Die Mathematik

als

Bildungsmittel.

Sehr häufig hört man selbst heut zu Tage noch Klagen, daß der mathematische Unterricht etwas Trockenes habe, auf Schulen durchaus nicht gedeihen wolle, indem kein Schüler, oder doch nur selten Einer Interesse oder Geschmack daran finde; und leider sind diese Klagen nur zu gegründet! Woher käme sonst der allgemeine Mangel an mathematischen Kenntnissen bei den Meisten Derer, die sich zu den Gebildeten rechnen? Woher sonst die so irrige, aber selbst in unserer Zeit noch herrschende Meinung, daß eine vollendete Bildung möglich sei, ohne auch nur in den Anfangsgründen dieser Wissenschaft bewandert zu sein? Woher sonst die geringe Zahl Derer, die auf der Universität noch mathematische Vorträge anhören, oder auf andere Weise darin fortstudiren, wenn die Mathematik nicht gerade zu ihrem Brodstudium gehört? — Und doch erkennt man allgemein den heilsamen Einfluß an, den sie auf die Gesammtbildung des Menschen hat; ja es ist unter Denen, welche, als Sachkenner, allein zu einem Urtheile hierüber befugt sind, so zu sagen nur Eine Stimme, daß sie zur Bildung eines richtigen Urtheils und zur Entwickelung der Denkkraft überhaupt mehr beitrage, als irgend eine andere Wissenschaft; die Elemente, aus welchen sie aufgebaut ist, sind an sich so einfach, daß sie Jedem, selbst dem Kinde schon zugänglich sein müssen; sie construirt sich bloß aus der innern Anschauung und auf immer sicherem Wege, ohne alle Willkühr, ohne das Hebezeug fremder Hülfsmittel, deren die meisten anderen Wissenschaften bedürfen; die Klarheit und Bündigkeit ihrer Schlüsse und Beweise, die Mannigfaltigkeit und Tiefe ihrer Constructionen stempeln sie zu einer Wissenschaft, in der die Schärfung des Verstandes, wie die Erfindungskraft und Phantasie ein weites Feld zur Uebung und Ausbildung finden: dies Alles erkennt man allgemein an, und gesteht ihr gern selbst noch einen bildenden Einfluß auf das Gemüth zu. Woher denn aber, bei all ihrer bildenden Kraft, das Mißlingen des Unterrichts in einer Wissenschaft, welcher die Schule unter den übrigen Lehrobjekten billiger Weise eine der ersten Stellen einräumen muß?

Es soll in dieser Abhandlung versucht werden diese Frage wo möglich zu beantworten, so wie sich dann vielleicht auch Mittel finden lassen werden, dem gewiß von Vielen tief gefühlten Uebel abzuhelfen.

Ehe ich mich indessen auf die Sache selbst einlasse, wird es für das Folgende nöthig sein, mich mit meinen Lesern über den eigentlichen Zweck des mathematischen, so wie jedes andern Unterrichts auf der Schule, zu verständigen, weil es nur dadurch möglich wird, das Uebel bei der Wurzel zu fassen, und Mittel und Wege aufzufinden, welche zu befriedigenderen Resultaten führen können. — Man ist jetzt wohl ziemlich allgemein darüber einig, daß die Schule nicht sowohl dahin zu arbeiten habe, den Schüler mit einem Schatz von Kenntnissen und Fertigkeiten auszustatten, als vielmehr seine noch schlummernden Kräfte und Anlagen zu wecken, entwickeln und zur Selbstständigkeit und Reife auszubilden; man macht daher an die Schule, welche eine allgemeine Bildungsanstalt sein will, sehr unbillige Anforderungen, wenn man verlangt, daß sie ihre Zöglinge zu diesem oder jenem Stande oder Berufe vorbereiten soll: im Gegentheil ist die harmonische Ausbildung der geistigen Kraft der einzige Maßstab, nach welchem das in der Schule erworbene Wissen zu beurtheilen ist. Aus diesem Gesichtspunkte, und aus diesem allein, werde ich auch den hier insbesondere zur Sprache gebrachten Gegenstand behandeln. Es kann uns demnach nicht darum zu thun sein, den Schüler in den Besitz einer umfassenden Kenntniß der mathematischen Lehren zu setzen, oder auch nur einen einzelnen Gegenstand aus den mathematischen Gebieten bis in seine einzelnen Verzweigungen beim Unterrichte verfolgen zu wollen, weil dies durchaus nicht die allgemeine Kraftentwickelung, die Ausbildung des inneren, geistigen Anschauungsvermögens, welches, nach den Grundsätzen, zu denen ich mich so eben bekannt habe, das einzige Ziel des Unterrichts in der Mathematik ist, zur nothwendigen Folge hat. Wer sich eine durchgreifende Bildung, frei von der Nützlichkeitsansicht und Einseitigkeit der Zeit zu eigen gemacht hat, ist eben dadurch befähigt, wenn seine künftige Bestimmung es erfordert, oder besondere Neigung ihn dazu antreibt, jeden wissenschaftlichen Gegenstand zu ergreifen, und selbstthätig darin fortzuarbeiten.

Wenn wir nun, zur Erörterung unseres Gegenstandes, nach den Anfangspunkten der Wissenschaft fragen, und ihnen die menschlichen Denkkräfte auf der Stufe des Kindes, gegenüberstellen, wie sie hervorgegangen aus der Hand der Natur und des mütterlichen Kreises während der ersten Lebensjahre, zwar regsam und thätig, und in der heiteren Frische des Frühlings empfänglich für Alles, was ein unbefangenes Gemüth ansprechen kann, aber noch nicht gestimmt für den Ernst der Wissenschaft, der Zügel nicht gewohnt, die ein consequentes Verfolgen einer Reihenfolge von Schlüssen nothwendig erheischt; so entgeht uns keinesweges, daß diese jugendlichen Jahre nicht dazu bestimmt sein können, ihre erheiternde und geiststärkende Beschäftigung von der Mathematik, als Wissenschaft betrachtet, zu entlehnen. Nicht die Reflexion ist es, die von den Thätigkeiten des Geistes am frühesten geübt und ausgebildet sein will; sie bedarf selbst eines

Grundes, eines weiten Feldes der Anschauungen und Erfahrungen, auf welchem allein sie in üppiger Fülle gedeihen und goldene Früchte tragen kann.

Hat denn, fragen wir weiter, die Mathematik nicht vielleicht doch Elemente, an denen der Kreis der Anschauungen erweitert, die Kraft des Schülers, äußere Erscheinungen klar aufzufassen und zu reproduciren, geübt werden könnte, die somit die Schärfe seiner Aufmerksamkeit und die Präcision seines Ausdrucks auf eine angemessene Weise auszubilden vermöchten, ohne das Begriffsvermögen, das einem reiferen Alter angehört, zu sehr in Anspruch zu nehmen?

Wie jeder andere, so ist auch dieser Gegenstand einer doppelten Behandlung fähig — einer objectiven und einer subjectiven; jene, sich frei und der Idee der strengen Wissenschaft gemäß entfaltend, nimmt keine Rücksicht auf äußere Verhältnisse und setzt den schon gebildeten Geist voraus; diese dagegen fügt sich nach dem Standpunkte der Entwickelung des kindlichen Geistes, giebt die Wissenschaftsform gern auf, wo sie unter einer anderen Gestalt ein leichteres Eindringen in den noch unentwickelten Verstand erwarten darf. Strenge Gründlichkeit und consequente Wissenschaftlichkeit ist der Charakter der objectiven Methode; die mathematische Literatur ist zur Zeit noch sehr arm an solchen Werken: das Einzige, was in dieser Art von den ersten Elementen bis in die höheren Gebiete der Wissenschaft durchgeführt worden, ist die Analysis von Ohm[1]). In der Geometrie nehmen Euklid's Elemente, wie schon zweitausend Jahre, so noch jetzt, — aus dem objectiven Standpunkte betrachtet, — eine der ersten Stellen ein, wiewohl auch sie insofern nicht wissenschaftlich sind, als die Anordnung des Stoffes in denselben eine künstliche, nicht aus der Natur des Gegenstandes selbst hergenommene ist. Die rein wissenschaftliche, von allen Nebenrücksichten freie Bearbeitung der Mathematik muß nothwendig jeder elementaren Behandlung derselben vorangehen; denn ehe wir das Material, das uns zu Gebote steht, besitzen und kennen, kann von einer Verwendung desselben zu einem besonderen Zwecke nicht die Rede sein. Es ist daher auch für den Zweck der Menschenbildung von hoher Wichtigkeit, daß die Wissenschaft nicht sowohl extensiv, als vielmehr intensiv ausgebildet werde, d. h. daß endlich jede Willkühr in der Anordnung und Aneinanderreihung der verschiedenen Theile derselben einem fest bestimmten Gange Platz mache,[2]) daß man von allen vorkommenden Größen- und Zahlformen die bestimmtesten und klarsten Begriffe habe, und nur ächt mathematische Definitionen zulasse[3]). Denn eine willkührliche, aller inneren Nothwendigkeit entbehrende Anordnung des Stof-

1) Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik, von Dr. Ohm. 7 Theile (der erste und zweite in zweiter Ausgabe). Berlin, 1828 — 1833. Hieran schließt sich auch seine „Lehre vom Größten und Kleinsten. Berlin, 1825."

2) Daß in den meisten Lehrbüchern Fehler hiegegen begangen werden, liegt am Tage. Beispiele hiezu liefern, unter vielen anderen, die Logarithmen, der binomische Lehrsatz, die Anwendung der Zahlenlehre auf Größen, u. s. w.

3) Auch hiegegen fehlt man oft, und zwar schon bei der Erklärung der sieben einfachen Operationen; diese Oberflächlichkeit rügt sich häufig; statt vieler Beispiele, die als Beleg dazu angeführt werden könnten, mag eins genügen: in „Littrow's Anleitung zur höheren Mathematik. Wien, 1836" liest man S. 121: $\sqrt[0]{1} = e$, d. h. gleich der Basis des natürlichen Logarithmen, oder gleich der bestimmten Zahl 2,718128 .....,

fes kann weder zu einer ächt gründlichen Nachweisung mathematischer Wahrheiten führen, noch überhaupt auf den Namen einer Wissenschaft Anspruch machen.

Was nun die subjective Behandlung der Mathematik anbetrifft, so bemerkt man bald, daß hier die Versuche viel zahlreicher, aber eben darum auch die Irrthümer und Abwege, auf welche man gerathen ist, bei weitem noch häufiger sind. Pestalozzi war unstreitig der Erste, der das Bedürfniß einer naturgemäßen, mit den Entwickelungsstufen des menschlichen Geistes gleichen Schritt haltenden Methode, nicht bloß des mathematischen, sondern jedes Unterrichtes lebhaft gefühlt, und zum Theil auch in's Leben gerufen hat. Angeregt durch diesen Vorgänger sind dann eine größere Menge Schriftsteller über diesen Gegenstand aufgetreten; aber weil es sich hier größtentheils nur um die Elemente der Wissenschaft handelt, glaubte sich so Mancher zu einer Bearbeitung dieser Art berufen, der das Feld der vollendeten Wissenschaft weder überschaut, noch auch nur einmal flüchtig durchschritten. Wie es gewöhnlich der Fall zu sein pflegt, ist man auch hier aus Einem Extrem in das gerade entgegengesetzte gerathen. Früher hatte man bloß den Gegenstand selbst im Auge; man sah das Zweckwidrige einer solchen Methode ein, vernachlässigte diese Seite ganz, und dachte den kindlichen Geist, der die Elemente der Wissenschaft in sich aufnehmen, an ihnen entwickelt, gekräftigt und gebildet werden soll, mit einigen oberflächlichen, kaum die äußeren Umrisse der Wissenschaft berührenden, ja nicht selten durch falsche Auffassung mathematischer Begriffe ganz unrichtigen Zusammenstellungen dem gesuchten Ziel am sichersten entgegen zu führen. So sind denn eine Unzahl seichter und zweckwidriger Elementarbücher entstanden, welche dem rege gewordenen pädagogischen Streben eben so hinderlich gewesen sind, wie die früheren, weder rein wissenschaftlichen, noch methodischen Abfassungen des Gegenstandes. Es scheint hienach wichtig zu sein, daß zur elementaren, methodischen Behandlung irgend eines Unterrichtszweiges, insbesondere aber der Mathematik, sich nur Männer bestimmen sollten, welche die Wissenschaft selbst kennen, diese von jedem Standpunkte aus und nach jeder Richtung hin überschauen und beherrschen, damit die Lehrer der Jugend, von denen so viele nicht in die Lage versetzt sind, sich selbst mit allen den Wissenschaften gründlich zu beschäftigen, deren Elemente sie zu lehren berufen sind, nicht aus Mangel an besseren Mitteln, zu Lehrbüchern ihre Zuflucht zu nehmen genöthigt werden, welche das Hauptziel des Unterrichts verfehlen.

Die Mathematik hat nun allerdings einen reichen Vorrath geistbildenden Stoffes, der sich der schwachen Kraft des noch unentwickelten Kindes anschmiegt, seine fast noch spielende Thätigkeit in Anspruch nimmt und diese um so mehr zu erregen und ernster zu gestalten vermag, je weiter sie entwickelt und zu einem gründlichen Erfassen der mathematischen Formen und zur Ein-

während doch $\sqrt[0]{1}$ die Zahl bezeichnet, die, mit 0 potenzirt, 1 giebt, also jede denkbare Zahl. — Ohm sagt in dieser Beziehung: „Nach der Ueberzeugung des Verfassers ist das Inconsequente und Unwissenschaftliche, wenn es in der Mathematik gefunden wird, (nicht bloß zugleich das Verworrene und Dunkle, sondern) auch allemal das Unpraktische. Es ist daher ein folgerechtes Denken, eine genauere Kenntniß der Mittel, deren man sich im Calcul bedienen darf, und einige Sicherheit in ihrer Anwendung wichtiger, als ein mechanisches und gesetzloses Wühlen im Calcul, welches nur eine vermeintliche Allgemeinheit, häufig aber Unrichtigkeit der Resultate geben kann.“ (Aufsätze aus dem Gebiete der höheren Mathematik. Berlin, 1823. S. V.)

sicht in die unwandelbaren Gesetze vorbereitet worden; es leuchtet dies schon aus der im Eingange berührten Charakteristik der Wissenschaft ein, und wird wohl von Niemand bezweifelt. Aber nicht in einem bunten Gewühl, nicht in dem unübersehbaren Wirrwarr, in welchem sich diese Gegenstände dem Unkundigen von selbst darbieten, wo nicht eine ordnende Hand in's Mittel tritt, dürfen wir dem Kinde die Mannigfaltigkeit der Formen und Gebilde vorführen, wenn wir uns nicht der Gefahr preis geben wollen, die noch schwachen Kräfte beim ersten Schritt zu lähmen. Der Unterricht muß dem Schüler eine gewisse Befriedigung gewähren, die um so lebendiger hervortritt, je weiter derselbe in das Gebiet eingedrungen; diese kann aber weder durch einen ungründlichen, noch lückenhaften Unterricht geweckt werden; die Möglichkeit der stets regsamen Selbstthätigkeit des Schülers kann allein zu diesem Ziele führen. Wiewohl man also mit dem Anfänger nicht die strenge Wissenschaft wird betreiben können, so muß doch das, was gelehrt wird, nicht ungründlich, nicht oberflächlich gelehrt werden. Jenes innere, immer frische Interesse beruht aber nicht sowohl auf dem einzelnen Gegenstande, als vielmehr auf dem stetigen Zusammenhange des Ganzen, und dem wohlbegründeten, nirgends eine Schwäche zeigenden Bau der Wissenschaft. Unzusammenhangende Brocken nimmt der Schüler nur mit Unmuth in sich auf; er muß so geführt werden, daß er die Kraft in sich rege werden sieht, auch selbst eine Untersuchung zu beginnen und durchzuführen. Wenn man gegen ein solches Verfahren einwendet, daß nur wenige, besonders talentvolle Schüler Antheil an dem Unterrichte nehmen werden, so ist dieser Einwurf ganz nichtig, und beruht auf einer unrichtigen Vorstellung von einem naturgemäßen Entwickelungsgange; was bei dem einen Individuum nothwendig erfolgen muß, kann bei dem andern nicht ausbleiben, sonst liegt der Grund dieses Mißlingens an der Methode, die dann noch nicht naturgemäß ist. Denn die Elemente, von denen die Mathematik ausgeht, sind so einfach, und ihre Combinationen ergeben sich mit so großer Bestimmtheit, daß durchaus nicht abzusehen ist, wie in dieser Beziehung eine Verschiedenheit der Anlagen unter den Menschen statt finden könne: nur gespannte Aufmerksamkeit, die doch Jedem möglich ist, der nicht von vorn herein verwahrlost worden, und auf keinen Fall eine besondere Anlage voraussetzt, ist zur richtigen Auffassung der Formen, zum gleichmäßigen Verfolgen der Schlüsse und zur Einsicht in die mathematischen Wahrheiten und Gesetze erforderlich.

Ein wissenschaftlicher Gegenstand kann aber entweder dadurch eine elementare Behandlung erhalten, daß man, statt das Allgemeine in's Auge zu fassen, sich auf besondere Fälle beschränkt, um somit weniger abstract, und mehr im Bereiche der Anschauung sich bewegend, für diese zu denselben Wahrheiten einzeln zu gelangen, welche bei einer streng wissenschaftlichen Behandlung unter einem allgemeinen Falle zusammengefaßt werden; oder das Elementare des Unterrichts besteht darin, daß man den Schüler vorläufig nur mit den später wissenschaftlich zu behandelnden Gegenständen in so weit bekannt macht, als sie ohne zusammenhangende Schlußfolgen sich darstellen lassen. Die erste dieser Methoden eignet sich für die Zahlenlehre, die zweite für die Geometrie, weil jener nur Ein Element, dieser aber zwei (Länge und Richtung) zu Grunde liegen.

Statt daß also die wissenschaftliche Zahlenlehre allgemeine Zahlen betrachtet, beschränkt sich die elementare auf besondere oder bestimmte Zahlen, und während jene, die deshalb allgemeine Zahlenlehre heißt, allgemeine Gesetze über die möglichen Zahlenverbindungen aufstellt, um danach mit allgemeinen Zahlen operiren zu können, werden in dieser die einfachsten Verbindungen bestimmter Zahlen vorgeführt [4]); mit Einem Worte, die arithmetischen Vorübungen bestehen in den einfachsten Operationen des gemeinen Rechnens. Nachdem der Schüler, auf dem Wege der Anschauung, nie aber durch bloße Mittheilung, oder dadurch, daß man ihn aus dem Gedächtnisse zählen läßt, zu einer hinreichenden Kenntniß der einzelnen Zahlen, in kleinerem oder größerem Umfange, erst nur bis Zehn oder Zwanzig, allmählig weiter bis Hundert u. s. f. gelangt ist, verbinde man sie durch die vier ersten einfachen Operationen, insofern die übrigen Verbindungen (das Potenziren, Radiziren und Logarithmiren) auf dieser Stufe schon zu complicirt werden würden. Bei diesen Uebungen enthalte man sich überall der kunstgerechten arithmetischen Ausdrücke, fasse die Aufgabe in allgemein verständliche Worte, und stelle sie so klar und bestimmt hin, wie nur möglich; überhaupt lerne der Schüler die Sache eher kennen, als er mit Zeichen und Namen bekannt gemacht werde, um sowohl Unklarheit der Begriffe, als Gewöhnung an bloß mechanisches Arbeiten möglichst zu vermeiden. Alles muß hiebei unmittelbar der Anschauung entnommen, nie darf das Gedächtniß mit Absicht belastet werden, so z. B. wird weder das Einmal Eins, noch werden andere Zahlenverbindungen auswendig gelernt; vielmehr muß das Resultat so oft aus der unmittelbaren Anschauung abgeleitet werden, bis der Schüler die Fertigkeit erlangt hat, dasselbe eben so leicht immer von Neuem wieder zu erzeugen, als es vermöge des Gedächtnisses gleichsam abgelesen werden könnte [5]).

Die größten Schwierigkeiten im Rechnen entstehen daraus, daß der Schüler wohl die Operationen ausführen lernt, aber durchaus keinen klaren Begriff von den Relationen hat; in welchen Summand und Summe, Minuend, Subtrahend, und Differenz, Faktor und Product, Dividend, Divisor und Quotient zu einander stehen. Diese Relationen aber sind hauptsächlich das bildende Element der Zahlenlehre; will man sich also dieser begeben, so mag man lieber das Rechnen ganz vom Lectionsplane streichen und die Zeit anderweitig verwenden, da es doch wohl der Schule unwürdig erscheint, ihre Zöglinge zu bloßen Maschinen abzurichten.

---

4) „Die Natur führt uns unsere Kenntnisse nicht so zu, daß wir das sie beherrschende Gesetz zuerst wahrnehmen und aus diesem die untergeordneten, einzelnen Fälle herleiten, sondern vielmehr so, daß wir das allgemeine Gesetz erst aus einer Menge einzelner Wahrnehmungen abstrahiren." (E. Wilde, Geometrie für Bürgerschulen ꝛc. Berlin, 1829. S. VI.)

5) „Dem Kinde, das späterhin in die mathematischen Wissenschaften eingeführt werden soll, müssen nämlich die, in schönem Ebenmaß sich aus einander entwickelnden arithmetischen Grundoperationen so in besonderen Zahlen vorgeführt und so oft selbstthätig von ihm ausgeübt werden, daß es unwillkührlich zu dem Bewußtsein des Verhältnisses dieser Operationen zu einander und ihrer Entwickelung aus einander gelangt. Dann wird es ihm auf etwas höherer Stufe sehr leicht, sie in ihrer Allgemeinheit zu erfassen. Ein solches Verfahren setzt aber einen Lehrer voraus, der Mathematik versteht; sonst wird er ungewiß zu Werke gehen, weil er sein Ziel nicht ordentlich kennt; er wird die Uebungen weder in gehöriger Vollständigkeit, noch in der zweckdienlichen Folge, noch auf die geeignete Weise vornehmen." (A. Peters, über das Studium der Mathematik auf Gymnasien. Dresden, 1828. S. 62.)

Die Zahlenkenntniß wird nun allmählig erweitert und durch dieselben Uebungen befestigt, das übliche Zehnersystem wird gelehrt, und bei den folgenden Aufgaben darauf Bezug genommen [6]). Auf diese Weise lernt der Schüler rechnen ohne Kenntniß der Ziffern; dies ist aus mehreren Rücksichten nöthig: denn erstens führt der Gebrauch der Ziffern den Schüler gar zu leicht zu einem geisttödtenden Mechanismus; zweitens soll die eigene Kraft des Schülers nicht eher eine Hülfe finden, als bis sie Gelegenheit und Zeit gehabt hat, sich selbst zu üben; endlich aber macht die Anwendung der Ziffern einen Algorithmus nothwendig, welcher, wenn er verstanden werden soll, schon eine gereiftere Fassungskraft voraussetzt, als man bei dem Anfänger annehmen darf. Man hat aber bei dieser Stufenfolge Gelegenheit, die Schwierigkeit desselben durch zweckgemäße Vorübungen im Kopfrechnen wenigstens zum Theil zu heben. Dieser Punkt ist wichtig und erweist sich als eine Klippe, an der die meisten Lehrer scheitern. Unseren im Vorigen ausgesprochenen Grundsätzen gemäß, ist aber nicht das Aneignen der Fertigkeit, sondern das Maß von geistiger Entwickelung, welche dadurch erworben werden kann, der Zweck dieser, so wie aller anderen Uebungen; sollte es daher auf dieser Stufe nicht möglich sein, den eben berührten Gegenstand in der Schule zur vollkommenen Einsicht der Schüler zu bringen, so wäre dies ein Beweis, daß diese Klasse von Uebungen auf eine spätere Zeit verspart werden müsse. Die Ansicht aber, nach welcher die Operationen, unbekümmert um das Verstehen, erst mechanisch gezeigt werden, und wo dann für die Zukunft eine Erklärung versprochen wird, bedarf hier kaum der Widerlegung: denn solche Treibhausfrüchte einer unüberlegten Uebereilung, hervorgegangen aus eitler Prahlsucht, aus der in unserer Zeit leider so sehr überhand nehmenden Richtung nach außen, sind schon gestraft in ihrer eigenen Nichtigkeit; wo das innere Leben dem äußeren geopfert wird, wo die Eitelkeit den letzten Funken höheren Strebens erstickt, was kann da wachsen und gedeihen? Würdigt die Kräfte der Seele herab, und sie erschlaffen in träger Unthätigkeit, und werden sich nicht wieder ermannen und aufrichten, sondern auf immer verloren sein. Wenn wir das Rechnen auf dieser Stufe empfehlen, so geschieht es nicht um des Könnens willen, sondern weil wir darin eine vorzügliche Quelle anregenden Stoffes, ein angemessenes Mittel zur Uebung der Denkkraft zu finden meinen.

Nach denselben Grundsätzen werden nun auch die vier Operationen mit gebrochenen Zahlen durchgeführt; dieser Theil des Rechnens ist um so wichtiger, da sich gerade in ihm am deutlichsten die Nothwendigkeit einer naturgemäßen Behandlung herausstellt. Die Schwierigkeiten der Rechnung mit Brüchen fallen weg, wenn durch die ganzen Zahlen so vorgearbeitet ist, daß der Schüler nicht bloß das Rechnen gelernt, sondern an geistiger Anregung gewonnen hat. Die Bruchrechnung ist eine Quotientenrechnung: von diesem Gesichtspunkte aus betrachtet wird sie den Schüler auf ein ihm bekanntes Feld stellen, ihm also die beste Gelegenheit zum eigenen Nachdenken geben.

Eine der vorzüglichsten Uebungen der Selbstthätigkeit des Schülers, und die zugleich die klare Einsicht in das gegenseitige Verhalten der Operationen wie keine andere befördert, wenn

6) Weitere Auskunft hierüber findet man in des Verfassers „Lehrbuch der Arithmetik. 4 Theile. Berlin, 1832.“

sie auf die rechte Weise betrieben wird, ist das Auflösen einfacher algebraischer Bedingungsgleichungen auf rein arithmetischem Wege. Geht man von den einfachsten Bedingungen aus, z. B. daß die Summe, oder Differenz, daß Product oder der Quotient der gesuchten und einer gegebenen Zahl einer anderen gegebenen Zahl gleich sein soll, und erweitert diese Grenzen nach und nach: so wird man ohne die geringste Schwierigkeit zu den verwickeltsten Combinationen fortschreiten können, und dem durch das Frühere geweckten Schüler ein Feld der eigenen Thätigkeit eröffnen, auf dem er sich gern bewegt. Uebrigens gebraucht man hier immer bestimmte Zahlen, und weist die Gründe des Verfahrens an jedem einzelnen Beispiele immer wieder nach, so daß man sich vom Allgemeinen stets fern hält [7]).

Die elementaren Vorübungen der Geometrie lassen sich auf mehrfache Weise zur Entwickelung des Anschauungs- und Denkvermögens benutzen [8]). Uns scheint folgende Anordnung

---

7) Diese Klasse von Aufgaben hat Joseph Schmid in seinen „Elementen der Algebra nach Pestalozzischen Grundsätzen bearbeitet. Heidelberg 1810" zuerst in größerem Umfange benutzt. Das Vollständigste was bisher über diesen Gegenstand erschienen, ist: „S. E. Baltrusch, Grundriß der Elementar-Arithmetik und algebraisches Kopfrechnen. Berlin, 1836." XIV. und 475 S. Die Schrift ist mit dem rühmlichsten Fleiße bearbeitet und dem angehenden Lehrer zum eigenen Studium zu empfehlen. Sie enthält einen Theil der allgemeinen Arithmetik, welches die schwächste Seite des Buches ist, da der Verfasser zwar überall nach Gründlichkeit strebt, aber auf dem Standpunkte, auf den er sich hier stellt, meistens nur auf sehr unebenen und rauhen Wegen erreicht. Dann folgt eine reichhaltige Sammlung algebraischer Aufgaben, auf arithmetischem Wege gelöst, nach Art derjenigen, welche Schreiber dieses in seinem „Lehrbuche der Arithmetik" erörtert hat. Die zweite Hälfte des Buches enthält Anwendungen auf Fälle des täglichen Verkehrs. Fleiß und Ausdauer des Sammelns sind nicht zu verkennen, auch ist bei mancher Aufgabe die Klippe der algebraischen Lösung glücklich vermieden. Wenn man aber, im ersten Theile, von ganz einfachen und leicht zu übersehenden Eigenschaften der Zahlen Seiten lange Beweise antrifft, die überdies noch so gekünstelt und schwerfällig sind, daß sie selbst einen in diesen Dingen geübteren Leser zurückschrecken könnten: so kann wohl an eine Möglichkeit, das Buch dem arithmetischen Unterrichte in Schulen zu Grunde zu legen, nie gedacht werden. Der größere Theil desselben liegt über dem Horizonte eines Schülers der Mittelklassen der Gymnasien und Bürgerschulen. Abgesehen davon, daß das sehr voluminöse, und für solchen Zweck theure Werk sich nur über einen speciellen Theil des Rechenunterrichts erstreckt, also immer noch ein zweites zur Ergänzung erfordert, ist es schon deshalb zu dem beabsichtigten Zwecke nicht zu gebrauchen, weil das, was dieser Unterricht erstreben soll, und wonach unser Verf. auch hinzielte, nämlich eine gediegene Verstandesbildung, durch den begründenden, ersten Theil ganz verfehlt wird. Wenn der Verf. meint, Gründlichkeit könne allein zu diesem Ziele führen, so stimmen wir mit ihm darin überein: aber man bedenke, daß, was dem gereiften Verstande des Mannes gründlich ist, es deshalb nicht allemal auch dem Knaben zu sein scheint; diese Erfahrung kann jeder Lehrer, besonders der Mathematiker, täglich machen. Dadurch wollen wir nicht der Oberflächlichkeit das Wort reden, aber künstliche, schwerfällige Beweise und Schlüsse, die der Knabe nicht zu verfolgen vermag, können ihm unmöglich einen Sinn für Wissenschaftlichkeit geben, können unmöglich bildend auf den Geist einwirken. So willkommen daher die Schrift in anderer Beziehung sein muß, so wird sie doch der Schule, und aus diesem Gesichtspunkte haben wir sie hier allein zu beurtheilen, nur dadurch einen mittelbaren Nutzen bringen können, daß vielleicht ein Sachkenner, der mit dem Bedürfniß der Schule vertrauter ist, als unser Verf., früher oder später dadurch angeregt werden möchte, den Gegenstand in eine gefälligere, dem beabsichtigten Zwecke entsprechendere Form umzuarbeiten.

8) Ohm spricht sich in seinem „Versuch einer kurzen, gründlichen und deutlichen, auch Nichtmathematikern verständlichen Anweisung, 10—14jährige Knaben rc. zu einem leichten, gründlichen und wissenschaft-

derselben dem Zwecke am meisten zu entsprechen. Im häuslichen Kreise, in Kleinkinder= und Warteschulen, für Kinder vom 4ten bis zum 7ten Jahre, haben bloße Anschauungsübungen geometrischer Formen und Gebilde einen sehr wohlthätigen Einfluß auf die Geistesentfaltung. Es werden nämlich den Kindern die richtig gezeichneten, oder auch aus irgend einem zweckdienlichen Stoffe dargestellten Gebilde der Ebene und des Raumes (Dreieck, Viereck, Rechteck, Quadrat, Fünfeck, Kreis, Halbkreis, Kreisausschnitt, Kreisabschnitt, Pyramide, Kegel, Prisma, Cylinder, Würfel, Kugel u. s. w.), in stufenmäßiger Aufeinanderfolge vorgezeigt und benannt; die jüngeren Kinder fassen bloß Form und Benennung auf, die älteren üben sich in der *bloß mechanischen Nachbildung derselben aus freier Hand*, die ebenen Figuren zeichnen sie auf die Schiefertafel, die Raumgebilde stellen sie in irgend einem bildsamen Stoffe dar. *Nie aber knüpfe man an diese Uebungen die Auffassung der einzelnen Theile der Figuren* und Körper (z. B. Seiten, Winkel, Ecken, Kanten 2c.); denn da diese Begriffe auf dieser Stufe, und auf diese Weise, wie hier der Gegenstand überhaupt getrieben werden soll, nicht in ihrer ächt mathematischen Bedeutung aufgefaßt werden können, so werden sie unfehlbar falsch verstanden, bringen ganz unklare Vorstellungen in dem Schüler hervor, und legen so der später folgenden wissenschaftlichen Geometrie die größten Hindernisse in den Weg. Für Schulen aber, wo Kinder vom sechsten Jahre an eintreten, paßt diese Auffassungsweise gar nicht mehr, da sie zu wenig geistige Kraft in Anspruch nimmt [9]). In der That liegt auch in diesen Uebungen noch nichts Mathematisches, als daß die vorkommenden Gebilde ausschließlich dieser Wissenschaft entnommen sind. Sie dienen hauptsächlich dazu, die Aufmerksamkeit des Schülers auf einen bestimmten Gegenstand zu fixiren, und durch die völlige Bestimmtheit der angeschauten Formen das Kind daran zu gewöhnen, auf äußere Erscheinungen zu achten und sie mit Leichtigkeit ihren auffallendsten Merkmalen nach aufzufassen.

---

lichen Studium der Mathematik fähig zu machen. Berlin, 1827. S. XVIII." *gegen* die geometrische Anschauungslehre aus, und uns dünkt mit Recht, wenn darunter nichts weiter als mißverstandene und mißlungene Combinationslehre verstanden wird, die mit den im Texte noch zu rügenden Fehlern behaftet ist, weil, wi gezeigt werden wird, daraus eine nie wieder zu hebende Gleichgültigkeit gegen alle Wissenschaftlichkeit und Gründlichkeit hervorgeht, und da muß man denn freilich zugeben, daß es in solchem Falle besser wäre, die Zeit auf irgend eine andere Weise zu verwenden. Vergl. auch *Peters*, a. a. O. S. 70., wo es heißt: „Ohm will auch sie nicht gelten lassen, da sie den ächt mathematischen Geist heimlich zerstöre; und wirklich kann sie dieses, wenn sie als Vorbereitung zur wissenschaftlichen Geometrie nicht mit klarem Bewußtsein ihres wahren Verhältnisses zu derselben, und ohne ein sicheres, richtiges Princip behandelt wird. Vermeidet sie aber diesen Fehler, so bereitet sie der Geometrie ihre Stätte, indem sie Vorstellkraft und Verstand mit dem Material bekannt macht, das der letztere zum Aufbau des Wissenschaftsgebäudes bedarf."

9) Schreiber dieses hat sich in der Kleinkinderschule von *Wilderspin* in London, wo diese Uebungen von einem umsichtigen Lehrer geleitet wurden, schon vor einer Reihe von Jahren von der Zweckmäßigkeit derselben überzeugt, und im Familienkreise öfters den Versuch selbst gemacht; wiewohl diese Versuche immer nur vereinzelt waren, und nie auf längere Zeit fortgesetzt werden konnten, zeigten sie doch stets, daß Kinder von dem angegebenen Alter ein großes Interesse daran haben, geometrische Gestalten anzuschauen, und sich gerne damit beschäftigen, sie zu reproduciren.

Eben so interessant als geistbildend ist die zweite Stufe dieser Uebungen, die sich genau an die vorige anschließt; wo indeß jene erste Uebung, äußerer Verhältnisse wegen, übergangen werden muß, kann diese zweite, mit einigen Modificationen, dieselbe ersetzen. Sie besteht in der auf richtige Anschauung gegründeten Entwickelung geometrischer Begriffe, des Punktes, der Linie, des Winkels, des Durchschnittpunktes zweier Linien, der Durchschnittslinie zweier Flächen, der Neben= und Scheitelwinkel, u. s. w. Der Schüler sucht selbstständig die Merkmale dieser Formen auf, und bringt sie in eine Definition, die aber immer präcise sein muß, und weder weniger noch mehr als die zur Bestimmung des Gebildes hinreichenden und nothwendigen Stücke in sich aufnehmen darf; man darf sich hier auch nicht im Mindesten eine Ungenauigkeit oder andere Abweichung von den strengen Forderungen der Wissenschaft erlauben, auch dürfen nie solche Formen definirt werden, deren Existenz erst aus einer wissenschaftlichen Deduction hervorgehen kann, z. B. das rechtwinklige Dreieck, die regulären Figuren, die Tangente, das Perpendikel auf eine gerade Linie sowohl wie auf eine Ebene u. s. w., sonst ist hier die Gefahr der Ungründlichkeit und Flachheit noch viel bedeutender, als auf der vorangehenden Stufe. Ein Schüler, der in diesem Punkte verkehrt geführt wird, stumpft so total für jede wissenschaftliche Nachweisung geometrischer Wahrheiten ab, daß er nie zur Einsicht der Nothwendigkeit überzeugender Beweise gelangt, — so sehr gefällt er sich in der oberflächlichen Auffassung und dem entsetzlichsten Selbstruge, zu dem sein Geist und namentlich sein inneres Anschauungsvermögen methodisch verkrüppelt und verrenkt worden. Mit diesen Uebungen verbinde man auch nicht die Nachahmung der geometrischen Gestalten mit Hülfe des Zirkels und Lineals, wo dem Schüler eine Construktion gleichsam als Regel an die Hand gegeben wird, eben so wenig das Anfertigen von Körpernetzen, weil diese die Construction ebener Figuren voraussetzen, die vom Schüler noch nicht mit Einsicht ausgeführt werden kann, und er demnach durch dieses Verfahren wieder zu der schon gerügten Seichtheit und Oberflächlichkeit geführt würde; das Zeichnen der Formen ohne alle Construction ist das einzige, was hier gestattet werden kann. Dagegen werden zweckmäßige combinatorische Uebungen in nicht zu großem Umfange, und mit der gehörigen Umsicht angestellt, sehr anregend und belehrend sein. In der Ebene bestimmt man die Anzahl der möglichen Durchschnittspunkte einer gegebenen Zahl gerader Linien, von denen entweder keine parallel, oder eine gegebene Anzahl parallel, oder einige nach Einer Richtung, eine andere Gruppe nach einer zweiten Richtung parallel sind, u. s. w.; eben so die Durchschnittspunkte einer gegebenen Anzahl Kreise, von denen entweder keine concentrisch, oder eine oder mehrere Gruppen unter einander concentrisch sind. Gerade Linien, sowohl parallele als nicht paralle, werden dann mit concentrischen und nicht concentrischen Kreisen verbunden; nachher bestimmt man die Anzahl der Theile, in welche die Ebene durch dieselben Verbindungen von geraden und Kreislinien getheilt wird. Im Raume wird die Anzahl der Durchschnittslinien und Durchschnittspunkte, welche durch Verbindungen von parallelen und nicht parallelen Ebenen, und concentrischen und nicht concentrischen Kugelflächen entstehen, dann die Theile, in welche der Raum durch diese Verbindungen von Ebenen und Kugelflächen getheilt wird, gesucht. Auf gleiche Weise kann man auch die Anzahl der völlig begränzten, und die der unbegränzten Theile der Ebene und des Raumes aufsuchen lassen, und sehr viele andere Beziehungen, die nicht weniger interessant sind, lassen sich ebenfalls daran anreihen. Indessen verliere man den Gesichtspunkt hiebei nicht aus den Augen, daß ja nicht das Wissen dieser Gegenstände, sondern die durch die Behandlung derselben erregte und potenzirte Kraft Zweck ist, der vielmehr durch einen sicheren und klaren Ueberblick über das Ganze, als durch die einzelne Uebung erreicht wird; daher verweile man nicht länger dabei, als bis die Schüler das Verlangte finden können. Am besten sind diese Gegenstände, für die Ebene, von Graßmann[10]), und von Wilde[11]) behandelt; für die Raumgebilde ist uns zur Zeit Nichts bekannt, das den hier gemachten Anforderungen entspräche. Wir können den Lehrern, welchen der Unterricht in diesen elementaren Uebungen anvertraut wird, nicht dringend genug an's Herz legen, wie wichtig es ist, einerseits sich nicht zur Unzeit aus der Sphäre, in welcher sie sich mit den Schülern bewegen sollen, herauszuwagen, andererseits aber in den Unterricht Nichts, was sich mit der Strenge der Mathematik nicht vertrüge, einfließen zu lassen. Denjenigen, welche die Mathematik nicht zu ihrem besonderen Studium gemacht haben, möchten wir freundlichst und wohlmeinend den Rath geben, um des Wohls der ihnen anvertrauten Jugend willen, Hand an's Werk zu legen, und nach Kräften zu versuchen, in den wahren Geist dieser Wissenschaft einzudringen; sind sie von Liebe zu ihrem Berufe, von Liebe zur Jugend beseelt, so wird es ihnen gelingen, und ihre Mühe wird vielfältig belohnt werden; sie werden dann in Denen, welche sie früher auf Irrwege geführt, den Grund legen zu einem ächt wissenschaftlichen Geiste, und wahrer, auf sicherer Basis ruhender Bildung. Den Directoren und Schulvorstehern, die nicht Lehrer, die mit den erforderlichen Eigenschaften ausgerüstet sind, finden können, möchten wir angelegentlichst empfehlen, diese Uebungen lieber so lange gar nicht in ihren Klassen betreiben zu lassen, bis es ihnen möglich wird, sie in dem rechten Sinn und Geiste ausgeführt zu sehen, und Männer zu finden, welche mit gründlichen Kenntnissen das dazu erforderliche pädagogische Talent verbinden. Jenes vage Herumtappen, jenes zwitterhafte Mittelding zwischen Anschauungslehre und Geometrie streut in den noch unentwickelten, für Alles empfänglichen Geist des Schülers den verderblichen Samen der Oberflächlichkeit, der wie ein Unkraut wuchert, und jede edlere Kraft verdrängt und auf immer erstickt.

Ehe wir den Kreis dieser elementaren Uebungen verlassen, erlauben wir uns noch, unsere Ansicht über das Alter, für welches sie, in der Schule wenigstens, bestimmt sind, auszusprechen. Zwar scheint es, als ob dies aus dem oben Gesagten schon hervorgehen müßte; allein was dort von den allerersten Anschauungsübungen gesagt worden, bezog sich einerseits auf den Fall, daß die Nothwendigkeit, eine große Anzahl Kinder zu beschäftigen, sich gewaltsam aufdrängt, andererseits aber auf die mannigfaltig variirende, mehr spielende Beschäftigung einzelner Kinder im häuslichen Kreise, wo die äußere Anregung hauptsächlich von der Mutter und den älteren Geschwistern ausgehen kann. Wenn von der eigentlichen Schule die Rede ist, wo die Kinder, un-

10) Raumlehre für Volksschulen. Berlin, 1817.
11) A. a. O.

abhängig von äußeren Bestimmungsgründen, nach den durch Theorie und Erfahrung festgestellten Principien unterrichtet werden sollen und können; so müssen wir gestehen, daß wir das Alter, in welchem man allgemein anfängt, die Kinder in die Schule gehen zu lassen, für zu früh halten; daß es einmal in Gebrauch gekommen, ist eine bloße Folge, theils der äußeren Nothwendigkeit, da es in vielen Familien an der Gelegenheit fehlt, die Kinder zweckmäßig zu beschäftigen, theils der Bequemlichkeit, weil nur sehr wenige Mütter diese dem Wohl ihrer Kinder zu opfern sich entschließen können, endlich aber auch nicht selten der älterlichen Eitelkeit, die ihre Kleinen früh schon mit unnatürlichen Schulkenntnissen möglichst vollgepfropft zu sehen wünscht, um sie bei jeder Gelegenheit glänzen zu lassen. Diese Gründe haben es zur Mode gemacht, das schulfähige Alter so festzusetzen, wie es allgemein besteht. Allein für dieses Alter ist meiner Ansicht nach die Schule noch nicht geeignet, wenigstens müßte der Schulbesuch um ein Jahr, bis nach vollendetem siebenten Jahre, hinausgerückt werden. Geschieht dies, so kann man die elementaren Uebungen in der Mathematik auf die weiter oben angegebene Weise schon während des ersten Schuljahres beginnen, und dann unausgesetzt forttreiben; dadurch wird es dann, wie wir am Schlusse dieser Abhandlung noch zu zeigen gedenken, endlich einmal möglich, der lange verwahrloseten und von der Mehrzahl verkannten Wissenschaft in der allgemeinen Erziehung des Menschen, abgesehen von Stand und Beruf, den ihr zukommenden Platz anzuweisen; dann wird man aber auch, und dann erst, berechtigt sein, Früchte von ihr zu erwarten, die sie, unter so stiefmütterlicher Behandlung, nimmermehr zu gewähren vermochte.

Wir betreten jetzt das eigentlich wissenschaftliche Gebiet der Mathematik, und bemerken, was sich übrigens von selbst verstände, daß es, unseren oben entwickelten Grundsätzen zufolge, nicht darauf ankommt, daß der Schüler in den Besitz einer größeren Anzahl von Lehrsätzen und mathematischen Wahrheiten gesetzt werde; sondern, daß lediglich seine geistige Anregung, die Befähigung selbstständig und mit Sicherheit einen mathematischen Gegenstand durchzuführen auch hier das nächste Ziel des Unterrichts sein darf. Die Schule soll nur den Grund legen zur Wissenschaft, die Kräfte entwickeln, und den Geist mannigfaltig anregen, aber nicht die Wissenschaft vollenden wollen! Der Vernachlässigung dieses Princips ist es hauptsächlich und in den meisten Fällen zuzuschreiben, wenn der mathematische Unterricht auf gelehrten wie auf Bürgerschulen so häufig noch darnieder liegt, und so wenige Schüler regen Antheil daran nehmen. Es heißt allerdings nichts Unbedeutendes verlangen, wenn der Schüler Vergnügen und Interesse an Gesetzen und an Zahl- und Raumrelationen finden soll, die ein Anderer ihm gefunden hat, die er also weder ihrem Zusammenhange, noch ihrem inneren Wesen nach übersieht: denn man darf sich dadurch, daß er einen ihm vordocirten Beweis zu führen im Stande ist, nicht täuschen lassen; einem Aufmerksamen wird dies, selbst ohne das Verständniß, nicht sehr schwer. Interesse für die Mathematik kann aber nur aus dem völlig klaren Durchschauen, und dieses nur aus dem selbstständigen Entdecken ihrer schönen und bedeutsamen Wahrheiten hervorgehen. Kei-

Wunder, daß diese Wissenschaft bei der gewöhnlichen Art der Behandlung in den Ruf der Trockenheit gekommen ist! sie ist aber glücklicherweise selbst schuldlos, der Vorwurf trifft nur die Lehrer derselben.

Daß es zur Erreichung des hier gesteckten Zieles nicht immer hinreicht, dem Schüler ein Theorem oder Problem vorzulegen, und ihn dann seinem eigenen Schicksal zu überlassen, sieht wohl Jeder leicht ein; dies würde in vielen Fällen eben so sehr vom Wege abführen, als das ohne Vergleich gewöhnlichere Dociren des Lehrers, gegen das wir uns schon weiter oben erklärt haben. Es giebt in beiden Hauptzweigen der Mathematik, in der Zahlenlehre wie in der Geometrie, gewisse Abschnitte, Hauptgegenstände, oder Hauptsätze rc., auf die sich alles Uebrige zurückführen läßt, und es kommt dann jedesmal darauf an, den Schüler, wenn er ein solches, ihm noch neues Feld betritt, auf den rechten Standpunkt zu stellen, von welchem aus er sich mit Freiheit und Gewandtheit nach jeder beliebigen Richtung hin bewegen kann, und dann ihm die darin anzustellenden Betrachtungen in stufenmäßiger Ordnung vorzuführen; an diesen wird sich seine eigene Kraft üben, und beim Fortschreiten von den einfacheren zu den mehr complicirten Anwendungen des jedesmal zu Grunde liegenden Princips nach und nach erstarken und sich auf angemessene Weise für das darauf zu gründende vorbereiten.

Betrachten wir indessen die zur Zeit noch am meisten verbreiteten Lehrbücher der Zahlenlehre, so stellt sich bei einer unbefangenen Beurtheilung sogleich der Mangel alles inneren Zusammenhanges, aller einer Wissenschaft einzig würdigen Begründung der ersten Elemente vor Augen. Die Gesetze der sieben Operationen machen die Anfangsgründe aus, und sind deshalb für den ganzen Umfang der Wissenschaft von der höchsten Bedeutung; sie sind aber von nicht geringerer Bedeutung als Bildungsmittel, da sie der freien Selbstthätigkeit des Schülers ein unermeßliches Feld zur Uebung und Kräftigung des Verstandes, der Erfindungsgabe und scharfen Begriffssonderung darbieten. Einerseits wird die Einsicht in diese allgemeinen Gesetze der Zahlenoperationen durch den Umstand erleichtert, daß sie schon, zum Theil wenigstens, beim Zifferrechnen für besondere Zahlen aufgestellt wurden; andererseits erhalten diese Uebungen eben dadurch, auf der Stufe des Rechnens mit allgemeinen Zahlen, noch mehr Bildendes, daß der Schüler jetzt durch innere Anschauung, aus dem reinen Begriff abgeleitet, die Allgemeinheit der früher nur für specielle Zahlen festgestellten Wahrheiten durchschaut. Es wäre jedoch ein Mißverständniß, gegen das wir uns auf jede mögliche Weise verwahren möchten, wenn man, wie es gerade nicht sehr selten geschieht, das allgemeine Gesetz dadurch nachweisen wollte, daß man seine Gültigkeit für mehrere specielle Zahlen darthut; es wäre dies keine Mathematik mehr, sondern ein Spiel mit Buchstaben und Zahlen, ein Spiel, das aller Würze und alles Interesses entbehrte. Im Gegentheil muß sich der Schüler, wenn er in die allgemeine Zahlenlehre eingeführt wird, auf derjenigen Stufe der geistigen Entwickelung befinden, wo er, namentlich durch das vorangegangene Zifferrechnen, dann aber auch durch die Gesammtwirkung aller übrigen geistentwickelnden Bildungsmittel befähigt ist, den Begriff der Operationen aufzufassen, und aus diesem allein alle Relationen derselben abzuleiten. Dann nur kann die allgemeine Zahlenlehre ersprießliche Folgen für die Geistesbildung haben. Ist das Rechnen früher so betrieben worden, wie weiter oben aus einander gesetzt, so ist dem Anfänger dadurch das Allgemeine näher gerückt, er wird das Bedürfniß in sich fühlen, die für besondere Zahlen gültigen Gesetze in einen umfassenderen Ausdruck zu bringen, und dann auch sie, vom Besonderen unabhängig, in ihrer Allgemeinheit herzuleiten. Allein, statt stufenmäßig geordneter Reihenfolgen allgemeiner Gesetze, findet man in sehr vielen Lehrbüchern vielmehr ein todtes Aggregat von Regeln und mechanischen Verfahrungsarten, die, der gemeinen Rechenkunst entnommen, aller Begründung entbehren[12]). Wo bleibt denn jene unumstößliche Gewißheit, jene Klarheit und Bestimmtheit der mathematischen Wahrheiten? Wie läßt sich auf so lockerem Boden ein solider Bau erwarten? Nicht weniger vermissen wir jene Uebersichtlichkeit, die wir als ein wesentlich bildendes Element alles Unterrichts erkannten; der Schüler befindet sich in diesem Labyrinth in beständiger Dunkelheit und Verworrenheit, er findet keinen festen Grund, auf dem er eigene Untersuchungen mit Sicherheit und Erfolg anstellen könnte. In den höheren Theilen offenbart sich diese Schwäche noch mehr. In Ermangelung klarer Begriffe, und somit wohlbegründeter Elemente, sieht man sich jeden Augenblick gehemmt, sieht sich genöthigt, bald zu diesem, bald zu jenem Mittel seine Zuflucht zu nehmen[13]).

Einen fast noch größeren Einfluß auf die geistige Bildung möchten wir der Geometrie, und mit ihr der Stereometrie einräumen, weshalb wir denn hier das Augenmerk auf die Verbesserung der Methode hinzulenken wünschen. Der Reichthum der Formen und Constructionen, die unendliche Mannigfaltigkeit, welche sich in ihren Gebilden offenbart, läßt der Erfindungskraft des Schülers ein viel freieres Spiel und weiteres Feld zur Selbstthätigkeit, als die Zahlenlehre ihm zu bieten vermag; durch die äußere, sinnliche Darstellung werden diese Formen auch der unmittelbaren Anschauung viel näher gerückt, als der abstracte Begriff der Zahl es jemals zuläßt: daher aber ist denn auch nicht so leicht ein todter Mechanismus möglich wie dort; das Uebel einer bloß äußeren Auffassung, ohne daß die innere Anschauung dadurch geweckt wäre, giebt sich viel leichter zu erkennen, durch das Unvermögen des Schülers, auch nur einen Schritt selbstständig zu verfolgen. Die Stereometrie, deren Gebilde der Anschauung wieder ferner liegen als die der ebenen Geometrie, übt dagegen die Einbildungskraft in einem ausgezeichneten Grade, während sie, durch ihre stete Beziehung auf die Formen in der Ebene, bei einer naturgemäßen Methode, neues Licht auf das Frühere wirft. Noch giebt es kein Lehrbuch, das den hier entwickelten Grundsätzen völlig entspräche: daher denn Mathematiker, die zugleich, als Leh-

---

[12]) In der sonst trefflichen „Beispielsammlung von Meier Hirsch" findet man, als erstes Beispiel der „Addition einfacher Größen" $a + a = 2a$; als zweites Beispiel: $5a + 7a = 12a$; während doch das erste Beispiel eine Umwandelung einer Summe in ein Product, das zweite die Addition zweier Producte, oder die Verwandlung der Summe zweier Producte in ein Product ist.

[13]) Ein bestätigendes Beispiel hiezu liefert unter anderen die Differentiation transcendenter Functionen, wo, wenn man nicht die wissenschaftliche Methode Lagrange's befolgt, für jede andere Function eine andere Betrachtung nöthig ist, während sie sich auf wissenschaftlichem Wege auf immer gleiche Weise aus den allgemeinen Principien der unendlichen Reihen ableiten lassen. Aehnliches gilt vom Variationscalcul. Vergl. **Lagrange**, Leçons sur le calcul des fonctions. Leçons IV, V et XXII.

rer der Jugend, ein pädagogisches Interesse an der Wissenschaft haben, sich durch die Ausbildung dieses Theils ein hohes Verdienst erwerben würden. Die an ein solches Buch zu machenden Anforderungen sind im Vorhergehenden deutlich hervorgehoben; führt man den Schüler auf solchem stufenmäßigen Wege, so findet er nicht nur die Beweise der Lehrsätze und Auflösungen der Probleme von selbst, sondern er wird auch jedesmal, wenn er in ein Gebiet eingeführt, und damit gehörig bekannt geworden ist, den wissenschaftlich nothwendigen, deshalb einfachen Gang sich selbst vorzuzeichnen im Stande sein. So hoch wir auch die Bündigkeit der Euklid'schen Elemente schätzen, müssen wir sie hienach doch aus dem Kreise der Schulbücher ausschließen; für den Unterricht sind sie völlig unbrauchbar, weil in der Anordnung der Sätze durchaus keine Rücksicht auf den organischen Zusammenhang derselben genommen, sondern nur darauf gesehen worden, wie sich jeder aus den ihm vorangehenden beweisen lasse; dieses Auseinanderreißen zusammengehöriger Sätze ist besonders dadurch veranlaßt, daß Euklid keine Construction gestattet, ehe sie auf geometrischem Wege mit Lineal und Zirkel ausgeführt werden kann; allein dies letztere trägt zur Gründlichkeit nichts bei, da es hier lediglich auf die ideale, nicht aber auf die reale Construction ankommt, und man sich doch recht gut z. B. einen Winkel halbirt denken kann, ohne daß gerade die geometrische Construction ausgeführt werde, oder auf der Stufe, worauf man sich befindet, auch nur möglich sei. Eben so wenig können wir für den Gang, der in Legendre's, einem auch in deutschen Schulen häufig eingeführten Lehrbuche, eingeschlagen ist, stimmen, weil die Selbstthätigkeit des Schülers, statt immer mehr angeregt und gekräftigt zu werden, um so mehr erschlafft und entmuthigt wird, je weiter er durch das schwerfällige Gebäude fortgeschleppt worden. Bei der heuristischen Methode, die hier insbesondere empfohlen worden, dürfen weder die eben erwähnten, noch ihnen geistesverwandte Lehrbücher beim mathematischen Unterrichte zu Grunde gelegt, oder gar den Schülern in die Hände gegeben werden; auf keinen Fall darf der Schüler ein vollständiges Lehrbuch vor sich haben, wo die Lehrsätze bewiesen, die Aufgaben gelöst sind; vielmehr darf er nur einen Leitfaden besitzen, welcher alle Sätze und Aufgaben, die im Unterrichte zur Sprache kommen müssen, ohne Beweise und Auflösungen enthält; außer den zum Systeme nöthigen Sätzen müßte derselbe noch für jeden Abschnitt eine reichhaltige Sammlung solcher Sätze und Aufgaben enthalten, welche sich durch die wenigen vorangehenden und das eigentliche System ausmachenden beweisen und lösen lassen; aus diesen kann der Lehrer dann nach Belieben bald diese bald jene zur Uebung auswählen.

Um das Gesagte nun noch durch ein Beispiel zu beleuchten, wählen wir einen ganz elementaren Gegenstand, das Dreieck. Nachdem nämlich die einfachen Sätze über Winkel an einem und an zwei Punkten (einschließlich die Parallelentheorie, welche natürlich der Betrachtung des Dreiecks vorangehen muß) durchgenommen worden, geht man zur Betrachtung derjenigen Formen über, wo sich drei gerade Linien in drei Punkten durchschneiden. Durch die drei sich durchschneidenden Linien wird ein Theil der Ebene, worin die Figur liegt, völlig begrenzt, es entsteht die Figur, welche man Dreieck nennt. Man unterscheidet daran:

1) die das Dreieck bildenden Linien; so weit sie dazu dienen, die Figur zu begrenzen, heißen sie Seiten des Dreiecks.

2) Die drei Durchschnittspunkte der Seiten, — Ecken des Dreiecks.
3) Die Winkel an den drei Ecken des Dreiecks.
4) Der völlig begrenzte Ebenentheil.

I. Betrachtung der Seiten eines Dreiecks. Die Seiten eines Dreiecks können entweder alle drei gleich lang sein (gleichseitiges Dreieck), oder es sind nur zwei gleich (gleichschenkliges Dreieck), oder es sind alle drei ungleich (ungleichseitiges Dreieck). Im ersten Falle ist jede einzelne Seite $\frac{1}{3}$ der Summe aller drei Seiten. Im zweiten Falle ist die dritte Seite entweder kleiner als jede der gleichen Seiten, dann ist sie auch kleiner als $\frac{1}{3}$ der Summe aller drei Seiten; oder die ungleiche Seite ist größer als eine der gleichen Seiten, dann ist sie auch größer als $\frac{1}{3}$ der Summe aller drei Seiten. Im dritten Falle ist die kleinste Seite kleiner, die größte größer als $\frac{1}{3}$ der Summe aller drei Seiten; die mittlere kann bald größer, bald kleiner als $\frac{1}{3}$ der Summe aller sein. — Die Summe zweier Seiten eines Dreiecks ist immer größer als die dritte Seite. Die Differenz zweier Seiten eines Dreiecks ist dagegen kleiner als die dritte Seite.

II. Betrachtung der Winkel des Dreiecks. An jeder Ecke des Dreiecks liegen vier Winkel, drei dieser 12 Winkel liegen innerhalb des Dreiecks (innere Winkel), die übrigen 9 außerhalb (äußere Winkel); von diesen ist einer an jeder Ecke Scheitelwinkel des inneren, also diesem gleich; die anderen beiden sind gegenseitig Scheitelwinkel, also unter sich gleich; jeder dieser letzteren ist Nebenwinkel des inneren an derselben Ecke, also dessen Supplementwinkel, oder er beträgt mit diesem 2 R. — Alle 12 Winkel des Dreiecks betragen zusammen 12 R.

a) Innere Winkel des Dreiecks. Ein innerer Winkel eines Dreiecks kann spitz, stumpf oder recht sein. Je zwei innere Winkel eines Dreiecks sind zusammen kleiner als 2 R. — Die Summe aller drei inneren Winkel eines Dreiecks beträgt 2 R. — Ist ein innerer Winkel eines Dreiecks ein spitzer, so betragen die andern beiden zusammen mehr als 1 R., also kann dann der eine stumpf oder recht, und der andere spitz sein, oder sie sind beide spitz (spitzwinkliges Dreieck). Ist ein innerer Winkel ein rechter, so betragen die anderen beiden zusammen ebenfalls einen rechten, also sind dann beide spitz (rechtwinkliges Dreieck); sind diese beiden einander gleich, so beträgt jeder $\frac{1}{2}$ R. Ist ein innerer Winkel stumpf, so müssen die beiden anderen nothwendig spitz sein (stumpfwinkliges Dreieck). — Sind zwei innere Winkel eines Dreiecks einander gleich, so ist jeder derselben spitz, der dritte kann recht, spitz oder stumpf sein. Sind alle drei Winkel gleich, so beträgt jeder $\frac{2}{3}$ R. (gleichwinkliges Dreieck).

b) Aeußere Winkel des Dreiecks. Alle 9 äußeren Winkel des Dreiecks betragen zusammen 10 R.; die drei äußeren Winkel, welche Scheitelwinkel der inneren sind, betragen 2 R. Die 6 äußeren Winkel, welche Nebenwinkel der inneren sind, betragen 8 R. Man nennt sie vorzugsweise Außenwinkel. Drei Außenwinkel, einen an jeder Ecke genommen, betragen zusammen 4 R.

c) Relationen zwischen den inneren und äußeren Winkeln eines Dreiecks. — Jeder Außenwinkel ist größer als ein innerer Winkel an einer der anderen Ecken des Dreiecks, und gerade so groß wie die beiden inneren an den beiden andern Ecken. Zwei Außenwinkel an verschiedenen Ecken des Dreiecks sind zusammen um 2 R. größer, als der innere an der dritten Ecke.

III. Relationen zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks. Gleichen Seiten stehen im Dreieck gleiche Winkel gegenüber. Der größeren von zwei ungleichen Seiten eines Dreiecks steht der größere Winkel gegenüber. Diese beiden Sätze können sehr leicht und gründlich ohne die Congruenz der Dreiecke, die hier natürlich noch nicht vorausgesetzt wird, bewiesen werden. — Gleichen Winkeln stehen im Dreieck gleiche Seiten gegenüber. Dem größeren von zwei ungleichen Winkeln steht die größere Seite gegenüber. — Ein Dreieck, das drei gleiche Seiten hat, hat auch drei gleiche Winkel. Ein Dreieck, das drei gleiche Winkel hat, hat auch drei gleiche Seiten. Im stumpfwinkligen Dreieck steht dem stumpfen Winkel die größte Seite gegenüber. Im rechtwinkligen Dreieck ist die Hypothenuse die größte Seite. Ist eine Seite nicht die größte im Dreieck, so liegt ihr ein spitzer Winkel gegenüber. Die der größten Seite eines Dreiecks anliegenden Winkel sind allemal spitz. Im ungleichseitigen Dreieck sind alle Winkel ungleich. Ein Dreieck, das lauter ungleiche Winkel hat, ist auch ungleichseitig.

Der Flächenraum eines Dreiecks bietet auf dieser Stufe nichts Erhebliches zur Untersuchung dar.

IV. Relationen zwischen den Seiten und Winkeln zweier Dreiecke.

a) Seiten zweier Dreiecke. Wenn eine Seite eines gleichseitigen Dreiecks einer Seite eines anderen gleichseitigen Dreiecks gleich ist, so sind alle Seiten des ersten denen des zweiten gleich; u. s. w.

b) Winkel zweier Dreiecke. Wenn zwei innere Winkel eines Dreiecks zusammen so groß sind als zwei Winkel eines anderen Dreiecks, so ist der dritte Winkel des ersten Dreiecks dem dritten Winkel des zweiten Dreiecks gleich, u. s. w.

c) Seiten und Winkel zweier Dreiecke in gegenseitige Beziehung gesetzt. Wenn in zwei Dreiecken ABC und abc die Seite $AB = ab$, $BC = bc$ und W. $C + c = 2$ R. ist, so ist auch W. $A = a$. — Wenn $AB = ab$, $C = c$ und $B + b = 2$ R., so ist auch $AC = ac$. — Wenn $AB > ab$, $A = a$ und $B = b$, so ist $C = c$, $AC > ac$ und $BC > bc$, und viele andere Sätze, wo zwei Stücke eines Dreiecks denen eines zweiten Dreiecks gleich, ein drittes aber ungleich gegeben wird.

V. Flächenvergleichung zweier Dreiecke. Hiehin gehören die bekannten fünf Sätze über die Congruenz der Dreiecke, dann aber noch eine größere Anzahl anderer Sätze, z. B. halbirt man eine Seite eines beliebigen Dreiecks, und zieht von der gegenüberstehenden Ecke eine gerade Linie nach dem Halbirungspunkte, so sind die beiden entstehenden Dreiecke (zwar nicht immer congruent, aber doch) allemal gleich groß. Wird auf diese Weise eine Seite eines Dreiecks in beliebig viel gleiche Theile getheilt, so sind alle Dreiecke, welche entstehen, wenn man die gegenüberstehende Ecke mit den Theilungspunkten verbindet, einander gleich. Dreiecke, die gleiche Grundlinie und Höhe haben, sind einander gleich. Dreiecke, die gleiche Grundlinien haben, verhalten sich wie ihre Höhen, und Dreiecke die gleiche Höhen haben, verhalten sich wie ihre Grundlinien, u. s. w. f.

Die hier aufgeführten Sätze reichen vollkommen hin, um die auf einander folgenden Schritte, die der Schüler zu nehmen hat, so leicht, und den Uebergang so unmerklich zu machen, daß Jeder sie leicht von selbst verfolgen kann. Eine große Anzahl anderer Sätze, welche über denselben Gegenstand noch aufgestellt werden können, ohne zu neuen Betrachtungen überzugehen, mögen als Uebungen angesehen werden, die dazu dienen sollen, dem Schüler Fertigkeit in der Anwendung der am häufigsten vorkommenden Sätze zu geben. Wie man sieht ist die bei einem solchen Gange so oft befürchtete Weitschweifigkeit eben nicht so groß; und für die Möglichkeit, die Mehrzahl der Schüler mit fortzureißen, spricht die Erfahrung. Die Sätze lassen sich in der angegebenen, durch die Natur des Gegenstandes selbst bestimmten Ordnung völlig gründlich und naturgemäß erweisen; erkünstelte Beweise, wenn sie auch überzeugend sein sollten, haben kein geistbildendes Element in sich, sind also für unsern Zweck völlig nutzlos; sie finden sich aber in Menge im Euklid, noch häufiger in Legendre's Lehrbuch, auch in vielen anderen. Die Zeit, die der Schüler auf solche Beweise verwendet, da sie ihm noch überdies stets nur eingetrichtert werden müssen, ist für ihn ganz und gar verloren, ja mehr als verloren, denn sie erregen in ihm eine Unlust und Abneigung gegen die Wissenschaft, die nachher kaum wieder zu verdrängen sind. Uebrigens sieht man wohl sogleich ein, daß zwischen die oben aufgestellte Reihenfolge von Sätzen sehr gut, und ohne den methodischen Gang zu beeinträchtigen, die entsprechenden Sätze über das Viereck und die Vielecke eingeschaltet werden können. Es kam hier nur darauf an, an einem bestimmten Gegenstande die Reihenfolge nachzuweisen, weshalb dann das Dreieck isolirt von allem Anderen behandelt worden. Die Stereometrie muß natürlich, **mutatis mutandis**, auf dieselbe Weise durchgeführt werden; ja es möchte zur Erreichung unseres Hauptzwecks selbst zu rathen sein, in so weit als der Gegenstand es zuläßt, sie in einer gewissen Uebereinstimmung mit den Lehren der ebenen Geometrie zu behandeln[14]); es gewährt dies den Vortheil, daß der Schüler sich in dem neuen Gebiete leichter zurecht findet, und dann besonders viel eher einen klaren Ueberblick gewinnt.

Werfen wir nun noch einmal einen flüchtigen Blick auf das Gesagte zurück, so ergiebt sich daraus die Beantwortung der im Eingange gestellten Frage sehr leicht. Es ist gezeigt worden, wie die Mathematik auf der Schule zu betreiben sei, wenn sie dem wesentlichsten Zwecke aller Bildung genügen, nämlich die geistige Kraft des Schülers entwickeln, ihn anregen und befähigen soll, selbstständig in der Wissenschaft fortzuarbeiten; zugleich haben sich dann aber im Einzelnen die Irrthümer herausgestellt, in welche man bei dem Unterrichte sowohl, wie in den meisten zu diesem Behufe geschriebenen Werken verfallen ist: fassen wir jetzt diese zusammen, so erkennt man bald, daß sie fast sämmtlich aus einer Quelle entsprungen, und aus der Verkennung des Hauptzweckes alles Unterrichts abzuleiten sind. Man will den Schüler lehren, ihm Kenntnisse zum Behalten mittheilen; darin fehlt man, wenigstens in einer Wissenschaft, die der Schüler eben so gut aus sich selbst entwickeln kann, wie jeder Andere, und die nichts Historisches in sich hat. Der Lehrer lasse doch den Schüler arbeiten, nur leite er seine Thätigkeit, daß sie nicht irre

---

14) Dies ist zuerst geschehen von Ohm, in seiner „Elementar-Geometrie. Berlin, 1819.

gehen könne, und durch Schwierigkeiten, auf die sie stoßen mag, erschlaffe. Es kommt also viel weniger darauf an, wie weit der Schüler in die Wissenschaft eingeführt werde, und in welcher Ausdehnung er die einzelnen Disciplinen kennen lerne, als vielmehr auf das Maß geistiger Anregung, die ihm durch diesen Unterricht geworden. Hienach würde sich also für den Umfang des mathematischen Unterrichts auf Schulen nichts weiter bestimmen lassen, als daß in der ihm gewidmeten Zeit gerade so viel durchgenommen werde, als die Schüler intensiv und gründlich in sich verarbeiten können; allein eine genauere Bestimmung dieses Umfanges ergiebt sich aus der Stufe der geistigen Entwickelung der Schüler in dem Alter, wo sie die Schule gewöhnlich verlassen, weil allerdings nicht alle Theile der Wissenschaft jedem Alter gleich zugänglich sind; so erfordern die höheren Theile der Mathematik eine gereiftere Ein- und Umsicht, und selbst ein umfassenderes Selbststudium, als von einem Jünglinge der obersten Klasse der Gymnasien füglich erwartet werden kann, weshalb denn diese Gebiete vom Schulunterrichte auszuschließen sind. Damit aber die Fähigkeit des Selbststudirens beim Schüler in dem rechten Maße entwickelt werde, müßte er doch sämmtliche Theile der sogenannten Elementar-Mathematik unter der Leitung eines umsichtigen Lehrers (also nicht durch Universitäts-Vortrag, sondern durch Schulunterricht) sich angeeignet haben. Diesem nach wären also auf der Schule durchzunehmen:

a) in der Zahlenlehre: die sieben Operationen, ihre Verbindungen unter einander und deren Erweiterung auf reelle Zahlen; Ableitung des Zifferrechnens aus den allgemeinen Gesetzen; Gleichungen des ersten, zweiten und dritten Grades mit einer und mit mehr Unbekannten; Auflösung der Gleichungen durch Näherung; unbestimmte Analysis; Kettenbrüche: arithmetische und geometrische Progressionen; combinatorische Analysis; binomischer Lehrsatz; Theorie der höheren Gleichungen und unendliche Reihen; Entwickelung gegebener Funktionen in Reihen, namentlich der Potenz, Logarithmen und trigonometrischen Funktionen. Hiezu kommen dann an den geeigneten Stellen die Anwendungen auf Größen, woraus sich die Rechnungen des gewöhnlichen Lebens von diesem mehr wissenschaftlichen Standpunkte aus ergeben.

b) in der Geometrie: die Planimetrie; rechnende Geometrie; Stereometrie, wo hauptsächlich darauf zu sehen ist, daß die Schüler zu einer deutlichen Einsicht in die Raumgebilde gelangen; analytische Trigonometrie und deren Anwendung auf ebene und sphärische Dreiecke und auf andere Gebilde.

Es sind hier gewisse Gebiete, z. B. Kegelschnitte, Differential- und Integralrechnung u. m. a., die zuweilen, wenigstens in ihren Elementen, in den Schulunterricht mit aufgenommen werden, weggelassen worden, und zwar aus Gründen, die dem Sachkenner aus den oben entwickelten Principien sogleich einleuchten; unter besonderen Verhältnissen müßte natürlich der ganze Plan Modificationen erleiden; hier kann nur auf das Allgemeine Rücksicht genommen werden. Was nun die Zeit betrifft, so möchte das hienach in den eigentlich mathematischen Lehren zu leistende in den vier obersten Klassen zu erreichen sein, wenn in jeder Klasse wöchentlich 6 Stunden dem Gegenstande gewidmet werden, was auch, im Verhältniß zu 16 Stunden in den beiden classischen Sprachen und zu 20 Sprachstunden überhaupt, gewiß nicht zu viel ist. Dann ließe sich der Unterricht auf folgende Weise vertheilen:

In den unteren Klassen, bis zur fünften inclus., müssen fortwährend die Vorübungen zur Geometrie und das Zifferrechnen und Kopfrechnen betrieben werden, und zwar jedes in drei wöchentlichen Stunden; dann werden die Schüler, welche nach der vierten Klasse versetzt werden, das reine Rechnen und die gewöhnlichen Anwendungen auf Gegenstände des gesellschaftlichen Verkehrs inne haben, und es bleiben für die vierte Klasse noch die complicirteren Anwendungen übrig (z. B. Mischungsrechnung, Rabatt-, Münz- und Wechselrechnungen, so weit als letztere für die Schule passen), welche in der That auch der dabei vorkommenden Lebensverhältnisse wegen, bei Voraussetzung mittelmäßiger Fähigkeiten, wenigstens ein Alter von 12 bis 14 Jahren erfordern, wenn sie nicht in einen todten Mechanismus ausarten, sondern mit Einsicht und klarem Bewußtsein betrieben werden sollen. In der vierten Klasse können dann noch 2 Stunden wöchentlich auf das Zifferrechnen verwendet werden; in 2 Stunden wird die allgemeine Zahlenlehre und in noch 2 Stunden die Geometrie gelehrt; in ersterer lernen die Schüler dieser Klasse in einem halbjährigen Cursus die Gesetze der sieben Operationen mit positiven ganzen Zahlen, und etwa noch die Herleitung des Zifferrechnens aus den Gesetzen der allgemeinen Zahlenlehre, in der Geometrie die Elemente bis zur Congruenz der Dreiecke, nebst Anwendungen auf eine größere Anzahl von Sätzen und Aufgaben, kennen. In der dritten Klasse wird das Pensum der vierten fester begründet und erweitert, in der Zahlenlehre das Auflösen der Gleichungen des ersten und zweiten Grades, nebst den daraus abzuleitenden Rechnungen des gewöhnlichen Lebens, das Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzel aus Ziffern- und Buchstabenausdrücken gelehrt; in der Geometrie kann in dieser Klasse der größere Theil der rein geometrischen Lehren der Planimetrie beendigt werden. In der zweiten Klasse werden dann die Gleichungen des ersten und zweiten Grades mit zwei und mehr Unbekannten, und die des dritten Grades wenigstens mit einer Unbekannten, die unbestimmte Analysis, die Kettenbrüche, Progressionen und combinatorische Analysis durchgenommen; die ebene Geometrie wird vollendet und mit der rechnenden Geometrie und den Elementen der analytischen und ebenen Trigonometrie das Pensum dieser Klasse abgeschlossen, so daß die übrigen, oben noch angeführten Abschnitte für Prima aufgespart bleiben, wo von Zeit zu Zeit eine Wiederholung, theils der ganzen Wissenschaft in ihren Hauptmomenten, theils einzelner Zweige insbesondere veranstaltet werden muß.

In keinem Unterrichtszweige sind die halbjährigen Versetzungen der Schüler so hinderlich, wie in der Mathematik, wenn die Pensa jährlich sind, weil in keiner anderen Wissenschaft das Fortschreiten so ganz und gar von der Kenntniß des Vorangehenden abhängig ist. Hier scheint das von Ohm angegebene, und von ihm selbst angewendete Verfahren das beste und zugleich einzige Mittel zur Abhülfe dieses Uebelstandes zu sein. „Er konnte nämlich," sagt Ohm[15]), „das, was an vier Klassen vorgetragen werden sollte, in vier Abtheilungen theilen, und alle halbe Jahre (sowohl im calculativen als im geometrischen Vortrage) die auf jede Klasse kommende Abtheilung ganz und völlig beenden, und noch anfangs das in den vorhergehenden Klassen gelehrte in einer kurzen und gedrängten Uebersicht wiederholen lassen. Saß also ein Schüler in

15) Die reine Elementar-Mathematik I. p. XIV.

einer Klasse $1\frac{1}{2}$ Jahr lang, so hörte er dreimal dasselbe, sowohl in den geometrischen Lehren als in den analytischen (d. h. calculativen), und da der Lehrer wenig docirte, sondern beständig die lebendigste Selbstthätigkeit der Schüler in Anspruch nahm, wodurch dieselbe Sache in jedem Semester doch immer wieder unter einem neuen Gesichtspunkte erschien, trieben die Schüler diese Untersuchungen fortwährend mit gleicher Liebe, und der ältere Schüler riß den neu hinzugekommenen unvermerkt mit sich fort.“ Es gehört hiezu von Seiten des Lehrers ein richtiger Blick und nicht geringer Takt, um nicht flüchtig über Gegenstände, die ein reiferes Nachdenken erfordern, wegzugehen, indessen wird dies durch die eigene Selbstthätigkeit der Schüler um ein Bedeutendes erleichtert: wo ein reges, kräftiges Leben und Treiben durch den Lehrer angefacht, wird zwar in der Stunde viel geleistet, aber noch mehr durch den freiwilligen Fleiß zu Hause.

In dem Bisherigen ist auf keine besondere Unterrichtsanstalt Bezug genommen worden, sondern man hat sich im Allgemeinen eine Schule gedacht, deren Zweck es ist, in ihren Schülern allgemeine Bildung zu erzielen. Es frägt sich also jetzt noch, in wiefern das Gesagte auf den verschiedenen Unterrichtsanstalten Modificationen erleiden müsse, wobei wir uns vorzugsweise auf die Anstalten, die eine allgemeinere Bestimmung haben, nämlich die Gymnasien und höheren Bürger- oder Realschulen, beschränken, und sogenannte Berufsschulen, als außer unserem Kreise liegend, nicht weiter berücksichtigen wollen. Zunächst handelt es sich also darum, festzustellen, worin der Unterschied zwischen dem Gymnasium und der Bürgerschule bestehe. Unstreitig sind erstere die Vorbereitungsschulen zu den Fakultätsstudien, letztere dagegen für diejenigen höheren bürgerlichen Berufszweige, welche ebenfalls eine wissenschaftliche Vorbildung erfordern. Verlieren wir aber auch hier den Hauptzweck der Schule nicht aus den Augen, vergessen wir auch hier nicht, daß der besondere Beruf, die Stellung des Einzelnen im Leben nicht Lebenszweck ist, daß wir das Streben nach etwas Höherem auch in dem Schüler der Bürgerschule anzuregen verpflichtet sind, daß auch er ein Recht hat, von der Schule, der er sein höchstes Gut, seine Ausbildung anvertraut, das zu fordern, was allein seiner edleren Natur würdig ist: so werden wir uns frei halten von den Vorurtheilen und irrigen Ansichten, welche sich selbst unter uns noch über das Wesen der Bürgerschule kund geben, wir werden sie nicht zu einer bloßen Dressiranstalt für diese oder jene Gewerbe herabwürdigen, sondern vielmehr auch in ihren Schülern das allgemein Menschliche, und dies allein der Berücksichtigung werth halten[16]. Wir dürfen also bei der

16) Wenn Herr Prof. Dr. Conrad im Programm des Joachimsthalschen Gymnasiums vom Jahre 1835, S. 25. sagt: „das Gymnasium unterscheidet sich von der Bürgerschule weniger noch durch die Gegenstände des Unterrichts, als durch die Art und Weise, wie dieselben gelehrt werden, indem in der Bürgerschule vorzugsweise das Gedächtniß, in dem Gymnasium aber vorzugsweise der Verstand geübt und ausgebildet werden soll. . . . . . In die Bürgerschule tritt das Kind ohne alle Vorkenntnisse, und die hervorstechendste Kraft seines Geistes ist eben das Gedächtniß, an welches sich der Lehrer daher auch zunächst zu wenden hat;“ so kann er unter einer Bürgerschule offenbar nur die Elementarschule verstanden haben, indem das Gesagte wohl auf diese einigermaßen, obgleich bei Weitem nicht in der Allgemeinheit, in welcher es hier hingestellt ist, auf die Bürgerschule dagegen auch nicht im entferntesten eine Anwendung findet, indem doch gewiß kein Unbe-

Bürgerschule eben so wenig bloß auf das Materiale sehen, als bei dem Gymnasium, sondern müssen vielmehr dahin streben, eine möglichst gründliche Bildung durch die Wissenschaft zu erzielen. Wenn es daher auch bei der Bürgerschule hauptsächlich darauf ankommt, durch die verschiedenen Unterrichtsgegenstände die geistigen Kräfte der Schüler zu wecken, zu stärken und ihnen eine Richtung auf das Edle und Große zu geben; so kann die Forderung an sie nur in sofern von der an das Gymnasium verschieden sein, als der durch erstere Gebildete mehrentheils vermittelst des erworbenen Materials, der auf dem Gymnasium Gebildete dagegen vorzugsweise durch die innere geistige Kraft überhaupt, welche durch die verschiedenen wissenschaftlichen Disciplinen in ihm entwickelt ist, auf die Lebensverhältnisse wirksam eingreift. Diese mehr formale Bildung erfordert nun weder so große Fertigkeit und Handhabung der auf wissenschaftlichem Wege abgeleiteten, an sich aber mehrentheils mechanischen Verfahrungsweisen, noch auch denselben Grad der Anwendungsfähigkeit auf Natur und Kunst, wie die allerdings mehr reale, welche die Bürgerschule geben soll; aber letztere, wiewohl weniger allgemein, soll nicht weniger gründlich und geistentwickelnd sein, als die formale des Gymnasiums; denn wenn man selbst von allem Gesagten, was die eigentliche Bildung betrifft, abzusehen vermöchte, wovor uns der Himmel bewahre! so bliebe den, bloß äußeren Nutzen Suchenden noch immer das Motiv, daß ein ungründliches Studium der Elemente einer Wissenschaft die Ausbildung eines richtigen Urtheils hemmt, was dann wieder auf die spätere Anwendung der Wissenschaft auf Natur und Kunst den nachtheiligsten Einfluß hat. In der Mathematik beschränkt sich also der ganze Unterschied der Anforderungen, welche an die zwei verschiedenen Klassen von Bildungsanstalten, welche hier betrachtet worden, zu machen sind, auf den ganz untergeordneten Umstand, daß in der Bürgerschule die am meisten in Anwendung kommenden praktischen Verfahrungsweisen bis zu größerer Fertigkeit geübt werden müssen, so daß man z. B. das Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzel, das Operiren mit Buchstabenausdrücken, den Gebrauch der logarithmischen und trigonometrischen Tabellen, u. s. w. bis zu völliger Geläufigkeit einüben wird; der Hauptzweck des Unterrichts aber, also auch die Methode, kann und darf nicht verschieden sein, wofern nicht die Schule ihre Bestimmung in der Hauptsache ganz und gar verfehlen soll. Man darf sich demnach auf dem Gymnasium nicht mit bloßen Uebersichten und Ansichten begnügen, wie dies in der neuesten Zeit hin und wieder ausgesprochen und wohl auch ausgeführt worden. Man glaube ja nicht, daß aus einem flüchtigen Blick auf die Lehren der Mathematik das zu erreichen sei, was dieser Unterricht auf der Gelehrtenschule allein zu leisten angewiesen ist, nämlich eine gründliche Verstandesbildung, welche dem jugendlichen Geiste Gehalt und innere Besonnenheit giebt. Wer nicht selbst Hand an's Werk legt, wird nie zur Meisterschaft gelangen. Wer sich aber nicht die vielfältigste Uebung und Fertigkeit in der Behandlung mathematischer Gegenstände aneignet, wer seine Geisteskräfte nicht darin übt, sich nie ernstlich und angestrengt damit beschäftigt, wie sollte

---

fangener behaupten wird, daß die Hauptunterrichtsgegenstände der Bürgerschule, die Mathematik, Naturwissenschaften ꝛc. vorzugsweise das Gedächtniß, die des Gymnasiums dagegen, nämlich die alten Sprachen, vorzugsweise den Verstand ausbilden, oder gar, daß die Mathematik auf der Bürgerschule so gelehrt werden müsse, daß sie zu einer bloßen Gedächtnißübung werde!

der sich Hoffnung machen dürfen auf die Genüsse, die nur durch beharrlichen Fleiß und völlige Hingebung an die Wissenschaft zu erringen sind? Läuft man nicht vielmehr Gefahr, Jünglinge, die zu einem tieferen Eindringen in wissenschaftliche Gegenstände erst noch angehalten werden müssen, durch jenes leichte Hinweggehen über die Wissenschaft, zu hohlen Rednern zu machen, die da wähnen, sie hätten's schon ergriffen, selbst wenn sie noch nie auch nur eine einzige Betrachtung selbstständig durchzuführen versucht haben?

Bei gegenwärtiger Darlegung meiner Ansicht über den mathematischen Unterricht schwebte mir stets der Zweck lebendig vor Augen, Etwas dazu beizutragen, einem der wichtigsten Lehrgegenstände durch die Zweckmäßigkeit der Methode allgemeineren Eingang zu verschaffen; sollten diese Andeutungen hie und da auf einen fruchtbaren Boden fallen, und Andere zu fernerem Nachdenken darüber, und zu weiterer Ausbildung derselben veranlassen, so würde ich darin den erfreulichsten Lohn meiner Arbeit finden. Die Natur des Gegenstandes brachte es mit sich, daß Ansichten bekämpft, Irrthümer nachgewiesen werden mußten, dann aber auch viel Gutes von Anderen mit aufgenommen, und den eigenen Gedanken angereiht werden konnte; indessen wird Jeder, der die Wissenschaft wahrhaft liebt, Jeder, der die Förderung und Vervollkommnung des Jugendunterrichts von ganzer Seele sucht, Nichts als jenes Streben nach dem wesentlichsten, ja einzigen Ziele alles Unterrichts, nach wahrer Bildung, darin sehen. Viel ist seit drei Decennien für diesen Gegenstand geschehen, dessen ungeachtet bleibt der Zukunft noch mehr zu thun übrig, wenn dieser Zweig des Unterrichts sich in dem Grade unter der Masse des Volkes Eingang verschaffen soll, wie wir es zum allgemeinen Wohle der Menschheit wünschen müssen: denn nur dadurch, daß er sich unter alle Klassen der Nation, in die Hütte wie in den Pallast, in die Werkstätten der Arbeiter, wie in den Kreis der Beamten, Gelehrten u. s. w. seinen Weg bahnt, ist eine durchgreifende Bildung der Generation zu erwarten, die endlich einem, aller Gründlichkeit entbehrenden Spiele mit unklaren Ideen einerseits, wie dem übertriebenen Nützlichkeitsstreben andererseits, gebührende Schranken setzt.

J. Heussi.