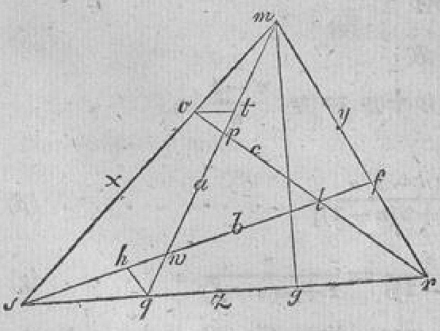
Allgemeines Gesetz, wie man den Inhalt und die Seiten eines Dreiecks aus Transversalen finden kann.

Theorem I.

Wenn ein Dreiek D_1, dessen Seiten a, b, c sind, gegeben ist, so ist immer ein anderes bestimmtes Dreieck D_n möglich, welches zu jenem solche Beziehung hat, daſs, wenn man jede seiner drei Seiten, in gleicher Richtung des Umfangs genommen, in zwei Abschnitte theilt, die sich verhalten wie $1:n-1$, wo n irgend eine beliebige gegebene Zahl ist, und dann die Theilungspunkte mit den gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks durch Gerade verbindet, diese Verbindungslinien in bestimmter Ordnung beziehlich den Seiten jenes ersteren Dreiecks gleich sind. „Und ferner: denkt man sich eine Reihe von Dreiecken D_2, D_3, $D_4 \ldots D_n$, welche zu dem gegebenen Dreieck D_1 in der angegebenen Beziehung stehen, und zwar daſs für sie die genannte Zahl n der Reihe nach die Werthe: 2, 3, 4 ... n hat, so verhalten sich sowohl

1) die Inhalte dieser Dreiecke, als auch
2) die Summe der Quadrate der drei Seiten derselben, wie die Glieder der folgenden Reihe:

$$1; \frac{2^2}{2^2-(2-1)}; \frac{3^2}{3^2-(3-1)}; \frac{4^2}{4^2-(4-1)} \ldots \frac{n^2}{n^2-(n-1)}.$$



Beweis.

Es sei im Dreieck msr $ms = x$, $mr = y$, $sr = z$, $mo = \frac{1}{n}x$, $rf = \frac{1}{n}y$, $sq = \frac{1}{n}z$. Ferner sei $mq = a$, $sf = b$, und $ro = c$.

Zieht man nun ot und qh beziehlich parallel mit z und y, so ist $mt = \frac{a}{n}$, und $tq = \frac{(n-1)}{n} a$. Da nun $\triangle qhw \backsim \triangle wfm$, so hat man

$$gh : fm = qw : wm;$$

ferner $\triangle sqh \backsim \triangle srf$, mithin

$$gh : rf = sq : sr$$

und da $sq = \frac{1}{n} sr$, so ist auch $gh = \frac{1}{n} . rf = \frac{1}{n^2} . y$, und es läſst sich also jene erstere Proportion auch so ausdrücken:

$$\frac{1}{n^2} . y : \frac{n-1}{n} . y = qw : wm$$

oder

$$1 : n(n-1) = qw : wm,$$

mithin auch

$$1 : 1 + n(n-1) = qw : qw + wm = qw : a$$

woraus sich ergiebt:

$$qw = \frac{a}{1 + n(n-1)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (\alpha)$$

Ferner hat man, weil $\triangle opt \backsim \triangle rqp$

$$ot : rq = tp : qp$$

und weil auch $\triangle mot \backsim \triangle msq$

$$ot : sq = mo : ms$$

es ist aber $mo = \frac{1}{n} ms$, also auch $ot = \frac{1}{n} . sq = \frac{1}{n^2} . z$, und es läſst sich daher obige Proportion auch so schreiben:

$$\frac{1}{n^2} . z : \frac{n-1}{n} . z = tp : qp$$

oder

$$1 : n(n-1) = tp : qp;$$

also auch

$$1 : 1 + n(n-1) = tp : tp + qp = tp : \frac{n-1}{n} . a,$$

woraus sich findet

$$tp = \frac{(n-1) a}{n[1 + n(n-1)]} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (\beta)$$

Ferner ist $mp = mt + tp = \frac{a}{n} + \frac{(n-1) a}{n[1 + n(n-1)]} = \frac{n}{1 + n(n-1)} . a \quad \ldots \; (\gamma)$

und da $pw = a - (pm + qw)$ ist, so erhält man, wenn für pm und qw die in (γ) und (α) gefundenen Werthe substituirt werden

$$\left.\begin{aligned} pw &= \frac{n(n-2)}{1+n(n-1)}.a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{I}) \\ &\text{Ebenso findet man auch} \\ wl &= \frac{n(n-2)}{1+n(n-1)}.b \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{II}) \\ pl &= \frac{n(n-2)}{1+n(n-1)}.c \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{III}) \end{aligned}\right\} (\delta)$$

Drückt man nun den Inhalt des Dreiecks pwl durch die drei Seiten pw, wl und pl aus, so kommt:

$$\left[\frac{n(n-2)}{1+n(n-1)}\right]^2 \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$$

Nun ist aber $\frac{1}{4}.\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$ der Inhalt des Dreiecks D_1 setzt man diesen $=F$ und den Inhalt des Dreiecks $pwl = V$, so hat man:

$$V = \left[\frac{n(n-2)}{1+n(n-1)}\right]^2.F \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\varepsilon)$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \triangle mop : \triangle msq &= mo.mp : mq.ms \\ &= \frac{1}{n}x.\frac{na}{1+n(n-1)} : ax \\ &= \frac{1}{1+n(n-1)} : 1, \end{aligned}$$

also

$$\triangle mop = \frac{\triangle msq}{1+n(n-1)}$$

und da $\triangle msq = \frac{1}{n}\triangle msr$ ist, so ist auch

$$\triangle mop = \frac{\triangle msr}{n(1+n(n-1))} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\zeta)$$

Ebenso findet man

$$\triangle rlf = \triangle sqw = \triangle mop = \frac{\triangle msr}{n(1+n(n-1))} \quad \ldots\ldots \quad (\eta)$$

Nun ist das Viereck

$$\begin{aligned} opws &= \triangle msq - (\triangle mop + \triangle sqw), \text{ und berücksichtigt man } (\eta) \\ &= \frac{1}{n}\triangle msr - \frac{2\triangle msr}{n(1+n(n-1))} \\ &= \frac{n(n-1)-1}{n(1+n(n-1))}.\triangle msr \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\vartheta) \end{aligned}$$

Auf demselben Wege ergibt sich:

Viereck $mplf$ = Viereck $rlwq$ = Viereck $opws = \frac{n(n-1)-1}{n(1+n(n-1))} . \triangle msr$ . . (ι)

Man hat aber
$$V = \triangle msr - 3(mop + opws),$$
und substituirt man für mop und $opws$ die Werthe aus (ζ) und (ϑ), so ergibt sich
$$V = \left[1 - \frac{3(1+n(n-1)-1)}{n(1+n(n-1))}\right] . \triangle msr$$
$$= \left[\frac{n(1+n(n-1)-3n(n-1)}{n(1+n(n-1))}\right] . \triangle msr$$
oder
$$= \frac{n^2-4n+4}{1+n(n-1)} . \triangle msr,$$
oder
$$V = \frac{(n-2)^2}{1+n(n-1)} . \triangle msr \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\varkappa)$$

Verbindet man nun diesen mit dem in (ε) gefundenen Werth für V, so ergibt sich
$$\frac{(n-2)^2}{1+n(n-1)} \triangle msr = \left[\frac{n(n-2)}{1+n(n-1)}\right]^2 . F$$
woraus sogleich folgt
$$\triangle msr = \frac{n^2}{n^2-(n-1)} . F \quad \ldots\ldots \quad (A)$$

Setzt man nun für n nach und nach die Zahlen 2, 3, 4, 5 ...... n, so ergibt sich:
$$D_2 : D_3 : D_4 : \ldots . D_n = \frac{2^2}{2^2-(2-1)} : \frac{3^2}{3^2-(3-1)} : \frac{4^2}{4^2-(4-1)} : \ldots \frac{n^2}{n^2-(n-1)} \quad (B)$$
wodurch der erste Theil des Theorems erwiesen ist.

Ehe wir aber zu dem zweiten Theile übergehen, noch folgende Bemerkungen:

1) Setzt man in ($\varkappa$) $V = o$, so erhält man eine Bedingung, die Statt finden mufs, wenn sich die Linien a, b, c in einem Punkte schneiden sollen.

2) Hätte man gleich Anfangs ganz allgemein statt $\frac{1}{n}x$, $\frac{1}{n}.y$, $\frac{1}{n}.z$ beziehlich αx, βy, γz angenommen, und sodann in ($\varkappa$) für $V o$ gesetzt, so würde man noch eine zweite Bedingung erhalten haben, unter welcher a, b, c sich in einem und demselben Punkte schneiden. Man sehe *Crell's Journal*, Band 3, Heft 2.

3) Setzt man in (A) $\frac{p}{q}$ statt n, so erhält man
$$\triangle msr = \frac{p^2}{p^2-q(p-q)} . F,$$
woraus eine neue Reihe von Dreiecken hervorgeht. —

Um nun das in (B) für die Inhafte der Dreiecke gefundene Gesetz auch für die Summen der Quadrate der Seiten derselben darzuthun, denke man sich im Dreieck msr, mg senkrecht auf sr und setze $sg = p$, so hat man:

$$1)\ y^2 = x^2 + z^2 - 2pz,$$

ferner

$$x^2 = a^2 + \frac{z^2}{n^2} + 2.\frac{z}{n}\left(p - \frac{z}{n}\right)$$

oder

$$2)\ nx^2 = na^2 - \frac{z^2}{n} + 2pz$$

und addirt man nun (1) zu (2), so ergibt sich

$$\left.\begin{array}{ll} ny^2 + n(n-1)x^2 = n^2a^2 + (n-1)z^2 \quad \ldots\ldots & \text{(I)} \\ \text{und auf dieselbe Weise erhält man} & \\ nx^2 + n(n-1)z^2 = n^2b^2 + (n-1)y^2 \quad \ldots\ldots & \text{(II)} \\ nz^2 + n(n-1)y^2 = n^2c^2 + (n-1)x^2 \quad \ldots\ldots & \text{(III)} \end{array}\right\} (C)$$

Addirt man nun diese drei Gleichungen, so erhält man:

$$x^2 + y^2 + z^2 + n(n-1)(x^2 + y^2 + z^2) = n^2(a^2 + b^2 + c^2)$$

und hieraus

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{n^2}{n^2 - (n-1)}\cdot(a^2 + b^2 + c^2) \quad \ldots\ldots (D)$$

Da nun a, b, c konstant sind, so leuchtet ein, dafs, wenn man wieder für n successive $2, 3, 4 \ldots . n$ setzt, die Summe der Quadrate der Seiten jener Dreiecke D_2, D_3, $D_4 \ldots D_n$ beziehlich durch S_2, S_3, $S_4 \ldots S_n$ bezeichnet, man wieder erhält:

$$S_2 : S_3 : S_4 : \ldots S_n = \frac{2^2}{2^2 - (2-1)} : \frac{3^2}{3^2 - (3-1)} : \frac{4^2}{4^2 - (4-1)} : \ldots \frac{n^2}{n^2 - (n-1)} \ (E)$$

dieselbe Reihe, welche wir in (B) für die Inhalte der Dreiecke gefunden haben.

In Bezug auf die Construction des Dreiecks D_n mag noch folgende Bemerkung Platz finden.

Zunächst ergibt sich aus den Bestimmungsgleichungen in (C)

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{n}{n^2 - (n-1)}\cdot\sqrt{n(n-1)a^2 + nb^2 - (n-1)c^2} \\ y = \dfrac{n}{n^2 - (n-1)}\cdot\sqrt{n(n-1)c^2 + na^2 - (n-1)b^2} \\ z = \dfrac{n}{n^2 - (n-1)}\cdot\sqrt{n(n-1)b^2 + nc^2 - (n-1)a^2} \end{array}\right\} \quad . \ . \ (F)$$

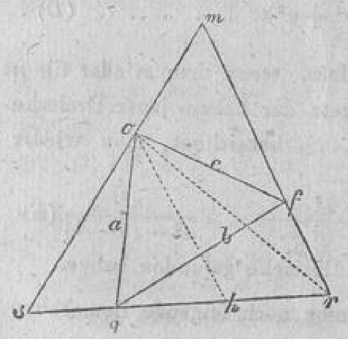
so dafs sich die Dreiecke D_2, D_3, $D_4 \ldots D_n$ wenn man dem n successive die Werthe 2, 3, 4 … n gibt, leicht darstellen lassen.

Es läfst sich aber auch das Dreieck msr aus dem Dreieck pwl konstruiren. Da nämlich aufser pwl noch pm, ws, und lr bekannt sind, so dürfen nur, nachdem das Dreieck pwl hergestellt ist, die gehörigen Verlängerungen und Verbindungen der Endpunkte m, s und r gemacht werden, um das verlangte Dreieck zu erhalten.

Theorem II.

Sind die Transversalen a, b, c statt nach den Winkelspitzen, auf gleiche Weise, wie oben, nach den Theilungspunkten der Seiten der Dreiecke gezogen, so verhalten sich ebenfalls sowohl die Inhalte als auch die Summen der Quadrate der Seiten dieser Dreiecke, wie Glieder einer Reihe, deren allgemeines Glied $\frac{n^2}{n^2-3(n-1)}$ ist.

Beweis.



I. Behält man die obige Bezeichnung bei und zieht or, so hat man:

$$\triangle omf : omr = mf : mr$$

oder

$$\triangle omf : \frac{1}{n} \triangle msr = \frac{(n-1)}{n} y : y,$$

daher

$$\triangle omf = \frac{(n-1)}{n^2} \triangle msr \quad . \; . \; . \; . \quad (a)$$

Ebenso findet sich auch

$$\triangle soq = \triangle qfr = \triangle omf = \frac{n-1}{n^2} \triangle msr \quad . \quad (b)$$

und da

$$\triangle msr = F + \frac{3(n-1)}{n^2} \triangle msr,$$

so ist

$$\triangle msr = \frac{n^2}{n^2-3(n-1)} . F \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (A')$$

woraus, wenn für n successive 2, 3, … n substituirt wird, hervorgeht:

$$D_2 : D_3 : D_4 : \ldots D_n = \frac{2^2}{2^2-3(2-1)} : \frac{3^2}{3^2-3(3-1)} : \frac{4^2}{4^2-3(4-1)} : \ldots \frac{n^2}{n^2-3(n-1)} \quad (B')$$

II. Zieht man ferner oh parallel mit y, so ist $oh = \frac{n-1}{n} y$; und vergleicht man nun das Dreieck osh mit dem Dreieck msr, so braucht man nur in den Gleichungen (C) für x, y, z beziehlich $\frac{n-1}{n} x$, $\frac{n-1}{n} y$, $\frac{n-1}{n} z$ zu setzen, und man erhält:

$$\left.\begin{array}{ll} (n-1) y^2 + (n-1)(n-2) x^2 = n^2 a^2 + (n-2) z^2 \quad \ldots \ldots & 1 \\ (n-1) x^2 + (n-1)(n-2) z^2 = n^2 b^2 + (n-2) y^2 \quad \ldots \ldots & 2 \\ (n-1) z^2 + (n-1)(n-2) y^2 = n^2 c^2 + (n-2) x^2 \quad \ldots \ldots & 3 \end{array}\right\} (C')$$

Addirt man nun diese drei Gleichungen, so kommt:

$$x^2 + y^2 + z^2 + (n-1)(n-2)(x^2 + y^2 + z^2) = n^2 (a^2 + b^2 + c^2),$$

oder

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{n^2}{n^2 - 3(n-1)} \cdot (a^2 + b^2 + c^2) \quad \ldots \quad (D')$$

woraus, wie oben, hervorgeht:

$$S_2 : S_3 : S_4 : \ldots S_n = \frac{2^2}{2^2 - 3(2-1)} : \frac{3^2}{3^2 - 3(3-1)} : \frac{4^2}{4^2 - 3(4-1)} : \ldots \frac{n^2}{n^2 - 3(n-1)} \quad (E')$$

Aus den Bestimmungsgleichungen in (C') findet man:

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{n}{n^2 - 3(n-1)} \cdot \sqrt{(n-1)(n-2) a^2 + (n-1) b^2 - (n-2) c^2} \quad \ldots \\ y = \frac{n}{n^2 - 3(n-1)} \cdot \sqrt{(n-1)(n-2) c^2 + (n-1) a^2 - (n-1) b^2} \quad \ldots \\ z = \frac{n}{n^2 - 3(n-1)} \cdot \sqrt{(n-1)(n-2) b^2 + (n-1) c^2 - (n-1) a^2} \quad \ldots \end{array}\right\} (F')$$

Bemerk. Will man wissen, welchen Werth n haben mufs, damit $D_n = tF$ wird, so setze man:

$$tF = \frac{n^2}{n^2 - (n-1)} \cdot F.$$

oder

$$t = \frac{n^2}{n^2 - (n-1)} = 1 + \frac{n-1}{n^2 - (n-1)}$$

woraus sich ergibt, dafs $t = 1$, oder D_1, ein Minimum ist für $n = 1$ und für $n = \infty$, oder $\frac{1}{n} = o$, welches durch die geometrische Bedeutung beider Werthe leicht zu erkennen ist.

Druckt man den Werth von n durch t aus, so kommt

$$n = \frac{t \pm \sqrt{4t - 3t^2}}{2(t-1)}.$$

Aus diesem Ausdrucke folgt, daſs man der Aufgabe genügen kann, so lange $t \leqq \frac{4}{3}$ angenommen wird, und daſs $\frac{4}{3} F = D_2$ ein *Maximum* ist.

Durch eine gleiche Betrachtung ergibt sich in (B'), daſs D_1 ein *Minimum* und D_2 ein *Maximum* ist.

Bestimmung der Erdachsen aus der Polhöhe.

Es sei die Polhöhe l gegeben. Nun hat man wenn r den Krümmungshalbmesser bezeichnet,

$$r = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}; \quad \ldots \ldots \quad 1)$$

ferner, wenn n die Normale einer Curve bezeichnet, so ist

$$n = y\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \ldots \ldots \quad 2)$$

also auch

$$n^3 = y^3 \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

und aus beiden folgt:

$$r = \frac{n^3}{y^3 . \frac{d^2 y}{dx^2}} \quad \ldots \ldots \quad 3)$$

Bei dem Meridian, als Ellipse, hat man, wenn die Abscissen vom Mittelpunkt genommen werden

$$n = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) + \frac{b^4}{a^4} . x^2} \quad \ldots \ldots \quad 4)$$

Ferner hat man

$$Subn. : n = \cos l : 1,$$

oder

$$\frac{b^2}{a^2} x : n = \cos l : 1,$$

daraus

$$x = \frac{a^2 . n . \cos l}{b^2}$$

oder

$$x^2 = \frac{a^4.n^2.\cos^2 l}{b^4},$$

substituirt, kommt

$$n^2 = \frac{b^2}{a^2}.\left[a^2 - \frac{a^4 n^2 (1-\sin^2 l)}{b^4}\right] + n^2(1-\sin^2 l),$$

daraus

$$n^2 = \frac{b^4}{a^2-(a^2-b^2)\sin^2 l} = \frac{b^4 : a^2}{1-\frac{(a^2-b^2)\sin^2 l}{a^2}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 5)$$

Setzt man nun den halben Parameter der Ellipse $\frac{b^2}{a} = p$ und $\frac{a^2-b^2}{a^2} = e^2$, so kommt:

$$n^2 = \frac{p^2}{1-e^2 \operatorname{Sin}^2 l} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 6)$$

Nun ist aber $r = \frac{n^3}{y^3 \frac{d^2 y}{d x^2}}$

und substituirt man für y^3, $\frac{d^2 y}{d a^2}$ die Werthe aus der Ellipse, so kommt:

$$r = \frac{n^3}{p^2}$$

oder

$$r^2 = \frac{n^6}{p^4} = \frac{p^2}{(1-e^2 \sin^2 l)^3}$$

oder

$$r = \frac{p}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 7)$$

Nun verhalten sich die Bogen, wie ihre zugehörigen Krümmungshalbmesser; daher, wenn L, l die verschiedenen Polhöhen, und G, g die Länge der zugehörigen Grade des Meridians heifsen, ist:

$$G : g = \frac{p}{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{3}{2}}} : \frac{p}{(1-e^2\sin^2 l)^{\frac{3}{2}}}$$

oder

$$G : g = (1-e^2\sin^2 l)^{\frac{3}{2}} : (1-e^2\sin^2 L)^{\frac{3}{2}},$$

oder

$$G^{\frac{2}{3}} : g^{\frac{2}{3}} = 1-e^2\sin^2 l : 1-e^2 \operatorname{Sin}^2 L$$

und

$$G^{\frac{2}{3}} - e^2.\, G^{\frac{2}{3}}\sin^2.\, L = g^{\frac{2}{3}} - e^2 g^{\frac{2}{3}} \sin^2 l,$$

daraus

$$e^2 = \frac{G^{\frac{2}{3}} - g^{\frac{2}{3}}}{G^{\frac{2}{3}} \operatorname{Sin}^2 L - g^{\frac{2}{3}} \sin^2 l} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 8)$$

Liegt der kleinere Grad unter dem Aequator, so ist $\sin l = o$, und man hat:

$$e^2 = \frac{G^{\frac{2}{3}} - g^{\frac{2}{3}}}{G^{\frac{2}{3}} . \sin^2 L} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9)$$

Nun ist

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2};$$

also

$$\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2,$$

daher

$$b : a = \sqrt{1 - e^2} : 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

Jetzt kann man, nachdem e bekannt ist, a und b auf folgendem Wege finden. Ist nämlich G bekannt, so hat man:

$1 : \pi =$ Krümmungshalbmesser : $G . 180°$, daher Krümmungshalbmesser $= G . \frac{180°}{\pi}$ und nach dem obigen

$$G . \frac{180°}{\pi} = \frac{p}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{3}{2}}}$$

oder

$$p = G . \frac{180°}{\pi} . (1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{3}{2}}$$

Dividirt man auf beiden Seiten durch $\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2$, so kommt:

$$a = G . \frac{180°}{\pi} . \frac{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{3}{2}}}{1 - e^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

Aus dieser Gleichung (B) und aus (A) läſst sich auch b finden, und also die Gröſse der Erdachsen angegeben.