkten B, C befestigter Faden, wenn die Schwere der Erde auf alle seine Theile gleichförmig wirkt, und die Punkte B und C in derselben Höhe über dem Horizonte liegen.

VI. Cyclois oder Cycloide (Radlinie) Fig. 26. Wenn ein Kreis HMG auf einer Geraden AB rollt, so beschreibt ein gegebener Punkt M der Peripherie dieses Kreises die Cyclois.

Ist $AP = x$, $PM = y$ und O der Mittelpunkt dieses Kreises, dessen Halbmesser gleich a ist, und nennt man t den Bogen HM, welcher Bogen der Geraden HA gleich ist, so ist der Winkel $MOH = \frac{t}{a}$, und man hat

$$x = t - a \sin. \frac{t}{a} \quad \text{und} \quad y = a\left(1 - \cos. \frac{t}{a}\right).$$

Setzt man aber der Kürze wegen $t = a\nu$, also ν gleich dem Winkel MOH, so ist auch

$$x = a(\nu - \sin.\nu) \text{ und}$$
$$y = a(1 - \cos.\nu),$$

Eliminirt man aus diesen beyden Gleichungen die Größe ν, so erhält man

$$x = a \text{ arc. cos.} \left(1 - \frac{y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2}$$

für die Gleichung der Cyclois. Setzt man in ihr $y = DC = 2a$, so ist $x = AD = DB = a\pi$, wo wieder $\pi = 3,14159\ldots$

(A). Ist aber $CQ = x'$ und $QM = y'$, so ist $x' = 2a - y$ und $y' = a\pi - x$; also sind auch jene Gleichungen

$$x' = a\left(1 + \cos.\frac{t}{a}\right), \quad y' = a\pi - t + a \sin.\frac{t}{a},$$

oder, wenn $\pi - \nu = \omega$ ist:

$$x' = a(1 - \cos.\omega), \quad y' = a(\omega + \sin.\omega);$$

und wenn man die Größe ω aus diesen beyden Gleichungen eliminirt, so hat man für die Gleichung der Cyclois

$$y' = a \text{ arc. cos.} \left(1 - \frac{x'}{a}\right) + \sqrt{2ax' - x'^2}.$$

Diese Gleichungen zeigen, daß die Größe $\pm x$ mit dem Bogen t ohne Ende wachsen kann, und daß daher die Cyclois aus unendlich vielen, dem ACB ähnlichen Bogen besteht.

(B). Liegt der beschreibende Punkt M des Kreises HMG nicht in dem Endpunkte des Halbmessers, sondern irgendwo in der Verlängerung desselben, und zwar in der Distanz b von dem Mittelpunkte O des Kreises, so hat man

$$x = t - b \sin.\frac{t}{a} \text{ und } y = a - b \cos.\frac{t}{a}$$

Eliminirt man daraus die Größe t, so hat man

$$x = a \text{ arc. cos.} \frac{a - y}{b} - \sqrt{b^2 - (a - y)^2},$$

welches die Gleichung der verkürzten oder der verlängerten Cyclois ist, je nachdem b größer oder kleiner ist, als a. Für $a = b$ erhält man die vorhergehende oder die gemeine Cyclois.

§. 18. (Spiralen). I. (Archimedische Spirale). Um den Mittelpunkt C (Fig. 27) des Kreises ABD bewege sich der Halbmesser, den wir gleich der Einheit annehmen, und zugleich bewege sich in diesem Halbmesser ein Punkt M gleichförmig so, daß immer der Radius Vector CM = r zu dem Halbmesser CA = 1 sich verhalte, wie der Kreisbogen AB = ν zu der ganzen Peripherie 2π dieses Kreises, so ist M ein Punkt der Archimedischen Spirallinie, deren Gleichung daher ist

$$r = \frac{\nu}{2\pi}.$$

Diese Gleichung zeigt, daß die Spirale, nach dem ersten ganzen Umlauf des Halbmessers, den Kreis in A schneidet, und daß sie dann in unzähligen, immer größeren Windungen um den Kreis lauft. Da man den Bogen ν auch negativ von A nach D nehmen kann, so besteht diese Curve noch aus einer zweyten Spirale, die der vorigen gleich und ähnlich ist, aber eine entgegengesetzte Lage hat. Diese Spirale ist nur die einfachste von denen, welche in der Gleichung $r = a . \nu^m$ enthalten sind. — So lange der Exponent m eine positive Größe ist, fangen alle diese Spirale in dem Mittelpunkte C des Kreises an. Ist aber m negativ, so ist r anfangs unendlich groß für $\nu = 0$, und nimmt dann für wachsende ν immer ab, oder der beschreibende Punkt M nähert sich in zahllosen Windungen dem Mittelpunkte C, ohne ihn je zu erreichen. Man sieht, daß die Spiralen ebenfalls zu den transcendenten Curven gehören.

II. (Logarithmische Spirale) Fig. 28. Ihre Gleichung ist

$$\nu = \log. r,$$

wo wieder r = CM und ν der Winkel der r mit einer festen Geraden CA ist. Für r = CA = 1 ist $\nu = 0$, so daß also diese Schneckenlinie in unzähligen Windungen für wachsende positive Winkel ACM sich von dem Mittelpunkte C entfernt, und eben so für abnehmende oder negative Winkel ACm sich diesem Punkte immer mehr nähert.

III. (Hyperbolische Spirale) Fig. 29. In ihr verhält sich der Radius Vector CM = r wie verkehrt der Winkel, welchen derselbe mit einer festen Geraden CX bildet. Nennt man also ν den Winkel XCM, so hat man

$$r . \nu = a.$$

Ist MP senkrecht auf CX, so hat man

$$MP = CM \sin. \nu = \frac{a}{\nu} \sin. \nu.$$

Für $\nu = 0$ ist $\frac{\sin. \nu}{\nu} = 1$, also auch MP = a. Ist daher auch CA = a senkrecht auf CX, und zieht man durch A eine mit CX parallelen

Gerade AB, so ist AB die Asymptote der Spirale. Für negative Werthe von ν gibt es noch eine zweyte ähnliche Spirale, die gegen die andere Seite AB′ der Asymptote eben so liegt, wie jene gegen AB. Beyde gehen in unzähligen, immer kleineren Windungen um den Mittelpunkt C.

IV. (Parabolische Spirale) Fig. 30. Ihre Gleichung ist

$$r^2 = \frac{\nu}{2\pi}.$$

Auf einem Kreise APB, dessen Halbmesser gleich der Einheit ist, nimmt man den Bogen AP oder den Winkel ACP gleich ν, wo dann der Theil PM des Halbmessers gleich r ist. Für $\nu = 0$ ist auch $r = 0$, und für $\nu = 360^0$ ist $r = 1$, oder die Curve schneidet für $\nu = 0$ die Peripherie des Kreises, und geht für $\nu = 2\pi$ durch den Mittelpunkt derselben. Für $\nu = 8\pi$ schneidet sie den Kreis noch einmal, und geht dann in immer größeren Windungen um denselben herum. Es gibt aber auch noch für negative Werthe von r einen zweyten Zweig Am dieser Spirale, die ganz außer dem Kreise liegt, und wo immer $Pm = PM$ ist, wenn m in der Verlängerung des Halbmessers CP des Kreises liegt.

Man bemerkt, daß man jede Curve, deren Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten x und y gegeben ist, in eine Spirale verwandeln kann, wenn man sich die Abscissenaxe derselben nach der Peripherie eines Kreises gekrümmt, und auf demselben gleichsam aufgewunden vorstellt, so daß die Ordinaten der Curve ihre frühere senkrechte Stelle gegen die Abscissenaxe, d. h. gegen die Peripherie dieses Kreises beybehalten. Ist der Halbmesser dieses Kreises gleich der Einheit, so wird man nur in der gegebenen Gleichung der Curve zwischen x und y die Abscisse x in ν und y in r verwandeln, um sofort die Polargleichung der entsprechenden Spirale zu erhalten. So hat man für eine Gerade, die durch den Anfang der Coordinaten geht, und deren Neigung gegen die Axe der x gleich arc. tang. $\frac{1}{2\pi}$ ist, die Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten $x = 2\pi y$. Nimmt man damit die angezeigte Verwandlung vor, so erhält man $\nu = 2\pi r$ die Polargleichung der Archimedischen Spirale. Für die Logistik war (§. 17) $x = \log. y$, wenn (in Fig. 21) $AQ = x$ und $QM = y$ ist; also ist auch $\nu = \log. r$ die Gleichung der logarithmischen Spirale. Eben so ist die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel $x . y = a$, und daher die der hyperbolischen Spirale

$r.\nu = a$. Die Gleichung der Parabel endlich ist, wenn man ihren Parameter gleich $\frac{1}{2\pi}$ setzt, $x = 2\pi y^2$, und daher die Polargleichung der parabolischen Spirale $\nu = 2\pi r^2$ wie zuvor.

§. 19. (Goniometrische Formeln). Zum Schlusse dieser Einleitung wollen wir noch die vorzüglichsten Ausdrücke zur bequemen Übersicht zusammen stellen, welche die Verwandlungen der trigonometrischen Functionen und die Auflösung der Dreyecke betreffen, da wir uns in der Folge öfter auf dieselben beziehen werden.

I. Wenn α und β zwey willkürliche Winkel oder Bogen eines Kreises, dessen Halbmesser die Einheit ist, bezeichnen, so hat man bekanntlich

$$\sin.\alpha = \sqrt{1 - \cos.^2\alpha} = \frac{1}{\operatorname{cosec}.\alpha} = \frac{\operatorname{tang}.\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}.^2\alpha}} = \frac{2\operatorname{tang}.\frac{1}{2}\alpha}{1 + \operatorname{tang}.^2\frac{1}{2}\alpha}$$

$$\cos.\alpha = \sqrt{1 - \sin.^2\alpha} = \frac{1}{\sec.\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}.^2\alpha}} = \frac{1 - \operatorname{tang}.^2\frac{1}{2}\alpha}{1 + \operatorname{tang}.^2\frac{1}{2}\alpha}$$

$$\operatorname{tang}.\alpha = \frac{\sin.\alpha}{\cos.\alpha} = \frac{1}{\operatorname{cotang}.\alpha} = \frac{2\operatorname{tang}.\frac{1}{2}\alpha}{1 - \operatorname{tang}.^2\frac{1}{2}\alpha} = \frac{\sin.2\alpha}{1 + \cos.2\alpha} = \frac{1 - \cos.2\alpha}{\sin.2\alpha}$$

$$\sin.\operatorname{vers}.\alpha = 1 - \cos.\alpha = 2\sin.^2\tfrac{1}{2}\alpha$$

$$\cos.\operatorname{vers}.\alpha = 1 - \sin.\alpha = 2\sin.^2\frac{90^0 - \alpha}{2}.$$

II.
$$\sin.2\alpha = 2\sin.\alpha\cos.\alpha = \frac{2\operatorname{tang}.\alpha}{1 + \operatorname{tang}.^2\alpha}$$

$$\cos.2\alpha = 1 - 2\sin.^2\alpha = 2\cos.^2\alpha - 1 = \frac{1 - \operatorname{tang}.^2\alpha}{1 + \operatorname{tang}.^2\alpha}$$

$$\operatorname{tang}.2\alpha = \frac{2\operatorname{tang}.\alpha}{1 - \operatorname{tang}.^2\alpha}$$

$$\sec.2\alpha = \frac{1 + \operatorname{tang}.^2\alpha}{1 - \operatorname{tang}.^2\alpha}$$

$$\operatorname{cosec}.2\alpha = \tfrac{1}{2}(\operatorname{tang}.\alpha + \operatorname{cotang}.\alpha).$$

III.
$$\sin.\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos.\alpha}{2}},\quad \cos.\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos.\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tang}.\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{1 - \cos.\alpha}{\sin.\alpha} = \frac{\sin.\alpha}{1 + \cos.\alpha} = \sqrt{\frac{1 - \cos.\alpha}{1 + \cos.\alpha}}$$

$$= \frac{\operatorname{tang}.\alpha}{1 + \sqrt{1 + \operatorname{tang}.^2\alpha}} = -\operatorname{cotg}.\alpha + \sqrt{1 + \operatorname{cotg}.^2\alpha}$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}\alpha + \cos.\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{1 + \sin.\alpha}$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}\alpha - \cos.\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{1 - \sin.\alpha}$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sqrt{1+\sin.\alpha} + \sqrt{1-\sin.\alpha}}{\sqrt{1+\sin.\alpha} - \sqrt{1-\sin.\alpha}}.$$

$$\frac{\cos.2\alpha}{1+\cos.2\alpha} = \tfrac{1}{2}(1 - \text{tang.}^2\alpha)$$

$$\frac{\cos.2\alpha}{1-\cos.2\alpha} = \tfrac{1}{2}(\text{cotang.}^2\alpha - 1)$$

$$\frac{\cos.2\alpha}{1+\sin.2\alpha} = \text{tang.}(45^\circ - \alpha)$$

$$\frac{\cos.2\alpha}{1-\sin.2\alpha} = \text{cotang.}(45^\circ - \alpha)$$

$$1 + \sin.\alpha = 2\sin.^2\tfrac{1}{2}(90+\alpha) = 2\cos.^2\tfrac{1}{2}(90-\alpha)$$

$$1 - \sin.\alpha = 2\cos.^2\tfrac{1}{2}(90+\alpha) = 2\sin.^2\tfrac{1}{2}(90-\alpha).$$

IV. $\sin.(\alpha \pm \beta) = \sin.\alpha\cos.\beta \pm \cos.\alpha\sin.\beta$

$$\cos.(\alpha \pm \beta) = \cos.\alpha\cos.\beta \mp \sin.\alpha\sin.\beta$$

$$\text{tang.}(\alpha \pm \beta) = \frac{\text{tang.}\alpha \pm \text{tang.}\beta}{1 \mp \text{tang.}\alpha\,\text{tang.}\beta}$$

$$\text{tang.}\alpha \pm \text{tang.}\beta = \frac{\sin.(\alpha \pm \beta)}{\cos.\alpha\cos.\beta}$$

$$\text{cotang.}\alpha \pm \text{cotang.}\beta = \frac{\sin.(\beta \pm \alpha)}{\sin.\alpha\sin.\beta}$$

$$\text{cotang.}\alpha \pm \text{tang.}\beta = \frac{\cos.(\alpha \mp \beta)}{\sin.\alpha\cos.\beta}.$$

V. $\sin.\alpha + \sin.\beta = 2\sin.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos.\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$

$$\sin.\alpha - \sin.\beta = 2\cos.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin.\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$\cos.\beta + \cos.\alpha = 2\cos.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos.\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$\cos.\beta - \cos.\alpha = 2\sin.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin.\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta).$$

$$2\sin.\alpha\cos.\beta = \sin.(\alpha+\beta) + \sin.(\alpha-\beta)$$

$$2\cos\alpha\sin.\beta = \sin.(\alpha+\beta) - \sin.(\alpha-\beta)$$

$$2\cos.\alpha\cos.\beta = \cos.(\alpha-\beta) + \cos.(\alpha+\beta)$$

$$2\sin.\alpha\sin.\beta = \cos.(\alpha-\beta) - \cos.(\alpha+\beta).$$

VI. $\sin.(\alpha+\beta)\sin.(\alpha-\beta) = \sin.^2\alpha - \sin.^2\beta$

$$\cos.(\alpha+\beta)\cos.(\alpha-\beta) = \cos.^2\alpha - \sin.^2\beta$$

$$\sin.(n+2)\alpha = 2\sin.(n+1)\alpha.\cos.\alpha - \sin.n\alpha$$

$$\cos.(n+2)\alpha = 2\cos.(n+1)\alpha.\cos.\alpha - \cos.n\alpha.$$

$$\text{VII. arc. sin. } x = \text{arc. cos.} \sqrt{1-x^2} = \text{arc. tang.} \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}}$$

$$= \text{arc. sec.} \sqrt{\frac{1}{1-x^2}} = \text{arc. cosec. } \frac{1}{x}$$

$$\text{arc. sin. } x = \tfrac{1}{2} \text{arc. cos. } (1-2x^2) = \tfrac{1}{2} \text{arc. sin. } 2x\sqrt{1-x^2}$$

$$= \tfrac{1}{2} \text{arc. sin. vers. } 2x^2$$

$$\text{arc. cos. } x = \tfrac{1}{2} \text{arc. cos. } (2x^2-1) = \tfrac{1}{2} \text{arc. sin. } 2x\sqrt{1-x^2}$$

$$= \tfrac{1}{2} \text{arc. sin. vers. } 2(1-x^2)$$

$$\text{arc. tang. } x = \tfrac{1}{2} \text{arc. cos. } \frac{1-x^2}{1+x^2} = \tfrac{1}{2} \text{arc. sin. } \frac{2x}{1+x^2}$$

$$= \tfrac{1}{2} \text{arc. sin. vers. } \frac{2x^2}{1+x^2}$$

$$\text{arc. tg. } x \pm \text{arc. tg. } y = \text{arc. tang. } \frac{x \pm y}{1 \mp xy}$$

$$\text{arc. sin. } x \pm \text{arc. sin. } y = \text{arc. sin. } [x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}].$$

VIII. $\sin. 90^\circ = 1,$	$\sin. 45^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$
$\sin. 15^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}},$	$\sin. 54^\circ = \tfrac{1}{4}(1+\sqrt{5})$
$\sin. 18^\circ = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1),$	$\sin. 60^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$
$\sin. 30^\circ = \tfrac{1}{2},$	$\sin. 72^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
$\sin. 36^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$	$\sin. 75^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}.$

§. 20. (**Vorzüglichste Ausdrücke der sphärischen Trigonometrie**). Nennt man A, B, C die Winkel eines sphärischen Dreyecks, und α, β, γ die ihnen in derselben Ordnung gegenüberstehenden Seiten, so hat man den bekannten Ausdruck

$$\cos. \alpha = \sin. \beta \sin. \gamma \cos. A + \cos. \beta \cos. \gamma,$$

woraus durch bloße Analogie, oder durch eine einfache Drehung des Dreyecks auch die beyden ähnlichen Formeln entstehen:

$$\cos. \beta = \cos. \alpha \cos. \gamma + \sin. \alpha \sin. \gamma \cos. B$$

$$\cos. \gamma = \cos. \alpha \cos. \beta + \sin. \alpha \sin. \beta \cos. C.$$

Jede dieser drey Gleichungen enthält, wie bekannt, die gesammten Ausdrücke der sphärischen Trigonometrie. Durch eine einfache Umwandlung derselben erhält man sofort:

$$\cos. A = \sin. B \sin. C \cos. \alpha - \cos. B \cos. C$$

$$\text{cotang. } A \sin. C = \text{cotang. } \alpha \sin. \beta - \cos. \beta \cos. C$$

$$\text{cotang. } \alpha \sin. \gamma = \text{cotang. } A \sin. B + \cos. B \cos. \gamma \quad \text{und}$$

$$\sin. A \sin. \beta = \sin. B \sin. \alpha,$$

von welchen vier Gleichungen jede wieder, durch dieselbe Drehung des Dreyecks, zwey andere analoge Ausdrücke gibt.

Von den vorhergehenden Formeln enthält jede, wie man sieht, nur vier Größen, so daß man also, wenn je drey der sechs Größen A, B, C und α, β, γ eines sphärischen Dreyecks gegeben sind, mit Hülfe dieser Formeln die drey übrigen Größen finden kann, worin die gewöhnliche sogenannte Auflösung der Dreyecke besteht.

Durch eine zweckmäßige Combination der vorhergehenden Formeln kann man andere, zwischen fünf Größen ableiten, deren Kenntniß öfter von Nutzen ist. Solche Formeln sind:

$$\sin.\alpha \cos.C = \sin.\beta \cos.\gamma - \cos.\beta \sin.\gamma \cos.A$$
$$\cos.A \sin.\gamma = \sin.\beta \cos.\alpha - \sin.\alpha \cos.\beta \cos.C$$
$$\sin.A \cos.\beta = \cos.B \sin.C + \sin.B \cos.C \cos.\alpha$$
$$\sin.A \cos.\gamma = \sin.B \cos.C + \cos.B \sin.C \cos.\alpha,$$

von welchen jede wieder zwey andere analoge involvirt.

Eben so könnte man aus denselben Ausdrücken noch andere, und selbst solche ableiten, die alle sechs Bestimmungsstücke eines Dreyecks enthalten, die wir aber hier, der Kürze wegen, übergehen.

§. 21. **(Auflösung der sphärischen Dreyecke).** Diese Auflösung besteht, wie gesagt, in der Bestimmung von drey Bestimmungsstücken des sphärischen Dreyecks, wenn die drey übrigen gegeben sind. Wie bereits erwähnt, kann man dazu durch die fünf ersten Ausdrücke, ja schon durch die erste Gleichung des §. 20 gelangen. Zum bequemeren Gebrauche aber hat man ihnen für die Rechnung angemessene Formen gegeben, und sie in Tafeln zusammengestellt. Man sieht leicht, daß diese Auflösung der Dreyecke sich im Allgemeinen auf sechs Fälle zurückbringen läßt, die wir hier näher anzeigen wollen.

A. Wenn drey Seiten α, β, γ gegeben sind.

Dann findet man die drey Winkel A, B, C durch folgende Ausdrücke:

$$\cos.A = \frac{\cos.\alpha - \cos.\beta \cos.\gamma}{\sin.\beta \sin.\gamma},$$

$$\sin.^2 \tfrac{1}{2}A = \frac{\sin.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\sin.\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)}{\sin.\beta \sin.\gamma}$$

$$\cos.^2 \tfrac{1}{2}A = \frac{\sin.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\sin.\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)}{\sin.\beta \sin.\gamma},$$

mit den diesen drey Ausdrücken analogen Formeln für B und C.

Auch kann man diese Winkel mittelst einer Hülfsgröße x auf folgende Weise finden:

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}x = \frac{\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(\beta+\alpha)\ \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)}{\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\gamma},$$

$$\cos. A = \text{cotang.}\,\beta\ \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(\gamma+x),$$

$$\cos. B = \text{cotang.}\,\alpha\ \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(\gamma-x).$$

B. Wenn drey Winkel A, B, C gegeben sind.

$$\cos.\alpha = \frac{\cos. A + \cos. B \cos. C}{\sin. B \sin. C},$$

$$\sin.^2 \tfrac{1}{2}\alpha = -\frac{\cos.\,\tfrac{1}{2}(A+B+C)\ \cos.\,\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\sin. B \sin. C},$$

$$\cos.^2 \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\cos.\,\tfrac{1}{2}(A+B-C)\ \cos.\,\tfrac{1}{2}(A+C-B)}{\sin. B \sin. C},$$

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}x = \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(B+A)\ \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(B-A)\ \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}C,$$

$$\cos.\alpha = \text{cotang.}\,B\ \text{cotang.}\,\tfrac{1}{2}(C-x),$$

$$\cos.\beta = \text{cotang.}\,A\ \text{cotang.}\,\tfrac{1}{2}(C+x).$$

C. Wenn α, β, C oder zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel gegeben sind.

$$\text{cotang.}\,A = \frac{\text{cotang.}\,\alpha \sin.\beta - \cos.\beta \cos C}{\sin. C},$$

$$\text{cotang.}\,B = \frac{\text{cotang.}\,\beta \sin.\alpha - \cos.\alpha \cos. C}{\sin. C},$$

$$\cos.\gamma = \sin.\alpha \sin.\beta \cos. C + \cos.\alpha \cos.\beta.$$

Den vorhergehenden Gleichungen kann man noch folgende hinzufügen:

$$\text{tang.}\,x = \cos. C\ \text{tang.}\,\alpha,$$

$$\text{cotang.}\,A = \frac{\sin.(\beta-x)}{\text{tang.}\,C \sin. x},\quad \cos.\gamma = \frac{\cos.\alpha \cos.(\beta-x)}{\cos. x},$$

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos.\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos.\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)}\ \text{cotang.}\,\tfrac{1}{2}C,$$

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin.\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin.\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)}\ \text{cotang.}\,\tfrac{1}{2}C.$$

Auch hat man

$$\sin.\gamma \sin. B = \sin.\beta \sin. C,$$

$$\sin.\gamma \cos. B = \sin.\alpha \cos.\beta - \cos.\alpha \sin.\beta \cos. C,$$

$$\cos.\gamma = \cos.\alpha \cos.\beta + \sin.\alpha \sin.\beta \cos. C.$$

D. Wenn A, B, γ oder zwey Winkel mit der eingeschlossenen Seite gegeben sind.

$$\text{cotang.}\,\alpha = \frac{\text{cotang. A sin. B} + \text{cos. B cos.}\,\gamma}{\text{sin.}\,\gamma},$$

$$\text{cotang.}\,\beta = \frac{\text{cotang. B sin. A} + \text{cos. A cos.}\,\gamma}{\text{sin.}\,\gamma},$$

$$\text{cos. C} = \text{sin. A sin. B cos.}\,\gamma - \text{cos. A cos. B},$$

welchen Gleichungen man noch folgende hinzufügen kann:

$$\text{tang. x} = \frac{\text{cotang. A}}{\text{cos.}\,\gamma},\quad \text{tang.}\,\alpha = \frac{\text{tang.}\,\gamma\ \text{cos.}\,\alpha}{\text{cos. (B} - \text{x)}},$$

$$\text{cos. C} = \frac{\text{cos. A sin. (B} - \text{x)}}{\text{sin. x}}.$$

Auch hat man

$$\text{sin. C sin.}\,\beta = \text{sin. B sin.}\,\gamma,$$
$$\text{sin. C cos.}\,\beta = \text{cos. A sin. B cos.}\,\gamma + \text{sin. A cos. B},$$
$$\text{cos. C} = \text{sin. A sin. B cos.}\,\gamma - \text{cos. A cos. B}.$$

E. Wenn α, β, A oder zwey Seiten und einer der ihnen gegenüber stehenden Winkel gegeben ist.

$$\text{sin. B} = \frac{\text{sin. A sin.}\,\beta}{\text{sin.}\,\alpha},$$

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\text{C} = \frac{\text{cos.}\,\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\text{cos.}\,\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)}\ \text{cotang.}\,\tfrac{1}{2}(\text{A} + \text{B}),$$

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\text{cos.}\,\tfrac{1}{2}(\text{A} + \text{B})}{\text{cos.}\,\tfrac{1}{2}(\text{A} - \text{B})}\ \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

Auch hat man

$$\text{tang. x} = \frac{\text{cotang. A}}{\text{cos.}\,\beta},\qquad \text{cos. (C} - \text{x)} = \frac{\text{tang.}\,\beta\ \text{cos. x}}{\text{tang.}\,\alpha},$$

$$\text{tang. y} = \text{cos. A tang.}\,\beta,\quad \text{cos.}\,(\gamma - \text{y}) = \frac{\text{cos.}\,\alpha\ \text{cos. y}}{\text{cos.}\,\beta}.$$

F. Wenn A, B, α oder zwey Winkel und eine der ihnen gegenüber stehenden Seiten gegeben ist.

$$\text{sin.}\,\beta = \frac{\text{sin.}\,\alpha\ \text{sin. B}}{\text{sin. A}},$$

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\text{C} = \frac{\text{cos.}\,\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\text{cos.}\,\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)}\ \text{cotang.}\,\tfrac{1}{2}(\text{A} + \text{B}),$$

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\text{cos.}\,\tfrac{1}{2}(\text{A} + \text{B})}{\text{cos.}\,\tfrac{1}{2}(\text{A} - \text{B})}\ \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

Auch hat man

$$\text{cotang.}\,x = \frac{\text{cotang.}\,A}{\cos.\,\beta}, \qquad \cos.(C - x) = \frac{\text{tang.}\,\beta\,\cos.\,x}{\text{tang.}\,\alpha},$$

$$\text{tang.}\,y = \cos.\,A\,\text{tang.}\,\beta, \quad \cos.(\gamma - y) = \frac{\cos.\,\alpha\,\cos.\,y}{\cos.\,\beta}.$$

Man kann bemerken, daß die unter C, D, E und F angeführten Ausdrücke, welche die halben Winkel und Seiten enthalten, und die unter der Benennung der Neper'schen Formeln bekannt sind, nur besondere Fälle der folgenden allgemeineren Ausdrücke enthalten:

$$\cos.\tfrac{1}{2}(A + B)\,\cos.\tfrac{1}{2}\gamma = \cos.\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\,\sin.\tfrac{1}{2}C,$$
$$\sin.\tfrac{1}{2}(A + B)\,\cos.\tfrac{1}{2}\gamma = \cos.\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)\,\cos.\tfrac{1}{2}C,$$
$$\cos.\tfrac{1}{2}(A - B)\,\sin.\tfrac{1}{2}\gamma = \sin.\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\,\sin.\tfrac{1}{2}C,$$
$$\sin.\tfrac{1}{2}(A - B)\,\sin.\tfrac{1}{2}\gamma = \sin.\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)\,\cos.\tfrac{1}{2}C.$$

§. 22. (**Auflösung der sphärischen rechtwinkligen Dreyecke.**) Wenn einer der Winkel des sphärischen Dreyeckes ein rechter ist, so werden die vorhergehenden Ausdrücke einfacher. Da dieser Fall öfter Statt hat, so stellen wir die hieher gehörenden Ausdrücke ebenfalls tabellarisch zusammen. Die hier folgenden Ausdrücke setzen den Winkel $A = 90^\circ$ voraus.

A. Wenn A, β, γ gegeben ist:

$$\text{tang.}\,B = \frac{\text{tang.}\,\beta}{\sin.\,\gamma}, \quad \text{tang.}\,C = \frac{\text{tang.}\,\gamma}{\sin.\,\beta}, \quad \cos.\,\alpha = \cos.\,\beta\,\cos.\,\gamma.$$

B. Wenn A, α, β gegeben ist:

$$\sin.\,B = \frac{\sin.\,\beta}{\sin.\,\alpha}, \quad \cos.\,C = \text{tang.}\,\beta\,\text{cotang.}\,\alpha, \quad \cos.\,\gamma = \frac{\cos.\,\alpha}{\cos.\,\beta}.$$

C. Wenn A, B, β gegeben ist:

$$\sin.\,\alpha = \frac{\sin.\,\beta}{\sin.\,B}, \quad \sin.\,\gamma = \frac{\text{tang.}\,\beta}{\text{tang.}\,B}, \quad \sin.\,C = \frac{\cos.\,B}{\cos.\,\beta}.$$

D. Wenn A, C, β gegeben ist:

$$\text{tang.}\,\alpha = \frac{\text{tang.}\,\beta}{\cos.\,C}, \quad \text{tang.}\,\gamma = \sin.\,\beta\,\text{tang.}\,C, \quad \cos.\,B = \cos.\,\beta\,\sin.\,C.$$

E. Wenn A, B, α gegeben ist:

$$\sin.\,\beta = \sin.\,\alpha\,\sin.\,B, \quad \text{tang.}\,\gamma = \text{tang.}\,\alpha\,\cos.\,B, \quad \text{tang.}\,C = \frac{\text{cotang}\,B}{\cos.\,\alpha}.$$

F. Wenn A, B, C gegeben ist:

$$\cos.\,\alpha = \text{cotang.}\,B\,\text{cotang.}\,C, \quad \cos.\,\beta = \frac{\cos.\,B}{\sin.\,C}, \quad \cos.\,\gamma = \frac{\cos.\,C}{\sin.\,B}.$$

§. 23. (**Auflösung der ebenen Dreyecke.**) Die vorhergehenden Ausdrücke der sphärischen Dreyecke lassen sich sofort auch auf ebene oder geradlinige Dreyecke anwenden, wenn man in jenen die Sinus und Tangenten der drey Seiten α, β, γ gleich diesen Seiten, und die Cosinus derselben gleich der Einheit setzt. Dadurch erhält man folgende Tafel für die Auflösung der ebenen Dreiecke.

A. Wenn α, β, γ gegeben ist:

$$\sin.^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{(\alpha + \beta - \gamma)\,(\alpha + \gamma - \beta)}{4\beta\gamma},$$

$$\cos.^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{(\alpha + \beta + \gamma)\,(\beta + \gamma - \alpha)}{4\beta\gamma},$$

mit den analogen Ausdrücken für B und C.

Eben so hat man

$$\cos. A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}.$$

B. Wenn A, β, γ gegeben ist:

$$\text{cotang.}\, B = \frac{\gamma - \beta \cos. A}{\beta \sin. A}, \quad \text{cotang.}\, C = \frac{\beta - \gamma \cos. A}{\gamma \sin. A},$$

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos. A,$$

$$\text{tang.}\, \tfrac{1}{2}(B - C) = \frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma} \text{cotang.}\, \tfrac{1}{2} A.$$

C. Wenn A, B, γ gegeben ist:

$$C = 180^\circ - (A + B), \quad \alpha = \gamma \frac{\sin. A}{\sin. C}, \quad \beta = \gamma \frac{\sin. B}{\sin. C},$$

$$\alpha + \beta = \gamma \frac{\cos. \tfrac{1}{2}(A - B)}{\sin. \tfrac{1}{2} C}, \quad \alpha - \beta = \gamma \frac{\sin. \tfrac{1}{2}(A - B)}{\cos. \tfrac{1}{2} C}.$$

D. Wenn α, β, A gegeben ist:

$$\sin. B = \frac{\beta}{\alpha} \sin. A, \quad C = 180^\circ - (A + B),$$

$$\gamma = \beta \frac{\sin C}{\sin B} = \alpha \frac{\sin. C}{\sin. A}, \text{ oder auch}$$

$$\gamma = (\alpha + \beta) \frac{\sin. \tfrac{1}{2} C}{\cos. \tfrac{1}{2}(A - B)} = \beta \cos. A \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \sin.^2 A}.$$

E. Wenn A, B, α gegeben ist:

$$\beta = \alpha \frac{\sin. B}{\sin A}, \quad C = 180^\circ - (A + B),$$

$$\gamma = \alpha \frac{\sin. C}{\sin. A} = (\alpha + \beta) \frac{\sin. \tfrac{1}{2} C}{\cos. \tfrac{1}{2}(A - B)}.$$

Bemerken wir noch, daß die vorhergehenden Ausdrücke für die sphärischen Dreyecke, wenn man bey der numerischen Entwickelung derselben auf ihre Zeichen gehörig achtet, in beynahe allen Fällen von selbst anzeigen, in welchen der vier Quadranten die gesuchten Winkel oder Seiten des Dreyeckes fallen, wozu folgende kleine Tafel sehr bequem ist.

$$\sin.(90^\circ + x) = \cos. x,$$
$$\sin.(180^\circ + x) = -\sin. x,$$
$$\sin.(270^\circ + x) = -\cos. x.$$

$$\cos.(90^\circ + x) = -\sin. x,$$
$$\cos.(180^\circ + x) = -\cos. x,$$
$$\cos.(270^\circ + x) = \sin. x.$$

$$\text{tang.}(90^\circ + x) = -\text{cotang.}\, x,$$
$$\text{tang.}(180^\circ + x) = \text{tang.}\, x,$$
$$\text{tang.}(270^\circ + x) = -\text{cotang.}\, x.$$

$$\text{cotang.}(90^\circ + x) = -\text{tang.}\, x,$$
$$\text{cotang.}(180^\circ + x) = \text{cotang.}\, x,$$
$$\text{cotang.}(270^\circ + x) = -\text{tang.}\, x.$$