Geometrie.

Die Geometrie ist derjenige Zweig der Mathematik, welcher von der Beschreibung und den Eigenschaften der Größen im Allgemeinen handelt.

Definitionen oder Erklärungen von Ausdrücken.

1) Ein mathematischer Punct hat weder Länge, noch Breite, noch Dicke, daher kann er weder gesehen, noch gefühlt, sondern bloß gedacht werden; was man daher im gemeinen Leben einen Punct nennt, ist im mathematischen Sinne kein solcher, und erscheint unter dem Vergrößerungsglase als eine Stelle von sehr wahrnehmbarer Länge und Breite, so wie sich die Spitze der feinsten Nähnadel unter einem Vergrößerungsglase rundlich darstellt.

2) Eine Linie hat nur Länge, aber weder Breite noch Dicke, daher ist eine solche, welche mit Bleistift oder der Feder auf's Papier gezogen ist, keine Linie im mathematischen Sinne, die nur gedacht werden kann. Die beiden Enden jeder Linie bilden Puncte.

3) Die gerade Linie ist eine solche, deren Richtung sich nirgends ändert.

4) Eine krumme Linie oder Kurve ist eine solche, welche zwischen den Endpuncten beständig ihre Richtung ändert.

5) Parallele Linien sind solche, die sich stets in gleicher Entfernung von einander halten, und wenn sie auch noch so stark verlängert werden, einander nie schneiden (Taf. 95, Fig. 1).

6) Ein Winkel ist die Oeffnung zwischen zwei in einen Punct zusammenstoßenden Linien (Fig. 2).

7) Die Linien AB und BC, welche den Winkel ABC bilden, heißen die Schenkel oder Seitenlinien, und der Punct B, wo sie zusammentreffen, der Scheitel des Winkels. Zuweilen bezeichnet man den Winkel durch den am Scheitel desselben stehenden Buchstaben, z. B. B Fig. 2, mehrentheils aber durch drei Buchstaben, unter denen derjenige, welcher am Scheitel steht, der mittlere ist, z. B. ABC, Fig. 2.

8) Wenn eine Linie so auf der andern steht, daß sie sich weder nach der einen noch nach der andern Seite neigt, so bildet sie zu beiden Seiten rechte Winkel, z. B. ABC und ABD Fig. 3. Alle rechte Winkel sind einander gleich und halten 90°. Von der Linie AB sagt man, sie stehe perpendiculär oder senkrecht auf CD.

Anfänger verwechseln leicht die Ausdrücke senkrecht und scheitelrecht oder lothrecht (perpendicular und vertikal). Scheitelrecht (lothrecht, vertikal) ist eine Linie, wenn sie mit der Ebene des Horizontes oder einem Wasserspiegel, der immer horizontal ist, rechte Winkel bildet. Die Wände eines Hauses stehen in der Regel lothrecht; allein eine Linie kann auf einer andern senkrecht stehen, und doch mit dem Horizonte einen beliebigen Winkel bilden, wenn nur die beiden Winkel, die sie mit der andern Linie macht, einander gleich sind. Wenn z. B. der Winkel ABC und ABD einander gleich sind, so steht die Linie AB auf CD senkrecht, was für eine Richtung sie auch sonst immer haben möge.

9) Wenn eine Linie BE mit einer andern CD Fig. 3 zwei ungleiche Winkel bildet, so heißt der, welcher größer ist, als ein rechter (EBC), ein stumpfer Winkel, und der, welcher kleiner ist, als ein rechter (EBD), ein spitzer Winkel.

10) Zwei Winkel, welche einen Schenkel gemeinschaftlich besitzen, z. B. ABC und ABE, heißen anstoßende Winkel, solche, welche durch Kreuzung zweier Linien entstehen, z. B. die durch die Kreuzung von CD und EF gebildeten Winkel; EBD und CBF, Scheitelwinkel. Haben zwei Winkel, EBC und EBD, Fig. 3, den Scheitel B und einen Schenkel BE gemein, und bilden die beiden übrigen Schenkel, CB, DB, eine gerade Linie, so heißen sie Nebenwinkel.

11) Eine Figur ist ein begränzter Raum, der entweder bloß nach zwei oder drei Richtungen Ausdehnung hat.

12) Eine Fläche hat nur nach zwei Richtungen Ausdehnung, nämlich Länge und Breite; sie wird durch Linien begränzt.

13) Eine ebene Fläche oder Ebene ist eine solche, welche nach allen Richtungen geradlinig streicht. Eine polirte Marmorplatte, auf die man ein Lineal nach allen Richtungen so legen kann, daß nirgends Hellung zwischen dem Lineal und der Platte durchschimmert, ist zwar, streng genommen, nie eine mathematische Ebene, kömmt aber derselben doch sehr nahe.

14) Eine krumme Oberfläche ist eine solche, die nach keiner Richtung geradlinigt streicht *). Krumme Oberflächen sind entweder erhaben (convex) oder hohl (concav).

15) Eine convexe Oberfläche ist eine solche, welche sich über die Ebene ihres Umkreises erhebt, z. B. jeder äußere Abschnitt einer Kugel.

16) Eine concave Oberfläche ist eine solche, welche sich unter gedachte Ebene vertieft.

Eine Fläche kann entweder bloß durch gerade oder bloß durch krumme, oder durch beide Arten von Linien begränzt seyn.

17) Jede bloß durch gerade Linien begränzte Oberfläche heißt ein Vieleck. Sind die Seitenlinien alle gleich, so ist das Vieleck ein regelmäßiges; sind sie einander nicht alle gleich, ein unregelmäßiges. Jedes Vieleck hat eben so viele Seitenlinien als Winkel, daher man sie

---

*) Diese Definition ist zu eng, indem z. B. ein cylindrische Fläche nach der Richtung der Axe des Cylinders geradlinigt streicht. Auch sind alle von der Peripherie der Basis eines Kegels nach dessen Spitze als gezogen gedachte Linien gerade. Der Uebersetzer.

nach den einen oder andern benennen kann. Eine von drei geraden Seitenlinien begränzte Figur nennt man gewöhnlich ein Dreieck, eine von 4 Seitenlinien begränzte, ein Viereck rc.

Ein von fünf Seitenlinien begränztes Vieleck (Polygon) nennt man ein Fünfeck, oder Pentagon.

Ein Sechseck, oder Hexagon, hat 6 Seitenlinien; ein Siebeneck, oder Heptagon, 7 Seitenlinien; ein Achteck, oder Octogon, 8 Seitenlinien; ein Neuneck, oder Nonagon, 9 Seitenlinien; ein Zehneck, oder Decagon, 10 Seitenlinien; ein Eilfeck, oder Undecagon, 11 Seitenlinien; ein Zwölfeck, oder Duodecagon, 12 Seitenlinien, u. s. w.

Dreiecke haben, je nach der verhältnißmäßigen Länge ihrer Seitenlinien, verschiedene Benennungen.

18) Bei einem gleichseitigen Dreieck, wie ABC Fig. 4, sind die drei Seitenlinien und die drei Winkel einander gleich.

19) Bei einem gleichschenkligen Dreieck, DEF Fig. 5, sind zwei Seitenlinien einander gleich.

20) Bei einem ungleichseitigen Dreieck sind alle Seitenlinien von verschiedener Länge, z. B. GHI Fig. 6.

Auch nach den Winkeln führen die Dreiecke verschiedene Benennungen.

21) Ein rechtwinkeliges Dreieck ist ein solches, welches einen rechten Winkel enthält, s. ABC Fig. 7.

22) Kein Dreieck kann mehr als einen rechten Winkel besitzen. Diejenige Seitenlinie (AC), welche dem rechten Winkel gegenüberliegt, heißt die Hypotenuse, und ist immer die längste.

23) Ein stumpfwinkliges Dreieck, z. B. Fig. 8, enthält einen stumpfen Winkel.

24) Bei einem spitzwinkligen Dreieck, z. B. Fig. 4, sind alle Winkel spitz.

25) Ein gleichschenkeliges sowohl, als ein ungleichseitiges Dreieck kann rechtwinkelig, stumpfwinkelig oder spitzwinkelig seyn.

26) Wenn die Seitenlinie eines Dreiecks über die Figur hinausreicht, wie AD Fig. 8, so heißt der Winkel A oder CAB ein innerer, und sein Nebenwinkel CAD ein äußerer Winkel.

27) Vierecke oder vierseitige Figuren werden, je nachdem die Seitenlinien gleich oder ungleich, und die Winkel rechte sind oder nicht, verschieden benannt.

28) Jede vierseitige Figur, deren gegenüberliegende Seitenlinien mit einander parallel streichen, mögen nun die Winkel rechte seyn oder nicht, Fig. 9, 10, 11, 12, stellt ein Parallelogramm dar.

29) Wenn die Winkel eines Parallelogramms sämmtlich rechte Winkel sind, z. B. in Fig. 11 und 12, so heißt es ein rechtwinkeliges Parallelogramm oder Rechteck.

30) Bei einem Rechteck können alle oder nur die einander gegenüberliegenden Seitenlinien gleich seyn. Wenn sämmtliche Seitenlinien einander gleich sind, wie in Fig. 12, so heißt das Rechteck ein Quadrat.

31) Sind die gegenüberliegenden Seiten einander parallel, und sämmtliche Seitenlinien einander gleich, die Winkel aber keine rechten, wie in Fig. 10, so heißt das Parallelogramm ein Rhombus, oder eine Raute.

32) Ein Parallelogramm, bei dem alle Winkel keine rechten, und nur die einander gegenüberliegenden Seitenlinien gleich sind, wie in Fig. 9, heißt ein Rhomboid.

33) Wenn bei einem Viereck keine Seitenlinie mit der andern parallel streicht, wie bei Fig. 13, so heißt es ein Trapezium.

34) Bei einem Trapezoid (Fig. 14) streichen nur zwei Seitenlinien mit einander parallel.

35) Eine Diagonale ist eine rechte Linie, welche von einem entgegengesetzten Winkel eines Vielecks nach dem andern streicht, z. B. IK Fig. 15. Bei Parallelogrammen nennt man die Diagonale zuweilen auch, obwohl unpassender Weise, den Durchmesser, weil sie durch den Mittelpunct der Figur geht.

36) Wenn man in der Diagonale eines Parallelogramms irgend einen Punct, z. B. F Fig. 15, annimmt, und durch denselben zwei Linien, AB und CD, parallel mit den Seitenlinien des Parallelogramms zieht, so wird dasselbe in vier Parallelogramme, DD, L, FF, GG, getheilt. Die beiden Abtheilungen L, FF, durch welche die Diagonale nicht geht, heißen die Complemente.

37) Die Grundlinie, oder Basis einer Figur, ist diejenige Seitenlinie, auf welche man sich dieselbe stehend denkt, z. B. AB und CD Fig. 16.

38) Unter der Höhe einer Figur versteht man die Länge einer senkrechten Linie, die von der Grundlinie oder deren Verlängerung bis zum höchsten Puncte der Figur reicht, z. B. EF Fig. 16.

39) Der Flächenraum einer ebenen oder andern Fläche ist der in irgend einem Flächenmaaße ausgedrückte Betrag des innerhalb der Gränzlinien enthaltenen Raums.

40) Aehnliche Figuren sind solche, welche gleiche Winkel besitzen, und deren Seitenlinien dasselbe Verhältniß zu einander haben, z. B. Fig. 17.

41) Gleiche Figuren sind solche, welche denselben Flächenraum besitzen und einander in allen Theilen decken.

42) Ein Kreis ist eine ebene Figur, welche von einer krummen Linie begränzt wird, deren sämmtliche Puncte von dem sogenannten Mittelpuncte (Centrum), E Fig. 18 gleich weit entfernt sind. Die krumme Linie ABCD heißt der Umkreis oder die Peripherie.

43) Der Radius oder Halbmesser eines Kreises ist ein gerade Linie, welche vom Mittelpuncte nach der Peripherie gezogen ist (EF Fig. 18). Der Abstand der Schenkelspitzen eines Cirkels, mit welchen man einen Kreis gezogen hat, ist dem Halbmesser gleich, und es ergiebt sich schon hieraus, daß sämmtliche Halbmesser einander gleich sind.

44) Der Durchmesser eines Kreises ist eine gerade Linie, welche von einem Puncte der Peripherie nach einem andern durch den Mit-

---

*) Den Definitionen Deutscher Lehrbücher zufolge, ist das Viereck, welches hier Trapezium genannt wird, ein Trapezoid, und umgekehrt. D. Ueb.

telpunct gezogen ist, z. B. CB Fig. 18. Jeder Durchmesser theilt den Kreis in zwei gleiche Theile.

45) Ein Segment eines Kreises ist ein Theil eines Kreises, welcher durch eine queer durch den Kreis gezogene gerade Linie abgeschnitten wird. Diese gerade Linie heißt die Sehne. Ein Segment, oder Kreisabschnitt, kann entweder größer oder kleiner seyn, als ein Halbkreis.

46) Die Tangente (Berührungslinie) ist eine gerade Linie, welche einen Kreis nur an einem Puncte berührt, z. B. GH Fig. 18. Der Punct A, wo sie den Kreis berührt, heißt der Tagentialpunct (Berührungspunct).

47) Der Sector (Kreisausschnitt) eines Kreises ist der zwischen zwei Halbmessern und einem Kreisbogen enthaltene Raum (s. BIK Fig. 19).

48) Den Umfang jedes Kreises, sey er groß oder klein, denkt man sich in 360 gleiche Theile, sogenannte Grade; jeden Grad in 60 gleiche Theile, sogenannte Minuten, und jede Minute in 60 gleiche Theile, sogenannte Secunden, getheilt. Um die Neigung der Linien gegeneinander, oder den Winkel zu messen, beschreibt man um den Scheitel des Winkels einen Kreisbogen IK Fig. 19, und mißt, wie viele Grade, Minuten oder Secunden der zwischen den Schenkeln des Winkels liegende Kreisbogen IK hält. Die Grade bezeichnet man durch °, die Minuten durch ′, und die Secunden durch ″. Ein Winkel von 48 Graden, 15 Minuten und 7 Secunden wird daher folgendermaaßen bezeichnet: $48^\circ\ 15'\ 7''$.

49) Ein Körper hat Länge, Breite und Dicke, und wird durch Flächen begränzt; so ist z. B. ein Bogen Papier keine bloße Fläche, denn er besitzt einige Dicke, obwohl diese sehr gering ist.

50) Aehnliche Körper sind solche, welche durch eine gleiche Anzahl von ähnlichen Flächen begränzt werden.

51) Das Prisma ist ein Körper, dessen Seitenwände Parallelogramme sind, und dessen Endflächen oder Grundflächen mit einander parallel streichen. Je nachdem die Grundfläche eine gewisse Anzahl Winkel hat, heißt das Prisma ein dreieckiges, viereckiges ꝛc. (s. Fig. 20, 21, 22, 23). Stehen die Seitenflächen senkrecht auf der Grundfläche, so heißt das Prisma gerade, wo nicht, so heißt es schief.

52) Ist die Grundfläche eines Prisma ein Parallelogramm, wie in Fig. 22 und 23, so heißt es ein Parallelepipedon. Demnach ist ein Parallelepipedon ein Körper, der von sechs Parallelogrammen begränzt wird.

53) Wenn sämmtliche Seitenlinien eines Parallelepipedon Quadrate sind, so heißt der Körper ein Würfel (s. Fig. 23).

54) Ein rhomboidisches Prisma ist ein schräges Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind (s. Fig. 24).

55) Die Pyramide, AB Fig. 25 und 26, ist ein Körper, dessen Grundfläche irgend ein Vieleck, und dessen Seitenflächen Dreiecke sind, die in der Spitze der Pyramide sämmtlich zusammenstoßen.

56) Die Pyramiden heißen, nach der Gestalt der Grundfläche, dreiseitige, vierseitige ꝛc.

57) Die Pyramiden sind, je nachdem die Grundfläche regelmäßig oder unregelmäßig ist, ebenfalls regelmäßig oder unregelmäßig.

58) Die Pyramiden sind gerade oder schief; ersteres, wenn eine von der Spitze nach dem Mittelpunct der Grundfläche gezogene Linie, wie in Fig. 25, senkrecht auf der letztern steht; letzteres, wenn diese Linie, wie in Fig. 26, geneigt ist.

59) Ein Cylinder (Fig. 27 und 28) ist ein Körper, welcher entsteht, wenn man sich ein Rechteck um eine seiner Seitenlinien, die man sich als ruhend vorstellt, gedreht denkt. Die ruhende Seitenlinie bildet die Axe des Cylinders; ein Cylinder würde ebenfalls entstehen, wenn man einen Kreis stets parallel mit sich selbst in die Höhe bewegte.

60) Ein Cylinder ist entweder gerade oder schief, je nachdem die Axe senkrecht oder schräg auf der Basis steht.

61) Jeder senkrecht zur Axe eines geraden Cylinders genommene Durchschnitt ist ein Kreis, und jeder schräg zur Axe gerichtete Durchschnitt, eine Ellipse.

62) Da ein Kreis als ein Vieleck von unendlich vielen Seitenlinien zu betrachten ist, so ergiebt sich hieraus, daß man sich den Cylinder als ein Prisma denken kann, der ein solches Vieleck zur Grundfläche hat.

63) Der Kegel, Fig. 29 und 30, ist ein Körper, der einen Kreis zur Grundfläche hat und dessen convexe Seiten sich in einer Spitze A endigen. Man kann sich vorstellen, er entstehe dadurch, daß man ein rechtwinkliges Dreieck um eine seiner Katheten (so heißen die den rechten Winkel begränzenden Seitenlinien) dreht.

64) Eine von der Spitze des Kegels nach dem Mittelpuncte der Grundfläche gezogene gerade Linie heißt die Axe des Kegels.

65) Wenn diese Linie senkrecht auf der Grundfläche steht, so heißt der Kegel ein gerader, ist sie geneigt, so heißt er ein schiefer oder schräger.

66) Wird der Kegel von der Spitze bis zur Basis in der Richtung der Axe geschnitten, so bildet der Durchschnitt ein Dreieck.

67) Wird ein gerader Kegel unter einem rechten Winkel zur Axe durch eine Ebene geschnitten, so bildet der Durchschnitt einen Kreis.

68) Wird er schräg zu der Axe durchschnitten, so ist der Durchschnitt, wie in Fig. 31, eine Ellipse. Ein auf dieselbe Weise gemachter Durchschnitt eines Cylinders ist ebenfalls eine Ellipse, und bei'm Cylinder läßt sich dieses leicht begreifen. Bei'm Kegel leuchtet es auf den ersten Blick nicht so deutlich ein. Vielen scheint es, als müßte ein solcher Durchschnitt oval, d. h. nach dem einen Ende breiter, als nach dem andern zu seyn. Jedermann kann sich aber davon überzeugen, daß diese Meinung irrig ist, wenn er einen Kegel anfertigt und ihn schräg durchsägt. Man wird dann finden, daß ein Durchschnitt, der schräg zur Axe gerichtet ist, immer eine regelmäßige Ellipse bildet, und dieß ist der Fall, sowohl bei einem geraden, als schiefen Kegel, und bei'm letztern nur in einer besondern Richtung nicht.

69) Wenn der Durchschnitt, wie in Fig. 32, parallel mit einer der Seiten des Kegels gemacht wird, so heißt die den Durchschnitt begränzende Kurve ABC eine Parabel.

70) Ist der Durchschnitt parallel mit der Axe gerichtet, wie in Fig. 33. so entsteht eine Hyperbel ABC.

Diese Kurven, welche aus den sogenannten Kegelschnitten entstehen, besitzen verschiedene Eigenschaften, welche im Bezug auf Astronomie Physik und viele angewandte Wissenschaften von großer Wichtigkeit sind.

71) Die Kugel ist ein Körper, der von einer convexen Oberfläche begränzt wird, die in allen ihren Puncten gleichweit von einem, innerhalb der Kugel befindlichen Puncte, dem sogenannten Mittelpuncte (Centrum), entfernt ist (s. Fig. 34).

72) Man kann sich vorstellen, sie sey durch die Drehung eines Halbkreises um seinen Durchmesser entstanden. So werden auch thönerne Kugeln auf der Töpferscheibe mittelst einer halbkreisförmigen Form oder Patrone gebildet. Der Durchmesser des Halbkreises, um welchen sich der letztere dreht, ist die Axe der Kugel.

73) Die Enden der Axe heißen die Pole.

74) Jede Linie, welche durch den Mittelpunct der Kugel geht, und durch die Peripherie derselben begränzt wird, ist ein Durchmesser der Kugel.

75) Jeder ebene Durchschnitt einer Kugel ist ein Kreis, und jeder durch die Mitte der Kugel gehende Durchschnitt ein größter Kreis, z. B. AB Fig. 34. Jeder andere Durchschnitt, z. B. CD, ist ein kleinerer Kreis.

76) Jede durch eine Ebene von einer Kugel abgeschnittene Portion heißt ein Kugelsegment (Kugelabschnitt), und wenn die Ebene durch den Mittelpunct geht, so theilt sie die Kugel in zwei gleiche Theile oder Halbkugeln (Hemisphären).

77) Ein Conoid ist ein körperlicher Raum, der durch die Umdrehung eines Kegelschnitts um seine Axe entsteht, und kann folglich ein elliptisches Conoid, ein parabolisches Conoid, oder ein hyperbolisches Conoid seyn. Ist es elliptisch, so nennt man es in der Regel ein Sphäroid. Diese körperlichen Räume nennt man auch Ellipsoide, Hyperboloide und Paraboloide.

78) Das Sphäroid (Fig. 35) ist ein körperlicher Raum, dessen Entstehung man sich so vorstellen kann, als ob eine Halbellipse um ihre große oder kleine Axe gedreht worden wäre, und der Mittelpunct der Ellipse ist zugleich der Mittelpunct des Sphäroids.

79) Die Linie, um welche sich die Halbellipse dreht, heißt die Axe des Sphäroids.

80) Entsteht das Sphäroid durch Drehung um die kleine oder Nebenaxe, so nennt man es ein flaches oder plattes.

81) Entsteht es durch die Drehung der Halbellipse um die große oder Hauptaxe, so heißt es ein längliches Sphäroid.

82) Jeder Durchschnitt eines Sphäroids, der senkrecht zu der Axe gerichtet ist, ist ein Kreis, jeder andere eine Ellipse.

83) Alle mit einander parallel streichende Durchschnitte eines Sphäroids sind ähnliche Figuren.

Ein abgestutzter Kegel, eine abgestutzte Pyramide sind solche, von denen mittelst einer durchgelegten Ebene ein Stück abgeschnitten ist. Die Ebene läßt man mehrentheils parallel mit der Grundfläche streichen.

84) Ein regelmäßiger Körper ist ein solcher, dessen Seitenflächen sämmtlich einander decken.

85) Die Seitenlinien dieser Seitenflächen bilden die Kanten des Körpers.

86) Es giebt nur fünf regelmäßige Körper dieser Art: 1) das Tetraëdron, eine regelmäßige Pyramide, die durch 4 Dreiecke begränzt ist; 2) das Hexaëdron, oder der Würfel, der von 6 Quadraten eingeschlossen wird; 3) das Octaëdron, mit acht dreieckigen Seitenflächen; 4) das Dodecaëdron mit 12 fünfeckigen Seitenflächen; 5) das Icosaëdron mit 20 dreieckigen Seitenflächen.

Diese regelmäßigen Körper lassen sich leicht aus Pappe bilden, indem man die Figuren A, B, C, D, F ausschneidet, die angegebenen Fugen halb durchschneidet, die Seitenflächen gegeneinander schlägt, und an den neugebildeten Fugen zusammenleimt.

87) Das Verhältniß einer Größe zur andern ist die Beziehung der einen, B, als Zahl, auf die andere, A, als Einheit.

88) Das Maaß eines solchen Verhältnisses erfährt man also, indem man ermittelt, wie oft das zweite Glied im ersten enthalten ist, oder indem man mit dem zweiten in das erste dividirt.

89) Drei Größen oder Zahlen A B C nennt man proportional, wenn sich die erste zur zweiten verhält, wie die zweite zur dritten. Demnach sind die Zahlen 2, 4, 8 proportional, weil 4 in 8 eben so oft enthalten ist, wie 2 in 4.

90) Eine geometrische Proportion ist die Angabe von vier Größen, A, B, C, D, deren erste zur zweiten dasselbe Verhältniß hat, wie die dritte zur vierten. Man bezeichnet sie durch das Divisionszeichen zwischen den Größen des ersten und des zweiten Paares, und das Gleichheitszeichen zwischen den beiden Paaren. Die vier Größen, welche paarweise einerlei Verhältniß haben, nennt man proportionirte Größen, quanta proportionata, z. B. $A : B = C : D$, d. h., A verhält sich zu B, wie C zu D, oder der Quotient $\frac{B}{A} =$ dem Quotient $\frac{D}{C}$, oder B auf A als Einheit bezogen, giebt dieselbe unbenannte Zahl, welche D giebt, wenn man sie auf C bezieht.

91) Die Größen, welche eine Proportion bildet, nennt man ihre Glieder, termini, und zwar äußere, extremi, das erste und vierte, A und D; mittlere, medii, das zweite und dritte, B und C; ähnlich liegende, homologi, heißen das erste und dritte, A und C, als Vorderglieder, oder das zweite und vierte, B und D, als Hinterglieder.

92) Benannte Zahlen können nur dann ein Verhältniß zu einander haben, wenn sie von einerlei Art sind. Sollen also verschiedenartige Dinge in einer Proportion vorkommen, so kann dieß nur in verschiedenen Gliederpaaren stattfinden. Z. B. in $A : B = C : D$ müssen C und D, so wie A und B von einerlei Art seyn, wenn auch A und C von verschiedener Art wären.

93) Sind zwei Größen gleich, so haben sie zu einer und derselben dritten einerlei Verhältniß; und haben zwei Größen zu einer drit-

ten einerlei Verhältniß, so sind sie gleich, z. B., wenn $A = B$, so ist auch $A : C = B : C$, und wenn $A : C = B : C$, so ist $A = B$.

94) Wenn zwei Verhältnisse einem dritten gleich sind, so sind sie einander selbst gleich, z. B. wenn $A : B = C : D$ und $E : F = C : D$, so ist auch $A : B = E : F$.

95) So wie man aus einer Proportion unmittelbar zwei gleiche Quotienten ableiten kann, so kann man auch aus zwei gleichen Quotienten (vorausgesetzt, daß die Divisoren und Dividenten, woraus sie gebildet sind, darin angegeben seyen) auf eine Proportion schließen, z. B. $\frac{B}{A} = \frac{D}{C}$ giebt die Proportion $A : B = C : D$.

96) Eine abgesonderte Proportion, discreta, heißt eine solche, deren mittlere Glieder verschieden sind, wie obige $A : B = C : D$; eine stätige, continua, aber, deren mittlere Glieder einerlei sind, als $4 : 8 = 8 : 16$, die man auch durch $\div\!\!\div\; 4 . 8 . 16$ bezeichnet, wo das mittlere Glied 8 zugleich das Hinterglied des ersten, und das Vorderglied des zweiten Verhältnisses macht.

97) Aus jeden zwei gleichen Producten, B mal C = A mal D, läßt sich eine Proportion bilden, wenn man die Factoren des einen Products zu äußern, die des andern zu mittlern Gliedern macht, $A : B = C : D$, oder $A : C = B : D$.

98) Verschiedenartige Größen sind einander proportional, quantitates, proportionales, oder in geradem Verhältniß zu einander, in ratione directa, wenn aus einer Vermehrung der einen nothwendig eine Vermehrung der andern in demselben Verhältnisse folgt, so daß mit derselben Zahl, womit jede beliebige Menge der einen Größe multiplicirt oder dividirt wird, die zugehörige Menge der zweiten Größe auch multiplicirt oder dividirt werden muß.

99) Verschiedenartige Größen sind einander umgekehrt proportional, inverse proportionales, oder in umgekehrtem Verhältniß zu einander, in ratione inversa, wenn aus einer Vermehrung der einen nothwendig eine Verminderung der andern in demselben Verhältnisse folgt: so daß mit derselben Zahl, womit jede beliebige Menge der einen Größe multiplicirt oder dividirt wird, die zugehörige Menge der zweiten Größe dividirt oder multiplicirt werden muß.

100) Eine fortlaufende Proportion nennt man eine solche, wo sich das erste Glied wie zum zweiten verhält, wie das zweite zum dritten, wie das dritte zum vierten, wie das vierte zum fünften 2c.

101) Ein zusammengesetztes Verhältniß erhält man durch die Multiplication mehrerer Vorderglieder und Hinterglieder miteinander, z. B., wenn $A : B = 3 : 5$, $B : C = 5 : 8$, und $C : D = 8 : 6$, so ist $A : D = 3 . 5 . 8 : 5 . 8 . 6 = 120 : 240 = 1 : 2$ oder $A : D = 1 : 2$.

102) Ein Satz, der behauptet, daß Etwas so sey oder nicht, heißt ein Grundsatz, axioma, wenn seine Wahrheit nothwendig allgemein anerkannt wird; ein Lehrsatz, theorema, aber, wenn seine Wahrheit erst aus andern Wahrheiten hergeleitet werden muß.

103) Ein Satz, der Etwas zu bewerkstelligen verlangt, heißt eine

Forderung, postulatum, wenn die Art der Bewerkstelligung und deren Richtigkeit nothwendig allgemein einleuchtet; eine Aufgabe, problema, aber, wenn die Art der Verrichtung gelehrt, und deren Richtigkeit dargethan werden muß.

104) Ein Satz, der in einem andern Satze enthalten ist, oder daraus unmittelbar gefolgert werden kann, heißt ein Zusatz, corollarium.

105) Das, was einer Erklärung, einem Lehrsatze, einer Aufgabe, oder einem Zusatze zur Erläuterung, Geschichte, Lehrvortrage oder Anwendung beigefügt wird, heißt eine Anmerkung, scholion.

106) Zuweilen wird ein Satz, der an sich in den Zusammenhang des Vortrags nicht gehört, in der Absicht eingeschoben, daß ein folgender Satz durch dessen Hülfe bewiesen werden könne, und heißt alsdann ein Lehrsatz, lemma.

107) Zu einem Lehrsatze gehört: 1) die Voraussetzung (hypothesis), welche das als wahr Angenommene angiebt; 2) die Behauptung (thesis probanda), welche das, vermöge der Voraussetzung, als wahr anzunehmende angiebt; 3) der Beweis (demonstratio), der die Behauptung aus der Voraussetzung mittelst bekannter Wahrheiten herleitet, zu welcher Herleitung oft noch eine Construction oder eine Verzeichnung von Hülfslinien erforderlich ist.

108) Zu einer Aufgabe gehört: 1) die Frage oder die Aufgabe selbst (in engern Sinne des Worts), die aus dem Gegebenen und dem Gesuchten besteht; 2) die Auflösung (solutio), die das Gesuchte aus dem Gegebenen finden lehrt; 3) der Beweis, der die Richtigkeit der Auflösung zeigt.

109) Der Beweis besteht in einer Darstellung der nothwendigen Verbindung des zu beweisenden Satzes mit unbezweifelten Gründen, welche entweder für sich einleuchtend sind, wie die Erklärungen, Grundsätze und Forderungen, oder im Vorhergehenden bereits bewiesen worden sind.

110) Der synthetische Beweis geht von den Gründen aus, und führt zur Conclusion fort.

111) Der analytische Beweis geht von der Conclusion aus, und führt zu den Gründen fort.

112) Der apagogische oder indirecte Beweis geht von dem (contradictorischen) Gegentheile der Behauptung als von einer neuen selbstständigen Voraussetzung aus, und führt bis zu einem Widerspruche mit der ursprünglichen Voraussetzung, oder mit andern bereits erkannten Gründen, woraus dann die Falschheit jenes Gegentheils, d. i. die Richtigkeit der Behauptung folgt.

113) Die Induction beweis't den Satz für alle einzelne Fälle, und schließt daraus auf die Allgemeinheit des Satzes.

114) Die Umkehrung ist die Verwechselung der Voraussetzung und Behauptung bei einem Lehrsatze; oder des Gegebenen und des Gesuchten bei einer Aufgabe.

115) Nimmt man ohne Beweis an, daß Etwas so sey oder nicht so sey, so heißt ein solcher Satz, wofern dessen Richtigkeit nicht für sich einleuchtend ist, eine Hypothese. Mit diesem letzteren Worte be-

nannte man auch sonst wohl einen Satz, welcher von willkürlichen Einrichtungen, Bezeichnungen u. dergl. Rechenschaft giebt; wofür aber der deutsche Ausdruck Wahlsatz oder willkührlicher Satz vorzüglicher scheint.

116) Hypothesen gebraucht man in der angewandten Mathematik und Physik zur Erklärung von Erfahrungen. Man hält sie für richtig, sobald sich alle vorhandenen Erfahrungen daraus ableiten lassen.

117) Zu den unzureichenden Beweisen, wenn ein Beweis aus Gründen a priori unmöglich ist, gehören die Erfahrungen, oder Beweise a posteriori. Diese werden in Beobachtungen und Versuche eingetheilt, und dienen den erwiesenen Sätzen zu Beispielen, den Hypothesen zur Prüfung. Allemal sind sie von großem Nutzen; in manchen Fällen aber unentbehrlich und ohne sie keine Erkenntniß möglich, da sie dann sogar zu den Grundsätzen mit gehören.

118) Das Zeichen = bedeutet, daß die Größen oder Werthe, zwischen welche es gesetzt ist, einander gleich sind.

119) Das Zeichen + giebt an, daß der gleich darauf folgende Werth zu dem dem Zeichen unmittelbar vorhergehenden addirt werden soll.

120) Das Zeichen — bedeutet, daß der ihm nachfolgende Werth von dem ihm vorhergehenden abgezogen werden soll.

121) Die Zeichen $\times$ und . geben an, daß Multiplication stattfinden soll.

122) Das Divisionszeichen ist :.

Geometrische Aufgaben.

Aufgabe 1. — Eine gegebene Linie AB in zwei gleiche Theile zu theilen.

Von den Puncten A und B, Fig. 1, Taf. 96, als Mittelpuncten, aus, und mit irgend einer Oeffnung des Cirkels, die größer als halb AB ist, beschreibe man Kreisbögen, die einander in cd schneiden. Hierauf ziehe man die Linie cd und der Punct E, wo dieselbe die Linie AB schneidet, ist die gesuchte Mitte der letztern.

Aufgabe 2. — Auf einen gegebenen Punct C, Fig. 2 und 3, einer geraden Linie AB einen Perpendikel zu fällen.

Erster Fall. — Wenn der gegebene Punct sich in der Nähe der Mitte der Linie befindet, so stecke man auf beiden Seiten des Punctes C zwei gleiche Entfernungen Cd, und Ce ab; von d und e beschreibe man dann mit irgend einer Oeffnung des Cirkels, die größer ist, als Cd und Ce, zwei Kreisbögen, die einander in f schneiden, und zuletzt ziehe man durch die Puncte fC eine gerade Linie, welche das gesuchte Perpendikel seyn wird.

Zweiter Fall. — Befindet sich der Punct, auf den das Perpendikel gefällt werden soll, am Ende oder in der Nähe des Endes der Linie AB, Fig. 2, so beschreibt man um irgend einen Punct über der Linie, z. B. d, mit dem Radius dC den Bogen eCf, der AB in e und C schneidet. Durch den Mittelpunct d und den Punct e ziehe man die Linie e d f, welche den Bogen e C f in f schneidet. Dann ziehe man durch die Puncte f C die Linie f C, und diese wird das gesuchte Perpendikel seyn.

Aufgabe 3. — Von einem gegebenen Puncte f, Fig. 2 u. 3, ein Perpendikel auf eine gerade Linie A B zu fällen. Von dem Puncte f beschreibe man mit irgend einem Halbmesser den Bogen d e, welcher A B in d und e schneidet. Von den Puncten e d aus beschreibe man zwei Kreisbögen, die einander in g schneiden, und ziehe durch die Puncte f g eine gerade Linie, so steht diese auf A B senkrecht.

Aufgabe 4. — Einen Winkel zu zeichnen, der einem andern gegebenen Winkel gleich ist.

Von dem Puncte B, Fig. 4, aus beschreibe man mit irgend einem Halbmesser den Bogen a b, welcher die Schenkel B a B b in den Puncten a b schneidet. Dann ziehe man die Linie D e, und von dem Puncte D aus, mit derselben Oeffnung des Cirkels, wie früher, den Bogen e f, welcher D e in e schneidet. Man nehme die Entfernung b a, und stecke sie von e aus auf dem Bogen e f ab; endlich ziehe man durch die Puncte D f die Linie D f, und der Winkel e D f wird, der Aufgabe gemäß, dem Winkel b B a gleich seyn.

Aufgabe 5. — Einen gegebenen Winkel A B C in zwei gleiche Winkel zu theilen.

Von dem Puncte B aus beschreibe man mit irgend einem Halbmesser den Bogen A C, hierauf ziehe man von A und C mit demselben oder irgend einem andern Halbmesser, Bögen, die sich einander in d schneiden; endlich ziehe man die Linie B d, und diese wird den Winkel A B C halbiren.

Aufgabe 6. — Einen Winkel von irgend einer gegebenen Anzahl von Graden zu zeichnen.

Dieß kann auf verschiedene Weise geschehen. Gewöhnlich bedient man sich eines sogenannten Transporteurs, nämlich eines Halbkreises von Messing, dessen Peripherie oder Limbus in Grade getheilt ist. A B, Fig. 6, sey eine gegebene Linie, und vom Puncte A aus soll eine Linie gezogen werden, welche mit A B einen Winkel von, z. B., 20° bildet; alsdann legt man die gerade Seite des Transporteurs an die Linie A B, zählt vom Ende B des Limbus aus 20° und bezeichnet diese Stelle, etwa bei C, auf dem Papiere; hierauf nimmt man den Transporteur weg, und zieht die Linie A C, welche mit A B den gewünschten Winkel bildet. Oder es kann mittelst einer sogenannten graduirten Sehnenlinie geschehen. Man öffnet den Cirkel bis auf 60° der Sehnenlinie, und beschreibt mit diesem Halbmesser den Bogen a b Fig. 4 um den Punct B. Hierauf steckt man die gesuchte Anzahl von Graden von b nach a ab, und zieht die Linie B a, welche mit B b den gewünschten Winkel bilden wird.

Aufgabe 7. — Durch einen gegebenen Punct C, Fig. 7, eine Linie parallel mit einer gegebenen Linie A B zu ziehen.

Erster Fall. — Man nehme irgend einen Punct d in A B, beschreibe mit dem Abstand C d zwei Bögen e C und d f um d und C, welche die Linie A B in d und e schneiden, mache d f = e C, ziehe durch C f die Linie C f, und dieß wird die gesuchte Parallellinie seyn.

Zweiter Fall. — Wenn die Parallellinie einen bestimmten Abstand von A B haben soll, so beschreibe man von irgend zwei Puncten c und d der Linie A B mit einem Halbmesser, der dem gegebenen Abstande gleich ist, Bögen an die Puncte e und f, und ziehe die Linie so, daß C B sie beide Bögen berührt, ohne dieselben zu schneiden; die Linie C B wird mit A B parallel steigen.

Aufgabe 8. — Eine gegebene Linie, A B, Fig. 8, in irgend eine gegebene Anzahl von gleichen Abschnitten zu theilen.

Von dem einen Ende A der Linie ziehe man unter einem beliebigen Neigungswinkel zu A B die Linie A c, und vom andern Ende B die Linie B d unter demselben Neigungswinkel. Auf jeder dieser beiden Linien A c, B d stecke man, von A und B aus, so viele gleiche Abschnitte ab, als die Zahl der Theile, in welche A B getheilt werden soll, ziehe die Linien c 5 4,6, 3,7, und A B wird auf die erforderliche Weise getheilt werden.

Aufgabe 9. — Den Mittelpunct eines gegebenen Kreises zu finden.

Man ziehe irgend eine Sehne A B, Fig. 9, halbire dieselbe mittelst des Perpendikels C D, halbire C D mittelst des Durchmessers E F, und der Durchschnittspunct O wird der gesuchte Mittelpunct seyn.

Aufgabe 10. — Eine Tangente durch einen gegebenen Punct A, Fig. 10, eines Kreises zu ziehen.

Von dem Mittelpunct O ziehe man den Halbmesser O A, ziehe die Linie D F durch den Punct A senkrecht zu O A, und die gewünschte Tangente ist gefunden.

Aufgabe 11. — Eine Tangente durch einen gegebenen Punct B, Fig. 11, eines Kreises oder Kreissegments A B C zu ziehen, ohne von dem Mittelpunct des Kreises Gebrauch zu machen.

Man stecke von dem Puncte B aus, nach d und e zwei gleiche Abschnitte ab, und ziehe die Sehne e B, beschreibe um B, als Mittelpunct, mit einer Oeffnung der Cirkelspitzen gleich B d, den Bogen f d g, welcher die Sehne e B in f schneidet, mache d g = d f, ziehe durch g die Linie g B, und diese wird die gewünschte Tangente seyn.

Aufgabe 12. — Es seyen drei Puncte, A B C, Fig. 12, gegeben, die nicht in einer geraden Linie liegen. Es soll ein Kreis durch dieselben gezogen werden.

Man halbire die Linien A B, B C durch die Perpendikel a b, b a, die in d zusammentreffen. Um diesen Punct beschreibe man mit dem Abstand d A, d B oder d C den gesuchten Kreis A B C.

Aufgabe 13. — Irgend ein beliebig langes (A B) und hohes (C D) Kreissegment zu zeichnen.

Man halbire A B, Fig. 13, mittelst des Perpendikels D g, welches A B in c schneidet. Von c aus mache man c D auf dem Perpendikel = C D, ziehe A D und halbire es mittelst des Perpendikels e f, welches D g in g schneidet. Um den Mittelpunct g ziehe man A D B, das verlangte Segment.

Aufgabe 14. — Ein Segment eines Kreises von beliebiger

Länge, A B, und beliebiger Höhe, C D, zu beschreiben, ohne von dem Mittelpuncte Gebrauch zu machen.

Man bedient sich hierzu zweier Lineale, die man so legt, daß sie in C, Fig. 14, zusammentreffen, und ihre Ränder durch A und B streichen. Man befestigt sie bei C und giebt ihnen durch ein Riegelholz mehr Haltbarkeit. Bei A und B schlägt man Stifte ein und befestigt in C eine Bleistiftspitze; dreht man nun diese Art von Winkelhaken so, daß die Ränder der Lineale stets mit den Stiften bei A und B in Berührung bleiben, so beschreibt der Bleistift bei C das verlangte Segment.

Aufgabe 15. — In irgend ein gegebenes Dreieck einen Kreis zu zeichnen.

Man halbire zwei beliebige Winkel, A und C, Fig. 15, mittelst der Linien A D und D B. Von dem Durchschnittspuncte D aus, fälle man das Perpendikel D E, welches der Halbmesser des gewünschten Kreises seyn wird.

Aufgabe 16. — In ein gegebenes Quadrat ein regelmäßiges Achteck zu zeichnen.

Man ziehe die Diagonalen A C und B D, Fig. 16, die einander bei e schneiden; um die Puncte A B C D beschreibe man mit dem Halbmesser e C, die Bögen h e l, k e n, m e g, f e i, ziehe die Linien f n, m h, k i, l g, und man wird das gewünschte Achteck erhalten.

Aufgabe 17. — In einem gegebenen Kreis irgend ein regelmäßiges Vieleck zu zeichnen.

Man theile die Peripherie in so viel gleiche Theile, als das zu zeichnende Viereck Theile hat, und verbinde die Theilpuncte durch gerade Linien.

Aufgabe 18. — Auf einer gegebenen Linie A B ein gleichseitiges Dreieck zu errichten.

Man ziehe um die Puncte A und B, Fig. 18, mit dem Halbmesser A B, Bögen, die einander bei C schneiden, ziehe A C und B C, und A B C wird das verlangte Dreieck seyn.

Aufgabe 19. — Ein Dreieck zu machen, dessen Seitenlinien drei gegebenen Linien D, E, F, Fig. 19, gleich sind, von denen keine so lang ist als die Summe der beiden andern.

Man ziehe A B = D, beschreibe um H, mit dem Halbmesser F, den Bogen C D, und um B, mit dem Radius E, einen zweiten Bogen, der den ersten bei C schneidet, ziehe A C und C B, und A B C wird das gewünschte Dreieck seyn.

Aufgabe 20. — Ein Trapezium zu zeichnen, welches einem andern gegebenen, A B C D, Fig. 20, gleich und ähnlich ist oder dasselbe deckt.

Man theile das gegebene Trapezium A B C D, mittelst der Diagonale D B, in zwei Dreiecke, mache E F gleich A B, construire auf E F das Dreieck E F H, dessen Seitenlinien nach der vorigen Aufgabe denen des Dreiecks A B D bezüglich gleich seyn werden. Auf H F, welches D B gleich ist, construire man das Dreieck H G F = D B C, und E F G H wird das gesuchte Trapezium seyn.

Auf ähnliche Weise kann jede geradlinigte Figur copirt werden, da sie sich, wenn sie auch noch so unregelmäßig wäre, in Dreiecke zerlegen läßt. Dieser Methode bedienen sich die Feldmesser bei Anfertigung von Rissen.

Aufgabe 21. — Ein Quadrat zu zeichnen, welches zwei gegebenen Quadraten gleich ist.

Man lasse die Seitenlinien DE und DF, Fig. 21, der beiden gegebenen Quadrate A und B, die beiden Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks, F D E, bilden, ziehe die Hypotenuse FE, zeichne auf derselben ein Quadrat, und somit ist die Aufgabe erfüllt.

Aufgabe 22. — Es seyen zwei gerade Linien AB, CD, Fig. 22, gegeben; es soll die dritte Proportionallinie gefunden werden.

Man zeichne einen beliebigen Winkel, HEI, mache $EF = AB$ und $EG = CD$, ziehe FG, mache $EI = EF$, und ziehe HI parallel mit FG, so wird EH die gesuchte dritte Proportionallinie seyn, denn $EF : EG = EH : EI$, oder $AB : CD = CD : EI$.

Aufgabe 23. — Zu drei gegebenen Linien soll die vierte Proportionallinie gefunden werden.

Man zeichne den beliebigen Winkel HGI, Fig. 23, mache $GH = AB$, und $GI = CD$, ziehe HI, mache $GK = EF$, ziehe KL durch K parallel mit HI, so wird GL die gesuchte vierte Proportionallinie seyn, denn $GH : HI = GK : GL$ oder $AB : CD = EF : GL$.

Aufgabe 24. — Eine gegebene Linie, AB, nach demselben Verhältniß zu theilen, nach welchem eine andere, CD, getheilt ist.

Man zeichne irgend einen Winkel KHI, und mache $HI = AB$, trage hierauf von H nach K die verschiedenen Abschnitte von CD auf, und ziehe die Linie KI; hierauf ziehe man die Linien he, if, kg, parallel mit KI, und diese werden die Linie HI auf die gewünschte Weise theilen.

Aufgabe 25. — Zu zwei gegebenen Linien, AB und CD, die mittlere Proportionale zu finden.

Man ziehe EC, und mache $EF = AB$, und $FC = CD$, halbire EC in H, und beschreibe mit dem Halbmesser HE oder CH den Halbkreis EIC, erreichte in F ein Perpendikel, und IF wird die gesuchte mittlere Proportionale seyn.

Aufgabe 26. — Eine Ellipse zu beschreiben.

Man befestige zwei Stifte an den Puncten E und F, Fig. 25, Taf 97, lege einen Faden ohne Ende locker um dieselben, ziehe ihn mittelst eines Bleistifts straff, und bewege den letztern in der Art, wie es der straffgezogene Faden gestattet, so wird die Spitze eine Ellipse zeichnen. Die Puncte E und F, wo sich die Stifte befinden, heißen die Brennpuncte oder foci. Die Linie AB, welche durch die Brennpuncte streicht, heißt die große Axe. Der Punct G, welcher sich bei der Mitte der großen Axe befindet, ist der Mittelpunct der Ellipse. Die Linie CD, welche diesen Mittelpunct rechtwinklich zu der großen Axe durchschneidet, heißt die kleine Axe der Ellipse. Der Parameter ist eine gerade Linie, welche durch einen der Brennpuncte im rechten Winkel zu der großen Axe gezogen ist, und von der Ellipse begränzt wird. Jede gerade Linie, welche durch den Mittelpunct geht, und von der Ellipse begränzt wird, heißt ein Diameter, oder Durchmesser. Die doppelte Ordinate ist eine Linie, welche durch irgend einen Durchmesser parallel mit einer Tangente der Ellipse gezogen ist, welche die Ellipse am Ende des Durchmessers berührt.

Aufgabe 26. — Es sey die große Axe A B, und die kleine Axe C D, Fig. 26, irgend einer Ellipse gegeben. Man sucht die beiden Brennpuncte, um von ihnen aus die Ellipse zu ziehen.

Man nehme die halbe große Axe A E oder E B, und beschreibe damit um C einen Bogen, der A B bei F und G schneidet, welche die beiden Brennpuncte sind. Man befestige an diese Puncte Stecknadeln, lege um diese einen Faden ohne Ende, der mehr als doppelt so lang ist, als F G, und verfahre auf die oben angegebene Weise.

Aufgabe 27. — Eine Ellipse, zu der beide Axen gegeben sind, mittelst einer besondern Vorrichtung zu beschreiben.

Dieses Instrument, Fig. 27, besteht aus zwei Linealen, die einander rechtwinklich kreuzen, und von denen jedes mit einer Rinne versehen ist. In diesen Rinnen spielt ein Stab mit zwei verschiebbaren Hülsen und Stiften, und mittelst eines am Ende dieses Stabs befindlichen Stifts läßt sich die Kurve auf folgende Weise beschreiben. Man mache den Abstand des ersten Stifts B vom Bleistifte A der Hälfte der kleinen Axe, und den Abstand des zweiten Stifts C von A, der halben großen Axe gleich, senke die Stifte in die Rinnen, und bewege den Bleistift A, welcher die Ellipse beschreiben wird.

Aufgabe 28. — Die Figur einer Ellipse mit einem Cirkel so lang (A B) und breit (C D), als man wünscht, zu ziehen.

Man ziehe B P parallel mit und so lang als E C, und halbire diese Linie bei 1; alsdann ziehe man 1 C und P D, die einander bei K schneiden, halbire K C durch eine Senkrechte, welche bei O mit der Verlängerung von C D zusammentrifft, und beschreibe um O, mit dem Halbmesser O C, den Quadranten C G Q. Durch Q und A ziehe man Q G, welche den Quadranten bei G schneidet; dann ziehe man G O, welche Linie A B bei M schneidet, mache E L = E M, und E N = E O, ziehe durch N und L die Linien N H und N I; dann sind M L N O die vier Mittelpuncte, um welche die vier Quadranten der Ellipse beschrieben werden können.

Wir müssen bemerken, daß dieß keine wahre Ellipse ist, sondern daß die so erhaltene Figur sich derselben nur nähert; es ist unmöglich, eine vollkommene Ellipse mit einem Cirkel zu ziehen, indem die Kurve einer Ellipse durchgehends von der eines Kreises verschieden ist, und keine zusammengesetzten Kreisportionen je eine Ellipse bilden können. Indeß läßt sich auf diese Weise eine Figur construiren, welche sich einer Ellipse nähert, wenn man das zu diesem Zwecke eigends bestimmte Instrument nicht besitzt, oder sich desselben, wegen der Kleinheit der zu ziehenden Figur, nicht bedienen kann. Da, wo die Kreissegmente aneinanderstoßen, ist der Fehler einigermaaßen bemerkbar, und man thut am besten, wenn man die Kreisbögen nicht ganz zusammenstoßen läßt, sondern die Kurve mit der Hand vollends auszieht.

Aufgabe 29. — Die große und kleine Axe einer gegebenen Ellipse ACDB zu, Fig. 29, finden.

Man ziehe zwei parallele Linien AB, CD, welche die Ellipse in den Puncten A, B, C, D schneiden, halbire dieselben bei cf, ziehe durch cf GH eine gerade Linie, welche die Ellipse bei GH schneidet, halbire GH bei I, und man hat den Mittelpunct gefunden. Man beschreibe um I, mit einem beliebigen Halbmesser, einen Kreis, der die Ellipse in den 4 Puncten k, l, m, n schneidet, ziehe die Linien kl und mn, halbire kl oder mn bei o oder p, ziehe durch die Puncte oI, oder pI die Linie QR, welche die Ellipse in Q und R schneidet, so ist QR die große Axe. Durch I ziehe man TS, parallel mit kl, welche die Ellipse bei T und S schneidet, und TS wird die kleine Axe seyn.

Aufgabe 30. — Eine Ellipse, die einer gegebenen, ADBC, Figur 30, ähnlich ist, von irgend einer gegebenen Länge, IK, und Breite, ML, zu beschreiben.

AB und CD seyen die beiden Axen der gegebenen Ellipse; durch die Berührungspuncte A, D, B, C vollende man das Rechteck GEHF, und ziehe die Diagonalen EF und GH, welche bei R durch den Mittelpunct gehen werden. Durch I und K ziehe man PN und OQ parallel mit CD, welche die Diagonalen EF und GH bei P, N, Q, O schneiden. Man ziehe die Linien PO und NQ, welche CD bei L und M schneiden; dann ist IK die große und ML die kleine Axe der Ellipse, welche der gegebenen ADBC ähnlich seyn wird.

Aufgabe 31. — Eine Parabel zu zeichnen.

Man befestige einen Faden, der so lang ist, wie BC bei C, Fig. 31, an dem Ende eines Winkelhakens ABC und das andere Ende bei F; bewegt man nun die Seite AB des Winkelhakens längs der Linie AD, so daß der Punct E immer dicht mit dem Rande BC in Berührung, und der Faden straff bleibt, so beschreibt der Punct oder die Bleistiftsspitze E eine Kurve EGIH, welche man eine Parabel nennt.

Der Punct F, um welchen sich der Faden dreht, ist der Brennpunct; die Linie IK, welche die Parabel in zwei Hälften schneidet, ist die Axe.

Der Punct I, wo LK die Parabel schneidet, heißt deren Scheitel. Die Linie GH, welche, rechtwinklich zu der Axe IK, durch den Brennpunct F streicht, und von der Parabel begränzt wird, heißt der Parameter. Jede Linie MN, die parallel mit der Axe IK streicht, ist ein Durchmesser. Eine doppelte Ordinate ist eine gerade Linie, RS, die parallel mit einer Tangente bei M streicht, in welchem Puncte sich der Durchmesser in der Kurve endigt. Eine Abscisse ist derjenige Theil eines Durchmessers, welcher zwischen der Kurve und der Ordinate liegt, z. B., MN.

Aufgabe 32. — Eine Parabel zu zeichnen, indem man Puncte der Kurve aufsucht, wenn die Axe oder irgend ein Durchmesser und eine doppelte Ordinate, CD, Fig. 32, gegeben sind

Durch A ziehe man EF parallel mit CD, durch CD ziehe man DF und CE parallel mit AB, welche EF bei E und F schneiden. Man theile BC und BD in irgend eine Zahl gleicher Theile, z. B. 4;

ferner theile man C E und D F in dieselbe Anzahl gleicher Theile; durch die Puncte 1, 2, 3 in C D ziehe man die Linien 1 a, 2 b, 3 c u. s. w. parallel mit C D; desgleichen durch die Puncte 1, 2, 3 in C E und D F die Linien 1 A, 2 A, 3 A, welche die Parallellinien in den Puncten a, b, c schneiden; diese Puncte befinden sich dann in der Krümmung der Parabel.

Aufgabe 33. — Eine Hyperbel zu zeichnen.

Wenn B und C, Fig. 33, zwei feste Puncte sind, und sich ein Lineal A B um den Punct B drehen läßt, welches an seinem andern Ende einen Faden, A D C, trägt, der sich auch an den Punct C anschließt, und der Punct A um den Mittelpunct B gegen G hin bewegt wird, so wird der Winkel D des Fadens A D C, wenn derselbe immer straff und dicht an der Kante des Lineals A B gehalten wird, eine krumme Linie, D H G, beschreiben, und diese eine Hyperbel seyn.

Bewegte man das Ende B des Lineals um den Punct C, während der Faden sich vom Ende A des Lineals nach B erstreckte, und zeichnete man nach derselben Weise eine Kurve, so würde man die entgegengesetzte Hyperbel erhalten.

Die Brennpuncte sind die beiden Puncte B und C, um welche sich das Lineal und der Faden drehen; die große Axe ist die Linie I H, welche von den beiden Kurven begränzt wird, und wenn man sie weiter fortführt, durch die Brennpuncte streicht. Der Mittelpunct ist der Punct M bei der Mitte der großen Axe H I. Die kleine, oder Nebenaxe N O geht durch den Mittelpunct M und wird bei N und O durch einen von H aus gezogenen Kreis begränzt, dessen Radius = M C ist; ein Durchmesser ist jede Linie V W, die durch den Mittelpunct M gezogen, und von den gegenüberliegenden Kurven begränzt ist; der Nebendurchmesser eines andern ist eine Linie, welche durch den Mittelpunct parallel mit einer Tangente einer der beiden Kurven gezogen ist, und das Ende eines andern von den Kurven begränzten Durchmessers schneidet; eine Abscisse ist der innerhalb der Kurve liegende Theil eines nach innen fortgesetzten Durchmessers, welcher zwischen einer doppelten Ordinate und der Kurve liegt; eine doppelte Ordinate ist eine Linie, welche durch einen Durchmesser parallel mit dessen Nebendurchmesser gezogen ist, und an der Kurve ein Ende hat; der Parameter ist eine durch den Brennpunct gezogene Linie, die senkrecht auf der Hauptachse steht, und von der Kurve begränzt wird.

Aufgabe 34. — Eine Hyperbel zu zeichnen, indem man Puncte in deren Krümmung auffindet, wenn der Durchmesser oder die Axe A B, Fig. 34, deren Abscisse B G, und die doppelte Ordinate D C gegeben sind.

Durch G ziehe man E F parallel mit C D; von C D ziehe man C E und D F parallel mit B G, so daß sie E F in E und F schneiden; man theile C B und B D in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, z. B., 4, und ziehe durch die Theilpuncte 1, 2, 3, Linien nach A; ferner theile man E C und D F in dieselbe Anzahl von gleichen Theilen, also 4; von den Theilpuncten auf C E und D F ziehe man Linien nach G; eine durch die Durchschnittspuncte G a b u. s. w. gezogene Linie wird die verlangte Hyperbel seyn.

Bemerkungen.

1) Bei einem Kreise ist die halbe Sehne D C, Fig. 35, die mittlere Proportionallinie zwischen den Abschnitten A D und D B des senkrecht auf ihr stehenden Durchmessers A B; es verhält sich also $AD : DC = DC : DB$.

2) Die Sehne A C ist eine mittlere Proportionale zwischen A D und den Durchmesser A B; die Sehne B C ist eine solche zwischen DB und AB; demnach verhält sich $AD : AC = AC : AB$, und $BD : BC = BC : AB$.

3) Der Winkel A C B in einem Halbkreise ist immer ein rechter.

4) Das Quadrat der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist der Summe der Quadrate der beiden Katheten gleich, also:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$
und $$BC^2 = BD^2 + DC^2$$
und $$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

5) Zwei Dreiecke, die je gleiche Winkel haben, heißen gleichwinkelige Dreiecke und sind einander ähnlich.

6) In ähnlichen Dreiecken sind die entsprechenden Seitenlinien, d. h. diejenigen, welche gleichen Winkeln entgegen liegen, einander proportional.

7) Die Flächenräume ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate der entsprechenden Seitenlinien.

Messen von Oberflächen.

Aufgabe 1. — Den Flächenraum eines Parallelogramms zu finden, sey es nun ein Quadrat, ein Rechteck, ein Rhombus oder ein Rhomboid.

Man multiplicire die Länge mit der senkrechten Höhe, und das Product wird den Flächenraum ausdrücken.

Erstes Beispiel. — Den Flächenraum eines Quadrats von 6 Zoll Seitenlinie (Taf. 98, Flächen, Fig. 1) zu finden.

$$\begin{array}{r} 6 \\ 6 \\ \hline 36 \end{array}$$

Antwort: 36 Quadratzoll.

Zweites Beispiel. — Der Flächenraum eines Rechtecks, dessen Länge 9 F., und dessen senkrechte Höhe 4 F. beträgt, wird gesucht (Fig. 1).

$$\begin{array}{r} 9 \\ 4 \\ \hline 36 \end{array}$$

Antwort: 36 Q. F.

Drittes Beispiel. — Den Flächenraum eines Rhombus oder einer Raute zu finden, die 6 Ruthen Länge und 5 Ruthen senkrechter Höhe besitzt (Fig. 2).

$$\begin{array}{r} 6 \\ 5 \\ \hline 30 \end{array}$$

Antwort: 30 Quadratruthen.

Aufgabe 2. — Den Flächenraum eines Dreiecks zu finden.

Erste Regel. — Man multiplicire die Grundlinie mit der senkrechten Höhe, und halbire das Product.

Zweite Regel. — Wenn nur die drei Seiten gegeben sind, so addire man sie zusammen, und halbire die Summe, ziehe von der halben Summe jede Seite einzeln ab, multiplicire die halbe Summe den drei Resten nach einander, und die Quadratwurzel des letzten Productes wird den Flächenraum des Dreiecks ausdrücken.

Beispiel — Es wird der Flächenraum eines Dreiecks gesucht, dessen Grundlinie 6 Fuß, und dessen senkrechte Höhe 5 F. ist (Fig. 2).

$$\begin{array}{r} 6 \\ 5 \\ \hline 2\ |30|\ 15 \end{array}$$

Antwort: 15 Quadratfuß.

Aufgabe 3. — Eine Seitenlinie eines rechtwinkligen Dreiecks zu finden, wenn die andern beiden gegeben sind.

Das Quadrat der Hypotenuse ist der Summe der Quadrate der beiden andern Seitenlinien gleich; um also

1) Die Hypotenuse zu finden, addire man die Quadrate der beiden Katheten, und ziehe aus der Summe die Quadratwurzel.

2) Um eine der Katheten zu finden, subtrahire man das Quadrat der andern von dem Quadrat der Hypotenuse, und ziehe aus dem Reste die Quadratwurzel.

Erstes Beispiel. — Es wird die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks gesucht, dessen Grundlinie, A B, 4 Zoll, und dessen senkrechte Kathete, B C, 3 Zoll mißt (Fig. 3).

$$\begin{array}{rr} 4 & 3 \\ 4 & 3 \\ \hline 16 & 9 \\ 9 & \\ \hline 25 & \end{array}$$

Das Quadrat der Hypotenuse mißt also 25 Q. Z., und die Hypotenuse A C selbst 5 Z., denn 5 ist die Quadratwurzel von 25.

Zweites Beispiel. — Wie lang ist die senkrechte Kathete eines rechtwinkligen, Dreiecks, dessen Grundlinie, A B, 56 Fuß, dessen Hypotenuse, A C, 65 Fuß mißt.

56	65
56	65
336	325
280	390
3136	4225
	3136
	1089

Aus 1089 muß also die Quadratwurzel gezogen werden, und diese ist 33. Die senkrechte Kathete mißt also 33 Fuß.

Aufgabe 4. — Den Flächenraum eines Trapezoids zu finden.

Man multiplicire die Summe der beiden parallelen Seitenlinien mit der senkrechten Höhe, und halbire das Product.

Beispiel. — Von den parallelen Seitenlinien eines Trapezoids, Fig. 4, sey A B = 7 Zoll und C D = 12 Zoll, und die senkrechte Höhe A P oder C n = 9 Zoll; es wird der Flächenraum gesucht.

7
12
19
9
171
$85\frac{1}{2}$ Quadratzoll der Flächenraum.

Aufgabe 5. — Den Flächenraum eines Trapeziums, Fig. 5, zu finden.

Man theile es durch eine Diagonale in zwei Dreiecke, suche die Flächenräume dieser Dreiecke, und addire sie zusammen.

Bemerkung. — Wenn man von den andern beiden gegenüberliegenden Winkeln zwei Perpendikel auf die Diagonale fällt, und die Summe dieser Perpendikel mit der Diagonale multiplicirt, so zeigt das halbe Product den Flächenraum des Trapeziums an.

Beispiel. — Es soll der Flächenraum des Trapeziums A B C D gefunden werden; die Diagonale A C = 42 Fuß, das Perpendikel B F = 18 Fuß, und das Perpendikel D E = 16 Fuß.

18
16
34
42
68
136
2) 1428
714

Antwort: 714 Quadratfuß.

Aufgabe 6. Den Flächenraum eines unregelmäßigen Vielecks zu finden.

Man ziehe Diagonalen, durch welche die Figur in Trapezien und Dreiecke getheilt wird. Hierauf suche man den Flächenraum aller dieser besonders, und die Summe wird den Flächenraum der ganzen unregelmäßigen Figur angeben.

Beispiel. — Der Flächengehalt der unregelmäßigen Figur 6, ABCDEF, wird gesucht. Die darin enthaltenen Diagonalen und Perpendikel haben folgende Werthe:

$$\begin{aligned} ca &= 10 \\ df &= 6 \\ ci &= 4 \\ ke &= 2 \\ mf &= 3 \\ nb &= 4 \end{aligned}$$

Für das Trapezium dcfe		Für das Trapezium efab	
ci	4	nb	4
ke	2	mf	3
	6		7
df	6	ca	10
2)	36	2)	70
	18 Flächeninhalt		35 Flächeninhalt

18 Flächeninhalt dcfe
35 — efab
53 Flächeninhalt des unregelmäßigen Vielecks.

Aufgabe 7. — Den Flächenraum eines regelmäßigen Vielecks zu finden.

Man multiplicire den Umfang der Figur oder die Summe ihrer Seitenlinien mit dem Perpendikel, welches von ihrem Mittelpuncte auf eine der Seitenlinien gefällt ist, und halbire das Product.

Aufgabe 8. — Bei einem Kreisbogen, Fig. 8., sollen, wenn von den folgenden Linien, nämlich die Sehne AB, der Sinus versus DP, die Sehne des halben Bogens AD, der Durchmesser oder der Halbmesser AC oder CD, zwei gegeben sind, die übrigen gesucht werden.

Wenn irgend zwei von diesen Linien gegeben sind, so sind auch zwei Seiten eines der rechtwinkligen Dreiecke APC und APD bekannt, und vermittelst dieser lassen sich die dritte Seitenlinie und andere Linien des Kreisbogens nach Aufgabe 3. finden.

Angenommen, AB und PD seyen gegeben, so ist die Hälfte von AB oder AP die mittlere Proportionallinie von DP und PC + CD; denn PC + CD + PD ist der Durchmesser des Kreises, und dessen Hälfte der Halbmesser CA, und nach Aufgabe 3. ist $AC^2 - AP^2 = CP^2$ und $AP^2 + PD^2 = AD^2$.

Angenommen, CD u. AB seyen gegeben, dann ist halb $AB = AP$ und $CD = AC$; also $\sqrt{CD^2 - AP^2} = CP$, und $CD - CP = PD \cdot \sqrt{PD^2 + AP^2} = AD$.

Aufgabe 9. — Den Durchmesser und die Peripherie eines Kreises, eins aus dem andern, zu finden.

Erste Regel. — 7 verhält sich zu 22, wie der Durchmesser zur Peripherie.

22 verhält sich zu 7, wie die Peripherie zum Durchmesser.

Zweite Regel. — 113 verhält sich zu 355, wie der Durchmesser zur Peripherie.

355 verhält sich zu 113, wie die Peripherie zum Durchmesser.

Dritte Regel. — 1 verhält sich zu 3,1416, wie der Durchmesser zur Peripherie.

3,1416 verhält sich zu 1, wie die Peripherie zum Durchmesser.

Erstes Beispiel. — Die Peripherie von einem Kreise zu finden, dessen Durchmesser gleich 10 ist.

Nach Regel 1.

$7 : 22 = 10 : 31,42875$

$\phantom{7 : {}}10$

$7)\ \overline{220}$

$31\frac{3}{7}$

od. 31,42857.

Antwort: 31,42875.

Nach Regel 3.

1 : 3,1416 = 31,416 ungefähr; die wahre Peripherie ist 31,4159265358979 rc.

Nach Regel 2.

$113 : 355 = 10 : 31\frac{47}{113}$

$\phantom{113 : {}}10$

113 | 3550 | 31,41593
160
470
180
670
1050
330

Antwort: 31,41593.

Die zweite Regel giebt also das der Wahrheit am nächsten kommende Resultat.

2) Den Durchmesser zu finden, wenn die Peripherie 100 ist.

Nach Regel 1.

$$22 : 7 = 50 : \frac{7 \times 25}{11} = \frac{175}{11} = 15\tfrac{10}{11} = 15,9090$$

Antwort: 15,9090.

Nach Regel 2.

$355 : 113 = 50 : 15\frac{65}{71}$

```
       50
355|5650
 71|1130|15,9155
    420
    650
    110
    390
    350
```

Antwort: 15,9155.

Nach Regel 3.

$3{,}1416 : 100 = 50 : 15{,}9156$

```
           50
3,1416|50,000|15,9156
......) 18584
         2876
           49
           18
            2
```

Antwort: 15,9156.

Aufgabe 10. — Die Länge eines Kreisbogens zu finden.

Erste Regel. — Wie 180 sich zu der Zahl der Grade des Bogens verhält, so verhält sich 3,1416 $\times$ der Radius zu der Länge des Kreisbogens;

oder wie sich 3 zu der Zahl der Grade des Bogens verhält, so verhält sich 0,05236 $\times$ der Radius zu der Länge des Bogens.

Erstes Beispiel. — Die Länge des Bogens ADB (achte Aufgabe) von 30° zu finden, wenn der Radius $=$ 9 Fuß ist.

```
        3,1416
             9
Wie 180 : 30
Oder 6 : 1 = 282744 : 4,7124
Oder 3 : 30 = ,05236 × 9 : 4,7124
            90
        4,7124
```

Antwort: 4,7124.

Zweite Regel. — Von dem Product der Sehne des halben Bogens mit 8 multiplicirt, ziehe man die Sehne des ganzen Bogens ab, und dividire in den Rest mit 3. Der Quotient wird die Länge des Bogens annähernd angeben.

Zweites Beispiel. — Die Sehne AB (achte Aufgabe, des ganzen Bogens sey 4,65874, und die Sehne AD des halben Bogens 2,34947; es wird die Länge des Bogens gesucht.

```
     2,34947
           8
    18,79576
     4,65874
3)  14,13702
     4,71234
```

Antwort: 4,71234.

Aufgabe 11. — Den Flächenraum eines Kreises zu finden, wenn der Durchmesser oder die Peripherie gegeben ist.

Erste Regel. — Man multiplicire den halben Umkreis mit dem halben Durchmesser, oder dividire in das Product der Peripherie und des Durchm. mit 4.

Zweite Regel. — Man multiplicire das Quadrat des Durchm. mit 0,7854.

Dritte Regel. — Man multiplicire das Quadrat der Peripherie mit 0,07958.

Vierte Regel. — Wie sich 14 zu 11 verhält, so verhält sich das Quadrat des Durchm. zu dem Flächenraum des Kreises.

Fünfte Regel. — Wie sich 88 zu 7 verhält, so verhält sich das Quadrat der Peripherie zum Flächenraum des Kreises.

Beispiel. — Der Flächenraum eines Kreises wird gesucht, dessen Durchm. C, und dessen Peripherie 31,4159265 ist.

Nach Regel 1.

```
          31,4159265
                  10
   4) 314,159265
Flächenr.: 78,539816
```

Nach Regel 2.

```
        0,7854
           100
Flächenr. 78,54
```

Nach Regel 3.

```
Quadr. der Peripherie
              986,96044
Multiplic. umgek.: 85970
               6908723
                888264
                 49348
                  7896
Flächenr. 78,54231
```

Nach Regel 4

```
14 : 11 = 100
           11 Flächenr.
     14|1100|78,57
         98
         120
         112
          80
          70
         100
          98
           2
```

Nach Regel 5.

```
          Peripherie: 31,4159265
 umgek. Multiplic.: 56 2951413
                    9 4247779
                      3141593
                      1256637
                        31416
                        15708
                         2827
                           63
                           19
                            2
        88 : 7 = 986,96044
                         7
                8|6908,72308
               11|  863,59038
                     78,50821
```

Aufgabe 12. — Den Flächenraum des Sectors, Fig. 12., eines Kreises zu finden.

Erste Regel. — Man multiplicire den Halbmesser oder halben Durchm. mit der Hälfte des Bogens des Sectors, oder multiplicire den Durchmesser mit dem Bogen des Sectors, und dividire mit 4 in das Product.

Bemerkung. — Der Bogen läßt sich nach der zehnten Aufgabe finden.

Zweite Regel. — Wie sich 360 zu den Graden des Bogens des Sectors verhält, so verhält sich der ganze Flächenraum des Kreises zu dem Flächenraum des Sectors.

Beispiel. — Welchen Flächenraum hat der Sector CAB, Fig. 13., wenn der Halbmesser = 10, und die Sehne AB = 16 ist?

$100 = AC^2$
$64 = AE^2$
$36 \; (6 = CE$
$10 = CD$
$4 = DE$
$16 = DE^2$
$64 = AE^2$
$80 \; (8{,}9442719 = AD$
8
$71{,}5541752$
16
$3) \; 55{,}5541752$
$2) \; 18{,}5180584$ = dem Bogen ADB
$9{,}2590297$ = dem halben Bogen
10 = dem Radius
$92{,}590297$

Antwort: 92,590297.

Aufgabe 13. — Den Flächenraum eines Kreissegments zu finden.

Regel. — Man suche, nach Angabe der vorigen Aufgabe, den Flächenraum des Sectors, welcher denselben Bogen besitzt, wie das Segment.

Man suche den Flächenraum des Dreiecks, welches durch die Sehne des Segments und die beiden Radien des Sectors gebildet wird.

Die Summe dieser beiden Werthe wird die Antwort geben, wenn das Segment mehr als einen Halbkreis umfaßt; begreift es weniger als einen Halbkreis, so ist der Flächenraum des Segments gleich dem Unterschiede dieser beiden Werthe.

Beispiel. — Es wird der Flächenraum des Segments ACBD, Fig. 13., gesucht, dessen Sehne AB = 12, und dessen Halbmesser EA oder CE = 10 ist.

$100 \; AE^2$
$36 \; AD^2$

64 DE^2
Quadratwurzel 8 DE
von 10 CE
2 CD
4 CD^2
36 AD^2
40 Sehne AC^2
deren Quadratwurzel 6,324555 Sehne AC
8
50,596440
12,
3) 38,59644
2) 12,86548 Bogen ACB
6,43274 $\frac{1}{2}$ Bogen
10 Halbmesser
64,3274 Flächeninhalt des Sectors EACB
48,0000 Flächeninhalt des Dreiecks EAB
16,3274 Flächeninhalt des Segments ACBA

6 AD
8 DE
48 Flächenraum des Dreiecks EAB.

Antwort: 16,3274.

Aufgabe 14. — Den Flächenraum einer Kreiszone ADCB, Fig. 14, zu finden.

Erste Regel. — Man suche den Flächenraum der beiden Segmente AEB und DCE, und der Unterschied derselben wird den Flächenraum des Gürtels ADCB angeben.

Zweite Regel. — Zu dem Flächenraum des Trapezoid ADQP addire man den des kleinen Segments ADR, und verdopple die Summe, so wird man den Flächenraum des Gürtels ADCB haben.

Aufgabe 15. — Den Flächengehalt eines kreisförmigen Rings oder des zwischen zwei concentrischen Kreisen liegenden Raums zu finden.

Der Unterschied zwischen dem Flächengehalt beider Kreise wird den des Ringes angeben, oder man multiplicire die Summe der Durchmesser mit deren Unterschied, und multiplicire das Product mit 0,7854.

Beispiel. — Wenn die Durchmesser der beiden concentrischen Kreise = 10 und 6 sind, soll der Flächengehalt des zwischen ihren Peripherien AFBA nnd DEGD befindlichen Ringes gesucht werden.

10
6
Summe 16
Unterschied 4
64

0,7854
64
31416
47124
50,2656

Antwort: 50,2656.

Aufgabe 16. — Lange unregelmäßige Figuren zu messen.

Man nehme die Breite an verschiedenen Stellen in gleichen Abständen, addire sämmtliche Breiten zusammen, und dividire die Summe durch die Zahl derselben, um die mittlere Breite zu finden. Diese multiplicire man mit der Länge, und so findet man den ungefähren Flächeninhalt.

Beispiel. — Die Breiten einer unregelmäßigen Figur, Fig. 16., seyen an fünf gleichweit von einander entfernten Puncten AD = 8,1, mp = 7,4, nq = 9,2, or = 10,1, BC = 8,6, und die Länge AB = 39. Der Flächengehalt wird gesucht.

```
       8,1
       7,4
       9,2
      10,1
       8,6
    ------
  5)  43,4
    ------
      8,68
        39
    ------
      7812
     2604
    ------
    338,52
```

Antwort: 338,52

Messung von Körpern.

Aufgabe 1. — Den körperlichen Inhalt eines Würfels zu finden.

Man erhebe eine der Seiten auf die dritte Potenz, d. h. man multiplicire sie zweimal mit sich selber.

Beispiel. — Wenn die Seitenlinie eines Würfels 24 Zoll lang ist, welches ist dann dessen cubischer Inhalt?

```
     24
     24
   ----
     96
    48
   ----
    576
     24
   ----
   2304
  1152
  -----
  13824
```

Antwort: 13824 Zoll.

Aufgabe 2. — Den cubischen Inhalt eines Parallelepipedon zu finden.

Man multiplicire die Länge der Grundfläche mit deren Breite, und das Product mit der Höhe.

Beispiel. — Es wird der cubische Inhalt eines Parallepipedon (Taf. 98., Körper, Fig. 2.) gesucht, dessen Länge AB = 6, dessen Breite AC = 2, und dessen Höhe BD = 3 ist.

$$\begin{array}{r} 6 \\ 2 \\ \hline 12 \\ 3 \\ \hline 36 \end{array}$$

Antwort: 36.

Aufgabe 3. — Den körperlichen Inhalt eines Prisma zu finden.

Man multiplicire den Flächenraum der Grundfläche mit der senkrechten Höhe.

Diese Regel gilt auch für den Cylinder, für einen Körper, dessen Grundfläche ein Fünfeck ist, u. s. w.

Beispiel. — Welches ist der cubische Inhalt eines dreieckigen Prisma, dessen Höhe 12, und dessen gleichseitige Grundfläche Seitenlinien von 8 hat?

Grundfläche = 28, multiplicirt mit 12 = 336, welche Zahl den cubischen Inhalt darstellt.

Aufgabe 4. — Die convexe Oberfläche eines Cylinders zu finden.

Man multiplicire die Peripherie mit der Höhe des Cylinders.

Aufgabe 5. — Die convexe Oberfläche eines geraden Kegels zu ermitteln.

Man multiplicire den Umkreis der Basis mit der schrägen Höhe und halbire das Product.

Beispiel. — Der Durchmesser der Basis sey 5 Fuß, die schräge Höhe oder die Seitenlinie des Kegels 18. Man sucht den Flächengehalt der convexen Oberfläche.

$$\begin{array}{rl} 3{,}1416 & \\ 5 & \\ \hline 15{,}7080 & \text{Peripherie} \\ 18 & \\ \hline 125664 & \\ 15708 & \\ \hline 2)\ 282744 & \\ \hline 141{,}372 & \end{array}$$

Antwort: 141,372.

Aufgabe 6. — Die convexe Oberfläche eines abgestutzten geraden Kegels zu finden.

Man multiplicire die Summe der Peripherien beider Enden mit der schrägen Höhe oder Seitenlinie des abgestutzten Kegels, und die Hälfte des Products wird die Oberfläche anzeigen.

Beispiel. — Die Peripherien der beiden Enden seyen 12,5 und 10,3; die schräge Höhe 24; man sucht die convexe Oberfläche des abgestutzten Kegels.

12,5
10,3
22,8
14
912
228
2) 319,2
159,6

Antwort: 159,6.

Aufgabe 7. — Den körperlichen Inhalt eines Kegels oder einer Pyramide zu finden.

Man multiplicire den Flächengehalt der Grundfläche mit der senkrechten Höhe des Körpers, und dividire das Product mit 3.

Aufgabe 8. — Den körperlichen Inhalt eines abgestutzten Kegels oder einer abgestutzten Pyramide zu finden.

Man addire den Flächengehalt der beiden Endflächen zu der mittlern Proportionalzahl derselben, nehme $\frac{1}{3}$ dieser Summe, und multiplicire dasselbe mit der Höhe; bei einem abgestutzten Kegel kann man die Quadrate der Durchm. beider Endkreise, und das Product dieser beiden Durchmesser zu einander addiren, und die Summe dieser drei Werthe mit 0,2618 multipliciren; das Product aber mit der Höhe multipliciren. Bedient man sich bei diesem Exempel der Peripherien statt der Halbmesser, so hat man den Multiplicator 0,2654 anzuwenden.

Beispiel. — Welches ist der körperliche Inhalt eines abgestutzten Kegels, dessen Höhe 20 Z. beträgt, während die Durchmesser beider Endkreise resp. 28 und 20 Z. halten?

Flächengehalt d. Grundfläche	615,79	28	28	20
Flächengehalt d. obern Endfläche	314,16	28	20	20
Mittlere Proportionalzahl	439,84	224	560	400
3)	1369,79	56	784	
	456,59	784	400	
	20		1744	
	9131,80		2618	
			13952	
			1744	
			10464	
			3488	
			456,5792	
			20	
			9131,5840	

Antwort: 9131,5840.

Aufgabe 9. — Den körperl. Inhalt eines Keils, Fig. 9., zu finden.

Man addire zu der Länge des Keils die doppelte Länge des Rückens oder der Grundfläche, und bemerke sich die Summe; man multiplicire die Höhe des Keils mit der Breite der Grundfläche; multiplicire dieses

Product mit der bemerkten Summe, und dividire in das letzte Product mit 6. Der Quotient wird den körperlichen Inhalt des Keils angeben.

Beispiel. — Welchen körperlichen Inhalt hat ein Keil, dessen Höhe AP = 14 Zoll, dessen Kante AB = 21 Zoll, und dessen Basis CDE 32 Zoll lang und $4\frac{1}{2}$ Zoll breit ist?

21	14
32	$4\frac{1}{2}$
32	56
85	7
	63
	85
	315
	504
	6 | 5355
	892,5

Antwort: 892,5.

Aufgabe 10. — Den körperlichen Inhalt eines Prismoids zu finden.

Ein Prismoid unterscheidet sich von einer abgestutzten Pyramide nur insofern, als dessen Endflächen keine ähnlichen Figuren sind.

Regel. — Man addire den Flächengehalt der beiden Endflächen und viermal den mit diesen Endflächen parallel streichenden und gleichweit von beiden abstehenden mittlern Durchschnitt, dividire in diese Summe mit 6, und multiplicire das Product mit der Höhe. Der Quotient giebt den körperlichen Inhalt des ganzen Körpers an.

Bemerkung. — Die Länge des mittlern Durchschnitts ist der Hälfte der Summe der Längen der beiden Endflächen, und dessen Breite der Hälfte der Summe der Breiten der beiden Endflächen gleich.

Beispiel. — Wie groß ist der körperliche Inhalt eines Prismoids, dessen Endflächen Rechtecke sind, und resp. 14 Zoll Länge und 12 Zoll Breite, und 6 Zoll Länge und 4 Zoll Breite haben, während die senkrechte Höhe $30\frac{1}{2}$ Zoll beträgt?

14	10	6
12	8	4
168	80	24
	4	
	320	
	168	
	24	
	6) 512	
	$85\frac{1}{3}$ Mittlere Grundfläche	
	$30\frac{1}{2}$ Höhe	
	2560	
	$42\frac{2}{3}$	
	2602,6	

Antwort: 2602,6.

Aufgabe 11. — Die convexe Oberfläche einer Kugel zu finden.

Man multiplicire deren Durchmesser mit der Peripherie.

Bemerkung. — Auf ähnliche Weise läßt sich die convexe Oberfläche irgend eines Gürtels oder eines Kugelsegments finden, indem man deren Höhe mit der Peripherie der Kugel multiplicirt.

Beispiel. — Es wird die convexe Oberfläche einer Kugel gesucht, deren Durchmesser 24 beträgt.

3,1416
24 Durchmesser.
12,5664
62,832
75,3984 Peripherie.
24
301,5936
1507,968
1809,5616

Antwort: 1809,5616.

Aufgabe 12. — Es wird der körperliche Inhalt einer Kugel gesucht.

Man multiplicire die dritte Potenz oder den Würfel des Durchmessers mit 0,5236.

Beispiel. — Was ist der körperliche Inhalt einer Kugel, deren Axe oder Durchmesser = 12 ist?

12
12
144
12
1728
0,5236
10368
5184
3456
8640
904,7808

Antwort: 904,7808.

Aufgabe 13. — Den körperlichen Inhalt eines Kugelsegments zu finden.

Man erhebe den Halbmesser seiner Grundfläche auf das Quadrat multiplicire mit 3, addire das Quadrat der Höhe, und multiplicire die Summe mit der Höhe, und das Product nochmals mit 0,5236.

Beispiel. — Es wird der körperliche Inhalt eines Kugelsegments, Fig. 13, gesucht, dessen Höhe AB = 4, und deren Grundfläche-Radius CD = 8 ist.

8	4	0,5236
8	4	832
64	16	1,0472
3	192	15,708
192	208	418,88
	4	435,6352
	832	

Antwort: 435,6352.

Aufgabe 14. — Den körperlichen Inhalt eines Kugelgürtels oder einer Zone zu finden.

Man addire das Quadrat des Halbmessers jedes Endkreises, und $\frac{1}{3}$ des Quadrats ihres Abstands oder der Höhe, und multiplicire die Summe mit besagter Höhe, und das Product nochmals mit 1,5706.

Beispiel. Welches ist der körperliche Inhalt eines Gürtels, dessen größere Endfläche 12 Zoll, dessen kleinere 8 Zoll Durchmesser hat, und dessen Höhe 10 Zoll beträgt?

6	4	10
6	4	10
36	16	100
	36	3) $33\frac{1}{3}$
	$33\frac{1}{3}$	
	$85\frac{1}{3}$	
	1,5708	
	7,8540	
	125,664	
	5236	
	134,0416	
	10	
	1340,416	

Antwort: 1340,416 C. Zoll.

Aufgabe 15. — Die Oberfläche einer runden Spindel zu finden.

Man multiplicire die Länge AB, Fig. 15, der Spindel mit dem Halbmesser OC des Bogens ACB, durch dessen Drehung die Spindel entstanden ist. Ferner multiplicire man den Bogen ACB mit dem Werthe der Linie OE, oder dem Abstande des Mittelpuncts der Spindel vom Mittelpunct des gedrehten Bogens. Man subtrahire das letztere Product vom erstern und multiplicire den Rest mit 6,2832.

Bemerkung. — Dieselbe Regel gilt für jedes Segment oder jeden Gürtel, der senkrecht zu der Sehne des gedrehten Bogens abgeschnitten ist; nur wendet man, statt der ganzen Länge und des ganzen Bogens, die besondere Länge des Abschnitts und des Theils des Bogens an, durch dessen Drehung dieser Abschnitt entstehen würde.

Beispiel. — Man suche die Oberfläche einer runden Spindel, deren Länge, AB, 40 Zoll, und deren Stärke, CD, 30 Zoll beträgt.

Nach den S. 19 beigebrachten Bemerkungen ist die Sehne $AC = \sqrt{AE^2 + CE^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$ und $2\,CE : AC = AC : CO = \frac{25_2}{30} = 20\frac{5}{6}$; ferner $OE = OC - CE = 20\frac{5}{6} - 15 = 5\frac{5}{6}$.

Folglich nach Aufgabe 10 Regel 2 Seite 24.

$$\begin{array}{rl} & 25\ AC \\ & 8 \\ \hline & 200 \\ & 40\ AB \\ \hline 3) & 160 \\ & 53\frac{1}{3}\ \text{Bogen } ACB \\ \hline \end{array}$$

Nach unserer Regel:

$$\begin{array}{r} 20\frac{5}{6} \\ 40 \\ \hline 800 \\ 33\frac{1}{3} \\ \hline 833\frac{1}{3} \\ 311\frac{1}{9} \\ \hline 522\frac{2}{9} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 53\frac{1}{3} \\ 5\frac{5}{6} \\ \hline 266\frac{2}{3} \\ 44\frac{4}{9} \\ \hline 311\frac{1}{9} \\ \hline \end{array}$$

oder 522,2 oder $\frac{4700}{9}$

$$\begin{array}{r} 6.2832 \\ \hline 10444 \\ 156666 \\ 4177777 \\ 10444444 \\ 313333333 \\ \hline 3281{,}22666 \end{array}$$

Oder:

$$\begin{array}{rr} & 6{,}2832 \\ & 4700 \\ \hline & 439824 \\ & 251328 \\ \hline 9) & 29531{,}04 \\ \hline & 3281{,}226 \end{array}$$ ungefähr.

Antwort: 3281,226.

Aufgabe 16. — Den körperlichen Inhalt einer runden Spindel zu finden.

Man multiplicire den Abstand O E mit der Hälfte des Flächengehaltes des Kreissegments A C B E A, subtrahire das Product von $\frac{1}{3}$ des Cubus von E A, der halben Länge der Spindel, und multiplicire den Rest mit 12,5664, oder 4 mal 3,1416.

Beispiel. — Man suche den körperlichen Inhalt einer runden Spindel, deren Länge A B, Fig. 15, = 40, und deren Durchmesser bei der Mitte CD 30 beträgt.

Nach der letzten Aufgabe finden wir, daß

$$\begin{array}{lr}
 & OE = 6\tfrac{5}{6} \\
\text{der Bogen} & AC = 26\tfrac{2}{3} \\
\text{der Halbmesser} & OC = 20\tfrac{5}{6} \\
\hline
 & 335\tfrac{1}{3} \\
 & 22\tfrac{2}{9} \\
\hline
\text{Sector } OACB & 555\tfrac{5}{9} \\
AE \times OE = OAB & 116\tfrac{2}{3} \\
\hline
2) & 438\tfrac{8}{9} \\
\hline
\tfrac{1}{2}\ \text{Segm. } ACE & 219\tfrac{4}{9} \\
OE & 5\tfrac{5}{6} \\
\hline
 & 1097\tfrac{2}{9} \\
 & 183, \quad \text{ziemlich.} \\
\hline
 & 1280\tfrac{2}{9}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr}
 & 20 \ \text{halbe Länge.} \\
 & 20 \\
\hline
 & 400 \\
 & 20 \\
\hline
3) & 8000 \\
\hline
 & 2666\tfrac{2}{3} \\
 & 1280\tfrac{2}{9} \\
\hline
 & 1386\tfrac{4}{9} \\
\hline
\text{oder} & 1386{,}44 \\
 & 4665{,}21 \\
\hline
 & 138644 \\
 & 27739 \\
 & 6932 \\
 & 832 \\
 & 83 \\
 & 5 \\
\hline
 & 17423{,}5
\end{array}$$

Antwort: 17423,5.

Aufgabe 17. — Den körperlichen Inhalt der mittlern Zone einer runden Spindel zu finden.

Von dem Quadrat der Länge der ganzen Spindel ziehe man $\frac{1}{3}$ des Quadrats der halben Länge des mittlern Gürtels ab, und multiplicire den Rest mit der besagten halben Länge des Gürtels. Man multiplicire den Abstand vom Mittelpunct, OE, mit dem Flächenraume des Theils des Kreissegments, durch dessen Drehung der Gürtel entsteht, subtrahire dieses letzte Product von dem ersten, und der Rest, multiplicirt mit 6,2832, oder 2 mal 3,1416, giebt den cubischen Inhalt des mittlern Gürtels.

Beispiel. — Man sucht den cubischen Inhalt eines Mittelgürtels, dessen Länge, mn, 40 Zoll, und dessen größter Durchmesser, EF, 32 Z., und dessen kleinster Durchm., AD oder CB, 24 Z. beträgt.

Man ziehe Dg parallel mit mn, so ist:

$Dg = \frac{1}{2}\, mn = 20$

und $Eg = \frac{1}{2}\, EF - \frac{1}{2}\, AD = 4$

Sehne $DE^2 = Dg^2 + gE^2 = 416$

und $DE^2 = Eg = \frac{416}{4} = 104$ Durchmesser des Erzeugungskreises,

oder den Radius $OE = 52$

daher $OI = 52 - 16 = 36$ Abstand vom Mittelpunct,

und $HI^2 = OH^2 - OI^2 = 52^2 - 36^2 = 1408$

$$\begin{array}{lr}
\tfrac{1}{3}\, Dg^2 = \tfrac{1}{3} \text{ von } 400 = \ldots\ldots & 133\tfrac{1}{3} \\
\hline
 & 1274\tfrac{2}{3} \\
Dg \ \ldots\ldots & 20 \\
\hline
 & 25493\tfrac{1}{3} \ \text{Erstes Product.}
\end{array}$$

$gE + 2\,OE = \frac{4}{104} = \frac{1}{26} = 0{,}03846$ Sinus versus
Dessen Segment 0,00994
Aber 104^2 ist 10816

Flächenr. d. Segments DECgD 107,51104
$mD \times mn = 12 \times 40$ 480,

Erzeugungsfläche mDECn 587,51104
36

21150,39744 2tes Product.
25493,33333 1tes Product.

4342,93589
2382,6

260576 Umgekehrte Multipl.
8686
3474
130
9

27287,5

Antwort: 27287,5.

Aufgabe 18. — Die Oberfläche oder den körperlichen Inhalt irgend eines regelmäßigen Körpers zu ermitteln.

1) Man multiplicire den durch die nachstehende Tabelle gefundenen Flächenraum mit dem Quadrat der Kantenlinie des Körpers, und man wird die Oberfläche haben.

2) Man multiplicire den in der Tabelle angegebenen körperlichen Inhalt mit dem Cubus der Kantenlinie, und das Product wird den körperlichen Inhalt anzeigen.

Flächenräume und körperliche Inhalte regelmäßiger Körper.

Zahl der Seitenflächen.	Namen der Körper.	Flächenräume.	Körperliche Inhalte.
4	Tetraeder	1,73205	0,11785
6	Hexaeder	6,00000	1,00000
8	Octaeder	3,46410	0,47140
12	Dodecaeder	20,64573	7,66312
20	Icosaeder	8,66025	2,18169

Beispiel. — Wenn die Kantenlinie eines Tetraeders = 3 ist, wie groß ist dann dessen Flächenraum und körperlicher Inhalt.

Das Quadrat von 3 ist 9 und dessen Würfel 27.

Demnach 1,73205 0,11785
9 27

Flächenraum 15 58845 82495
23570

Cubischer Inhalt 3,18195

Aufgabe 19. — Die Oberfläche und den körperlichen Inhalt eines cylindrischen Rings zu finden.

Da diese Figur nur ein ringförmig gebogener Cylinder ist, so kann man dessen Oberfläche und räumlichen Inhalt wie bei einem Cylinder finden, indem man nämlich die Axe oder Länge des Cylinders mit der Peripherie multiplicirt, um die Oberfläche, und mit dem Flächengehalte eines Durchschnitts multiplicirt, um den räumlichen Inhalt zu finden. Oder man bediene sich der folgenden Regeln:

Um die Oberfläche zu finden, addire man zur Stärke des Rings den innern Durchmesser, multiplicire diese Summe mit der Dicke, und das Product nochmals mit 9,8696, oder dem Quadrat von 3,1416.

Beispiel. — Man suche den Flächenraum eines Ringes, dessen Stärke A B, Fig. 19, = 2 Zoll, und dessen innerer Durchmesser B C = 12 Zoll ist.

12	9,8696
2	28
14	789568
2	197392
28	276,3488

Antwort: 276,3488 Q. Zoll.

Aufgabe 20. — Den räumlichen Inhalt eines cylindrischen Rings zu finden.

Man addire zu der Stärke des Rings den innern Durchmesser, multiplicire dann die Summe mit dem Quadrat der Stärke, und das Product abermals mit 2,4674 oder $\frac{1}{4}$ des Quadrats von 3,1416, und so ist der räumliche Inhalt gefunden.

Beispiel. — Man suche den räumlichen Inhalt eines Rings dessen Stärke 2 Zoll und dessen innerer Durchmesser 12 Zoll beträgt.

12	2,4674
2	56
14	148044
4	123370
56	138,1744

Antwort: 138,1744 C. Zoll.