# Vorwort.

Die gewöhnliche Erklärung der Ebene, nach welcher sie eine solche Fläche ist, dass jede grade Linie, welche durch zwei Punkte derselben geht, ganz in ihr liegt, ist insofern unpassend und unwissenschaftlich, als sie Bedingungen angiebt, deren Möglichkeit erst nachgewiesen werden müsste. In den folgenden Blättern ist nun ein eigenthümlicher Weg eingeschlagen, jene als Erklärung vorausgesetzte Eigenschaft der Ebene streng geometrisch nachzuweisen. Ausserdem sind noch einige Folgerungen hinzugefügt worden.

Tafel I.

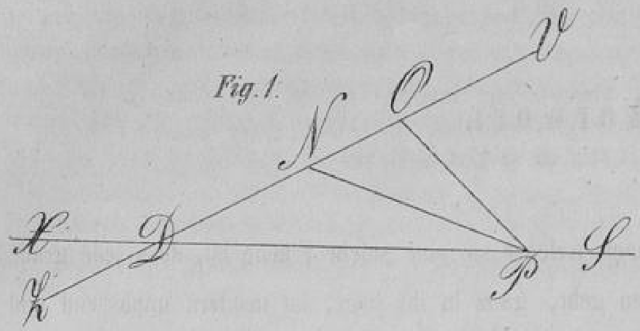


Fig. 1.

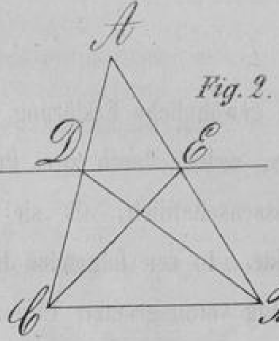


Fig. 2.

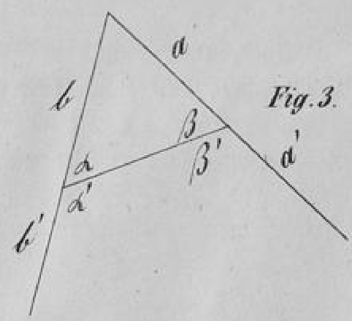


Fig. 3.

## §. 1.

Der unendliche Raum ist eine allseitige Ausdehnung, deren Ausgangspunkt oder Anfang beliebig ist.

Da dieser Ausgangspunkt der Ausdehnung beliebig ist, so kann man im unendlichen Raume verschiedene Punkte oder Orte unterscheiden, die also ausser einander liegen und somit Entfernungen unter einander haben und in gewissen Richtungen gegen einander liegen. Diese Richtungen werden aber alle möglichen sein können.

## §. 2.

Die Ausdehnung nach einer einzigen Richtung mit innerhalb dieser Richtung beliebigem Anfangspunkte heisse „Strahl."

Da bei jeden zwei Punkten der zweite die entgegengesetzte Richtung zum ersten hat, so ist der Strahl die Vereinigung der Richtung und Gegenrichtung. Da ferner jede zwei Punkte in gewissen Richtungen gegen einander liegen, so bestimmen diese Punkte auch die Richtungen, d. h.:

1) Ein Strahl wird durch zwei beliebige Punkte in demselben bestimmt, oder durch zwei Punkte lässt sich nur Ein Strahl gelegt denken;
2) Haben zwei Strahlen zwei Punkte gemeinschaftlich, so fallen sie ganz zusammen;
3) Zwei Strahlen können sich nur in Einem Punkte schneiden.

## §. 3. Lehrsatz.

**n** Strahlen können sich höchstens in $\frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2}$ Punkten schneiden, von denen wieder höchstens je $n-1$ Punkte in Einem Strahle liegen.

*Beweis.* Jeder Durchschnittspunkt ist wenigstens zweien Strahlen gemeinschaftlich. Zählt man also die Durchschnittspunkte, welche in ein und demselben Strahle liegen, indem man als diesen gemeinschaftlichen Strahl jeden der n Strahlen der Reihe nach annimmt, so ist die Summe dieser Zahlen wenigstens das Doppelte von der Anzahl aller Durchschnittspunkte. Ferner können in jedem einzelnen Strahle höchstens $n-1$ Durchschnittspunkte liegen, weil ihn höchstens alle übrigen $n-1$ Strahlen, und zwar jeder nur in einem Punkte, schneiden können. Die Summe der Zahlen der Durchschnitte kann also höchstens $n \cdot (n-1)$ und die Anzahl aller Durchschnittspunkte mithin höchstens $\frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2}$ sein.

## §. 4.

Schneiden sich mehrere Strahlen, so bilden sie ein „Strahlengebilde." Das Stück eines Strahles zwischen zwei Punkten desselben heisse „Strecke." Je zwei Strahlen haben eine Lage gegen einander.

*Anmerkung.* Eine Strecke kann man sich auch entstanden denken durch die Bewegung des einen Endpunktes im Strahle entlang bis zum Orte des andern Endpunktes.

§. 5.

Eine Linie entsteht durch die Bewegung eines Punktes. Bleibt der bewegte Punkt immer in Einem Strahle, so heisst die Linie eine Grade; ist dies nicht der Fall, eine krumme Linie oder Curve.

Hiernach müssten die Linien also immer einen Anfangspunkt haben. Da man aber bei einer endlichen Linie Anfangs- und Endpunkt vertauschen kann, so kann man dieselbe also auch über diese beiden Punkte hinaus beliebig verlängern, und gelangt so zur Linie mit beliebigem Anfangs- und Endpunkte, die „unbegrenzt" heissen mag, während die Linie, deren Anfangspunkt bestimmt, deren Endpunkt aber beliebig ist, „halbbegrenzt" heisse. Eine unbegrenzte grade Linie (nach dem gemeinen Ausdrucke) ist also mit Strahl gleichbedeutend, eine endliche d. h. bestimmt begrenzte grade Linie mit Strecke.

§. 6.

Durch Bewegung von Linien entstehen Flächen, wenn sich die Bewegung der Linie nicht auf die Bewegung eines Punktes reducirt. Durch die Bewegung von Flächen entstehen im Allgemeinen Körper.

§. 7.

Grade Linien und Strahlen können so bewegt werden:

1) dass alle Punkte der Graden in demselben Strahle sich fortbewegen, in dem die Linie ursprünglich liegt, d. h. dass die Linie verschoben wird,
2) so dass ein Punkt unverrückt fest bleibt, alle übrigen Punkte aber ihren Ort ändern, d. h. dass die Linie oder der Strahl gedreht wird,
3) so dass ein Punkt im Strahle fortgeschoben wird, die übrigen aber aus dem Strahle heraustreten, was man durch aufeinanderfolgende oder gleichzeitige Verschiebung und Drehung erlangt,
4) so dass alle Punkte gleichzeitig aus dem Strahle heraustreten.

§. 8.

Zwei halbbegrenzte grade Linien, die denselben Anfangspunkt haben, bilden einen *Winkel;* die Linien heissen Schenkel, der Anfangspunkt Scheitel. Der Winkel wird der Grösse nach bestimmt durch die Grösse der kleinsten Drehung, die erforderlich ist, den einen Schenkel in die Lage des andern zu bringen.

§. 9.

Figur heist eine Zusammenstellung von Linien, Winkeln und Flächen zu einem geschlossenen Ganzen.

§. 10.

Figuren sind congruent, wenn sie so in einander gelegt werden können, dass alle ihre einzelnen Theile in einander fallen oder sich decken.

§. 11. **Lehrsätze und Grundsätze.**

1) Sind zwei grade Linien congruent, so können sie auch so zur Deckung gebracht werden, dass der Anfangspunkt der einen in den Endpunkt der andern, der Endpunkt der erstern in den Anfangspunkt der zweiten fällt. Der Beweis ergiebt sich aus §. 2, 1. und §. 5.

2) Bei congruenten Graden sind die kürzesten Entfernungen zwischen Anfangs- und Endpunkt gleich.
3) Winkel sind congruent, wenn ihre Schenkel und Scheitel in einander fallen.
4) Sind zwei Winkel congruent, so können sie auch so zur Deckung gebracht werden, dass der erste Schenkel des einen in den zweiten Schenkel des andern und der zweite Schenkel des erstern in den ersten Schenkel des andern Winkels fällt.

### §. 12.

Verbindet man drei Punkte unter einander durch grade Linien, so entsteht ein Dreieck, die Strecken zwischen je zwei Punkten heissen Seiten, die Winkel, welche von diesen Strecken gebildet werden, Winkel des Dreiecks.

### §. 13. Lehrsätze.

1) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in denselben zwei Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel gleich sind. Beweis unmittelbar aus §. 11, 3.
2) In einem gleichschenklichen Dreiecke haben die gleichen Seiten gleiche Gegenwinkel. *Beweis* folgt aus §. 11, 3 und 4.

### §. 14.

Man nehme auf einer Seite eines Dreiecks einen beliebigen Punkt an, lege durch denselben in der Richtung der Seite einen Strahl und drehe diesen so um den Punkt, dass er stets eine der andern Seiten des Dreiecks schneidet, bis er in entgegengesetzter Richtung wieder mit der ersten Seite zusammenfällt. Betrachtet man auf diesem gedrehten Strahle einen Punkt, der eine gewisse Strecke mit dem Drehpunkte bestimmt, so wird dieser Punkt eine Linie beschreiben. Denkt man sich nun diese ganze Figur um die erste Seite des Dreiecks nach derselben Richtung herumgedreht, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückgekehrt, so beschreibt jene Linie eine stetig zusammenhängende Fläche, die vollständig einen Raum abschliesst. Diese Fläche, welche so beschaffen ist, dass jeder Punkt in ihr mit dem ersten Drehpunkte gleiche Strecken abgrenzt, d. h. dass jeder Punkt in ihr von diesem Mittelpunkte gleiche Entfernung hat, heisst Kugeloberfläche, der abgeschlossene Raum Kugel, die erzeugende Strecke Radius der Kugel.

### §. 15. Lehrsätze.

1) Haben zwei Kugeln mit verschiedenen Radien den Mittelpunkt gemeinschaftlich, so liegt die Kugel des kleinern Radius ganz innerhalb der Kugel des grössern Radius.
2) Jeder Punkt innerhalb der Kugel hat eine geringere Entfernung, jeder Punkt ausserhalb der Kugel eine grössere Entfernung als die Punkte der Kugeloberfläche vom Mittelpunkte.
3) Die Entfernung zweier Punkte wächst mit der Strecke.

### §. 16.

Dreht man einen Winkel um den einen Schenkel herum, bis der andre Schenkel wieder in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt, so beschreibt dieser andere Schenkel eine Fläche, welche Kegelfläche des Winkels heissen mag, während der dadurch theilweis abgeschlossene Raum Kegel, der feste Scheitel des Winkels Scheitel des Kegels, und der feste Schenkel Achse des Kegels heisse.

### §. 17. Lehrsätze.

1) Legt man die Kegel zweier Winkel so in einander, dass die Scheitel und Achsen in einander fallen, so liegt der Kegel des kleinern Winkels ganz innerhalb des Kegels des grössern Winkels. Beweis folgt aus §. 8.

2) Jede grade Linie durch den Scheitel eines Kegels, die innerhalb des Kegels liegt, bildet mit der Achse einen kleinern, jede Grade durch den Scheitel, die ausserhalb des Kegels liegt, einen grössern Winkel, als die durch den Scheitel gehenden in der Kegeloberfläche liegenden Graden.

*Beweis.* Denn denkt man sich zu den Winkeln die Kegel, so liegt der eine ganz innerhalb, der andere ganz ausserhalb des gegebenen Kegels, und mithin der eine Winkel kleiner, der andere grösser als der in Rede stehende.

3) Zieht man von einem Punkte P (Siehe Tafel I., Fig. 1) einer Graden XY aus durch zwei verschiedene Punkte N und O einer zweiten von der ersten geschnittenen Graden ZV, die aber von diesem Durchschnittspunkt aus nach derselben Richtung hinliegen, die Graden PN und PO: so bildet die durch den entfernteren Punkt gehende Grade PO mit der erstern XY einen grössern Winkel, als die durch den andern Punkt gehende Grade PN mit der ersten Graden bildet.

*Beweis.* Die Linie DV, welche von der Achse ausgeht, muss die innere Kegelfläche, also die Kegelfläche des kleinern Winkels, eher treffen, als die äussere oder die des grössern Winkels. Sie trifft aber den Punkt N eher als den Punkt O, also die Kegelfläche durch N eher, als die durch O, mithin ist die Kegelfläche des Winkels DPN die innere und daher der Winkel DPN der kleinen.

### §. 18.

Bilden die Schenkel eines Winkels mit einander einen Strahl, so heisst derselbe ein gestreckter Winkel. Der Kegel desselben ist der unbegrenzte Raum; die Kegeloberfläche und Achse bilden einen Strahl.

### §. 19.

Haben zwei Winkel den Scheitel und einen Schenkel gemeinschaftlich, während das andere Schenkelpaar einen Strahl bildet, so heissen dieselben *Nebenwinkel.* Bildet man deren Kegel so, dass die nicht gemeinschaftlichen, aber in einem Strahle liegenden, Schenkel deren Achsen sind, so erfüllen beide Kegel zusammen den unbegrenzten Raum, und die Kegelflächen decken sich.

### §. 20. Lehrsätze.

1) Die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich einem gestreckten Winkel und alle gestreckten Winkel sind einander gleich.

2) Die Nebenwinkel gleicher Winkel sind gleich.

### §. 21.

Nebenwinkel, die einander gleich, also die Hälfte eines gestreckten Winkels sind, heissen rechte Winkel; alle rechte Winkel sind einander gleich. Zwei Linien, die einen rechten Winkel bilden, heissen zu einander senkrecht. Spitze Winkel sind kleiner, stumpfe grösser als ein Rechter.

§. 22.

Zwei Winkel, deren Schenkel gegenseitig Verlängerungen zu einander sind, heissen Scheitelwinkel. Solche Scheitelwinkel sind untereinander gleich, weil sie denselben Nebenwinkel haben, oder weil sie die Richtungsverschiedenheiten derselben Strahlen sind.

§. 23.

Dreht man zwei Scheitelwinkel um den einen Schenkelstrahl, so entstehen zwei Kegel, deren Achsen zu einander Verlängerungen sind, und deren Kegelflächen dieselben durch den Scheitel gehenden Strahlen fassen. Zwei solche Kegel mögen zu einander Gegenkegel heissen.

§. 24.

Bildet man den Kegel des rechten Winkels, so fällt seine Fläche mit der des Gegenkegels zusammen; jeder Strahl also durch den Scheitel, der zum Theil in der Kegelfläche des rechten Winkels liegt, liegt ganz in derselben.

§. 25.

Bildet man für ein und denselben Winkel die Kegelflächen in Bezug auf beide Schenkel als Achsen, so liegen die Kegel zum Theil in einander, zum Theil ausser einander, und die Kegelflächen schneiden sich. Behält man die Schenkel dieses Winkels als feste Achsen bei, beschreibt aber mit ungleich abnehmenden Winkeln Kegelflächen, so werden sich dieselben ebenfalls schneiden können, bis die Winkel so klein werden, dass sie zusammen kleiner, als der ursprüngliche sind, und ihre Kegelflächen also ausser einander liegen.

§. 26. **Lehrsatz.**

Die Kegelflächen zweier Winkel mit demselben Scheitel schneiden sich, wenn dies überhaupt der Fall in zwei graden Linien.

*Beweis.* Verbindet man einen gemeinschaftlichen Punkt beider Kegelflächen mit dem gemeinschaftlichen Scheitel durch eine grade Linie, so liegt dieselbe sowohl in der einen Kegelfläche, als in der andern, ist also eine Durchschnittslinie der beiden Kegelflächen. Schneiden sich nun die Kegelflächen wirklich, so liegen die Kegel zum Theil innerhalb, zum Theil ausserhalb einander. Die Kegelflächen müssen sich also wenigstens in 2 graden Linien schneiden (denn einmal geht man von Innen nach Aussen, das andre Mal von Aussen nach Innen.) Schnitten sich die Kegelflächen in mehreren graden Linien als in zweien, so müsste dies nothwendiger Weise paarweise geschehen, und die beiden Kegelflächen würden zwischen sich Räume abschliessen. Dies ist aber widersinnig, weil die gedrehten Schenkel alsdann sich wechselsweise nähern und entfernen müssten, während sie nach den ursprünglichen Richtungen hin fortgedreht werden. Sie schneiden sich also in zwei graden Linien.

§. 27. **Lehrsatz.**

Kegelflächen rechter Winkel mit demselben Scheitel, aber mit verschiedenen Achsen, schneiden sich immer in Einem Strahle.

*Beweis.* Da der Winkel der Achsen stets kleiner als zwei Rechte ist, so werden sich Kegelflächen rechter Winkel mit demselben Scheitel und verschiedenen Achsen stets schneiden. Die eine gemeinschaftliche Linie beider Kegelflächen wird aber auch, zum Strahl erweitert, ebenfalls gemeinschaftlich sein (nach §. 24), also bildet die zweite gemeinschaftliche Linie mit der ersten ein und denselben Strahl.

§. 28.

Durch zwei sich schneidende Strahlen kann nur eine einzige Kegelfläche eines rechten Winkels so gelegt werden, dass der Durchschnittspunkt der Strahlen Scheitel derselben ist.

§. 29.

Schneiden sich zwei Kugeln, so bilden die Durchschnittspunkte der Oberfläche eine stetig zusammenhängende Linie, die ihren Ort nicht ändert, wenn die Kugeln irgendwie um ihre Mittelpunkte gedreht werden. Verbindet man einen Punkt dieser Durchschnittslinie mit den beiden Mittelpunkten, so entsteht ein Dreieck; dreht man nun dieses Dreieck um seine Verbindungsseite der beiden Kugelmittelpunkte, so wird der gegenüberliegende Eckpunkt 1) stets in der Durchschnittslinie der beiden Kugeloberflächen, 2) in der Durchschnittslinie der beiden Kegelflächen der Winkel an der Drehungsseite liegen. Hieraus ergiebt sich, dass Dreiecke congruent sind 1) aus Gleichheit der drei Seiten, 2) aus Gleichheit einer Seite und der beiden anliegenden Winkel.

§. 30. **Lehrsatz.**

Steht eine Linie auf zweien Seiten eines Dreiecks in ihrem Durchschnittspunkte senkrecht, so steht dieselbe auch senkrecht auf jeder Linie, welche durch diesen Punkt geht und den Strahl der Gegenseite des Dreiecks schneidet.

*Beweis* ist jetzt grade so zu führen, wie gewöhnlich in der Stereometrie.

§. 31. **Lehrsatz.**

Jeder Strahl, der durch irgend zwei Punkte der Kegelfläche des rechten Winkels geht, liegt ganz in dieser Kegelfläche.

*Beweis.* Zieht man nach zweien Punkten der Kegelfläche, durch welche der Strahl der Voraussetzung gemäss geht, vom Scheitel aus Linien, so entsteht ein Dreieck, auf dessen zwei im Scheitel der Kegelfläche zusammenstossenden Seiten die Achse der Kegelfläche senkrecht steht. Diese Achse steht also auch senkrecht auf jeder Linie vom Scheitel nach irgend einem Punkte jenes Strahles, d. h. alle Punkte jenes Strahles liegen in der Kegelfläche des rechten Winkels.

§. 32.

Sieht man die drei Seiten eines Dreiecks als Achsen von Kegelflächen rechter Winkel an, so dass jede Ecke eines Dreiecks gemeinschaftlicher Scheitel von 2 Kegelflächen ist, so stehen die drei Durchschnittstrahlen von je zwei solchen Kegelflächen senkrecht auf den entsprechenden zwei Seiten des Dreiecks, und die drei Strahlen der Dreiecksseiten liegen gleichzeitig in den drei Kegelflächen rechter Winkel, deren Achsen jene senkrechten sind.

§. 33. **Lehrsatz.**

Zieht man in diesem Dreieck (§. 32) einen Strahl, welcher zwei Seiten des Dreiecks schneidet, und denkt sich in den Durchscnittspunkten dieses Strahles mit den Seiten auf denselben und dem Strahle Senkrechte, so liegen in den rechtwinklichen Kegelflächen dieser Senkrechten als Achsen der gezogene Strahl und die beiden geschnittenen Seiten also auch die dritte Seite gleichzeitig, und ebenso liegt der Durchschnittsstrahl in den rechtwinklichen Kegelflächen der Achsen in den Ecken des Dreiecks.

*Beweis.* (Tafel I., Fig. 2.) Es sei ABC das ursprüngliche Dreieck, dessen zwei

Seiten durch den Strahl DE geschnitten werden; in D und E denke man sich, so wie früher in A, B und C Senkrechte auf den betreffenden zwei Linien. Dann verbinde man auch D mit B und E mit C. Es liegen dann in der Kegelfläche für die Achse in D die Strahlen AC und DE, also auch der Strahl AE und CE (nach §. 31); ferner DB, und also auch CB. Ebenso liegen alle Seiten des Dreiecks und alle gezogenen Strahlen gleichzeitig in der rechtwinklichen Kegelfläche der Achse in E. Gleiches ergiebt sich für die rechtwinklichen Kegelflächen der Achsen in A, B und C.

### §. 34. Zusatz.

Zieht man einen neuen Strahl, welcher zwei der frühern Strahlen scheidet, so liegt dieser neue Strahl mit allen frühern Strahlen gleichzeitig in den rechtwinklichen Kegelflächen der Achsen in den verschiedenen Durchschnittspunkten.

### §. 35.

Bildet man ein Strahlengebilde in der Weise, dass die beiden ersten Strahlen sich schneiden, und jeder folgende die beiden frühern schneidet, so liegt dieses ganze Strahlengebilde gleichzeitig in den rechtwinklichen Kegelflächen, deren Achsen in den verschiedenen Durchschnittspunkten auf den sich dort durchschneidenden Strahlen senkrecht stehn.

### §. 36.

Der Inbegriff aller möglichen Strahlen eines solchen Strahlengebildes heisst Ebene.

### §. 37.

Jede rechtwinkliche Kegelfläche ist eine Ebene, und jede Ebene ist eine rechtwinkliche Kegelfläche mit beliebigem Scheitel in ihr.

### §. 38. Zusätze.

1) Durch zwei sich scheidende Grade, 2) durch eine Grade und einen Punkt ausserhalb derselben, 3) durch drei Punkte, die nicht in einem und demselben Strahle liegen, lässt sich immer Eine Ebene legen.

### §. 39. Lehrsatz.

Wenn zwei Ebenen Punkte gemein haben, so fallen sie entweder in einander oder schneiden sich in Einer graden Linie.

Beweis folgt aus §. 27.

### §. 40. Lehrsatz.

In jedem Punkte einer Ebene ist nur eine Senkrechte auf derselben möglich.

*Beweis.* Denn wären zwei Senkrechte möglich, so würde bei einer Drehung der Ebene um die eine Senkrechte als Achse der rechtwinklichen Kegelfläche die andere Senkrechte eine Kegelfläche beschreiben. Die Achse müsste also, um durch Drehung mit einer Graden der Ebene zusammenzufallen, die beschriebene Kegelfläche durchschneiden; woraus folgte, dass diese Durchschnittslinie mit jener Graden in der Ebene einen kleinern Winkel als einen rechten machte.

### §. 41. Lehrsatz.

Zwei Ebenen, welche auf einer und derselben Graden senkrecht stehen, schneiden sich nicht.

*Beweis.* Denn schnitten sie sich, so verbinde man einen gemeinschaftlichen Punkt mit den Durchschnittspunkten der gemeinschaftlichen Senkrechten und der Ebenen, und drehe beide Ebenen um die gemeinschaftliche Senkrechte als Achse. Dann folgt, dass der gemeinschaftliche Punkt beider Ebenen in der Durchschnittslinie zweier Kugeloberflächen liegt (denn er behält von dem einen, wie von dem andern Durchschnittspunkte jener Senkrechten mit den Ebenen dieselben Entfernungen); diese Linie müsste dann aber zugleich die Durchschnittslinie der beiden Ebenen sein. Also schnitten sich die Ebenen in einer in sich selbst zusammenlaufenden, also krummen Linie, was §. 38 widerstreitet.

§. 42.

Aus §. 41 ergeben sich unmittelbar folgende Zusätze:

1) In keinem Dreieck können zwei Winkel rechte sein.
2) Zwei grade Linien, in verschiedenen Punkten auf ein und derselben Graden senkrecht, schneiden sich nie.
3) Von einem Punkte ausserhalb einer Ebene ist auf dieselbe nur Ein Perpendikel möglich.

§. 43. **Lehrsatz.**

In jedem Dreieck, welches einen rechten Winkel hat, sind die anderen beiden spitze.

*Beweis.* Denn wäre einer der beiden anderen Winkel stumpf, so denke man sich das Dreieck um die Kathete, welche an dem stumpfen Winkel läge, gedreht, und zugleich eine rechtwinkliche Kegelfläche, die den Scheitel des stumpfen Winkels zum Scheitel und jene Kathete zur Achse hat, so müsste diese rechtwinkliche Kegelfläche die durch die andere Kathete entstandene schneiden, was §. 41 widerstreitet. Demnach ist die obige Behauptung ausser Zweifel gesetzt.

§. 44. **Lehrsatz.**

In keinem Dreieck können zwei stumpfe Winkel sein.

*Beweis* wird wie der vorige geführt.

§. 45. **Lehrsatz.**

In keinem Dreieck kann ein stumpfer und ein spitzer Winkel, die zusammen mehr als zwei Rechte oder zwei Rechte betragen, sein.

*Beweis.* (Tafel I., Fig. 3.) 1) Denn wäre $\alpha + \beta > 2$ R., während a und b sich schneiden, so wäre $\beta' < \alpha$ und $\alpha' < \beta$, also müssten, wie man durch Drehung beweisen würde, a′ und b′ sich ebenfalls schneiden, oder es schnitten sich die graden Linien in zweien Punkten, was unmöglich ist.

Wäre $\alpha + \beta = 2$ R., während a und b sich schneiden, so wäre $\alpha' = \beta$ und $\beta' = \alpha$, und es müssten sich a′ und b′ ebenfalls schneiden, also schnitten sich die Graden wieder in zweien Punkten, was nicht möglich ist.

§. 46.

Man hat also allgemein: In jedem Dreieck ist die Summe zweier Winkel kleiner als zwei Rechte.

Bernburg im September 1849. **Felgentreu.**